ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΕΚΔΟΣΗ 2010

ISBN ΣΕΙΡΑΣ: 978-9963-0-9115-7
ISBN: 978-9963-0-9130-0

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα μαθηματικά είναι ένα συστηματικό, συνεκτικό, συνεπές και συνεχώς αναπτυσσόμενο σύνολο εννοιών και μεθόδων. Ως επιστήμη, τα μαθηματικά χρησιμοποιούν δική τους γλώσσα και σύμβολα με στόχο τη μοντελοποίηση, την ανάλυση και την ερμηνεία του κόσμου. Τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα εμπεριέχουν δημιουργικότητα και φαντασία που είναι απαραίτητα στοιχεία για την ανακάλυψη μοτίβων σχημάτων και αριθμών, την κατανόηση και απόδειξη σχέσεων, την κατασκευή μοντέλων, την ερμηνεία δεδομένων και την επικοινωνία ιδεών και εννοιών.

Έχει τεκμηριωθεί ερευνητικά ότι η μάθηση των μαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη της αναλυτικής ικανότητας του ατόμου και στη βελτίωση της αυτοεικόνας του ώστε να οργανώνει και να ελέγχει με επάρκεια την κοινωνική του ζωή (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Η κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και μεθόδων είναι απαραίτητη προϋπόθεση, για να μπορεί το άτομο να λειτουργήσει ικανοποιητικά σε μια δημοκρατική κοινωνία (National Council on Education and the Disciplines, 2001). Το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών σκοπό έχει να διασφαλίσει ότι κάθε άτομο θα αποκτήσει τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες που θα του επιτρέψουν να διαβιώσει ως αυτόνομο και παραγωγικό μέλος μιας σύγχρονης δημοκρατικής κοινωνίας (Behm & Lloyd, 2009).

Εισαγωγή

Κύριος στόχος της συντονιστικής επιτροπής και της ομάδας των εκπαιδευτικών που εργάστηκαν ήταν η συγγραφή ενός αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών το οποίο να προετοιμάζει τους μαθητές με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ώστε να αγαπήσουν τα μαθηματικά και να κεντρίσει το ενδιαφέρον και την επιθυμία τους να ασχοληθούν συστηματικά με αυτά. Η συγγραφή του αναλυτικού στηρίχθηκε σε διεθνή αποτελέσματα (Clements, 2007: Mullis, Martin, & Foy, 2007: OECD, 2006) και σε διεθνώς δοκιμασμένες πρακτικές και λαμβάνει υπόψη τις ιδιαίτερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην Κύπρο κατά τη μετάβασή τους από το δημοτικό στο γυμνάσιο, από το γυμνάσιο στο λύκειο και από το λύκειο στο πανεπιστήμιο (Sdrolias & Triandafilidis, 2007). Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε επίσης και στον εκσυγχρονισμό του περιεχομένου των μαθηματικών ώστε να συνάδει με τις σύγχρονες ανάγκες της κοινωνίας και με τα αναλυτικά προγράμματα των πλείστων χωρών της Ευρώπης (Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 2009). Για το σκοπό αυτό έχουν ενσωματωθεί στο πρόγραμμα νέες ενότητες, όπως οι μετασχηματισμοί στη γεωμετρία, και έχουν αφαιρεθεί γνώσεις και διαδικασίες αποστήθισης. Ταυτόχρονα, δόθηκε έμφαση στην ενσωμάτωση της σύγχρονης τεχνολογίας με τρόπο που να συμβάλλει αποτελεσματικά στην επίτευξη των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι γενικές αρχές πάνω στις οποίες στηρίχτηκε η συγγραφή του αναλυτικού προγράμματος. Ακολούθως γίνεται αναφορά στους γενικούς σκοπούς, το περιεχόμενο, τις κλίμακες και τους δείκτες του προτεινόμενου αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών. Τέλος, περιγράφεται με συντομία ο τρόπος με τον οποίο οργανώθηκε και παρουσιάζεται το αναλυτικό πρόγραμμα.

Αρχές Ανάπτυξης του Αναλυτικού Προγράμματος

Το προτεινόμενο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών εδράζεται σε τέσσερις αρχές:

Αρχή 1: Οι μαθηματικές έννοιες διερευνούνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών.

Οι δείκτες επιτυχίας έχουν ως στόχο να υποβοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν, να χρησιμοποιήσουν και να εφαρμόσουν τις μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες στη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών. Για το σκοπό αυτό, δίνονται δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές συμμετέχουν σε διερευνήσεις και συζητούν τις μαθηματικές ιδέες, όπως προκύπτουν από καταστάσεις που τους ενδιαφέρουν. Οι δραστηριότητες ενσωματώνουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των μαθηματικών και στηρίζονται σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής, στην προηγούμενη γνώση των μαθητών και σε προβλήματα που απασχολούν τις διάφορες επιστήμες (Baroody, 2003).

ΑΡΧΗ 2: Το αναλυτικό πρόγραμμα δίνει έμφαση στη λύση προβλήματος

Η λύση προβλήματος αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα των αποτελεσματικών αναλυτικών προγραμμάτων (Schoenfeld, 1994). Στόχος των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων είναι η χρήση με ευέλικτο τρόπο των μαθηματικών εννοιών και ο σχεδιασμός των βημάτων που πρέπει να ακολουθήσουν, για να επιλύσουν το πρόβλημα. Η λύση προβλήματος εμπεριέχει τον αναστοχασμό όχι μόνο της διαδικασίας που ακολούθησαν οι μαθητές αλλά και των εννοιών που χρησιμοποίησαν, για να επιλύσουν το πρόβλημα. Η επίλυση προβλημάτων αναπτύσσει την ικανότητα κατανόησης και αξιοποίησης της δομής και των δεδομένων μιας προβληματικής κατάστασης, τη φαντασία και τη δημιουργικότητα του/της μαθητή/τριας μαθήτριας. Ταυτόχρονα, η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος απαιτεί την από μέρους των εκπαιδευτικών κατανόηση σε βάθος των μαθηματικών εννοιών που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα και την προσήλωσή τους σε διερευνητικές διαδικασίες.

Η λύση προβλήματος αποτελεί το μέσο της διαθεματικής προσέγγισης των ενοτήτων των μαθηματικών και των μαθηματικών με άλλες επιστήμες. Η επίλυση προβλήματος επίσης μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί στη διδακτική διαδικασία με πολλαπλούς τρόπους: ως εισαγωγή μαθηματικών εννοιών, ως μέσο διερεύνησης ιδεών και εφαρμογής δεξιοτήτων και γνώσεων ή ως μέσο για αξιολόγηση των ικανοτήτων των μαθητών.

ΑΡΧΗ 3: Η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης

Η τεχνολογία εμπλουτίζει το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών με πολλούς τρόπους. Προσφέρει τη δυνατότητα χρήσης οργάνων μέτρησης, εποπτικών μέσων και υλικών (κύβοι Dienes, υλικά μοτίβων, κύκλοι κλασμάτων, κτλ.) και υπολογιστικών μηχανών (Berry, Graham & Smith, 2005). Η αξιοποίηση της πληθώρας των λογισμικών που υπάρχουν συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση προβλημάτων που δεν είναι δυνατό να επιλυθούν με χαρτί και μολύβι. Παράλληλα, η τεχνολογία συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητα των μαθητών να επικοινωνούν τις ιδέες τους και να αναζητούν ιδέες και πληροφορίες μέσω του διαδικτύου. Επιπρόσθετα, η τεχνολογία βοηθά τους μαθητές που έχουν δυσκολίες να κατανοήσουν με το δικό τους ρυθμό τις μαθηματικές έννοιες τόσο μέσα στην τάξη όσο και στο σπίτι τους.

Η σύγχρονη τεχνολογία έχει αλλάξει τόσο το περιεχόμενο όσο και τις διδακτικές προσεγγίσεις των μαθηματικών, προσφέροντας μια δυναμική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών (Jackiw & Sinclair, 2009: Ruthven, Deaney, Hennessy, 2009:). Μερικά θέματα των μαθηματικών, όπως η στατιστική, οι πιθανότητες και η γεωμετρία (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, 2004), αποκτούν ιδιαίτερη βαρύτητα στο αναλυτικό πρόγραμμα με την αξιοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στην τάξη.

ΑΡΧΗ 4: Όλοι οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν εμπειρίες μέσα από ένα ποιοτικό πρόγραμμα μαθηματικών

Το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών προσφέρει τη δυνατότητα σε στους/στις μαθητές/τριες να κατανοήσουν έννοιες και να αποκτήσουν δεξιότητες, ανάλογα με τις ανάγκες και τις προσδοκίες τους. Βασική αφετηρία του αναλυτικού προγράμματος είναι η παραδοχή ότι όλοι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εργαστούν με μαθηματικά προβλήματα και έννοιες που αποτελούν πρόκληση για αυτούς.

Γενικοί Σκοποί της Μαθηματικής Παιδείας

Οι γενικοί σκοποί της μαθηματικής παιδείας, όπως αναπτύσσονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

Οι μαθητές, μέσω της διδασκαλίας των μαθηματικών:

- Εκτιμούν την αξία των μαθηματικών και τη χρησιμότητά τους σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητα.
- Αναπτύσσουν την αυτοπεποίθησή τους ότι είναι ικανοί να “κάνουν» μαθηματικά και να αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά ως μια δημιουργική απασχόληση.
- Αναπτύσσουν τις στάσεις, γνώσεις και δεξιότητες και κατανοούν έννοιες που θα τους βοηθήσουν να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή τους ζωή και απασχόληση και στην ερμηνεία προβλημάτων από διάφορα γνωστικά αντικείμενα.
- Αναπτύσσουν την ικανότητα να επιλύουν προβλήματα με πολλαπλούς τρόπους και την ικανότητα να σκέφτονται και να αποφασίζουν με δημιουργικό και λογικό τρόπο.
- Αναπτύσσουν τις απαραίτητες γνώσεις που απαιτούνται στη σύγχρονη κοινωνία της πληροφορίας.
- Αναπτύσσουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες που είναι απαραίτητες στο χώρο της εργασίας.
- Αναπτύσσουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες, για να συνεχίσουν σπουδές σε αντικείμενα στα οποία η χρήση των μαθηματικών είναι απαραίτητη.

Το Περιεχόμενο Αναλυτικού προγράμματος

Το αναλυτικό πρόγραμμα περιλαμβάνει το περιεχόμενο, τις διαδικασίες, τις εφαρμογές και γενικά τις εμπειρίες που αναμένεται να αναπτύξουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής από το νηπιαγωγείο μέχρι και την τελευταία τάξη του Λυκείου (Ν-12). Το περιεχόμενο των μαθηματικών, όπως αναφέρεται στο αναλυτικό πρόγραμμα, υποδιαιρείται σε ενότητες για σκοπούς οργάνωσης και δόμησης. Οι ενότητες αναφέρονται στους Αριθμούς, στη Μέτρηση, στη Γεωμετρία, στην Άλγεβρα και στη Στατιστική-Πιθανότητα. Ο διαχωρισμός σε ενότητες περιεχομένου δεν σημαίνει ότι τα μαθηματικά που προτείνονται μπορούν να διδαχτούν ή να αναπτυχθούν ως μεμονωμένες θεματικές ενότητες. Αντίθετα, οι ενότητες διαπλέκονται μεταξύ τους ή και συμπληρώνουν η μια την άλλη, ειδικότερα με την υποβολή και επίλυση προβλημάτων και την έμφαση σε ενιαίες αρχές που διέπουν τη μαθηματική σκέψη και το μαθηματικό συλλογισμό. Επιπρόσθετα, στο αναλυτικό πρόγραμμα γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στις διαδικασίες που διαπνέουν όλες τις ενότητες και που συμβάλλουν στην ενοποίηση του περιεχομένου των μαθηματικών. Οι διαδικασίες θεωρούνται στο παρόν πρόγραμμα ως μέρος του περιεχομένου των μαθηματικών ακριβώς, για να τονιστεί η σημασία τους τόσο στην ανάπτυξη της επιστήμης των μαθηματικών όσο και στις προσεγγίσεις στη διαδικασία της διδασκαλίας και μάθησης.

Ειδικοί Σκοποί Περιεχομένου

Οι ειδικοί σκοποί της διδασκαλίας των μαθηματικών αναλύονται πιο κάτω με αναφορά στις ενότητες περιεχομένου:

<u>Μαθηματικές Διαδικασίες</u>

Το προτεινόμενο αναλυτικό πρόγραμμα παρέχει τις ακόλουθες ευκαιρίες στους μαθητές:

- Να αναπτύξουν ευελιξία και δημιουργικότητα στην εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών σε προβλήματα.
- Να επιλύουν με συνεργατικό τρόπο προβλήματα, να εκφράζουν τις ιδέες τους με δημιουργικό τρόπο και να ανταποκρίνονται στις ιδέες των συμμαθητών τους.
- Να αναπτύξουν τις δεξιότητες παρουσίασης αλλά και κριτικής αξιολόγησης μαθηματικών προτάσεων και συμπερασμάτων.

- Να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στη διερεύνηση υποθέσεων και να μαθαίνουν τόσο από τις λανθασμένες όσο και από τις ορθές απαντήσεις των ίδιων ή των συμμαθητών τους.
- Να αναπτύξουν τις ικανότητες για λογική και συστηματική σκέψη και να τις χρησιμοποιούν όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και σε άλλα θέματα του αναλυτικού προγράμματος.
- Να ενισχύσουν την αυτοπεποίθησή τους ότι είναι ικανοί χρήστες της τεχνολογίας στη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών.
- Να αναπτύξουν τις δεξιότητες χρήσης του προφορικού και γραπτού λόγου, για να εκφράζουν και ορίζουν μαθηματικές έννοιες.
- Να αναπτύξουν τις γνώσεις και δεξιότητες ερμηνείας μορφών αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών.

Αριθμοί

- Να αναπτύξουν την κατανόηση των αριθμών, τον τρόπο με τον οποίο αναπαριστάνονται και τις ποσότητες που αντιπροσωπεύουν.
- Να αναπτύξουν τη δεξιότητα της ακρίβειας, την επάρκεια σε νοερούς υπολογισμούς, σε υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι και στη χρήση της τεχνολογίας.
- Να αναπτύξουν την ικανότητά τους για εκτίμηση και έλεγχο της λογικότητας των απαντήσεών τους.

Μέτρηση

- Να κατανοήσουν τα συστήματα μέτρησης, να τα ερμηνεύουν και να τα χρησιμοποιούν
- Να αναπτύξουν επάρκεια στη χρήση οργάνων μέτρησης
- Να υπολογίζουν τις επιπτώσεις από αλλαγές σε μεταβλητές στα αποτελέσματα των μετρήσεων και πράξεων

Γεωμετρία

- Να αποκτήσουν γνώσεις για τις σχέσεις μεταξύ δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων.
- Να αναπτύξουν έννοιες του χώρου, τις σχέσεις μεταξύ τους και να χρησιμοποιούν γεωμετρικές ιδιότητες σε αντικείμενα του πραγματικού κόσμου.
- Να αναπτύξουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν γεωμετρικά μοντέλα ως μέσο επίλυσης προβλημάτων.
- Να αντιληφθούν την αξία και σημασία της απόδειξης στα μαθηματικά.

Άλγεβρα

- Να αναγνωρίζουν μοτίβα και σχέσεις στα μαθηματικά και στον πραγματικό κόσμο και να αποκτήσουν την ικανότητα να γενικεύουν μοτίβα και σχέσεις.
- Να αναπτύξουν την ικανότητα αφηρημένης σκέψης και την ικανότητα να χρησιμοποιούν σύμβολα, γραφικές παραστάσεις και διαγράμματα για να εκφράζουν έννοιες, σχέσεις και γενικεύσεις.
- Να χρησιμοποιούν αλγεβρικά σύμβολα, μεθόδους και παραστάσεις στην επίλυση προβλημάτων και στην απόδειξη μαθηματικών προτάσεων.

Στατιστική - Πιθανότητες

- Να αναπτύξουν την ικανότητα να συλλέγουν και να οργανώνουν δεδομένα, να παρουσιάζουν μικρές έρευνες και να συνοψίζουν αποτελέσματα.
- Να ερμηνεύουν δεδομένα που παρουσιάζονται σε πίνακες και γραφικές παραστάσεις.
- Να αναπτύξουν την ικανότητά τους να υπολογίζουν την πιθανότητα ενδεχομένων και να χρησιμοποιούν την έννοια της πιθανότητας, για να κάνουν προβλέψεις.

Κλίμακες – Δείκτες Επιτυχίας

Κλίμακες

Καθεμιά από τις πιο πάνω ενότητες περιεχομένου αναπτύσσεται σε οκτώ κλίμακες. Οι κλίμακες αποτελούν συνοπτική παρουσίαση των μαθηματικών ικανοτήτων που αναμένεται να αναπτύξουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής. Οι κλίμακες σε κάθε ενότητα είναι ιεραρχικές, προχωρούν προοδευτικά, αλλά δεν είναι απόλυτα διακριτές, γιατί σε κάθε κλίμακα υπάρχουν βασικά στοιχεία της προηγούμενης κλίμακας ώστε να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να επαναλαμβάνουν βασικές έννοιες και να καλύπτουν τυχόν κενά στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Με αυτό τον τρόπο δίνεται επίσης η ευκαιρία στο/στη μαθητή/τρια να καλύψει στο επιθυμητό βάθος συγκεκριμένες έννοιες σε περισσότερες από μια τάξεις. Επομένως, η πλήρης κάλυψη μιας κλίμακας μπορεί να γίνει σε δυο ή περισσότερες τάξεις, προσφέροντας με αυτό τον τρόπο ευελιξία στον εκπαιδευτικό και στους συγγραφείς των διδακτικών μέσων και υλικών που μελλοντικά θα συνοδεύουν τα αναλυτικά προγράμματα. Ο Πίνακας 1 είναι ενδεικτικός για το εύρος κάθε κλίμακας, όπως επίσης και για την τάξη στην οποία αρχίζει και τελειώνει η διδασκαλία των εννοιών που περιλαμβάνει, τονίζοντας τη σπειροειδή διάταξη των μαθηματικών εννοιών οριζόντια και κατακόρυφα. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 1 τα μικρά ορθογώνια δείχνουν τις τάξεις και τα σκιασμένα ορθογώνια δείχνουν τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης κλίμακας. Στο παράδειγμα φαίνεται ενδεικτικά ότι η Κλίμακα 1 αρχίζει από το νηπιαγωγείο και ολοκληρώνεται λίγο πριν οι μαθητές συμπληρώσουν τη δεύτερη τάξη του δημοτικού.

