ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2019
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΕΜΠΤΗ 12 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κ.Κ.
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: ΑΑ043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90΄ λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. <u>**Έχετε τη δυνατότητα επιλογής ερωτήσεων για απάντηση. Να μελετήσετε προσεκτικά τις οδηγίες των μερών που αποτελούν τα εξεταστικά δοκίμια.**</u>
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας **μόνο με μπλε ή με μαύρη πένα ανεξίτηλης μελάνης.** Μολύβι επιτρέπεται μόνο για τα σχήματα.
6. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
7. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
8. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (9 ΣΕΛΙΔΕΣ)

Μέρος Α΄: Από τις οκτώ (8) ασκήσεις του Α΄ Μέρους να λύσετε <u>μόνο</u> τις έξι (6). Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

Α1. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ, αν:

(α) $\eta\mu\theta > 0$ και $\varepsilon\varphi\theta > 0$ (2 μ.)

(β) $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ και $\sigma\varphi\theta > 0$ (2 μ.)

(γ) $\eta\mu(180° - \theta) > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ (1 μ.)

Λύση:

(α) $1^{ο}$ τεταρτημόριο
(β) $3^{ο}$ τεταρτημόριο
(γ) $2^{ο}$ τεταρτημόριο

Α2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{12} \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{12}\,\right)$ (2 μ.)

(β) $\sqrt{11 + \sqrt{23 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}$ (3 μ.)

Λύση:

(α) $\sqrt{12} \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{12}\right)$
$= \sqrt{36} + \sqrt{144}$
$= 6 + 12 = 18$

(β) $\sqrt{11 + \sqrt{23 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = \sqrt{11 + \sqrt{23 + \sqrt{1 + 3}}}$

$= \sqrt{11 + \sqrt{23 + \sqrt{4}}}$

$= \sqrt{11 + \sqrt{23 + 2}}$

$= \sqrt{11 + \sqrt{25}}$

$= \sqrt{11 + 5}$

$= \sqrt{16} = 4$

Α3. Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) Κύκλοι $(K, 7cm)$ και $(\Lambda, 4cm)$, με απόσταση $K\Lambda = 11\ cm$

(β) Κύκλοι $(K, 3cm)$ και $(\Lambda, 8cm)$, με απόσταση $K\Lambda = 6\ cm$

Λύση:

(α) $R + \rho = 7 + 4 = 11\ cm = K\Lambda$ Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά

(β) $\left.\begin{array}{r} R - \rho = 8 - 3 = 5cm \\ R + \rho = 8 + 3 = 11cm \\ K\Lambda = 6cm \end{array}\right\}$ Άρα ισχύει $R - \rho < K\Lambda < R + \rho$

Άρα οι κύκλοι τέμνονται

Α4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 - 25 = 0$ (2 μ.)

(β) $\sqrt[4]{2x+1} = 3,\ x \geq -\frac{1}{2}$ (3 μ.)

Λύση:

(α)

$$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm 5$$

(β)

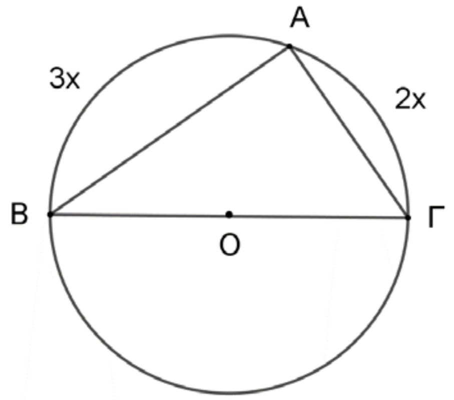
$$\sqrt[4]{2x+1} = 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{2x+1}\right)^4 = 3^4 \Leftrightarrow$$

$$2x + 1 = 81 \Leftrightarrow$$

$$2x = 80 \Leftrightarrow$$

$$x = 40$$

Α5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο $O.$ Αν $\widehat{AB} = 3x$ και $\widehat{AΓ} = 2x$ να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $ΑΒΓ$.



