ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ - Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 8 ασκήσεις. Να λύσετε μόνο τις 6 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1 Δίνονται οι κύκλοι $(\mathrm{K}, 4cm)$ και $(\Lambda, 7cm)$. Αν το μήκος της διακέντρου $\mathrm{K}\Lambda$ των δύο κύκλων ισούται με $11cm$, να βρείτε τη θέση τους.

Λυση:

$\delta = \mathrm{K}\Lambda = 11\mathrm{cm}$
$\mathrm{R} + \rho = 4 + 7 = 11\mathrm{cm}$

δ=R+ρ άρα οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά.**

Α2 Αν $\sigma\upsilon\nu x = \frac{5}{13}$ και $270° < x < 360°$, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 26\eta\mu x - 10\varepsilon\varphi x + 5\tau\varepsilon\mu x.$$

Λυση:

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

$\Rightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$

$\Rightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ τότε $\eta\mu x = \pm\frac{12}{13}$

Η τελική πλευρά της γωνίας x ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο

$(270° < x < 360°)$. Άρα το $\eta\mu x < 0$ τότε $\eta\mu\, x = -\frac{12}{13}$

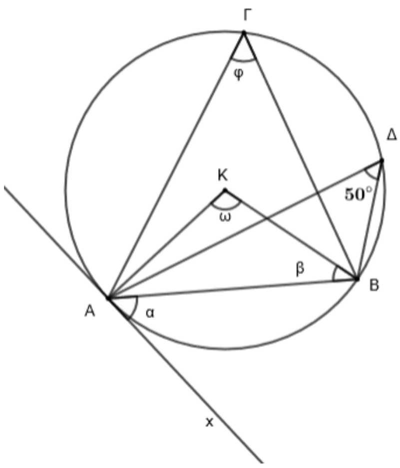
$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\frac{-12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$ τότε $\varepsilon\varphi x = -\frac{12}{5}$

$\tau\varepsilon\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$ τότε $\tau\varepsilon\mu x = \frac{13}{5}$

$$\mathrm{A} = 26\eta\mu x - 10\varepsilon\varphi x + 5\tau\varepsilon\mu x = 26\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - 10\cdot\left(-\frac{12}{5}\right) + 5\cdot\left(\frac{13}{5}\right)$$
$$= -24 + 24 + 13$$

Τότε $\mathbf{A = 13}$

A3 Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, ρ). Αν η Ax εφαπτόμενη του κύκλου στο Α και η γωνία $A\Delta B = 50°$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\varphi, \omega, \alpha, \beta$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



Λύση:

$\boldsymbol{\alpha = 50°}$ $(\Theta.\mathrm{X}.\mathrm{E})$

$\varphi = \widehat{\mathrm{A\Delta B}} = 50°$(εγγεγραμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΒ) $\Rightarrow \boldsymbol{\varphi = 50°}$

$\omega = 2\varphi = 100°$ (επίκεντρη γωνία διπλάσια της αντίστοιχης εγγεγραμμένης)

$\Rightarrow \boldsymbol{\omega = 100°}$

Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{KA} = \mathrm{KB} = \rho)$

$\Rightarrow 2\beta + \omega = 180°$

$\Rightarrow \beta = \frac{180° - 100°}{2} = 40° \quad \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 40°}$

A4 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\mathrm{A} = \sqrt{8} + 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{50}$

β) $\mathrm{B} = \frac{\sqrt{9\alpha^2\beta}}{\sqrt[3]{\alpha^6}}$, $\alpha > 0$ και $\beta \geq 0$

Λύση:

$\mathrm{A} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} + 2\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} - 3\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{25}\cdot\sqrt{2}$

$\mathrm{A} = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ τότε $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{2}}$

β) $\mathrm{B} = \frac{\sqrt{9\alpha^2\beta}}{\sqrt[3]{\alpha^6}} = \frac{3\alpha\sqrt{\beta}}{\alpha^2} = \frac{3\sqrt{\beta}}{\alpha}$ τότε $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{3}\sqrt{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\alpha}}$