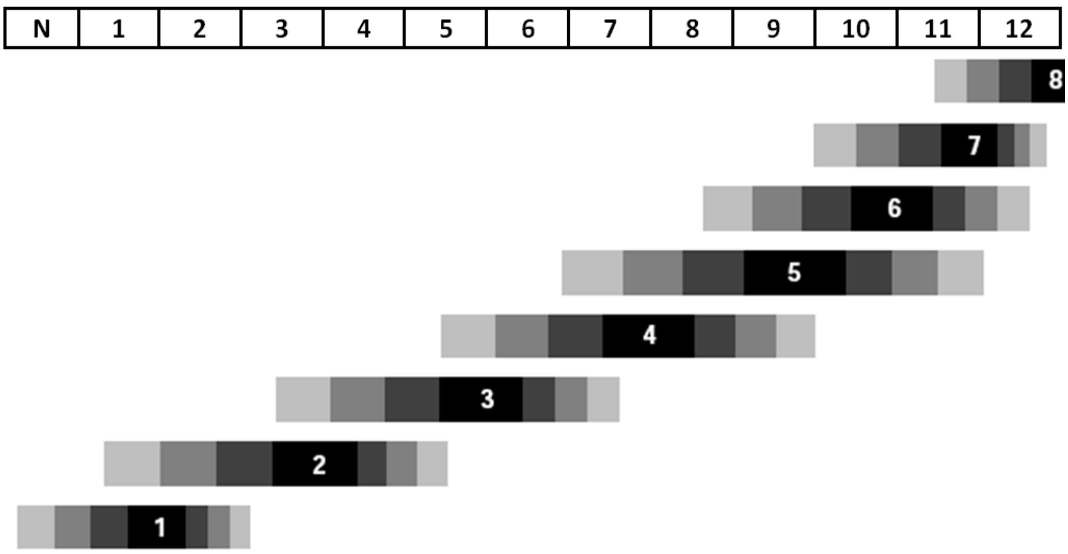
Οι ενδεικτικές τάξεις στις οποίες αρχίζει και περατώνεται η διδασκαλία μιας κλίμακας θα δίνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα στο τέλος κάθε ενότητας περιεχομένου.

Με βάση τα πιο πάνω, δεν αναμένεται από κάθε μαθητή/τρια να καλύψει μια κλίμακα δεικτών επιτυχίας στον ίδιο χρόνο με όλους του άλλους. Η επανάληψη των δεικτών επιτυχίας σε συνεχόμενες κλίμακες έχει ως στόχο να παρέχονται οι ευκαιρίες στο/στη μαθητή/τρια να καλύψει την κλίμακα σε περισσότερες από μια τάξη.

Η ύπαρξη κλιμάκων δίνει έμφαση στο γεγονός ότι:

- Οι μαθητές/τριες κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες με διαφορετικό τρόπο και ρυθμό.
- Η μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών λαμβάνει χώρα σε καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές /τριες.
- Οι μαθητές ανακαλύπτουν τις μαθηματικές έννοιες ενσωματώνοντας νέες εμπειρίες, δεξιότητες και γνώσεις στις ήδη υφιστάμενες δομές τους.
- Οι μαθητές/τριες έχουν την ικανότητα να αναπτύξουν και να χρησιμοποιήσουν πολλές στρατηγικές σε διαφορετικό κάθε φορά πλαίσιο, ώστε να υπερβούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν.
- Οι μαθητές/τριες χρειάζονται χρόνο, για να διερευνήσουν τις μαθηματικές έννοιες.

Πίνακας 1: Δείκτες επιτυχίας-Κλίμακες



Σε κάθε κλίμακα αναφέρονται οι δείκτες επιτυχίας που καθορίζουν τις ικανότητες που αναμένεται να αποκτήσουν οι μαθητές σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης μέχρι και την Γ' τάξη Λυκείου. Ταυτόχρονα, δίνονται ενδεικτικές δραστηριότητες και δραστηριότητες αξιολόγησης που αντιστοιχούν σε κάθε δείκτη επιτυχίας. Οι δραστηριότητες αυτές δεν είναι μοναδικές. Απλώς έχουν επιλεγεί συγκεκριμένες δραστηριότητες που πιστεύουμε ότι ανταποκρίνονται σαφώς στους δείκτες επιτυχίας και προσδιορίζουν ή αποσαφηνίζουν το νόημα των δεικτών επιτυχίας. Τέλος, σε κάθε κλίμακα δίνονται παραδείγματα δραστηριοτήτων εμπλουτισμού.

Στη συνέχεια δίνονται με πιο αναλυτικό τρόπο τα χαρακτηριστικά των δεικτών επιτυχίας κάθε κλίμακας, των ενδεικτικών δραστηριοτήτων και των δραστηριοτήτων αξιολόγησης και εμπλουτισμού.

Δείκτες Επιτυχίας

Οι δείκτες επιτυχίας είναι προτάσεις που εκφράζουν τα αναμενόμενα αποτελέσματα της διαδικασίας μάθησης και είναι διατυπωμένοι με τρόπο που μπορούν να αξιολογηθούν. Ταυτόχρονα, οι δείκτες σε κάθε κλίμακα καθορίζουν το περιεχόμενο των μαθηματικών ενοτήτων, την εννοιολογική και διαδικαστική διάσταση των μαθηματικών και δίνουν έμφαση στην προοδευτικότητα των μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Οι δείκτες επιτυχίας έχουν καθοριστεί, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, με βάση τις διδακτικές εμπειρίες στα σχολεία της Κύπρου και με βάση τις προδιαγραφές που υπάρχουν σε όλα τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα των ΗΠΑ και των χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης (NCTM, 2000, Connecticut State Department of Education, 2006). Στηρίζονται , επίσης, σε ερευνητικά αποτελέσματα, όπως έχουν σταχυολογηθεί τα τελευταία χρόνια (Weiss, Knapp, Hollweg, & Burrill, 2001). Συγκεκριμένα, οι δείκτες επιτυχίας στηρίζονται σε ένα συνεχώς αυξανόμενο αριθμό ερευνών που δείχνουν ότι η παιδαγωγική προσέγγιση και τα αναλυτικά προγράμματα πρέπει να συμβαδίζουν, για να βελτιωθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών (Stein & Kim, 2009: Grant, Kline, Crumbaugh, Kim & Cengiz, 2009).

Οι δείκτες επιτυχίας, τέλος, περιγράφουν με συγκεκριμένο τρόπο τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης της Κύπρου και αναμένεται να συμβάλουν στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών ώστε να γίνουν καλοί λύτες προβλημάτων, να αιτιολογούν τις απαντήσεις τους και να σκέφτονται με λογικό και δημιουργικό τρόπο, να αναπτύξουν αυτοπεποίθηση για τις μαθηματικές τους ικανότητες, να κατανοούν τη θέση των μαθηματικών στη σύγχρονη κοινωνία και τη σημασία τους στην ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης και να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά την τεχνολογία. Στον Πίνακα 2 συνοψίζεται το περιεχόμενο των δεικτών επιτυχίας σε σχέση με τους πιο πάνω στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς και τα κριτήρια με βάση τα οποία οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αξιολογήσουν την ποιότητα των δεικτών σε κάθε ενότητα και σε κάθε τάξη.

Πίνακας 2

Στόχοι Δεικτών επιτυχίας

Δείκτες Επιτυχίας στο Αναλυτικό Πρόγραμμα	**Κριτήρια ποιότητας Δεικτών Επιτυχίας**
Ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών ώστε να γίνουν καλοί λύτες προβλημάτων	Δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να επιλύουν προβλήματα (ρουτίνας και διαδικασίας) συμπεριλαμβανομένων και των προβλημάτων που θέτουν οι ίδιοι οι μαθητές
Ανάπτυξη αυτοπεποίθησης μαθητών για τις μαθηματικές τους ικανότητες	Δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές: • Να γνωρίσουν και αποκτήσουν εμπειρίες από ένα ευρύ φάσμα θεμάτων των μαθηματικών • Δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να επιτύχουν στα μαθηματικά
Αιτιολόγηση απαντήσεων των μαθητών με λογικό και δημιουργικό τρόπο	Δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές: • Να ανακαλύψουν και διερευνήσουν τις μαθηματικές

	έννοιες • Να εκφράσουν και να ερμηνεύσουν μαθηματικές ιδέες και σχέσεις • Να αναπτύξουν αναλυτική, συνθετική και επαγωγική σκέψη
Κατανόηση της θέσης των μαθηματικών στη σύγχρονη κοινωνία και της σημασίας τους στην ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης	Δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εφαρμόσουν μαθηματικές ιδέες, δεξιότητες και διαδικασίες σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου
Χρήση της τεχνολογίας με εποικοδομητικό τρόπο	Δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την τεχνολογία στη διερεύνηση και οργάνωση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Παράλληλα με τους δείκτες επιτυχίας γίνεται αναφορά σε ενδεικτικές δραστηριότητες. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες αντιστοιχούν στους δείκτες επιτυχίας και αποτελούν παραδείγματα εμπειριών που οι μαθητές αναμένεται να αποκτήσουν από την καθημερινή επαφή τους με τις μαθηματικές έννοιες. Στόχος των ενδεικτικών δραστηριοτήτων είναι από τη μια η αποσαφήνιση των δεικτών επιτυχίας και από την άλλη αποτελούν εισηγήσεις προς τους εκπαιδευτικούς για έννοιες και προβλήματα που είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων τους. Τονίζεται ότι η αντιστοίχιση των ενδεικτικών δραστηριοτήτων με τους δείκτες επιτυχίας δεν είναι αποκλειστική ή μοναδική, με την έννοια ότι οι ίδιες δραστηριότητες είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη πολλαπλών δεικτών επιτυχίας. Σε καμιά όμως περίπτωση οι ενδεικτικές δραστηριότητες δεν πρέπει να θεωρηθούν ότι περιορίζουν τους εκπαιδευτικούς στη διαδικασία της διδασκαλίας - μάθησης. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί παροτρύνονται να σχεδιάζουν και να εφαρμόζουν δραστηριότητες που πιστεύουν ότι εξυπηρετούν τις ανάγκες των μαθητών τους. Παράλληλα, οι δραστηριότητες αυτές είναι δυνατό να κατευθύνουν σε κάποιο βαθμό τους συγγραφείς των διδακτικών μέσων που θα αναπτυχθούν για υλοποίηση των προγραμμάτων.

Δραστηριότητες Αξιολόγησης

Οι δραστηριότητες αξιολόγησης που αναφέρονται στο κείμενο αποτελούν παραδείγματα δραστηριοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας τους. Οι δραστηριότητες αυτές μπορούν να διαφοροποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς και να χρησιμοποιηθούν με πολλούς άλλους τρόπους (πορτφόλιο, συνέντευξη, κτλ). Επιπρόσθετα, οι δραστηριότητες αξιολόγησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για την αξιολόγηση ενός εύρους ικανοτήτων των μαθητών τους, όπως η ικανότητα των μαθητών να συλλέγουν δεδομένα, η ικανότητα να παρουσιάζουν τα επιχειρήματά τους, η ικανότητα να προσεγγίζουν διαισθητικά τη λύση προβλημάτων. Ταυτόχρονα, οι δραστηριότητες αξιολόγησης αποτελούν μια συνέχεια των ενδεικτικών δραστηριοτήτων και συνδέονται άμεσα με τους δείκτες επιτυχίας. Με βάση τις δραστηριότητες αυτές οι εκπαιδευτικοί αναμένεται να κατασκευάσουν τις δικές τους δραστηριότητες για συντρέχουσα και τελική αξιολόγηση των μαθητών τους.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Οι δραστηριότητες εμπλουτισμού περιλαμβάνουν όχι μόνο επέκταση ενός συγκεκριμένου θέματος αλλά κυρίως αναφέρονται σε ευκαιρίες που δίνονται στους μαθητές να εμβαθύνουν σε θέματα που τους ενδιαφέρουν. Στις δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνεται, επίσης, η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με πρότζεκτ διαφορετικής θεματολογίας ανάλογα με τα ενδιαφέροντα των μαθητών. Ο κατάλογος των θεμάτων που προτείνονται στις δραστηριότητες εμπλουτισμού είναι ενδεικτικός και επομένως οι εκπαιδευτικοί, κάνοντας χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας, μπορούν να προτείνουν τόσο δραστηριότητες όσο και άλλα θέματα για πρότζεκτ στους μαθητές τους.

Επιπρόσθετα, οι δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να ασχοληθούν με δραστηριότητες και ευρύτερα θέματα σχετικά με τις υπό ανάπτυξη μαθηματικές έννοιες. Για το σκοπό αυτό, οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται σε πολλές περιπτώσεις να χρησιμοποιήσουν τις δραστηριότητες εμπλουτισμού, για να παροτρύνουν τους μαθητές τους στη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Τέλος, πολλές από τις δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνουν τη δυνατότητα στους χαρισματικούς μαθητές να επιλύσουν πιο ελκυστικά προβλήματα, συμβάλλοντας με αυτό τον τρόπο στην περαιτέρω ανάπτυξή των μαθηματικών τους ικανοτήτων.

Οργάνωση Αναλυτικού Προγράμματος

Στο Μέρος Α’ του προτεινόμενου αναλυτικού προγράμματος παρουσιάζονται ξεχωριστά οι κλίμακες 1-8 για καθεμιά των ενοτήτων των μαθηματικών. Πρώτα παρουσιάζεται η «Άλγεβρα» και στη συνέχεια οι ενότητες «Αριθμοί», «Γεωμετρία», «Στατιστική-Πιθανότητες» και «Μέτρηση». Τέλος, παρουσιάζονται οι «διαδικασίες» των μαθηματικών. Οι διαδικασίες διαπνέουν το όλο πρόγραμμα των μαθηματικών, γιατί χωρίς τις διαδικασίες που περιγράφονται, η κατανόηση και η ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων θα ήταν αδύνατη.

Σε κάθε ενότητα προηγούνται οι δείκτες επιτυχίας, που περιγράφουν τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα της ενότητας. Ακολουθούν οι δραστηριότητες που αντιστοιχούν στους δείκτες, οι δραστηριότητες αξιολόγησης και οι δραστηριότητες εμπλουτισμού. Στην τελευταία στήλη των δραστηριοτήτων δίνονται οι δείκτες στους οποίους αντιστοιχούν. Πολλές φορές οι δραστηριότητες αντιστοιχούν σε περισσότερους από ένα δείκτη επιτυχίας. Οι συντομογραφίες Α., Αρ., Γ., ΣΠ., Μ., αναφέρονται στις ενότητες Άλγεβρα, Αριθμοί, Γεωμετρία, Στατιστική –Πιθανότητες και Μέτρηση, αντίστοιχα. Οι κλίμακες στη συνέχεια κατανέμονται στις τάξεις Ν-12, όπου Ν αντιστοιχεί στο Νηπιαγωγείο και το 12 στη Γ΄ τάξη του Λυκείου. Ανάλογα το 1 αναφέρεται στην πρώτη τάξη του δημοτικού, το 2 στη δεύτερη κ.ο.κ. Η συντομογραφία για παράδειγμα Α3.4 αναφέρεται στην Άλγεβρα, στην 3^{η} κλίμακα και στο δείκτη επιτυχίας 4.

Στο Μέρος Β' του αναλυτικού αναφέρονται οι δείκτες επιτυχίας κάθε τάξης. Σε κάθε τάξη διδάσκονται όλες οι ενότητες του μαθηματικού περιεχομένου (Άλγεβρα, Αριθμοί, Γεωμετρία, Στατιστική-Πιθανότητες και Μέτρηση) και γίνεται προσπάθεια να διασυνδεθούν οι ενότητες αυτές, έτσι ώστε οι μαθητές να διδάσκονται και να μαθαίνουν τα μαθηματικά ως ένα ενιαίο σύνολο.

Αναφορές

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A.J.Baroody & A.Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 1-33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Behm, S., & Lloyd, G. (2009). Factors influencing student teachers' use of mathematics curriculum materials. In J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, B., & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction*. New York: Routledge, Taylor and Francis.

Berry J., Graham E. & Smith A. (2005) Classifying Student's Calculator Strategies. The *International Journal for Technology in Mathematics Education, 12*(1), 15-31.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 339-352.

Clement, D. (2007). Curriculum research: Towards a framework for "Research-based Curricula". *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(1), 35-70.

Connecticut State Department of Education (2006). A Guide to Curriculum Development: Purposes, Practices, Procedures. http://www.sde.ct.gov/sde/cwp/view.asp?a=2618&q=321162

Grant, T., Kline, K., Crumbaugh, C., Kim, O., & Cengiz, N. (2009). How can curriculum materials support teachers in pursuing student thinking during whole group discussions? In J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, B., & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction.* New York: Routledge, Taylor and

Francis.