Λύση:

$$3x + 2x = 180^0 \Leftrightarrow$$
$$5x = 180^0 \Leftrightarrow$$
$$x = 36^0$$

Επομένως

$$\widehat{AB} = 3 \cdot 36^0 = 108^0 \Rightarrow \hat{Γ} = \frac{108}{2} = 54^0$$

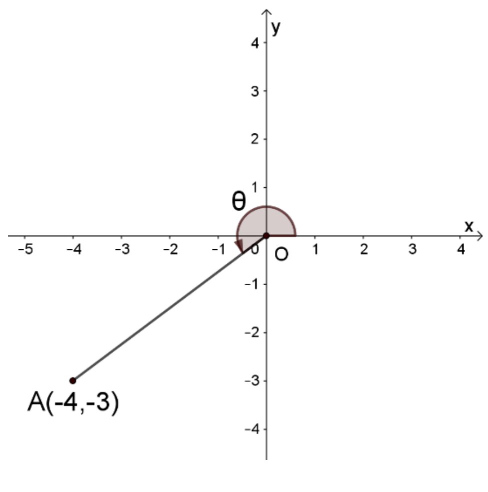
(Εγγεγραμμένη ίση με το μισό του αντίστοιχου τόξου)

και

$\widehat{AΓ} = 2 \cdot 36^0 = 72^0 \Rightarrow \widehat{B} = \frac{72}{2} = 36^0$ (Παρομοίως)

$\hat{A} = 90^0$ (διότι βαίνει σε ημικύκλιο)

Α6. Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ $(ημ\theta, συν\theta, εφ\theta, σφ\theta)$.



Λύση:

Υπολογίζουμε την απόσταση $OA = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} =$

$$\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} =$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = -\frac{3}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = -\frac{4}{5}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{4}{3} \text{ ή } \sigma\varphi\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

Α7. (α) Να γράψετε στην πιο απλή μορφή την πιο κάτω παράσταση:

$\sqrt[4]{\alpha^{12} \cdot \beta^4 \cdot \gamma^2}$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ (3 μ.)

(β) Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την πιο κάτω παράσταση:

$\frac{5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{20}}{\sqrt[4]{16}}$ (2 μ.)

Λύση:

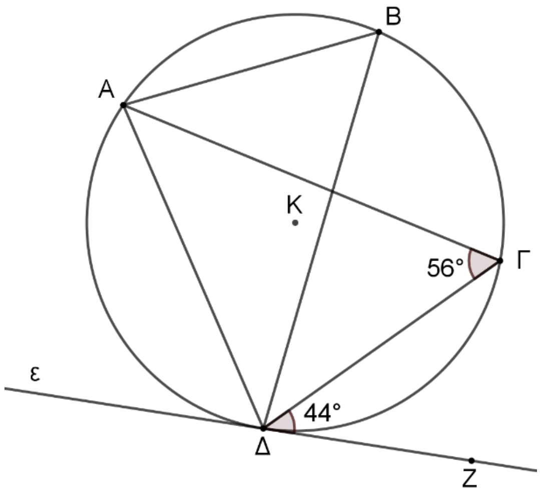
(α)

$$\sqrt[4]{\alpha^{12} \cdot \beta^4 \cdot \gamma^2} = \sqrt[4]{\alpha^{12}} \cdot \sqrt[4]{\beta^4} \cdot \sqrt[4]{\gamma^2}$$
$$= \alpha^3 \cdot \beta \cdot \sqrt{\gamma}$$

(β)

$$\frac{5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{20}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}}{2} =$$
$$\frac{\sqrt{5 \cdot 20}}{2} =$$
$$\frac{\sqrt{100}}{2} =$$
$$\frac{10}{2} = 5$$

Α8. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου (K,ρ) στο σημείο $\varDelta$. Η γωνία $A\hat{\varGamma}\varDelta$ έχει μέτρο 56^o και η γωνία $\varGamma\hat{\varDelta}Z$ έχει μέτρο 44^o. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών $\varGamma\hat{A}\varDelta$, $A\hat{B}\varDelta$, και το μέτρο του τόξου $\widehat{AB\varGamma}$. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



Λύση:

$\varGamma\hat{A}\varDelta = 44^o$ Θεώρημα χορδής και εφαπτομένης

$A\hat{B}\varDelta = A\hat{\varGamma}\varDelta = 56^o$ (Εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{A\varDelta}$)

$\widehat{\varDelta\varGamma} = 88^o$ (Τόξο διπλάσιο της εγγεγρ. $\varGamma\hat{A}\varDelta$)

$\widehat{A\varDelta} = 112^o$ (Τόξο διπλάσιο της εγγεγρ. $A\hat{\varGamma}\varDelta$)