Α5 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(90° + \omega)\cdot\tau\varepsilon\mu(-\omega)\cdot\varepsilon\varphi(180° - \omega)}{\eta\mu(180° + \omega)\cdot\varepsilon\varphi(360° + \omega)\cdot\tau\varepsilon\mu(360° - \omega)} = -1$$

Λύση:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(90° + \omega)\cdot\tau\varepsilon\mu(-\omega)\cdot\varepsilon\varphi(180° - \omega)}{\eta\mu(180° + \omega)\cdot\varepsilon\varphi(360° + \omega)\cdot\tau\varepsilon\mu(360° - \omega)} = \frac{(-\eta\mu\omega)\cdot\tau\varepsilon\mu\omega\cdot(-\varepsilon\varphi\omega)}{(-\eta\mu\omega)\cdot\varepsilon\varphi\omega\cdot\tau\varepsilon\mu\omega} = -1$$

Α6 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \alpha\ cm$ και $B\Gamma = \beta\ cm$.

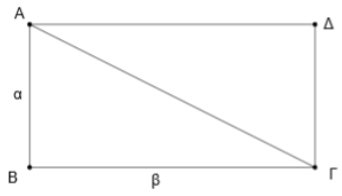
Αν ισχύει ότι $2 < \alpha < 5$ και $3 < \beta < 7$ να δείξετε ότι:

α) για την τιμή του εμβαδού (E) του $AB\Gamma\Delta$, ισχύει $6 < E < 35$

β) για την τιμή του μήκους της διαγώνιου (δ) του $AB\Gamma\Delta$, ισχύει

$\sqrt{13} < \delta < \sqrt{74}$

Λύση:



α) Εμβαδόν του ορθογωνίου $E = \alpha\cdot\beta$

$$\left.\begin{array}{r} 2 < \alpha < 5 \\ 3 < \beta < 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 < \alpha\cdot\beta < 35$$

Τότε $\mathbf{6 < \boldsymbol{E} < 35}$

β) Η διαγώνιος του ορθογωνίου είναι $\delta = A\Gamma = \sqrt{(AB)^2 + (B\Gamma)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Τότε $$\left.\begin{array}{r} 2 < \alpha < 5 \Rightarrow 4 < \alpha^2 < 25 \\ 3 < \beta < 7 \Rightarrow 9 < \beta^2 < 49 \end{array}\right\} \Rightarrow 13 < \alpha^2 + \beta^2 < 74$$

$$\Rightarrow \sqrt{13} < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < \sqrt{74}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mathbf{13}} < \boldsymbol{\delta} < \sqrt{\mathbf{74}}$$

Α7 Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$$\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}\right) \cdot \sigma\varphi\theta = -1$$

Λύση:

$$\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}\right) \cdot \sigma\varphi\theta = \frac{1-\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1-\eta\mu\theta)} \cdot \sigma\varphi\theta =$$

$$= \frac{1-\eta\mu\theta-(1-\eta\mu^2\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1-\eta\mu\theta)} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{-\eta\mu\theta+\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1-\eta\mu\theta)} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} =$$

$$= \frac{\eta\mu\theta\cdot(\eta\mu\theta-1)}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1-\eta\mu\theta)} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = -1$$

Α8 Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό ή Λάθος** τους πιο κάτω ισχυρισμούς.

α	Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in R$ είναι περιοδική με περίοδο π.
β	Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου.
γ	Αν α, β ομόσημοι αριθμοί και $\alpha < \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.
δ	Ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε $\alpha \in R$.
ε	Αν $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\varphi\theta < 0$ τότε η τελική πλευρά της γωνίας θ βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο.

Λύση

α	Λάθος
β	Λάθος
γ	Σωστό
δ	Λάθος
ε	Σωστό

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 4 ασκήσεις. Να λύσετε <u>μόνο τις 3</u> ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1 Δίνεται ο αριθμός $\alpha = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

α) να υπολογίσετε την τιμή του α.