Jackiw, N. & Sinclair, N. (2009). Sounds and pictures: dynamism and duality in Dynamic Geometry. *ZDM*, *41*(4), 413-426.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., & Foy, P. (with Olson, J.F., Preuschoff, C., Erberber, E., Arora, A., & Galia, J.). (2008).*TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings form IEA'S Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eight Grades.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: Va, NCTM.

National Council on Education and the Disciplines (2001). *Mathematics and Democracy: The case for quantitative literacy.* The Woodrow Wilson National Fellowship Foundation.

OECD Education (2006). *Assessing scientific, reading and mathematical literacy: A framework for PISA 2006*. OECD.

Ruthven, K., Deaney, R., & Hennessy, S. (2009). Using graphing software to teach about algebraic forms: A study of technology-supported practice in secondary-school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 71(3), 279-297.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 55-80.

Sdrolias, K.A., & Triandafillidis, T.A. (2007). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics"? *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 159-169.

Stein, M., & Kim G. (2009). The role of mathematics curriculum materials in large scale urban reform: An analysis of demands and opportunities for teacher learning. In J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, B., & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction.* New York: Routledge, Taylor and Francis.

Weiss, I.R., Knapp, M.S., Hollweg, K.S., & Burrill, G. (2001). *Investigating the Influence of Standards: A Framework for Research in Mathematics, Science, and Technology Education.* Center for Education, National Research Council.

Ευρωπαϊκή Επιτροπή (2009). Συμπεράσματα του συμβουλίου της 12ης Μαΐου 2009 σχετικά με ένα στρατηγικό πλαίσιο για την ευρωπαϊκή συνεργασία στον τομέα της εκπαίδευσης και της κατάρτισης («ΕΚ 2020»). Επίσημη Εφημερίδα της Ευρωπαϊκής Ένωσης, V, 28.5.2009, 2009/C 119/02.

ΑΡΙΘΜΟΙ

Κλίμακα 1

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

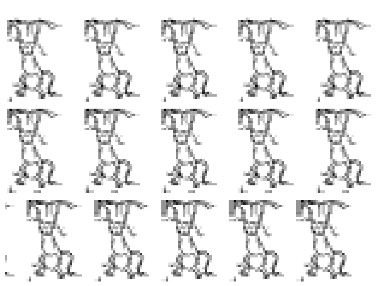
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
1	Απαγγέλλουν, διαβάζουν, γράφουν και αναγνωρίζουν ποσότητες αριθμών μέχρι το 100.
2	Συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 100.
3	Χρησιμοποιούν στρατηγικές άμεσης αναγνώρισης (για αριθμούς μέχρι το 6 ) και αντιστοίχισης στην απαρίθμηση αριθμών.
4	Αναπαριστούν αριθμούς μέχρι το 100 λεκτικά, συμβολικά ή με τη χρήση υλικών, όπως ζάρια, αριθμητήριο, κύβους unifix/Dienes και εφαρμογιδίων.
5	Απαγγέλλουν τους αριθμούς 1-1, 2-2, 5-5 και 10-10 μέχρι το 100.
6	Συνθέτουν και αναλύουν αριθμούς μέχρι το 100 με βάση την αξία θέσης ψηφίου, χρησιμοποιώντας αντικείμενα, εικόνες, και σύμβολα.
7	Αναπαριστούν εναδικά κλάσματα ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$) ενός συνόλου αντικειμένων ή μιας επιφάνειας αντικειμένων, χρησιμοποιώντας αντικείμενα, εικόνες και εφαρμογίδια.
8	Αντιλαμβάνονται διαισθητικά την έννοια του δεκαδικού αριθμού μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ
9	Εκτιμούν τον πληθικό αριθμό συνόλων (μέχρι το 20).
10	Αναπαριστούν καταστάσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης χρησιμοποιώντας υλικά, όπως κύβους unifix/Dienes, εικόνες και εφαρμογίδια.
11	Εκτιμούν και υπολογίζουν το αποτέλεσμα μαθηματικών προτάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης με αριθμούς μέχρι το 20.

12	Υπολογίζουν το άθροισμα και τη διαφορά αριθμών εντός της δεκάδας και αριθμών πολλαπλασίων του δέκα μέχρι το 100.
13	Χρησιμοποιούν και διατυπώνουν στρατηγικές εκτέλεσης νοερών υπολογισμών πρόσθεσης και αφαίρεσης.
14	Χρησιμοποιούν σε δραστηριότητες και προβλήματα: (α) το μηδέν ως το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης (β) την αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση (γ) την αφαίρεση ως αντίθετη πράξη της πρόσθεσης
15	Αναπτύσσουν την έννοια του πολλαπλασιασμού ως αθροιστικών επαναλήψεων ίσων ποσών και διαισθητικά την έννοια της διαίρεσης.
16	Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα διαδικασίας και λεκτικά προβλήματα μίας και δύο πράξεων.

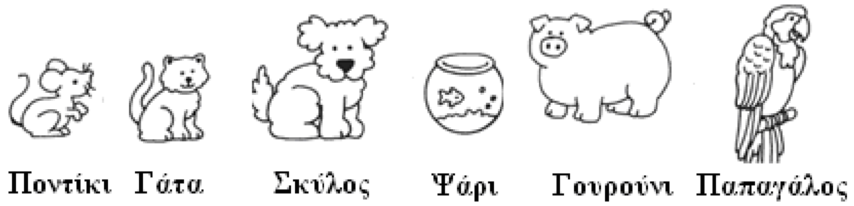
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Αναγνωρίζουν αριθμούς σε καταστάσεις, όπως: «Ο εκπαιδευτικός διαβάζει παραμύθι στο οποίο περιλαμβάνονται αριθμοί. Τα παιδιά σηκώνουν την καρτέλα με το σύμβολο του αριθμού που ανταποκρίνεται στο περιεχόμενο της ιστορίας.»	ΑΡ1.1
2	Αναγνωρίζουν την ποσότητα αντικειμένων σε ένα σύνολο, όπως: «Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό που δείχνει τον πληθικό αριθμό των πιο κάτω αντικειμένων.»	ΑΡ1.1

	
20 21 22 23 24	**10 12 14 15 16 18**

3 Χρησιμοποιούν τη διατακτική έννοια των αριθμών σε καταστάσεις και προβλήματα, όπως: — ΑΡ1.2

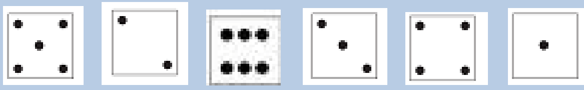
«Να βρείτε ποιο ζώο ανήκει σε κάθε παιδί με βάση την εικόνα και τις πληροφορίες που δίνονται πιο κάτω.»



- Το ζώο της Μαρίας είναι το πέμπτο από αριστερά.
- Το ζώο του Χάρη είναι το δεύτερο από αριστερά.
- Το ζώο της Έλενας είναι μεταξύ του $3^{ου}$ και του $5^{ου}$ ζώου από αριστερά.
- Το ζώο του Γιώργου είναι το πρώτο από δεξιά.

4 Αναγνωρίζουν και γράφουν τον αριθμό που αναπαριστούν εικόνες, όπως: — ΑΡ1.3

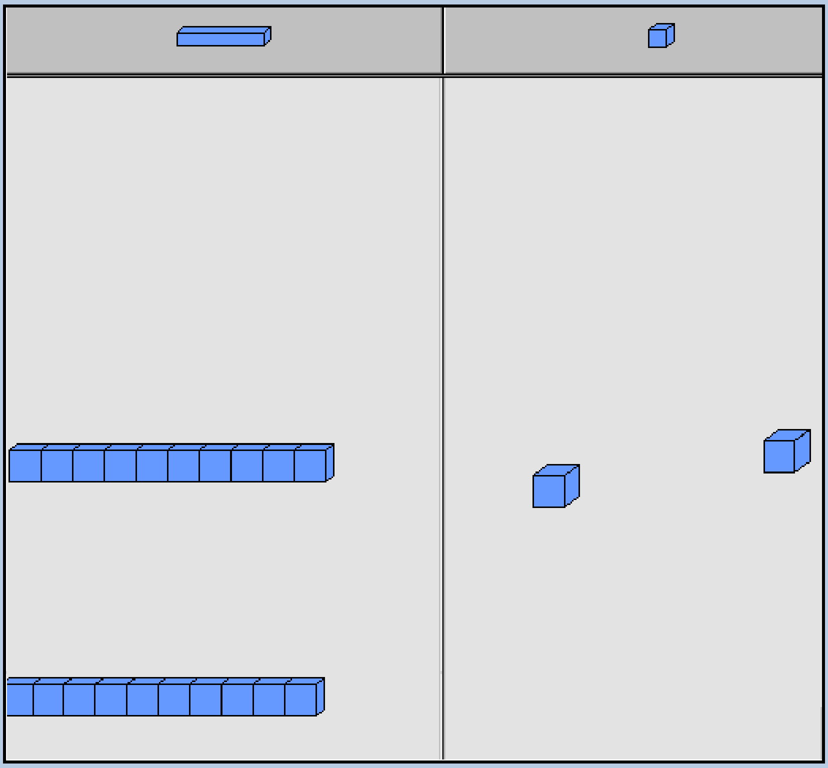
«Να γράψετε τον αριθμό κάτω από κάθε εικόνα.»



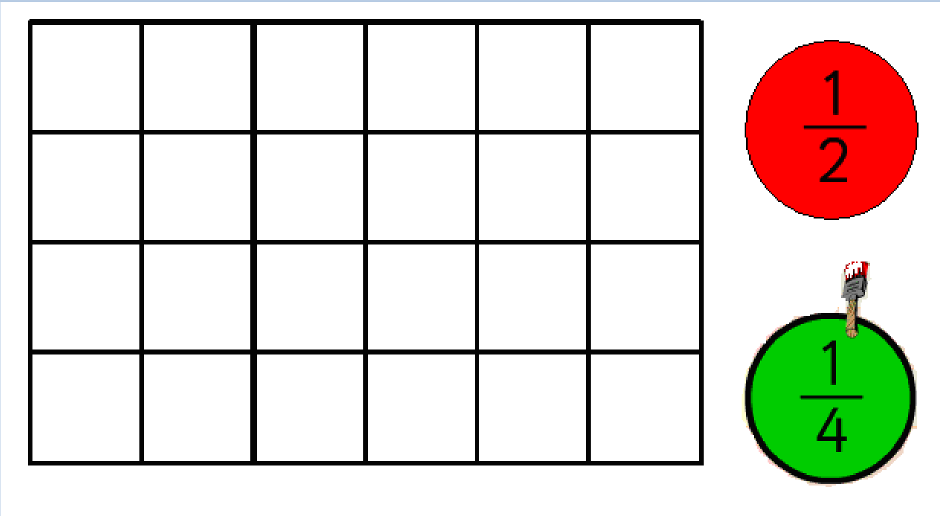
_____ _____ _____ _____ _____ _____

5 Αναπαριστούν αριθμούς, χρησιμοποιώντας κύβους Dienes, όπως: — ΑΡ1.4

«Να σχηματίσετε τον αριθμό 22, χρησιμοποιώντας τους κύβους Dienes.»

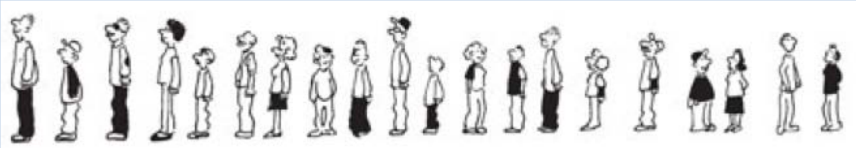


(*“http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_152_g_4_t_2.html”*)

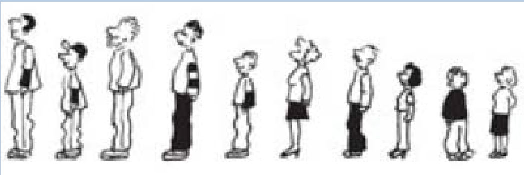
6	Απαριθμούν αντικείμενα 1-1, 2-2, 5-5: «Να υπολογίσετε τον αριθμό των παπουτσιών των μαθητών της τάξης σας, απαριθμώντας τα δύο-δύο.»	ΑΡ1.5
7	Αναλύουν αριθμούς σε δεκάδες και σε μονάδες, όπως: «Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες.» (α) 12 = ___ Δεκάδες + __ Μονάδες = __Μονάδες (β) __= 2 Δεκάδες + 12 Μονάδες = __ Μονάδες	ΑΡ1.6
8	Αναπαριστούν κλάσματα σε μία επιφάνεια, όπως: «Να χρωματίσετε με κόκκινο χρώμα το $\frac{1}{2}$ της πιο κάτω επιφάνειας και με πράσινο χρώμα το $\frac{1}{4}$ της επιφάνειας. Να επαναλάβετε τη διαδικασία, για να δημιουργήσετε όσο το δυνατό περισσότερες επιφάνειες.»  (Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα "*http://www.oswego.org/ocsd-web/games/fractionflags/fractionflags.html*")	ΑΡ1.7
9	Επιλύουν προβλήματα που αφορούν τη διαισθητική αντίληψη της έννοιας του δεκαδικού αριθμού, όπως: «Ο Μάριος θέλει να αγοράσει ένα σάντουιτς που στοιχίζει €1 και μία σοκολάτα που στοιχίζει 50 σεντς. Πόσα θα πληρώσει;»	ΑΡ1.8

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Εκτιμούν τον πληθικό αριθμό συνόλων σε προβλήματα, όπως:	ΑΡ1.9

«Πόσα περίπου άτομα φαίνονται στις πιο κάτω εικόνες;»

(α) 

---------- άτομα

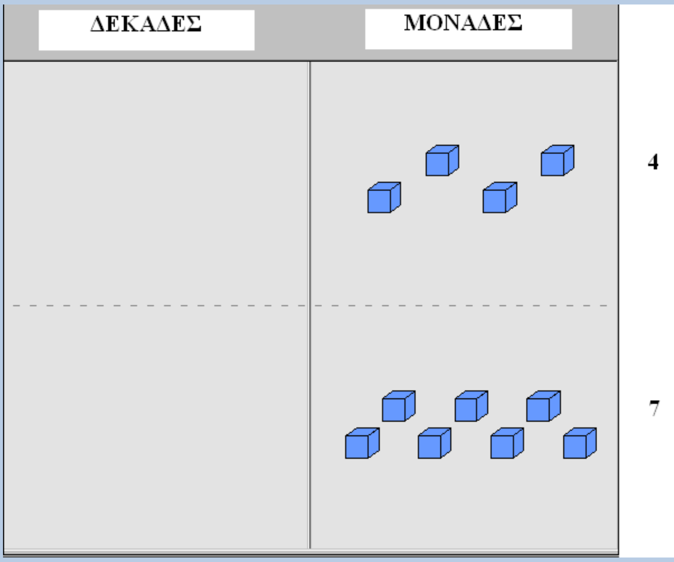
(β)  ---------- άτομα

(γ) 

---------- άτομα

2	Αναπαριστούν καταστάσεις πρόσθεσης, χρησιμοποιώντας τους κύβους Dienes, όπως:	ΑΡ1.10

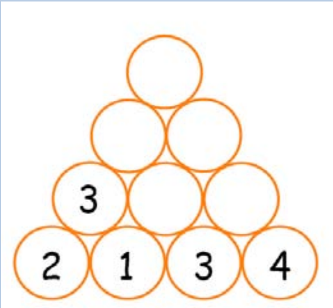
«Να χρησιμοποιήσετε τους κύβους Dienes, για να δείξετε τη μαθηματική πρόταση: 4 + 7.»

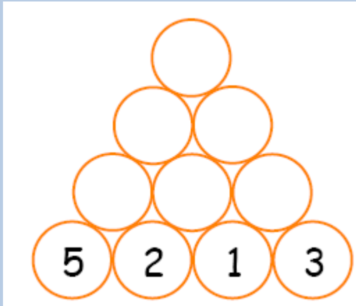


(*“http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_154_g_1_t_1.html”*)

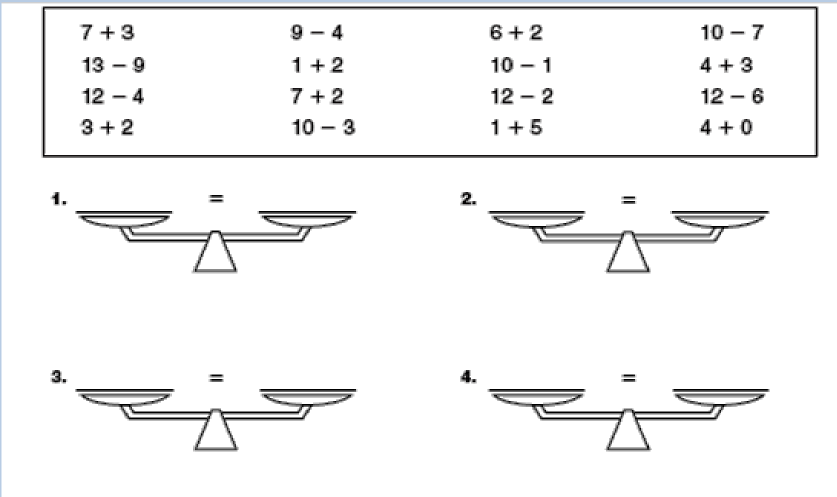
3 Υπολογίζουν τα αποτελέσματα προσθέσεων και αφαιρέσεων σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ1.11

- «Να συμπληρώσετε τους κύκλους έτσι ώστε ο αριθμός σε κάθε κύκλο, να ισούται με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται στους δύο κύκλους κάτω από αυτό.»

