ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ,

ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ 2019

Εξεταζόμενο αντικείμενο (Κωδικός): Μαθηματικά (517)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: 19 Νοεμβρίου 2019, 15:30 – 18:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δέκα (10) ερωτήσεις.
Απαντήστε και στις δέκα (10) ερωτήσεις.
Η κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Οι μονάδες βαθμολόγησης αναγράφονται στο τέλος κάθε ερώτησης.
Όλες οι απαντήσεις πρέπει να καταγραφούν στο **Τετράδιο Απαντήσεων**.
Σε κάθε απάντηση να αναγράφετε **τον αριθμό της ερώτησης**.
Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
Μόνο τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Ερώτηση 1. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ που επαληθεύουν τις παρακάτω σχέσεις. Για κάθε μία από αυτές τις σχέσεις να διατυπώσετε και να σχολιάσετε ένα αναμενόμενο λάθος των μαθητών.

1.1 $|2x+1| = 8$ **(Μονάδες 2)**

1.2 $|2x-1|+|2x+1| = 0$ **(Μονάδες 2)**

1.3 $|x+2|+|x+6| \geq 8$ **(Μονάδες 2)**

1.4 $|x-2|+|x-6| = 8$ **(Μονάδες 2)**

1.5 $|x-1|+|x-2| = -3$ **(Μονάδες 2)**

Ερώτηση 2.

2.1 Ένας καθηγητής ρώτησε τους μαθητές μιας τάξης: «*Με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανέμουμε* ν *διαφορετικές μεταξύ τους μπάλες σε* κ *διαφορετικά κουτιά, με την παραδοχή ότι σε κάθε κουτί ξεχωριστά μπορούν να χωρέσουν όλες οι μπάλες;*»

Ένας μαθητής αμέσως απάντησε: «*με* κ^{ν} *τρόπους*».

Ένας δεύτερος μαθητής όμως ζήτησε διευκρινήσεις. Πώς θα μπορούσατε να εξηγήσετε στους μαθητές κατά πόσο η απάντηση του πρώτου μαθητή είναι ορθή ή λανθασμένη;

(Μονάδες 3)

2.2 Διατυπώστε ένα σχετικό πρόβλημα με αυτό που περιγράφεται στο Ερώτημα **2.1**, όπου το ζητούμενο, να είναι οι δυνατοί τρόποι εμφάνισης κάποιου ενδεχομένου. Η απάντηση στο πρόβλημα να είναι: $\binom{\nu}{\kappa} \cdot \kappa^{\nu-\kappa}$

(Μονάδες 7)

Ερώτηση 3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}\ ,\quad x \in \mathbb{R}$

Ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν αν η συνάρτηση f έχει ασύμπτωτες.

Δύο μαθητές Α και Β ισχυρίστηκαν ότι:

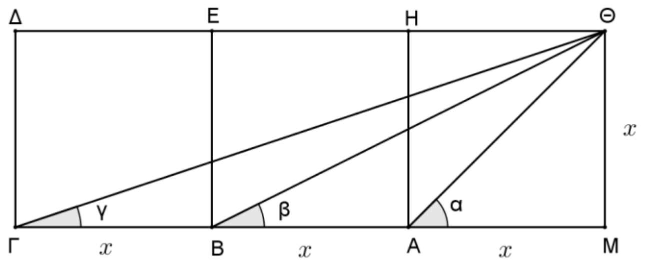
Μαθητής Α: «*Δεν έχει ασύμπτωτες, αφού η συνάρτηση* f *ορίζεται σε όλο το* $\mathbb{R}$»

Μαθητής Β: «*Δεν έχει ασύμπτωτες, αφού* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \kappa\alpha\iota \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ »

Συμφωνείτε με τους ισχυρισμούς των μαθητών Α και Β; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντηση σας.

(Μονάδες 10)

Ερώτηση 4. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται τρία τετράγωνα πλευράς x.



Να αποδείξετε με δύο διαφορετικούς τρόπους ότι για τις γωνίες α, β, γ, ισχύει η σχέση $\alpha = \beta + \gamma$

(Μονάδες 10)

Ερώτηση 5.

5.1 Να εξετάσετε αν η πιο κάτω πρόταση είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντηση σας.

«Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $\alpha<\beta$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x)<0$, σε κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος $[\alpha,\beta]$»

(Μονάδες 3)

5.2 Έστω B το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f\colon[\alpha,\beta]\to\{\,1\,,2\,\}$, οι οποίες είναι συνεχείς και επί. Να υπολογίσετε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου B.

(Μονάδες 7)

Ερώτηση 6. Έστω $m\geq 1$, φυσικός αριθμός. Να δείξετε ότι αν $\sqrt{m}\notin\mathbb{N}$ (όπου $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών), τότε ο αριθμός $\sqrt{m}$ είναι άρρητος.

(Μονάδες 10)

Ερώτηση 7. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο, η απόσταση της μιας κορυφής του τριγώνου από τυχαία ευθεία που περνά από το κέντρο βάρους του, ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων των άλλων δυο κορυφών του τριγώνου από την ίδια ευθεία.

(Μονάδες 10)

Ερώτηση 8. Λέμε ότι δύο αριθμοί $x,y\in[0,2]$ είναι ισοδύναμοι (και το συμβολίζουμε με $x\sim y$) αν και μόνον αν $x-y$ είναι ακέραιος αριθμός ($x-y\in\mathbb{Z}$).

8.1 Να δείξετε ότι:

8.1.1 $x\sim x$

8.1.2 αν $x\sim y$ τότε $y\sim x$

8.1.3 αν $x\sim y$ και $y\sim z$ τότε $x\sim z$

(Μονάδες 3)

8.2 Για κάθε $x\in[0,2]$ το σύνολο $[x]=\{y\in[0,2]\colon y\sim x\}$ περιέχει όλους τους αριθμούς πού είναι ισοδύναμοι με το x. Να αναγράψετε τα στοιχεία του $[x]$.

(Μονάδες 4)

8.3 Να δείξετε ότι $[x]\cap[y]=\emptyset$ αν και μόνον αν το x δεν είναι ισοδύναμο με το y $(x\nsim y)$.

(Μονάδες 3)

Ερώτηση 9. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (κ). Έστω M σημείο του μικρού κυκλικού τόξου $ΒΓ$, διαφορετικό από τις κορυφές B και $Γ$ του τριγώνου. Να δείξετε ότι $MB + MΓ = MA$.

(Μονάδες 10)

Ερώτηση 10.

10.1 Θεωρείστε τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\{a_\nu\}$ και $\{\beta_\nu\}$, για τις οποίες ισχύει ότι,

$$\lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = a\,, \quad a \in \mathbb{R} \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{\beta_\nu} = 1$$

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$

(Μονάδες 4)

10.2 Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

10.2.1 $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \nu \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$, $\nu \in \mathbb{N}$ **(Μονάδες 2)**

10.2.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ **(Μονάδες 2)**

10.2.3 $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{2^\nu + 4^\nu + 6^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ **(Μονάδες 2)**

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