β) Αν $\alpha = 4$

ι) να λύσετε την εξίσωση $32x^5 + \alpha x^2 = 0$

ιι) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\alpha^4} \cdot \sqrt[6]{\alpha^2}$

ιιι) να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2x-\alpha} + \sqrt{x^2-\alpha} = 0$

Λύση

α) $\alpha = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})} = \frac{4}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4}{4-3} = 4$

β)

ι) Αν $\alpha = 4$ τότε $32x^5 + 4x^2 = 0$

$4x^2(8x^3+1) = 0$ τότε

$4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

ή $8x^3 + 1 = 0 \Rightarrow 8x^3 = -1 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$ τότε $x = -\frac{1}{2}$

Λύσεις της εξίσωσης: $\boldsymbol{x = 0}$ ή $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

ιι) Αν $\alpha = 4$ τότε $B = 4^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4^4} \cdot \sqrt[6]{4^2}$

$B = 4^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4^4} \cdot \sqrt[6]{4^2} = 2^{2\cdot\frac{1}{3}} \cdot 2^{2\cdot\frac{4}{3}} \cdot 2^{2\cdot\frac{2}{6}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{8}{3}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{12}{3}} = 16$ τότε $\boldsymbol{B = 16}$

ιιι) Αν $\alpha = 4$ τότε $\sqrt{2x-4} + \sqrt{x^2-4} = 0$

Αφού $\sqrt{2x-4} \geq 0$ και $\sqrt{x^2-4} \geq 0$ τότε

$\sqrt{2x-4} = 0$ και $\sqrt{x^2-4} = 0$

$2x - 4 = 0$ και $x^2 - 4 = 0$

$2x = 4$ και $(x-2)(x+2) = 0$

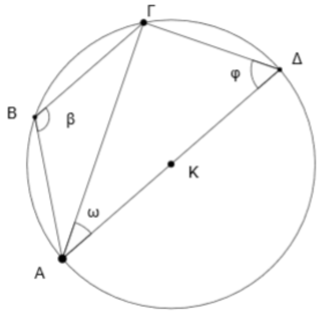
$x = 2$ και $x = 2$ ή $x = -2$

Λύση της εξίσωσης είναι η κοινή λύση των δύο δηλαδή $\mathbf{x = 2}$

Β2 α) Να αποδείξετε ότι κάθε κυρτό τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές.

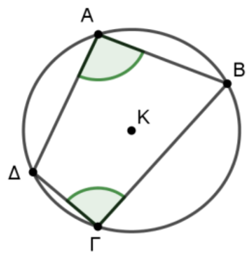
β) Στον κύκλο (K, ρ) δίνεται ΑΔ διάμετρος και γωνία $\omega = 30°$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες φ, β και το μέτρο του τόξου $ΑΒΓ$.



Λύση

α) Έστω εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$



Το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου τότε:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{ΔΑΒ} &= \frac{τόξο\ ΔΓΒ}{2}\\ \widehat{ΔΓΒ} &= \frac{τόξο\ ΔΑΒ}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{ΔΑΒ} + \widehat{ΔΓΒ}$$

$$= \frac{τόξο\ ΔΓΒ + τόξο\ ΔΑΒ}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

β)

Η γωνία $\boldsymbol{ΑΓΔ} = \mathbf{90°}$ $(εγγεγραμμένη\ γωνία\ που\ βαίνει\ σε\ ημικύκλιο)$

Στο τρίγωνο $ΑΓΔ$:

$\varphi + 30° + 90° = 180°$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου) τότε $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{60°}$

Στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$:

$\varphi + \beta = 180°$ $(απέναντι\ γωνίες\ εγγεγραμένου\ τετράπλευρου$

$παραπληρωματικές)$

$60° + \beta = 180°$ τότε $\beta = 120°$

$τόξο\ ΑΒΓ = 2 \cdot \varphi = 2 \cdot 60° = 120°$ $(τόξο\ διπλάσιο\ αντίστοιχης\ εγγεγραμμένης)$

τότε $\boldsymbol{τόξο\ ΑΒΓ} = \mathbf{120°}$

B3 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{\eta\mu(2\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)}{\varepsilon\varphi(\pi+\theta)}+\frac{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cdot\eta\mu(-\theta)}{\sigma\tau\varepsilon\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \quad \text{και} \quad B=\varepsilon\varphi\theta+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}$$

α) Να δείξετε ότι :

ι) η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του θ

ιι) $B=\tau\varepsilon\mu\theta$

β) Αν $A=1$ και $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

ι) $A=\frac{(-\eta\mu\theta)\cdot(-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\varepsilon\varphi\theta}+\frac{(-\varepsilon\varphi\theta)\cdot(-\eta\mu\theta)}{\tau\varepsilon\mu\theta}=\frac{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}+\frac{\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\eta\mu\theta}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}}$

$$=\frac{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta}+\eta\mu^2\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$$

Αφού $A=1$ τότε το A είναι ανεξάρτητο του θ.

ιι) $B=\varepsilon\varphi\theta+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu\theta\cdot(1+\eta\mu\theta)+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\eta\mu\theta)}=$

$$=\frac{\eta\mu\theta+\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\eta\mu\theta)}=\frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\eta\mu\theta)}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\tau\varepsilon\mu\theta$$

Τότε $B=\tau\varepsilon\mu\theta$

β) $A=1$ και

$B=\tau\varepsilon\mu\theta$ με $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ τότε τελική πλευρά της γωνίας θ στο 4ο

τεταρτημόριο άρα $0<\sigma\upsilon\nu\theta<1$ τότε $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}>1$

$\Rightarrow \tau\varepsilon\mu\theta>1\Rightarrow B>1$

$\Rightarrow B>A$

B4 α) Να διατυπώσετε τον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου.

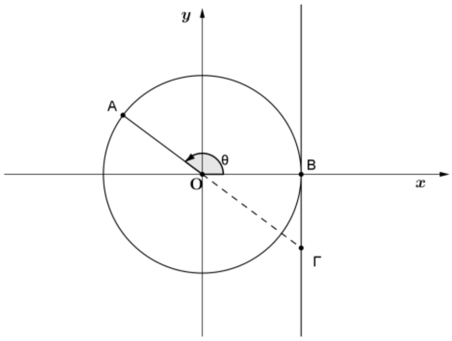
β) Δίνεται τριγωνομετρικός κύκλος (O, OA), όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η ευθεία $B\Gamma$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο B και το ευθύγραμμο τμήμα $O\Gamma$ είναι προέκταση του AO. Το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Να υπολογίσετε: ι) το $\eta\mu\theta$

ιι) το $\sigma\upsilon\nu\theta$

ιιι) την $\varepsilon\varphi\theta$

ιv) τις συντεταγμένες του σημείου Γ.



Λύση:

α) Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία μονάδα.

β) Αφού η γωνία θ βρίσκεται στον τριγωνομετρικό κύκλο (O, OA) είναι προσανατολισμένη και ισχύουν:

ι) $\eta\mu\theta = y_A = \frac{3}{5}$

ιι) $\sigma\upsilon\nu\theta = x_A = -\frac{4}{5}$

ιιι) $\varepsilon\varphi\theta = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

ιv) Η ΒΓ αφού εφάπτεται του τριγωνομετρικού κύκλου στο (1,0) τότε είναι ο άξονας εφαπτομένων

$x_B = x_\Gamma = 1$ και

$y_\Gamma = \varepsilon\varphi\theta = -\frac{3}{4}$ τότε $\boldsymbol{\Gamma = \left(1, -\frac{3}{4}\right)}$