(α) 

(β) 

- «Να τοποθετήσετε στις ζυγαριές τα ζευγάρια των πράξεων που έχουν το ίδιο αποτέλεσμα.»



4 Υπολογίζουν το άθροισμα και τη διαφορά αριθμών πολλαπλασίων του δέκα σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ1.12

«Ο Γιάννης ήθελε να κάνει τις πιο κάτω πράξεις στην υπολογιστική μηχανή. Ποιες λανθασμένες ενέργειες έκανε στην υπολογιστική μηχανή ώστε να βρει αυτά τα λανθασμένα αποτελέσματα;»

(α) 50+2=70

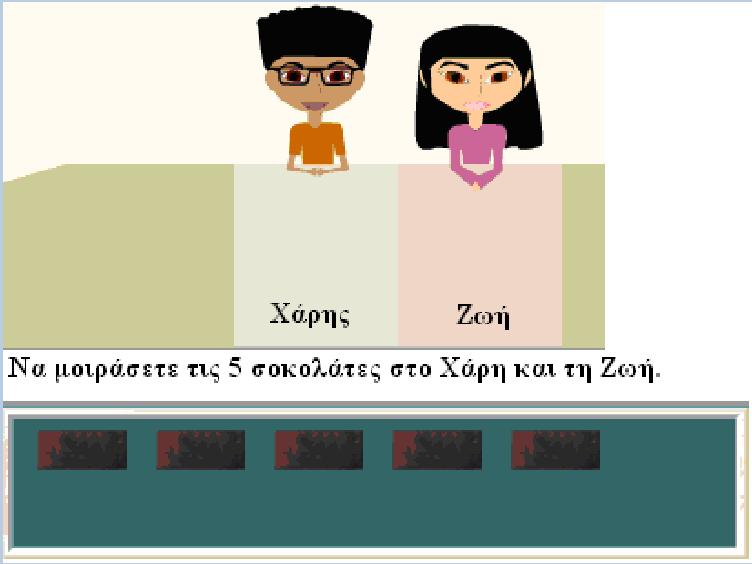
(β) 60-10=59

5 Εκτελούν νοερά πράξεις και εξηγούν τη στρατηγική που χρησιμοποιούν, όπως: ΑΡ1.13

«Να υπολογίσετε τα αποτελέσματα των πιο κάτω πράξεων και να εξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.»

(α) 9 + 5 = ☐

(β) 7 + 6 = ☐

6	Χρησιμοποιούν την αφαίρεση ως αντίθετη πράξη της πρόσθεσης σε δραστηριότητες, όπως: «Να γράψετε δύο προσθέσεις και δύο αφαιρέσεις, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 3, 4 και 7.» ____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____ ____ − ____ = ____ ____ − ____ = ____	ΑΡ1.14
7	Επιλύουν προβλήματα, όπως: «Ο Χάρης και η Ζωή έχουν 5 σοκολάτες. Να σκεφτείτε τρόπους να μοιράσετε στα ίσα τις σοκολάτες στο Χάρη και τη Ζωή.»  (*“Εφαρμογίδιο Kids and Cookies” (Υ.Π.Π.)*)	ΑΡ1.15
8	Επιλύουν λεκτικά προβλήματα, όπως: «Τα παιδιά της Α’ τάξης θα κάνουν ένα μικρό πάρτι στην τάξη τους. Ποιες από τις πιο κάτω συσκευασίες πιάτων και ποτηριών θα πρέπει να έχουν, αν χρειάζονται συνολικά 18 πιάτα και 24 ποτήρια;» **ΠΙΑΤΑ** **ΠΟΤΗΡΙΑ**  8 πιάτα, 10 πιάτα, 5 πιάτα, 4 ποτήρια, 10 ποτήρια, 6 ποτήρια Α, Β, Γ, Ζ, Η, Θ	ΑΡ1.16

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1	Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως το παράδειγμα.	ΑΡ1.1

Προηγούμενος Αριθμός	Αριθμός	Επόμενος Αριθμός
Παράδειγμα: 44	45	46
	30	
	69	

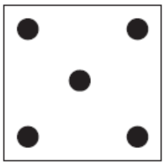
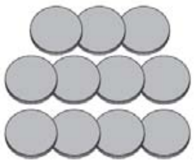
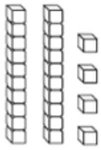
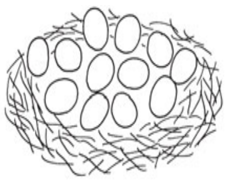
2 Να συμπληρώσετε τις προτάσεις, χρησιμοποιώντας τα ψηφία 7, 8, 6, 1. ΑΡ1.2

(α) Ο επόμενος αριθμός του 7 είναι ο αριθμός ________

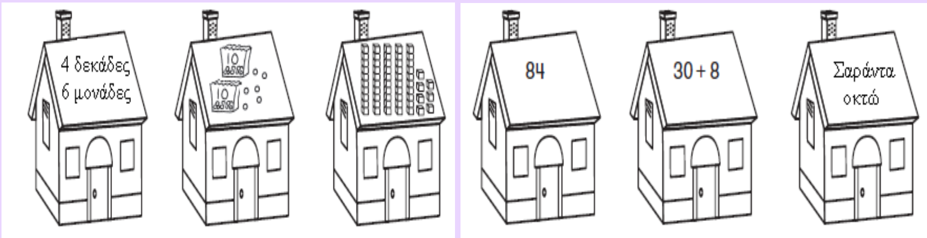
(β) Ο αριθμός που είναι μικρότερος του 18 κατά δύο μονάδες είναι ______

(γ) Ο αριθμός που βρίσκεται μεταξύ του 80 και του 82 είναι _______

3 Να μετρήσετε και να γράψετε κάτω από κάθε εικόνα τον αριθμό των αντικειμένων που υπάρχουν σε αυτή. ΑΡ1.3 ΑΡ1.4

			
______________	______________	__________	_________________

4 Να αντιστοιχίσετε το κάθε σπίτι με το κλειδί του. Ο αριθμός του κάθε σπιτιού είναι γραμμένος με διαφορετικό τρόπο πάνω στο κλειδί του. ΑΡ1.4 ΑΡ1.6



5 Η Γαβριέλα έχει λιγότερα από 10 γλυκά. Τα μέτρησε δύο-δύο και της περίσσεψε ένα γλυκό. Τα μέτρησε πέντε-πέντε και της περίσσεψαν δύο γλυκά. Πόσα γλυκά έχει συνολικά; ΑΡ1.5

6

- Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύει η ισότητα. ΑΡ1.6

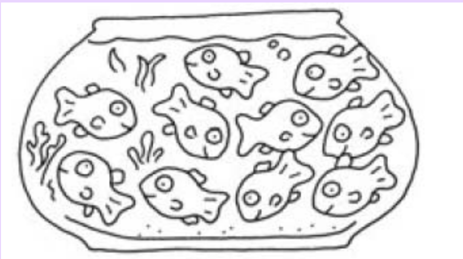
(α) ..... Δεκάδες και 12 Μονάδες = 5 Δεκάδες και ....Μονάδες

(β) 4 Δεκάδες και 4 Μονάδες = ... Δεκάδες και 24 Μονάδες

(γ) 9 Δεκάδες και 1 Μονάδα = ... Δεκάδες και ... Μονάδες

- Ένα κουτί έχει μέσα 11 μπάλες οι οποίες είναι κόκκινες ή γαλάζιες. Πόσες είναι οι κόκκινες μπάλες και πόσες οι γαλάζιες; Να δώσετε όλες τις πιθανές απαντήσεις.

7 Να εκτιμήσετε σε ποια εικόνα υπάρχουν περισσότερα ζώα. ΑΡ1.9

(α) 

(β) 

8

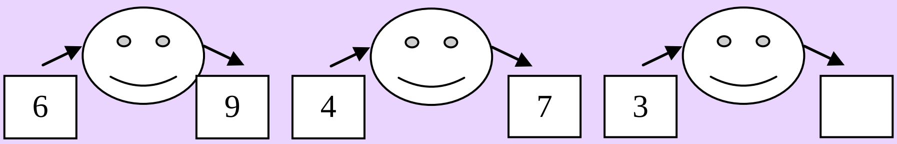
- Να χρωματίσετε με κόκκινο χρώμα τις πράξεις που έχουν αποτέλεσμα μικρότερο του 12. ΑΡ1.13

6 + 6   7 + 8   17 - 9   15 - 2

- Να βάλετε σε κύκλο την πράξη που δίνει το μεγαλύτερο άθροισμα.

43 + 3   34 + 3   10 + 8   48 + 1

9 Το μαγικό ρομπότ λειτουργεί με βάση έναν κανόνα. Να βρείτε τον κανόνα του και να συμπληρώσετε τα κενά. ΑΡ1.11 ΑΡ1.13 ΑΡ1.14



10 Ποιος από τους πιο κάτω μαθητές έχει τα περισσότερα μολύβια; ΑΡ1.15

11

- Να συμπληρώσετε την ερώτηση στο πιο κάτω πρόβλημα. ΑΡ1.16

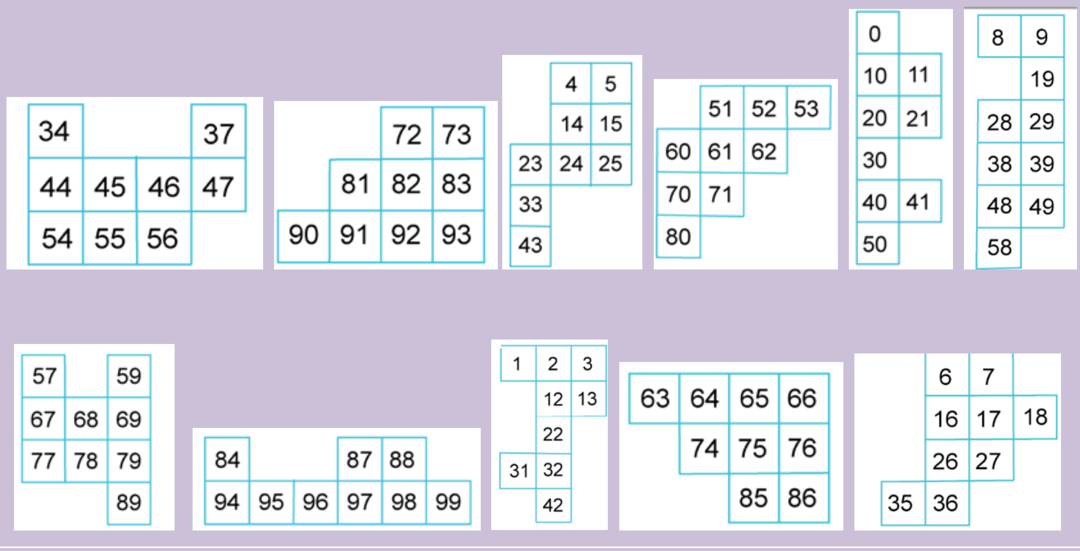
«Στην τάξη μας υπάρχουν τρία βάζα με λουλούδια. Κάθε βάζο έχει 3 λουλούδια.»

- Η Μαρία είχε 20 τάρτες. Έφαγε τις 4 τάρτες και έδωσε τις 10 τάρτες στην αδερφή της. Πόσες τάρτες τις έχουν μείνει;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Ενώνουν τα πιο κάτω κομμάτια, για να φτιάξουν τον πίνακα του 100.



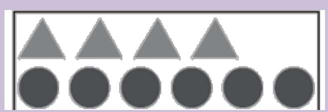
2 Υπολογίζουν πόσες φορές εμφανίζεται το ψηφίο 2 στους αριθμούς από το 1 μέχρι το 100.

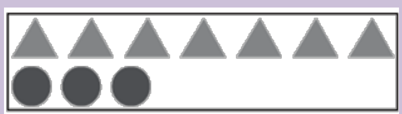
3 Επιλύουν προβλήματα, όπως:

«Ο αριθμός των μολυβιών που έχω στην κασετίνα μου είναι μεταξύ του 5 και του 10. Μπορούν να χωριστούν σε δυάδες αλλά όχι σε τριάδες. Πόσα μολύβια έχω;»

4 Υπολογίζουν τους αριθμούς που φαίνονται στις πιο κάτω εικόνες.

Το τρίγωνο είναι ίσο με 10.
Ο κύκλος είναι ίσο με 1.

(α)  = _______

(β)  = _______

5 Κατασκευάζουν αριθμούς, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, όπως:

«Να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία 3, 4, 5, 6 μόνο μια φορά το καθένα και τα σύμβολα +, - όσες φορές θέλετε, ώστε να φτιάξετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο αριθμό.»

ΑΡΙΘΜΟΙ

Κλίμακα 2

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
1	Απαγγέλουν, διαβάζουν, γράφουν και αναγνωρίζουν ποσότητες αριθμών μέχρι το 10000.
2	Συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 10000.
3	Αναπαριστούν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 10000, χρησιμοποιώντας υλικά, όπως κύβους Dienes, αριθμητήρια, εφαρμογίδια, λέξεις και σύμβολα.
4	Αναλύουν και συνθέτουν με διαφορετικούς τρόπους αριθμούς μέχρι το 10000.
5	Αναπαριστούν, συγκρίνουν και σειροθετούν ομώνυμα κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας κατάλληλο υλικό όπως επιφάνειες, κύκλους κλασμάτων, σύνολα, αριθμητική γραμμή, εικόνες και εφαρμογίδια.
6	Αντιλαμβάνονται διαισθητικά την έννοια του δεκαδικού αριθμού μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
7	Ανακαλύπτουν, διατυπώνουν και εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας του 2, 5 και του 10.
8	Ορίζουν την έννοια του άρτιου, περιττού και πρώτου αριθμού.
9	Αναγνωρίζουν και ονομάζουν τους όρους: άθροισμα, διαφορά, γινόμενο, πηλίκο, αφαιρέτης, αφαιρετέος, προσθετέος, διαιρέτης, διαιρετέος, υπόλοιπο, παράγοντας.

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ
10	Χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους εκτίμησης του πληθικού αριθμού συνόλων.
11	Αναπαριστούν καταστάσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, τέλειας και ατελούς διαίρεσης, χρησιμοποιώντας υλικό όπως κύβους Dienes, εικόνες, εφαρμογίδια και σύμβολα.

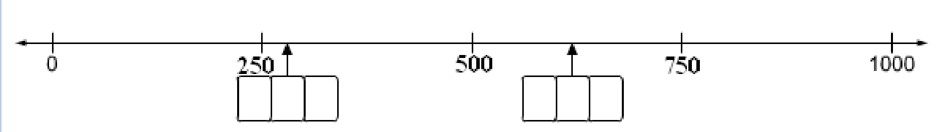
12	Κατανοούν την προπαίδεια του πολλαπλασιασμού και τη διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.
13	Αναπτύσσουν και εφαρμόζουν αλγόριθμους της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού με τριψήφιους αριθμούς και της διαίρεσης με μονοψήφιο διαιρέτη, χρησιμοποιώντας ποικιλία στρατηγικών, μέσων και αναπαραστάσεων.
14	Χρησιμοποιούν σε πράξεις και προβλήματα: (α) το ένα ως το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού (β) το μηδέν ως το απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού (γ) την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού (δ) την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση
15	Χρησιμοποιούν και διατυπώνουν στρατηγικές εκτέλεσης νοερών υπολογισμών με αριθμούς μέχρι το 10000.
16	Εκτιμούν το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού, εφαρμόζοντας στρατηγικές στρογγυλοποίησης ακέραιων αριθμών στην πλησιέστερη δεκάδα, εκατοντάδα και χιλιάδα.
17	Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα διαδικασίας και λεκτικά προβλήματα με περισσότερες από μία πράξεις και ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Διαβάζουν, γράφουν και αναγνωρίζουν αριθμούς μέχρι το 10000 σε δραστηριότητες, όπως: «Να διαβάσετε τους αριθμούς στον πίνακα και να απαντήσετε στις πιο κάτω ερωτήσεις.» (α) Να βάλετε στη σειρά τις αποστολές με βάση χρόνο διάρκειάς τους, ξεκινώντας από αυτή με τις περισσότερες ώρες. (β) Ποια αποστολή έχει διαρκέσει τριακόσιες είκοσι ώρες; (γ) Ποια αποστολή έχει διαρκέσει τις λιγότερες ώρες;	ΑΡ2.1 ΑΡ2.2

Όνομα αποστολής στο φεγγάρι	Διάρκεια ταξιδιού στο φεγγάρι σε ώρες
Απόλλων 11	195
Απόλλων 12	245
Απόλλων 13	216
Απόλλων 14	295
Απόλλων 15	266
Απόλλων 16	302
Απόλλων 17	320

2	Εντοπίζουν αριθμούς με βάση τις οδηγίες, όπως: «Να βρείτε τον αριθμό που είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από το διπλάσιο του αριθμού 8. Ο αριθμός αυτός είναι άρτιος ή περιττός; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.»	ΑΡ2.2 ΑΡ2.8
3	Σχηματίζουν και διατάσσουν τριψήφιους αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως: «Να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία 2, 3, 5, 6, 7, 8 μία φορά τον καθένα, για να σχηματίσετε τριψήφιους αριθμούς και να τους τοποθετήσετε στην πιο κάτω αριθμητική γραμμή.»	ΑΡ2.2 ΑΡ2.4



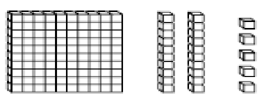
4 Αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας διάφορα υλικά σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.3

«Να σχηματίσετε τους αριθμούς 1678, 4560, 6079, 9306, χρησιμοποιώντας τους κύβους Dienes.»

