

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017
ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ

Εξεταζόμενο μάθημα: Μαθηματικά

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: 8 Νοεμβρίου 2017, 15:30 – 18:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δέκα (10) ερωτήσεις.

Απαντήστε και στις δέκα (10) ερωτήσεις.

Όλες οι απαντήσεις πρέπει να καταγραφούν στο **Τετράδιο Απαντήσεων**.

Σε κάθε απάντηση αναγράφεται **τον αριθμό της ερώτησης**.

Οι μονάδες βαθμολόγησης αναγράφονται στο τέλος κάθε ερώτησης.

Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

Μόνο τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Ερώτηση 1. Να επιλέξετε ποιες από τις ακόλουθες έξι (6) δραστηριότητες και με ποια σειρά θα τις εφαρμόσετε, για να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο κάτω σχήματος, σύμφωνα με τα δεδομένα που παρουσιάζονται σε αυτό.

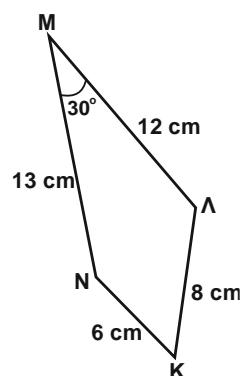
(Μονάδες 10)

- (1) Εφαρμογή του νόμου ημιτόνων
- (2) Εφαρμογή του νόμου συνημιτόνων
- (3) Εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος
- (4) Κατασκευή της διαγωνίου του τετράπλευρου
- (5) Υπολογισμός του εμβαδού τριγώνου

με τον τύπο $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\Gamma$

- (6) Υπολογισμός του εμβαδού τριγώνου με

τον τύπο $E = \frac{\beta \cdot \nu}{2}$



Επιλέξτε την ορθή απάντηση και γράψτε την στο Τετράδιο Απαντήσεων.

A. 4 – 2 – 5

B. 4 – 3 – 6

Γ. 4 – 2 – 1 – 5

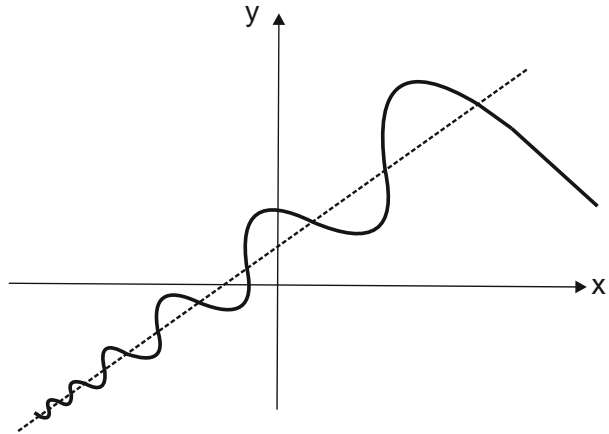
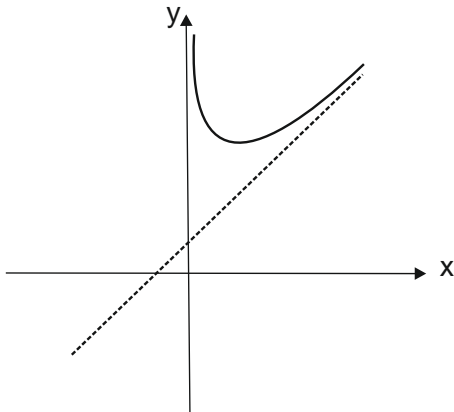
Δ. 4 – 1 – 2 – 5

Ερώτηση 2. Ένας καθηγητής διδάσκει τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης μιας συνάρτησης f , που περιέχει στο πεδίο ορισμού της διάστημα $(d, +\infty)$, με τη χρήση του ορίου

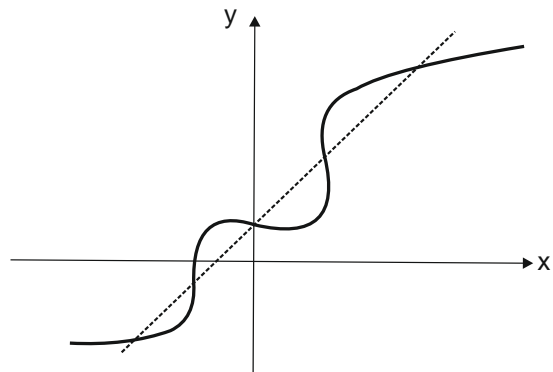
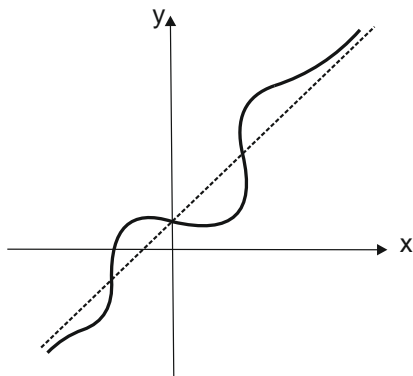
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + \beta)) = 0, \quad a \neq 0.$$

2.1 Ποια από τις ακόλουθες ομάδες σχημάτων αντιστοιχεί στην ουσία του ορισμού; Επιλέξτε την ορθή απάντηση και γράψτε την στο Τετράδιο Απαντήσεων. **(Μονάδες 5)**