$\widehat{AB\varGamma} = 360^o - \widehat{\varDelta\varGamma} - \widehat{A\varDelta} = 360° - 88° - 112° = 160^o$

ή

$A\hat{\varDelta}\varGamma = 180° - 44° - 56° = 80^o$ (Άθροισμα γωνιών τριγώνου)

Άρα

$\widehat{AB\varGamma} = 2 \cdot 80° = 160^o$ (Τόξο διπλάσιο της αντίστοιχης εγγεγραμμένης)

Μέρος Β΄: Από τις τέσσερις (4) ασκήσεις του Β΄ Μέρους να λύσετε μόνο τις τρεις (3). Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Β1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} - \sqrt{8} : \sqrt{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad B = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$ και $B = 2$. (8 μ.)

(β) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = -4AB$ (2 μ.)

Λύση:

(α)

$$A = \sqrt[3]{81 \div 3} - \sqrt{8 \div 2} = \sqrt[3]{27} - \sqrt{4}$$

$$= 3 - 2 = 1$$

$$B = \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{4}{2^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

(β)

$$x^3 = -4 \cdot 1 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = -8 \Rightarrow$$

$$x = -\sqrt[3]{8} \Rightarrow x = -2$$

Β2. Αν $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{5\eta\mu\theta - 10\sigma\upsilon\nu\theta}{4\sigma\varphi\theta - 6\varepsilon\varphi\theta}$

Λύση:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

Αφού $90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$ έχουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$

Στη συνέχεια έχουμε ότι

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = -\frac{3}{4}$$

Επομένως

$$A = \frac{5\cdot\frac{4}{5} - 10\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 6\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}$$

$$= \frac{4+6}{-3+8} = \frac{10}{5} = 2$$

Β3. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x} = -\sigma\upsilon\nu x$ (8 μ.)

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{1}{2}$ στο διάστημα $0^{o} < x < 90^{o}$

(2 μ.)

Λύση:

(α)

$$\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x - 1)}{\varepsilon\varphi x(1 - \sigma\upsilon\nu x)}$$

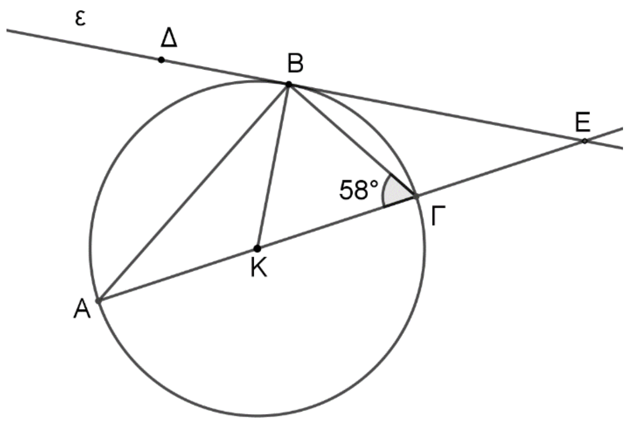
$$= -\frac{\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x} = -\frac{\frac{\eta\mu x}{1}}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = -\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -\sigma\upsilon\nu x$$

(β)

$$\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 60^{o}$$

Β4. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου (K,ρ) στο σημείο B. Η προέκταση της διαμέτρου $A\Gamma$ τέμνει την εφαπτομένη (ε) στο σημείο E και η γωνία $B\hat{\Gamma}A$ έχει μέτρο 58^o. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών $B\hat{K}A$, $A\hat{B}\Delta$, $K\hat{A}B$ και $B\hat{E}K$. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



Λύση:

$$B\hat{K}A = 2 \cdot 58° = 116^o$$

(επίκεντρη γωνία ισούται με το διπλάσιο της αντίστοιχης εγγεγραμμένης)

Από το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης προκύπτει ότι

$$A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}B = 58^o$$

$A\hat{B}\Gamma = 90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)

$K\hat{A}B + 90° + 58° = 180° \Leftrightarrow K\hat{A}B = 32^o$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

Από το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης προκύπτει ότι $\Gamma\hat{B}E = 32^o$

Η γωνία $A\hat{B}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ABE επομένως ισχύει

$$A\hat{B}\Delta = K\hat{A}B + B\hat{E}K \Leftrightarrow 58° = 32° + B\hat{E}K \Leftrightarrow B\hat{E}K = 26^o$$