(*“http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_152_g_1_t_1.html?from=category_g_1_t_1.html”*)

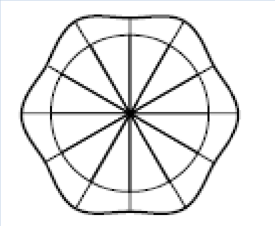
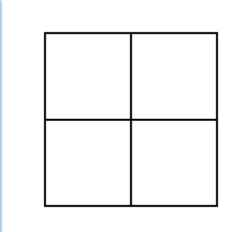
5 Αναλύουν με διαφορετικούς τρόπους αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.4

«Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.»

Εικόνα	**Αναλυτική μορφή**	**Συμβολική μορφή**	**Λεκτική μορφή**
	100 + _ _ + _		
	2000+300+10+5		
		4578	
			Εκατό είκοσι έξι

6 Αναπαριστούν κλάσματα σε επιφάνειες σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.5

«Να σκιάσετε το $\frac{1}{2}$ στις πιο κάτω εικόνες.»

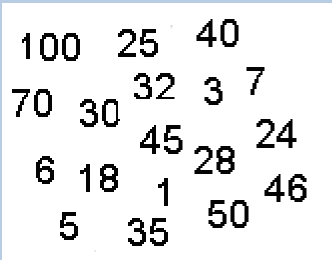
7 Αντιλαμβάνονται το μέγεθος δεκαδικού αριθμού μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής, όπως: ΑΡ2.6

«Να επιλέξετε από τον πιο κάτω τιμοκατάλογο το πιο φτηνό και το πιο ακριβό ρόφημα.»

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΚΑΦΕΤΕΡΙΑΣ «Ο ΑΓΡΟΣ»	
Ροφήματα	**Τιμή (€)**
Κυπριακός καφές	0,80
Ζεστή ή κρύα σοκολάτα	1,35
Φραπέ	1,10
Τσάι	0,60
Νερό	0,45
Αναψυκτικό	0,95

8 Ομαδοποιούν τους φυσικούς αριθμούς με βάση τις ιδιότητες τους σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.8

«Να γράψετε τους πιο κάτω φυσικούς αριθμούς στην κατάλληλη στήλη.»



Άρτιοι	**Περιττοί**	**Πρώτοι**

9 Αναγνωρίζουν και ονομάζουν μαθηματικούς όρους σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.9

«Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αναγνωρίζοντας τους όρους των μαθηματικών προτάσεων που ταιριάζουν σε κάθε περίπτωση.»

Μαθηματική πρόταση	**Άθροισμα**	**Διαιρέτης**	**Διαιρετέος**	**Διαφορά**	**Πηλίκο**
48+102=150					
6:2=3					
255-50= 105					

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Εκτιμούν το πληθικό αριθμό συνόλων σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.10

«Να εκτιμήσετε και να γράψετε κατά πόσο οι ακόλουθες ποσότητες είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες ή ίσες με 1000.»

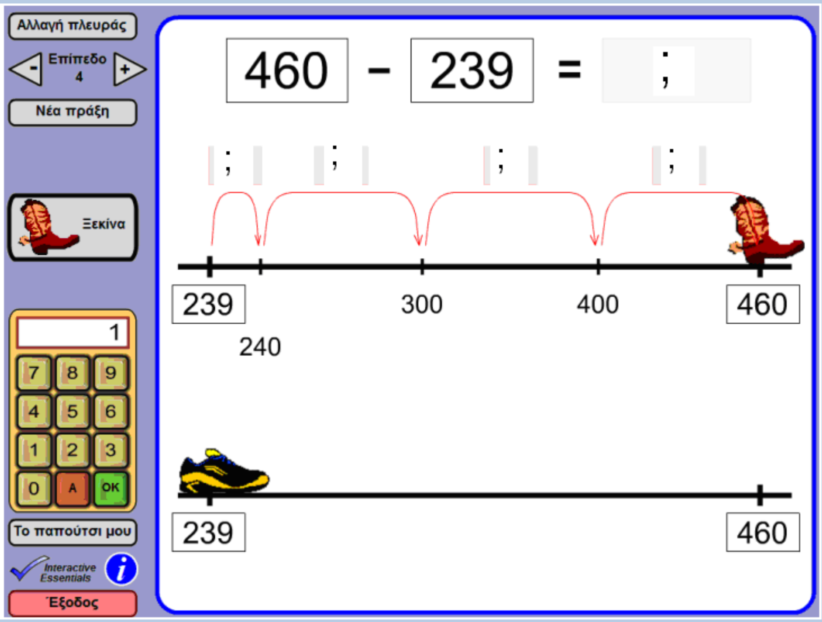
(α) Οι μαθητές του σχολείου.

(β) Οι κάτοικοι της Λευκωσίας.

(γ) Τα ψάρια της θάλασσας.

2 Αναπαριστούν καταστάσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης, χρησιμοποιώντας διάφορα υλικά, όπως: ΑΡ2.11

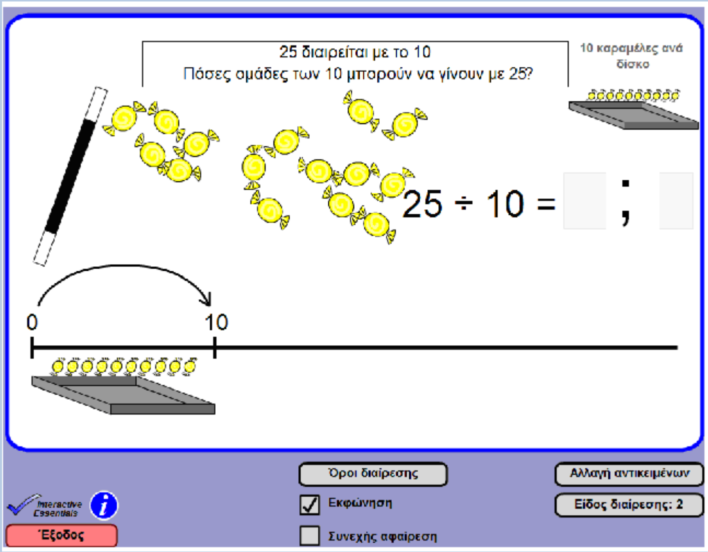
«Να χρησιμοποιήσετε την αριθμητική γραμμή, για να δείξετε τη μαθηματική πρόταση: 460 – 239.»



(Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά, χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα: *Από το λογισμικό Γεωμετρία, Αριθμοί και Μέτρηση (Υ.Π.Π.)*)

3 Επιλύουν καταστάσεις ατελούς διαίρεσης, χρησιμοποιώντας διάφορα υλικά, όπως: ΑΡ2.11

«Έχω 25 καραμέλες και θα τις τοποθετήσω σε δίσκους. Σε κάθε δίσκο πρέπει να τοποθετήσω 10 καραμέλες. Να χρησιμοποιήσετε την πιο κάτω εικόνα και την αριθμητική γραμμή για να υπολογίσετε τον αριθμό των ομάδων των 10 που πρέπει να γίνουν οι 25 καραμέλες και τον αριθμό των καραμελών που θα περισσέψουν.»



(Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά, χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα: *Από το λογισμικό Γεωμετρία, Αριθμοί και Μέτρηση (Υ.Π.Π.)*)

4 Εφαρμόζουν την προπαίδεια του πολλαπλασιασμού σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.12

«Να συμπληρώσετε τα κενά στον πιο κάτω πίνακα πολλαπλασιασμού.»

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0				0			0	0	0	0	
1				3			6	7	8	9	
2				6			12	14	16	18	
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4				12			24	28	32	36	
5				15			30	35	40	45	
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10				30			60	70	80	90	

5 Εφαρμόζουν τη διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.12

«Να αντιστοιχίσετε τις πράξεις της στήλης Α με τις πράξεις της στήλης Β.»

Α	Β
(ι) 455 $\div$ 5 = ___	(α) 120 $\div$ 20 = __
(ιι) 6 $\times$ 20 =___	(β) 5 $\times$ 91=___
(ιιι) 980 $\div$ 7 = ___	(γ) 140 $\times$ 7 =___

6 Εφαρμόζουν αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης σε προβλήματα, όπως: ΑΡ2.13

«Να βρείτε τον αριθμό της φανέλας του κάθε μαθητή,υπολογίζοντας το αποτέλεσμα των πράξεων που αντιστοιχεί στο όνομά του/της. Πόσοι μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό φανέλας;»

Μαθητής	Πράξη	Αριθμός Φανέλας
Νίκος	80 - 30	
Σάββας	5 + 2	
Κώστας	21 + 12	
Μελίνα	48 - 41	
Ειρήνη	10 - 3	
Άντρη	95 - 45	
Πάρης	10 + 40	
Στέλλα	39 – 6	

7 Χρησιμοποιούν ιδιότητες του πολλαπλασιασμού σε πράξεις και προβλήματα, όπως: ΑΡ2.14

«Να χρησιμοποιήσετε τους αριθμούς 2, 4, 8 όσες φορές θέλετε τον καθένα, ώστε να συμπληρώσετε τα κενά.»

(α) $\square \times \square = \square$

(β) $\square \times \square = \square$

(γ) $(\square + \square) \times \square = \square$

8 Ελέγχουν νοερά την ορθότητα των αποτελεσμάτων μαθηματικών προτάσεων σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ2.15

«Να ελέγξετε την ορθότητα των πιο κάτω πολλαπλασιασμών, χωρίς να κάνετε τις πράξεις και να τις διορθώσετε.»

$5 \times 27 = 134$
$5 \times 39 = 195$
$5 \times 42 = 208$
$5 \times 51 = 251$

9 Επιλύουν προβλήματα, όπως: ΑΡ2.17

- «Για να βρείτε την ηλικία του σκύλου σε ανθρώπινα χρόνια υπάρχουν δύο τρόποι.

Α΄ τρόπος: Να πολλαπλασιάσετε την ηλικία του σκύλου επί 7.

Β΄ τρόπος: Τα δύο πρώτα χρόνια της ζωής του σκύλου ισούνται με 35 ανθρώπινα χρόνια ζωής. Μετά τα δύο χρόνια κάθε χρόνος ζωής του σκύλου ισοδυναμεί με τρία ανθρώπινα χρόνια.

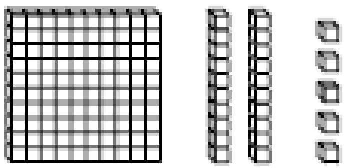
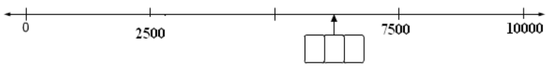
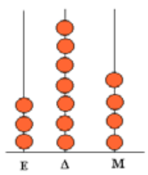
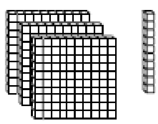
Να μελετήσετε τους δύο τρόπους και να κάνετε παρατηρήσεις. Να υπολογίσετε την ηλικία ενός σκύλου σε ανθρώπινα χρόνια και με τους δύο τρόπους, αν ο σκύλος είναι 9 χρόνων.

- «Ο Μιχάλης, ο Χάρης και ο Νίκος χρησιμοποιούν ως κωδικούς στους υπολογιστές τους τετραψήφιους αριθμούς (2255, 4789, 5001). Να βρείτε τον κωδικό του κάθε μαθητή, αν γνωρίζετε ότι:

- Ο κωδικός του Μιχάλη έχει στη θέση των δεκάδων άρτιο αριθμό.
- Ο κωδικός του Χάρη έχει στη θέση των εκατοντάδων άρτιο αριθμό.
- Ο κωδικός του Νίκου έχει στη θέση των χιλιάδων περιττό αριθμό.»

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1	Να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία 1, 3 και 8 όσες φορές θέλετε τον καθένα, για να κατασκευάσετε τους αριθμούς οι οποίοι είναι: (α) Μικρότεροι από το 200: ________________________________ (β) Μεγαλύτεροι από το 800: ______________________________ (γ) Μεταξύ του 300 και του 400: ____________________________	ΑΡ2.1 ΑΡ2.2
2	Να γράψετε τους αριθμούς που δείχνουν οι πιο κάτω εικόνες.	ΑΡ2.3

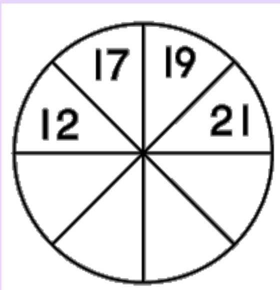
Αναπαράσταση αριθμού	Αριθμός
	125
	
	
	

3	Να συμπληρώσετε τα κενά. (α) __Εκατοντάδες + __Δεκάδες + __ Μονάδες= 115 Μονάδες (β) _ _ _ _ + _ _ _ + _ _+ _ = 3200 + _ _= _ Δεκάδες Χιλιάδες + _ Εκατοντάδες + 10 Δεκάδες + 5 Μονάδες	ΑΡ2.4
4	Δίνεται το ύψος των παιχτών της εθνικής μας ομάδας καλαθοσφαίρισης. Να βάλετε στη σειρά τα ονόματα των παιχτών, ξεκινώντας από τον παίχτη με το χαμηλότερο ύψος.	ΑΡ2.5 ΑΡ2.6

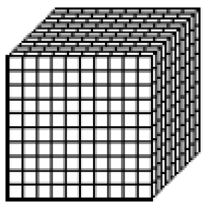
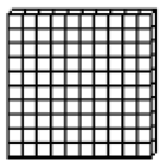
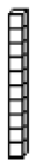
Όνομα παίχτη	**Ύψος (m)**
Σταύρος	2,12
Αντρέας	1,98
Περικλής	2,03
Σωτήρης	1,85
Χαράλαμπος	2,10
Νίκος	2,01
Μάριος	1,89
Παντελής	1,94
Γιάννης	1,97
Κυριάκος	2,04

5 Να γράψετε το σύνολο των αριθμών από το 1 μέχρι το 50, οι οποίοι δεν διαιρούνται ούτε με το 2 ούτε με το 5. ΑΡ2.7

6 Να συμπληρώσετε τον τροχό με αριθμούς, ώστε το πλήθος των άρτιων αριθμών να είναι ίσο με το πλήθος των περιττών αριθμών. ΑΡ2.8



7 Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να δείξετε τον αριθμό 5325, χρησιμοποιώντας τους κύβους Dienes. ΑΡ2.11

Αριθμός	**Κύβοι**			
				
5325				
5325				
5325				

8 Να συμπληρώσετε τα κενά. ΑΡ2.12

(α) $8 \times 5 = \square \times 10 = \square$

(β) $\square \times 6 = \square \div 4 = 6$

9 Να συμπληρώσετε τα κενά $\square$ με τα ψηφία 6, 9, 4, 2,1 και τα $\square$ με τα σύμβολα πράξεων $\boxed{+, -, x, \div, =}$, έτσι ώστε να καταλήξουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα. ΑΡ2.13

$\square \; \square \; \square \; \square \; \square \; \square \; \square \; \square \; \boxed{10}$

10 Να τοποθετήσετε τα σύμβολα των πράξεων $\boxed{+, -, x, \div}$, στις πιο κάτω μαθηματικές προτάσεις ώστε να ισχύουν οι ισότητες. ΑΡ2.14

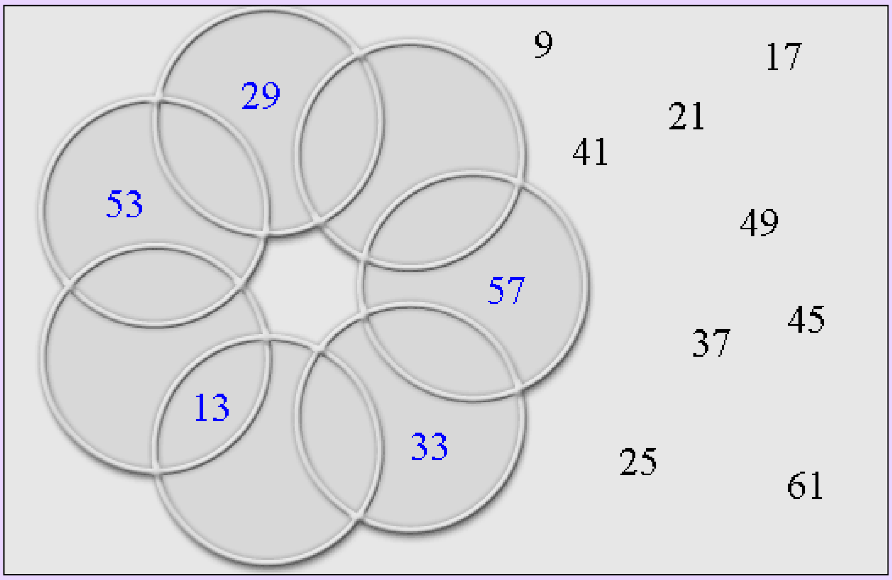
(α) 7 __ 1 __ 2 = 9

7 __ 1 __ 2 = 14

(β) 4 __ 0 __ 1 = 0

4 __ 0 __ 1 = 3

11 Να τοποθετήσετε αριθμούς στο διάγραμμα, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται σε κάθε κύκλο να είναι ίσο με 99. ΑΡ2.13 ΑΡ2.15



12 Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα < ή >, εκτιμώντας ποιο άθροισμα είναι το μεγαλύτερο ή το μικρότερο. ΑΡ2.16

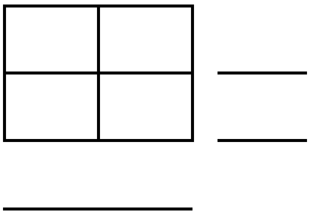
	1. 35 + 51 ◯ 37 + 39 2. 62 + 22 ◯ 55 + 33 3. 29 + 52 ◯ 53 + 39 4. 15 + 47 ◯ 18 + 39 5. 48 + 25 ◯ 52 + 15 6. 36 + 42 ◯ 22 + 49	
13	Ένα μικρό ζαχαροπλαστείο έφτιαξε 230 κεραστικά για μία βάφτιση. Έβαλε τα κεραστικά σε κασόνια των 50. Να υπολογίσετε τα κασόνια που ετοιμάστηκαν και να ελέγξετε τη λογικότητα της απάντησής σας.	ΑΡ2.17

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

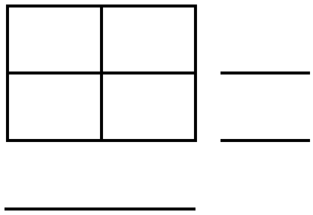
Οι μαθητές:

1 Τοποθετούν τους τέσσερις αριθμούς στα τετράγωνα, έτσι ώστε η διαφορά των αριθμών οριζόντια και κατακόρυφα να είναι η ίδια.