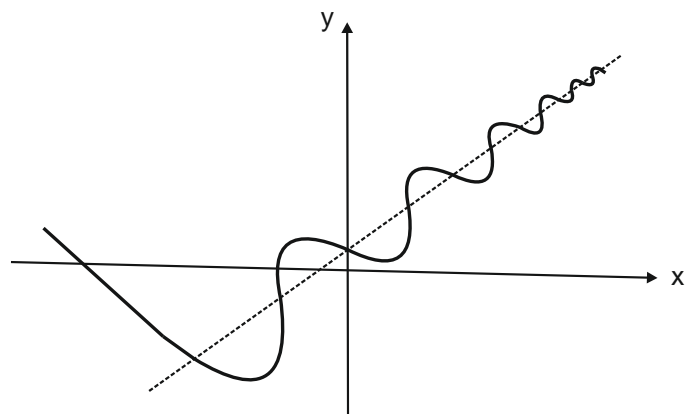
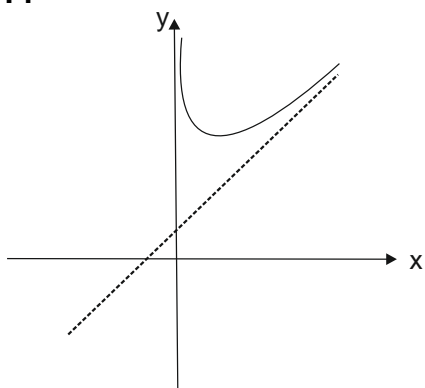
A.



B.



Γ.



Δ. Κανένα από τα πιο πάνω.

2.2 Τεκμηριώστε την επιλογή σας.

(Μονάδες 5)

Ερώτηση 3. Να δείξετε ότι στη σύνθεση δύο συναρτήσεων δεν ισχύει πάντα η αντιμεταθετική ιδιότητα. (Μονάδες 10)

Ερώτηση 4. Ένας καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές του, αφού εξετάσουν την συνάρτηση

$$f(x) = |x^2 + |x| - 2|, \quad x \in \mathbb{R},$$

να απαντήσουν στο ερώτημα: «Σε πόσα σημεία η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη;»

Ο Μαθητής Α απάντησε: «Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.»

Ο Μαθητής Β απάντησε: «Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε τρία σημεία.»

Ο Μαθητής Γ απάντησε: «Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε τέσσερα σημεία.»

4.1 Ποιος από τους τρεις μαθητές έδωσε την ορθή απάντηση και γιατί;

(Μονάδες 7)

4.2 Πού πρέπει να αποδώσει ο καθηγητής τις λανθασμένες απαντήσεις των άλλων δύο μαθητών; (Μονάδες 3)

Ερώτηση 5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και σημείο Δ στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$. Στο σημείο Δ φέρουμε την ευθεία (ϵ) κάθετη στο $A\Gamma$.

5.1 Να περιγράψετε την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη σημείου M της ευθείας (ϵ), τέτοιο ώστε $B\Gamma = \Gamma M$, με την απαραίτητη αιτιολόγηση.

(Μονάδες 4)

5.2 Να εξετάσετε αν το σημείο M είναι μοναδικό. (Μονάδες 2)

5.3 Να εξετάσετε αν η απαίτηση το σημείο Δ να ανήκει στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$ (και όχι στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία A και Γ) είναι απαραίτητη για την ύπαρξη σημείου M με την παραπάνω ιδιότητα. (Μονάδες 4)

Ερώτηση 6. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $2^v - 1$ και $2^v + 1$ δεν μπορούν να είναι συγχρόνως πρώτοι αριθμοί, οποιοσδήποτε και αν είναι ο φυσικός αριθμός v , με $v > 2$. (Μονάδες 10)

Ερώτηση 7.

7.1 Να δώσετε τον ορισμό του ορίου $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$, ακολουθίας (a_ν) , $\nu \in \mathbb{N}$.

(Μονάδες 2)

7.2 Να δείξετε ότι $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$.

(Μονάδες 2)

7.3 Να εξετάσετε αν συγκλίνει η ακολουθία $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

(Μονάδες 3)

7.4 Σε διαγώνισμα της Β΄ Λυκείου, δύο μαθητές έχουν υπολογίσει το όριο μιας ακολουθίας (a_ν) . Ο μαθητής Α έχει υπολογίσει ως όριο το 1 και ο μαθητής Β το 0,999. Και οι δύο μαθητές ισχυρίζονται ότι έχουν βρει το σωστό αποτέλεσμα. Θεωρείτε ότι αυτό είναι δυνατόν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

Ερώτηση 8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Από εσωτερικό σημείο M του τριγώνου φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα κάθετα προς τις πλευρές του τριγώνου.

8.1 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών καθέτων ευθυγράμμων τμημάτων είναι σταθερό, ανεξάρτητα της θέσης του M . (Μονάδες 7)

8.2 Να αναφέρετε δύο δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές κατά την επίλυση της άσκησης. (Μονάδες 3)

Ερώτηση 9. Δίνεται αριθμός $\rho \in (0,1)$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «το ρ να είναι ακτίνα δύο κύκλων με κέντρο το $(0,0)$ και το $(1,0)$, αντίστοιχα», στις πιο κάτω περιπτώσεις:

9.1 Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία. (Μονάδες 7)

9.2 Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 3)

Ερώτηση 10. Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Με υπόθεση ότι $f(\alpha) = f(\beta)$ και ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) , να δείξετε ότι $f(x) \leq f(a)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. (Μονάδες 10)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