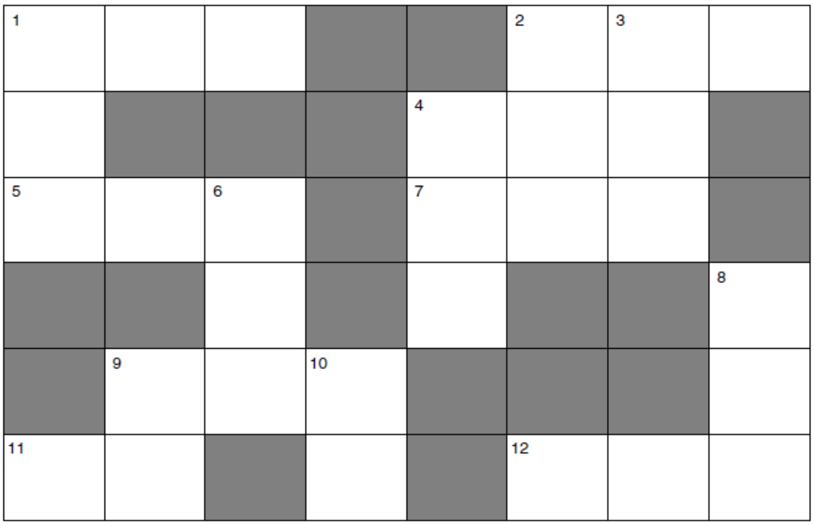
1. 7, 19, 24, 12



2. 8, 32, 19, 21

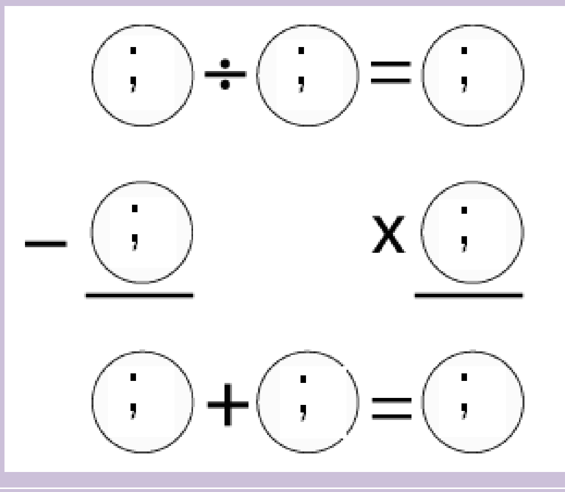


2 Συμπληρώνουν το σταυρόλεξο.



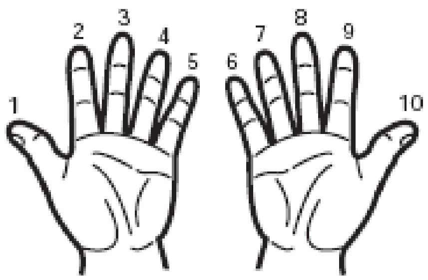
ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ	ΚΑΘΕΤΑ
1. 254 – 87	**1.** 323 – 149
2. 751 – 475	**2.** 413 – 172
4. 517 – 172	**3.** 921 – 169
5. 634 – 209	**4.** 511 – 153
7. 819 – 307	**6.** 723 – 141
9. 416 – 89	**8.** 252 – 88
11. 313 – 244	**9.** 125 – 86
12. 541 – 267	**10.** 764 – 689

3 Συμπληρώνουν τα κενά με τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 8, ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις.



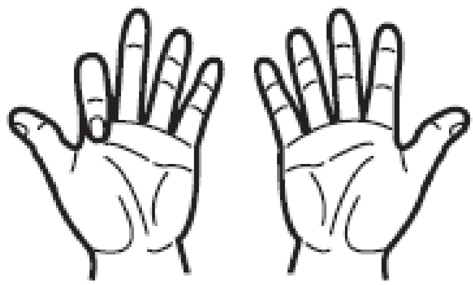
4 Βρίσκουν τα γινόμενα που βρίσκονται στον πίνακα του 9 με τη μέθοδο: «Γινόμενα με δάχτυλα».

Η μέθοδος «Γινόμενα με δάκτυλα» είναι μία αρχαία μέθοδος υπολογισμού του γινομένου, όταν ο ένας παράγοντας είναι το 9. Όλα τα δάχτυλα παίρνουν αριθμούς από το 1 μέχρι το 10, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Αν έχουμε για παράδειγμα το γινόμενο 2 × 9, κλείνουμε το δάχτυλο που αντιστοιχεί στο 2, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Το γινόμενο βρίσκεται ξέροντας ότι το δάκτυλο στα αριστερά του 2 δείχνει τον αριθμό των δεκάδων (1) και ο αριθμός των δακτύλων στα δεξιά του 2 ισούται με τον αριθμό των μονάδων (8), άρα η απάντηση είναι 18.



Σχήμα 2

5 Βρίσκουν το μονοψήφιο περιττό αριθμό που παριστάνει το κάθε σύμβολο.

1.
♥ × ■ = 35
______ × ______ = 35
35 ÷ ______ = ______
35 ÷ ______ = ______

2.
● × ▼ = 9
______ × ______ = 9
9 ÷ ______ = ______
9 ÷ ______ = ______

3.
★ × ● = 27
______ × ______ = 27
27 ÷ ______ = ______
27 ÷ ______ = ______

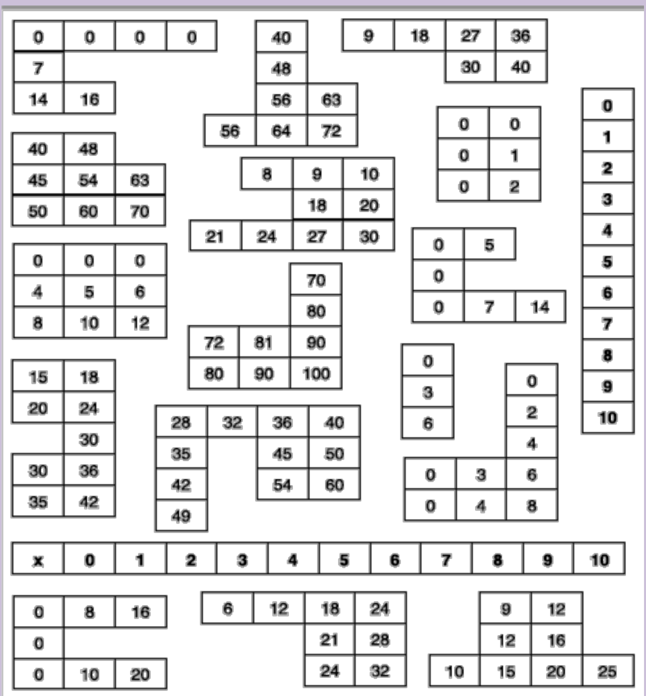
4.
♥ × ● = 45
______ × ______ = 45
45 ÷ ______ = ______
45 ÷ ______ = ______

5.
♥ × ★ = 15
______ × ______ = 15
15 ÷ ______ = ______
15 ÷ ______ = ______

6.
▼ × ■ = 7
______ × ______ = 7
7 ÷ ______ = ______
7 ÷ ______ = ______

♥ = _____ ■ = _____ ★ = _____ ▼ = _____ ● = _____

6 Συμπληρώνουν το παζλ του πίνακα του πολλαπλασιασμού.



ΑΡΙΘΜΟΙ

Κλίμακα 3

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
1	Απαγγέλουν, διαβάζουν, γράφουν και αναγνωρίζουν ποσότητες αριθμών μέχρι το 1000 000.
2	Συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1000 000.
3	Συνθέτουν και αναλύουν αριθμούς μέχρι το 1000 000.
4	Απαγγέλουν, διαβάζουν, γράφουν, αναγνωρίζουν, συγκρίνουν και διατάσσουν ομώνυμα κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς (μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία).
5	Μετατρέπουν δεκαδικούς αριθμούς σε κλάσματα και ποσοστά και αντίστροφα.
6	Ερμηνεύουν το κλάσμα ως μέρος της ακέραιας μονάδας, ως μέρος συνόλου, ως μέτρο και ως πηλίκο.
7	Χρησιμοποιούν ποικίλα μέσα αναπαράστασης και στρατηγικές, για να απλοποιούν κλάσματα και να βρίσκουν ισοδύναμες μορφές τους.
8	Χρησιμοποιούν αρνητικούς αριθμούς στην καθημερινή ζωή.
9	Ανακαλύπτουν, διατυπώνουν και εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας του 3 και του 9.
10	Αναλύουν και εκφράζουν έναν ακέραιο αριθμό ως γινόμενο παραγόντων.

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ
11	Χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους εκτίμησης του πληθικού αριθμού συνόλων.
12	Εκτιμούν και υπολογίζουν το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο αριθμών μέχρι το 1000 000 και επαληθεύουν την απάντησή τους.

13	Αναπτύσσουν και εφαρμόζουν αλγόριθμους των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς, χρησιμοποιώντας ποικιλία στρατηγικών, μέσων και αναπαραστάσεων.
14	Εκτελούν πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης δεκαδικών αριθμών και ομώνυμων κλασμάτων και επαληθεύουν την απάντησή τους.
15	Εκτελούν πράξεις πολλαπλασιασμού, όταν ένας παράγοντας είναι ακέραιος (π.χ. $23 \times 0{,}25$) και διαίρεσης, όταν ο διαιρέτης είναι ακέραιος αριθμός (π.χ. $\frac{4}{5} \div 2$) και επαληθεύουν την απάντησή τους.
16	Χρησιμοποιούν και διατυπώνουν στρατηγικές εκτέλεσης νοερών υπολογισμών με ακέραιους και δεκαδικούς αριθμούς.
17	Στρογγυλοποιούν αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα, εκατοντάδα, χιλιάδα και εκατομμύριο και δεκαδικούς αριθμούς στο πλησιέστερο δέκατο και εκατοστό.
18	Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα με ακέραιους, κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς και ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους.
19	Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της αναγωγής στην ακέραια μονάδα (προφορικά και γραπτά) στη λύση προβλημάτων.

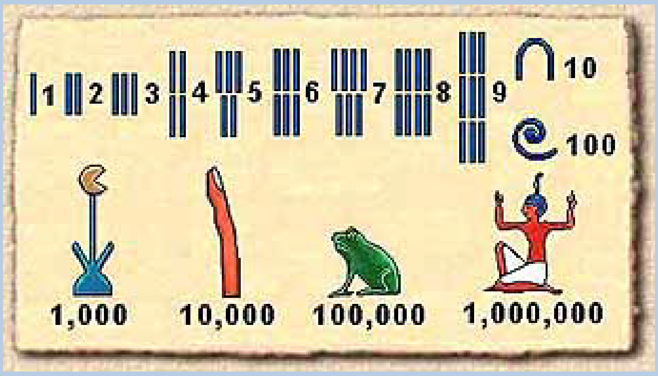
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Μετατρέπουν αριθμούς δοσμένους σε κάποιο σύστημα αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, και αντίστροφα, όπως: — ΑΡ3.1

«Να γράψετε τον αριθμό 548 555 στο αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης, χρησιμοποιώντας την πιο κάτω εικόνα.»



2 Συγκρίνουν αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως: — ΑΡ3.2

- «Να χρησιμοποιήσετε τα σύμβολα $\boxed{<, >, =}$, για να συγκρίνετε αριθμούς.»

  (α) 405 990 _____ 450 990

  (β) οκτακόσιες εβδομήντα χιλιάδες _____ 87 000

- «Να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία 3, 4, 7 και 8 από μία φορά το καθένα, για να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να σχηματίσετε τρεις αριθμούς οι οποίοι να είναι μεγαλύτεροι από το 518 321.»

  (α) 518 321 < 51 _ _ _ _

  (β) 518 321 < 51 _ _ _ _

  (γ) 518 321 < 51 _ _ _ _

3 Αναλύουν και συνθέτουν αριθμούς σε δραστηριότητες και προβλήματα, όπως: — ΑΡ3.3

- «Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.»

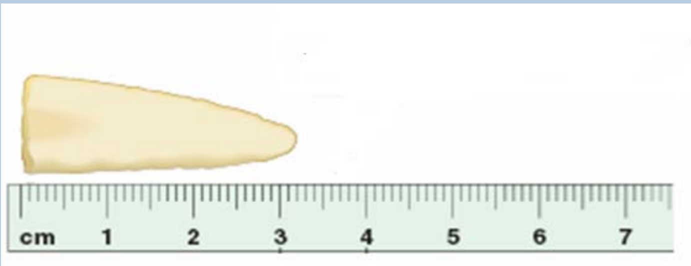
Αριθμός	Αναλυτική μορφή
455 633	
	$(879 \times 1000) + (4 \times 100) + (32 \times 10)$

- «Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.»

Αριθμός	ΕΚΑΤ. ΧΙΛΙΑΔ.	ΔΕΚ. ΧΙΛΙΑΔ.	ΜΟΝ. ΧΙΛΙΑΔ.	ΕΚΑΤ.	ΔΕΚ.	ΜΟΝ.
899 132						
302 025						

4 Διαβάζουν και αναγνωρίζουν κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ3.4

«Να χρησιμοποιήσετε το χάρακα που φαίνεται πιο κάτω, για να βρείτε το μήκος του δοντιού του ελέφαντα.»



5 Σειροθετούν κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως:

- «Να βάλετε στη σειρά τα κλάσματα $\frac{1}{18}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, αρχίζοντας από το μεγαλύτερο.»
- «Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους δεκαδικούς αριθμούς που δίνονται πιο κάτω.

1,5	0,45	1,02	0,13	0,6	0,99	2,5	1,1	0,07	0,2
1,75	0,69	0,5	2,0	0,75	3,1	2,02	2,2	3,25	3,5

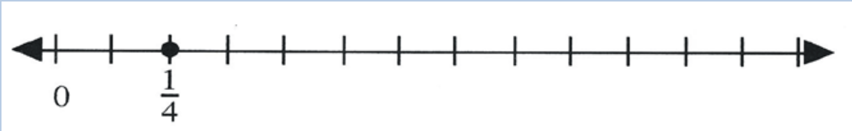
6 Συγκρίνουν κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ3.4

«Να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία 3, 2, 1 και 9, μία φορά το καθένα για να συμπληρώσετε τα κενά, έτσι ώστε να ισχύει η πιο κάτω σχέση.»

$$3{,}9\square\square < \square{,}921 < 3{,}\square 3$$

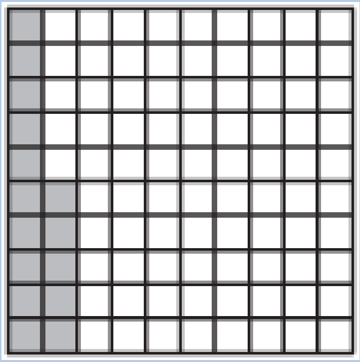
7 Τοποθετούν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς στην αριθμητική γραμμή σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ3.4 ΑΡ3.6

«Να τοποθετήσετε στην αριθμητική γραμμή τους αριθμούς: $\frac{1}{8}$, 0,5, 1, $\frac{5}{8}$, 0,75, 1,25.»



8 Μετατρέπουν δεκαδικούς σε κλάσματα και ποσοστά και αντίστροφα, σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ3.5

«Τι μέρος της επιφάνειας είναι το σκιασμένο; Η απάντησή σας να δοθεί σε μορφή κλάσματος, σε δεκαδικό αριθμό και σε ποσοστό.»



9 Ερμηνεύουν το κλάσμα ως μέρος της ακέραιας μονάδας, ως μέρος συνόλου, ως μέτρο και ως πηλίκο σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ3.6

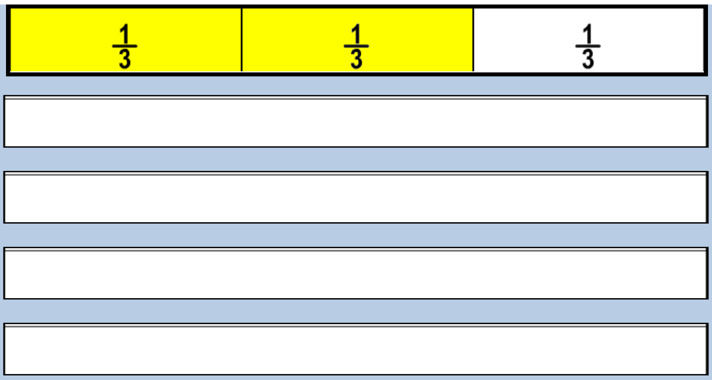
- «Να βρείτε δύο κλάσματα μεταξύ του $\frac{1}{6}$ και του $\frac{1}{5}$ και να δείξετε τον τρόπο που εργαστήκατε.»
- «Να μοιράσετε στα ίσα τρία μήλα σε τέσσερα παιδιά. Τι μέρος του μήλου θα πάρει το κάθε παιδί;»
- «Πόσα λεπτά είναι το $\frac{5}{6}$ της ώρας;»

10 Αναγνωρίζουν και υπολογίζουν ισοδύναμα κλάσματα σε προβλήματα, όπως: ΑΡ3.7

- «Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει, ώστε τα κλάσματα να είναι ισοδύναμα.»

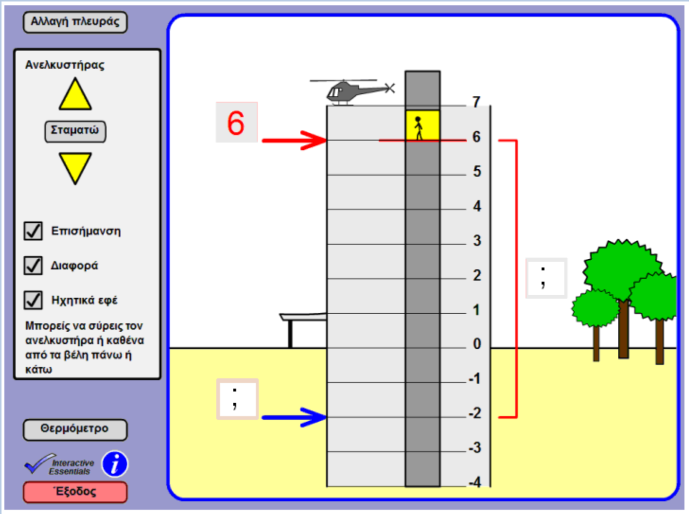
  (α) $\frac{3}{7} = \frac{9}{;}$, (β) $\frac{5}{8} = \frac{;}{32}$, (γ) $\frac{6}{9} = \frac{;}{3}$

- «Να βρείτε ισοδύναμα κλάσματα με το $\frac{2}{3}$, χωρίζοντας τις πιο κάτω ράβδους σε συγκεκριμένα κομμάτια.»



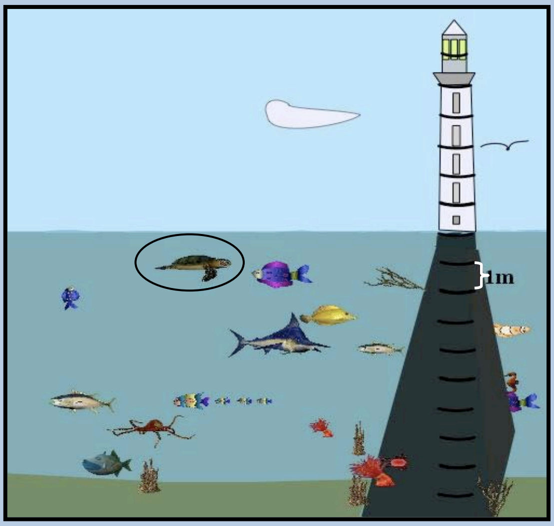
11 Επιλύουν προβλήματα με αρνητικούς αριθμούς, όπως: ΑΡ3.8

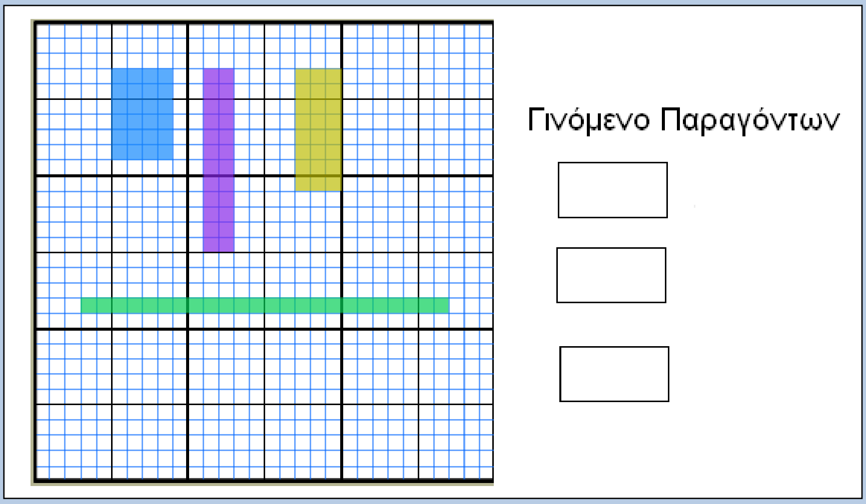
- «Ο κ. Αντρέας μένει στον 6^{ο} όροφο μιας πολυκατοικίας. Κάθε πρωί κατεβαίνει στο δεύτερο όροφο του υπογείου, για να πάρει το αυτοκίνητό του. Πόσους ορόφους κατεβαίνει κάθε πρωί;»



(Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά, χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα: *Από το λογισμικό Γεωμετρία, Αριθμοί και Μέτρηση (Υ.Π.Π.)*)

- «Η χελώνα στην πιο κάτω εικόνα θέλει να ανέβει στην επιφάνεια της θάλασσας. Πόσα μέτρα θα πρέπει να μετακινηθεί;»



12	Αναλύουν έναν ακέραιο αριθμό σε γινόμενο παραγόντων σε προβλήματα σε δραστηριότητες, όπως: «Να βρείτε τους παράγοντες του αριθμού 24, κατασκευάζοντας διαφορετικά ορθογώνια με εμβαδόν 24.»  (Για τη δραστηριότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί τετραγωνισμένο πλέγμα είτε στη φυσική είτε στην ηλεκτρονική του μορφή: *http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=64*)	ΑΡ3.10

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Εκτιμούν το πλήθος των αντικειμένων σε διάφορες καταστάσεις, όπως: «Να εκτιμήσετε τον αριθμό των οχημάτων που εμφανίζονται στην εικόνα.»	ΑΡ3.11

2	Εκτελούν πράξεις σε δραστηριότητες, όπως: «Να συμπληρώσετε τα κενά με τα ψηφία 0 μέχρι 9. Το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές.»	ΑΡ3.12

(α)
$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & \square & 4 \\ & \square & 8 & 5 & 3 \\ + & 1 & 6 & 4 & \square \\ \hline & 5 & \square & 6 & 7 \end{array}$$

(β)
$$\begin{array}{rcccc} & \square & 5 & 7 & \square \\ - & 2 & \square & 4 & 8 \\ \hline & 3 & 9 & \square & 3 \end{array}$$

(γ)
$$\begin{array}{cccccc} & & & \square & 5 & 2 \\ & & & \mathrm{X} & 1 & 8 \\ \hline & & 5 & 2 & \square & \square \\ & & 6 & \square & \square & + \\ \hline \square & \square & 7 & 3 & 6 & \end{array}$$

(δ)
$$\begin{array}{l|l} 8\square\square & 4 \\ \hline & \square 0 2 \end{array}$$

3 Υπολογίζουν το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο αριθμών σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ3.12

«Να βρείτε έναν τρόπο για να υπολογίσετε το πηλίκο 9288 ÷ 54=, χρησιμοποιώντας υπολογιστική μηχανή της οποίας το πλήκτρο με τον αριθμό 5 είναι χαλασμένο.»

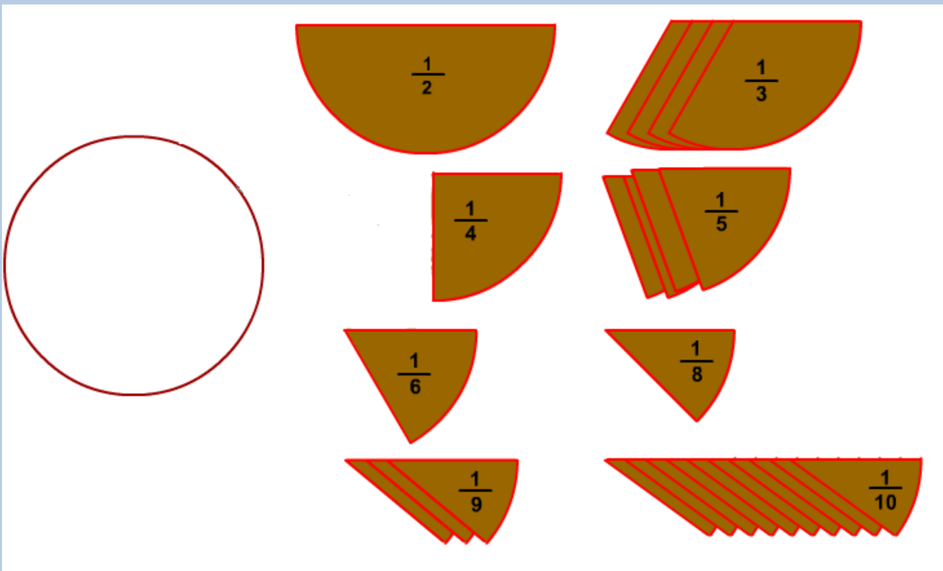
4 Υπολογίζουν το γινόμενο δύο αριθμών, με διαφορετικές μεθόδους, όπως: ΑΡ3.13

- «Να βρείτε το γινόμενο του 44×327 με τη μέθοδο των Αρχαίων Αιγυπτίων και των Ρώσων Χωρικών.»
- «Πέντε παιδιά βρήκαν με διαφορετικό τρόπο το γινόμενο του 123×645, όπως φαίνεται πιο κάτω. Γιατί και οι πέντε αυτοί τρόποι δίνουν το σωστό αποτέλεσμα;»

ΜΑΡΙΑ	**ΣΤΕΛΙΟΣ**	**ΜΑΡΙΟΣ**	**ΜΑΤΘΑΙΟΣ**	**ΞΕΝΙΑ**
123 × 645 615 738 492 79335	123 × 645 492 615 738 79335	123 × 645 492 738 615 79335	123 × 645 738 492 615 79335	123 × 645 738 615 492 79335

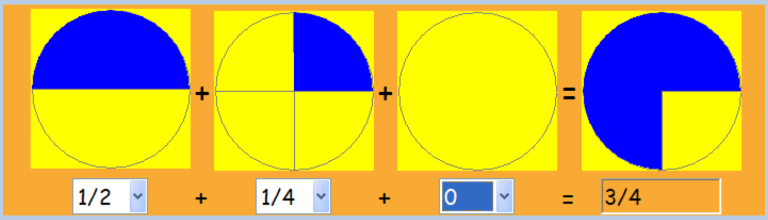
5 Εκτελούν πράξεις πρόσθεσης κλασματικών αριθμών σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ3.14

- «Να συμπληρώσετε τον κύκλο με όσο το δυνατόν διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας τα κομμάτια που φαίνονται στην εικόνα.»



(Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά, χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα: *http://www.visualfractions.com/CookiesF.html*)

- «Στην αρχαία Αίγυπτο έγραφαν τα κλάσματα ως άθροισμα κλασμάτων με αριθμητή 1 και παρονομαστή οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό. Για παράδειγμα τα $\frac{3}{4}$ τα έγραψαν ως άθροισμα του $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Να γράψετε το κλάσμα $\frac{3}{8}$, χρησιμοποιώντας τον τρόπο των αρχαίων Αιγυπτίων. »



(Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά, χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα: *http://www.mathcats.com/explore/oldegyptianfractions.html*)

6 Συμπληρώνουν μαθηματικές προτάσεις χωρίς να κάνουν τις πράξεις σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ3.16

«Να χρησιμοποιήσετε την πράξη $48 \times 15 = 720$, για να συμπληρώσετε τις πιο κάτω μαθηματικές προτάσεις, χωρίς να κάνετε τις πράξεις.»

(α) $48 \times 30 = \square$, (β) $48 \times 7{,}5 = \square$, (γ) $24 \times 30 = \square$

(δ) $12 \times 15 = \square$, (ε) $\square \times 5 = 720$, (στ) $\square \times 6 = 1440$

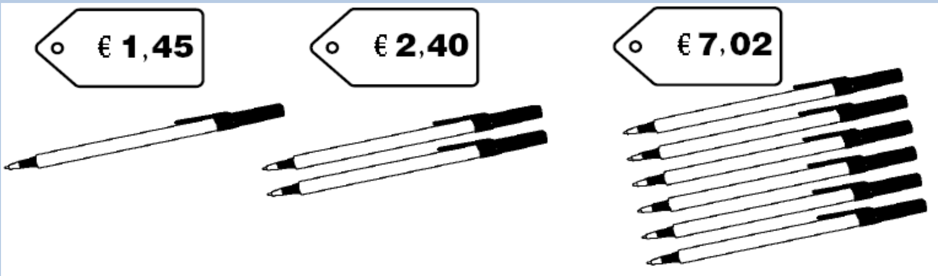
7 Στρογγυλοποιούν αριθμούς σε προβλήματα, όπως: ΑΡ3.17

«Να βρείτε ποιους συνδυασμούς παιχνιδιών είναι δυνατόν να αγοράσει ο Νίκος, με βάση τις πληροφορίες του πίνακα, αν κρατά €8,00»

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ	ΤΙΜΗ
Μπάλα	€2,59
Ρακέτες τένις	€3,83
Πάζλ	€1,51
Αυτοκόλλητα	€1,02
Ζωάκια	€4,98
Αυτοκινητάκια	€5,47

8 Διατυπώνουν προβλήματα, όταν δίνονται συγκεκριμένες απαντήσεις, όπως: ΑΡ3.18

«Να γράψετε τρία διαφορετικά προβλήματα για τη διαίρεση $13 \div 4$ με

	απαντήσεις: (α) 3, (β) 4 και (γ) $3\frac{1}{4}$.»	
9	Επιλύουν προβλήματα με κλασματικούς αριθμούς, όπως: «Να βρείτε τον αριθμό των παντελονιών που έχει ο Ιάκωβος με βάση τις πληροφορίες: (α) Τα μισά του παντελόνια έχουν χρώμα μαύρο. (β)Το $\frac{1}{6}$ των παντελονιών του έχουν χρώμα μπλε. (γ) Τέσσερα από τα παντελόνια του έχουν χρώμα άσπρο.»	ΑΡ3.18
10	Επιλύουν προβλήματα, όπως: «Ο διευθυντής του σχολείου θέλει να χαρίσει σε κάθε μαθητή ένα μολύβι και έχει τις πιο κάτω συσκευασίες με τις τιμές τους. Να βρείτε ποια από τις συσκευασίες μολυβιών έχει την πιο συμφέρουσα τιμή.»  	ΑΡ3.19

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	Να συμπληρώσετε τον πίνακα.	ΑΡ3.1

ΠΟΛΗ	**ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ**	
	Συμβολική μορφή	Λεκτική μορφή
Λίβερπουλ	477 600	
Στρασβούργο	272 975	
Λευκωσία		Διακόσιες τριάντα μία χιλιάδες οκτακόσιοι
Νάπολη	973 132	
Θεσσαλονίκη		Οκτακόσιες χιλιάδες εφτακόσιοι εξήντα τέσσερις

2 Να συμπληρώσετε τα κενά με αριθμούς: ΑΡ3.2

(α) Το μισό εκατομμύριο ισούται με ______________.

(β) Το μισό του μισού εκατομμυρίου είναι ίσο με _____________.

(γ) Το $\frac{1}{10}$ του εκατομμυρίου είναι _____________________.

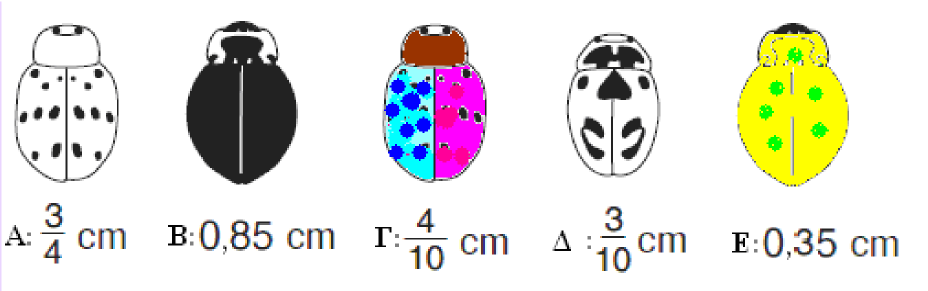
3 Να γράψετε τον εξαψήφιο αριθμό σύμφωνα με τις πιο κάτω πληροφορίες: ΑΡ3.3

(α) Στη θέση των εκατοντάδων χιλιάδων είναι ο αριθμός 3.
(β) Το ψηφίο των δεκάδων είναι τρεις φορές μεγαλύτερο από το ψηφίο των εκατοντάδων χιλιάδων.

(γ) Το ψηφίο των χιλιάδων είναι τα $\frac{2}{3}$ του ψηφίου των δεκάδων.

(δ) Το ψηφίο των δεκάδων χιλιάδων είναι ο μικρότερος περιττός αριθμός.
(ε) Το ψηφίο των εκατοντάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων χιλιάδων.
(στ) Το ψηφίο των μονάδων είναι το άθροισμα του ψηφίου των εκατοντάδων χιλιάδων με το ψηφίο των εκατοντάδων.

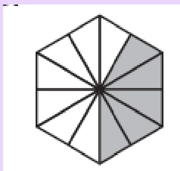
4 Να βάλετε στη σειρά τις πασχαλίτσες που δίνονται στην εικόνα με βάση το μήκος τους, αρχίζοντας από αυτή που έχει το μεγαλύτερο μήκος. ΑΡ3.4



5 Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως το παράδειγμα: ΑΡ3.5

Κλάσμα	**Ποσοστό**	**Δεκαδικός**
$\frac{1}{10}$	10%	0,10
$\frac{3}{20}$		
		0,25
	65%	

6 Να γράψετε τέσσερα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με το κλάσμα που παριστάνει το σκιασμένο μέρος της πιο κάτω επιφάνειας. ΑΡ3.7



7 Την Τρίτη το πρωί η θερμοκρασία στο Τρόοδος ήταν - 4^{o} C. Το μεσημέρι η θερμοκρασία ανέβηκε 8 βαθμούς. Πόση ήταν θερμοκρασία το μεσημέρι στο Τρόοδος; ΑΡ3.8

8 Να γράψετε το μικρότερο αριθμό που πρέπει να προστεθεί στον αριθμό 45 386, για να διαιρείται με το: ΑΡ3.9

(α) 3 →

(β) 5 →

(γ) 9 →

(δ) 10 →

9 Να εντοπίσετε στον πίνακα και να διαγράψετε: ΑΡ3.9

(α) Όλους τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 9 ΑΡ3.10

(β) Όλους τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 5

(γ) Όλους τους παράγοντες του 21

(δ) Όλους τους παράγοντες του 48

(ε) Όλους τους αριθμούς που έχουν το 3 ως παράγοντα

(στ) Όλους τους αριθμούς που έχουν το 4 ως παράγοντα

(ζ) Όλους τους αριθμούς που έχουν μόνο δύο παράγοντες.

Ποιος αριθμός δεν έχει διαγραφεί;

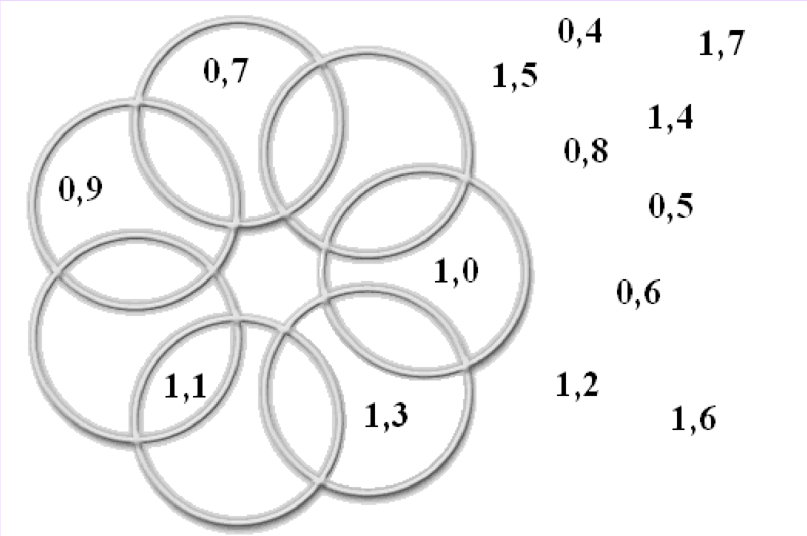
25	18	14	20	75
21	50	36	42	8
6	12	24	16	9
4	7	10	32	48
72	27	56	81	23

10

- Να βρείτε δύο διαδοχικούς αριθμούς, το γινόμενο των οποίων είναι ίσο με 56 406.» ΑΡ3.12
- Να βρείτε το μικρότερο αριθμό ο οποίος όταν διαιρείται με ένα οποιοδήποτε αριθμό από το δύο μέχρι το δέκα, αφήνει πάντα υπόλοιπο 1.

11 Να υπολογίσετε το γινόμενο 75×361 με πέντε διαφορετικούς τρόπους. ΑΡ3.13

12 Να τοποθετήσετε τους δεκαδικούς αριθμούς στο διάγραμμα, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε κύκλου να είναι ίσο με 3. ΑΡ3.14



13 ΑΡ3.15

- Η κυρία Νίκη μοίρασε στα ίσα το $\frac{1}{2}$ ενός κέικ σε τέσσερα παιδιά. Τι μέρος ολόκληρου του κέικ, πήρε το κάθε παιδί;
- Πόσα κιλά θα ζυγίζετε στο φεγγάρι, αν γνωρίζετε ότι η μάζα σας στο φεγγάρι είναι ίση με το $\frac{1}{6}$ της μάζας σας στη γη;

14 Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω πράξεις με βάση τη μαθηματική πρόταση $35 \times 2 = 70$, χωρίς να κάνετε τις πράξεις. ΑΡ3.16

(α) $0{,}35 \times 2 = \square$ (β) $0{,}35 \times 0{,}2 = \square$

(γ) $35 \times 0{,}02 = \square$ (δ) $\square \times 0{,}2 = 700$

15 ΑΡ3.17

- Να εκτιμήσετε ποια από τα αντικείμενα της εικόνας μπορείτε να αγοράσετε με €574. Να επαληθεύσετε την απάντησή σας.

- Χωρίς να κάνετε τις πράξεις, να χρωματίσετε με κόκκινο χρώμα τις μαθηματικές προτάσεις που έχουν αποτέλεσμα περίπου 9 και με γαλάζιο αυτές που έχουν αποτέλεσμα περίπου 10.

$7{,}2 + 2{,}58$	$5{,}4 + 3{,}57$	$35{,}4 - 25{,}57$	$2{,}4 + 6{,}65$
$156{,}8 - 147{,}21$	$0{,}9 + 4{,}8 + 3{,}77$	$29{,}69 - 20{,}7$	$3{,}89 + 5{,}57$

16 ΑΡ3.18

- Να γράψετε ένα πρόβλημα με τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και 60.
- Ένα βιβλίο έχει 120 σελίδες. Η Μαρία έχει διαβάσει τα $\frac{3}{8}$ του βιβλίου και ο Γιάννης έχει διαβάσει τα $\frac{3}{12}$ του βιβλίου. Να υπολογίσετε πόσες σελίδες του βιβλίου έχει διαβάσει ο καθένας.
- Ένα μυρμήγκι έχει πέσει σε ένα πηγάδι βάθους 2m. Κάθε μέρα ανεβαίνει $\frac{1}{4}$ του πηγαδιού και τη νύκτα κατεβαίνει $\frac{1}{8}$ του πηγαδιού. Πόσες μέρες θα χρειαστεί για να φτάσει στο έδαφος;
- Ένας κινηματογράφος έχει 100 θέσεις. Πουλήθηκαν 100 εισιτήρια και εισπράχθηκαν 100 ευρώ. Να βρείτε πόσα άτομα από την κάθε ομάδα πληθυσμού επισκέφθηκαν τον κινηματογράφο. Οι τιμές των εισιτηρίων για κάθε ομάδα του πληθυσμού φαίνονται πιο κάτω.

10 ευρώ για ενήλικες
1 ευρώ για συνταξιούχους
50σ ευρώ για παιδιά

17 Να επιλέξετε ποια από τις ακόλουθες προσφορές είναι η πιο συμφέρουσα για την αγορά 8 ηλεκτρονικών υπολογιστών για ένα σχολείο. ΑΡ3.19

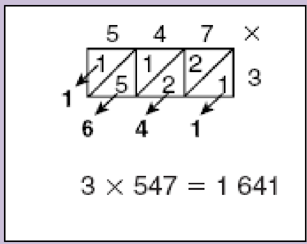
Προσφορά Α	Κάθε ηλεκτρονικός υπολογιστής στοιχίζει €580.
Προσφορά Β	Κάθε δύο ηλεκτρονικοί υπολογιστές στοιχίζουν €1007.
Προσφορά Γ	Κάθε τρεις ηλεκτρονικοί υπολογιστές στοιχίζουν €1575.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Εντοπίζουν πληροφορίες για τον άβακα στο διαδίκτυο και γράφουν μία μικρή εργασία με θέμα "Ο άβακας στα μαθηματικά".

2 Υπολογίζουν το γινόμενο δύο αριθμών, χρησιμοποιώντας τα ξυλάκια Napier, όπως το παράδειγμα:



(α) 3×2879 (β) 547×69

3 Εντοπίζουν και συνεχίζουν το μοτίβο στον υπολογισμό του γινομένου του αριθμού 11 με έναν αριθμό, χωρίς να κάνουν τις πράξεις.

11 × 11= 121

11 × 12 = 132

11 × 13 = 143

11 × 14 =

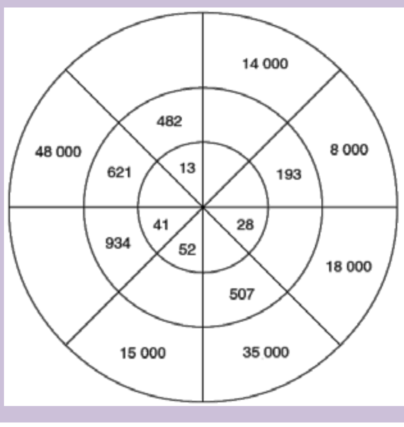
11 × 15 =

11 × 16 =

11 × 17 =

11 × 18 =

4 Συμπληρώνουν το διάγραμμα, έτσι ώστε οι τιμές στον εξωτερικό κύκλο να αποτελούν **εκτίμηση του γινομένου** των δύο αριθμών στον ίδιο τομέα και ελέγχουν τη λογικότητα των υπολογισμών τους.



ΑΡΙΘΜΟΙ

Κλίμακα 4

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
1	Συγκρίνουν και σειροθετούν ρητούς αριθμούς (θετικούς και αρνητικούς) και ορίζουν τη θέση τους στην αριθμητική γραμμή.
2	Επεξηγούν την έννοια της δύναμης, υπολογίζουν τις θετικές δυνάμεις ακέραιων αριθμών και εκφράζουν ακέραιους αριθμούς σε μορφή δύναμης.
3	Διατυπώνουν και εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας του 4, του 8 και του 25.
4	Διερευνούν και διακρίνουν τους πρώτους, σύνθετους και σχηματικούς αριθμούς.
5	Αναλύουν και εκφράζουν έναν ακέραιο αριθμό ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.
6	Υπολογίζουν τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ δύο ή περισσοτέρων αριθμών.
7	Απλοποιούν και υπολογίζουν ισοδύναμα κλάσματα, χρησιμοποιώντας το ΜΚΔ και ΕΚΠ.
8	Διερευνούν την έννοια του λόγου, διακρίνουν τις αναλογικές από τις μη αναλογικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και καθορίζουν πότε μια αναλογική σχέση αφορά ευθέως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ
9	Εκτιμούν και υπολογίζουν το αποτέλεσμα μαθηματικών προτάσεων με θετικούς ρητούς αριθμούς.
10	Εκτιμούν και υπολογίζουν το αποτέλεσμα μαθηματικών προτάσεων πρόσθεσης ή και αφαίρεσης που περιλαμβάνουν αρνητικούς αριθμούς (ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα).
11	Χρησιμοποιούν και διατυπώνουν στρατηγικές εκτέλεσης νοερών υπολογισμών με ακέραιους, κλασματικούς, δεκαδικούς αριθμούς και ποσοστά.

12	Εφαρμόζουν στρατηγικές στρογγυλοποίησης ακέραιων, κλασματικών και δεκαδικών αριθμών για εκτίμηση του αποτελέσματος και έλεγχο της λογικότητας μιας απάντησης.
13	Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα αναλογίας.
14	Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα με ρητούς αριθμούς, ποσοστά, ρίζες και δυνάμεις και ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Συγκρίνουν ρητούς αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως:	ΑΡ4.1

- «Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τους αριθμούς που βρίσκονται στην παρένθεση, ώστε να ισχύει σε κάθε περίπτωση η σχέση.»

  (α) 4_3 900 < 42_ 900 = 423 _00 < 42_ 900 **(1, 3, 4, 9)**

  (β) 6_8 138 > 6_7 294 < 63_ 705 **(3, 4, 9)**

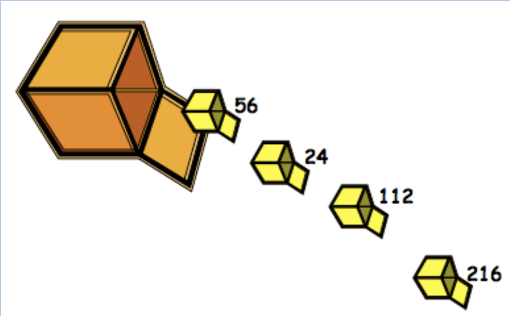
  (γ) 11 3_2 671 > 1_ 508 712 > 10 _62 212 > 10 3_7 108 **(0, 3, 5, 8)**

  (δ) 2 4_6 047 > 2 _63 941 = 2 463 _41 > 2 _86 _42 **(3, 4, 5, 7, 9)**

- «Να υπολογίσετε τους αριθμούς που είναι 1000 φορές μικρότεροι και 10 000 μεγαλύτεροι από τους αριθμούς της πρώτης στήλης του πίνακα.»

	Αριθμός 1000 φορές μικρότερος	**Αριθμός 10 000 μεγαλύτερος**
- 97		
0,002		
- 0,035		
$2\frac{1}{2}$		

2	Τοποθετούν σε μια αριθμητική γραμμή κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς, όπως: «Να τοποθετήσετε τους αριθμούς: $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{9}$, $\frac{3}{1}$, $-1{,}5$, -1, $3{,}25$, $2{,}75$, $\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$ σε μία αριθμητική γραμμή.»	ΑΡ4.1
3	Υπολογίζουν θετικές δυνάμεις ακέραιων αριθμών και αναλύουν αριθμούς σε μορφή δυνάμεων σε δραστηριότητες, όπως: «Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της μαθηματική πρότασης: $(6 \times 10^9) + (3 \times 10^7) + (1 \times 10^6) + (7 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (9 \times 10^1)$ και να αναλύσετε τον αριθμό 120 052 976 με παρόμοιο τρόπο.»	ΑΡ4.2
4	Εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας σε προβλήματα, όπως: «Να τοποθετήσετε στον πίνακα τους αριθμούς 248, 726, 4140, 1000, 620, 852, 792, 513, 504, 622, 120, 4050 και 1113 στην κατάλληλη θέση.» <table><tr><th>Διαιρείται με το 2</th><th>Διαιρείται με το 3</th><th>Διαιρείται με το 6</th><th>Διαιρείται με το 4</th><th>Διαιρείται με το 9</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	ΑΡ4.3
5	Διερευνούν τους πρώτους και τετράγωνους αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να εξετάσετε αν ισχύει η δήλωση: "Όταν προσθέσουμε δύο πρώτους αριθμούς πάντα σχηματίζεται ένας τετράγωνος αριθμός".» ▪ «Να γράψετε διψήφιους αριθμούς των οποίο το τετράγωνο τελειώνει με τον ίδιο αριθμό. Για παράδειγμα: $(76)^2 = 5376$.»	ΑΡ4.4
6	Αναλύουν και εκφράζουν έναν ακέραιο αριθμό ως γινόμενο πρώτων παραγόντων σε δραστηριότητες, όπως: «Να αναλύσετε τους πιο κάτω αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.» (α) 565 = (β) 783 = (γ) 1029 =	ΑΡ4.5
7	Υπολογίζουν το ΜΚΔ και το ΕΚΠ αριθμών σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να βρείτε το ΜΚΔ του 45 και του 18.» ▪ «Ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο κάθε 4 ημέρες, ο Μιχάλης κάθε πέντε ημέρες και ο Μαρίνος κάθε 8 ημέρες. Αν σήμερα παίζουν ποδόσφαιρο και οι τρεις μαζί, τότε να υπολογίσετε μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί το ίδιο για δεύτερη φορά.» ▪ «Μία μαγική μηχανή πολλαπλασιάζει τους αριθμούς που εισέρχονται σε	ΑΡ4.6

	αυτή με έναν αριθμό. Η εικόνα δείχνει τους αριθμούς που βγήκαν από τη μηχανή. Να βρείτε με ποιο αριθμό πολλαπλασιάστηκαν οι τέσσερις αριθμοί.»  	
8	Υπολογίζουν κλασματικούς αριθμούς αξιοποιώντας το Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π. σε δραστηριότητες, όπως: «Να βρείτε τρία κλάσματα μεταξύ του $\frac{2}{7}$ και του $\frac{3}{8}$.»	ΑΡ4.7
9	Διακρίνουν την έννοια του λόγου από το κλάσμα σε δραστηριότητες, όπως: «Σε ένα αγώνα καλαθόσφαιρας ο Μιχάλης έριξε πέντε καλαθιές και πέτυχε τις τρεις. (α) Τι μέρος των προσπαθειών του ήταν επιτυχημένες; (β) Ποιος είναι ο λόγος των επιτυχημένων προσπαθειών προς τις αποτυχημένες προσπάθειες;»	ΑΡ4.8
10	Διακρίνουν τις αναλογικές από τις μη αναλογικές σχέσεις σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να βρείτε και να εξηγήσετε ποιες από τις ακόλουθες δηλώσεις είναι ορθές ή λανθασμένες. Όσες είναι λανθασμένες να τις διορθώσετε.» (α) Αν 3 σοκολάτες στοιχίζουν 240 σεντ, τότε 4 σοκολάτες του ίδιου είδους θα στοιχίζουν 300 σεντ. (β) Αν ο Γιώργος είναι 12 χρονών και η Άννα 16 χρονών, όταν η Άννα θα είναι 32 χρονών ο Γιώργος θα είναι 24 χρονών. (γ) Ένα κουνελοτροφείο έχει 700 κουνέλια και τροφές για 10 ημέρες. Αν πωληθούν 350 κουνέλια, τα υπόλοιπα θα έχουν τροφή για πέντε μέρες. ▪ Να εντοπίσετε τα ανάλογα ποσά στις πιο κάτω δηλώσεις. (α) Η μητέρα της Μαργαρίτας αγόρασε 2 kg ντομάτες και πλήρωσε €3. Η Μαργαρίτα αγόρασε 4 kg ντομάτες και πλήρωσε €4. (β) Ο Χρίστος εργάστηκε στο δισκοπωλείο για 12 ώρες και πήρε μισθό €48. Η Μαριλένα εργάστηκε για 27 ώρες και πήρε €81.	ΑΡ4.8

(γ) Τέσσερις εργάτες τελειώνουν το βάψιμο του σπιτιού σε 16 ώρες. Οκτώ εργάτες τελειώνουν το βάψιμο του σπιτιού σε 8 ώρες.

(δ) Τα 4L λάδι στοιχίζουν €4,80. Τα 12L στοιχίζουν €9,60.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

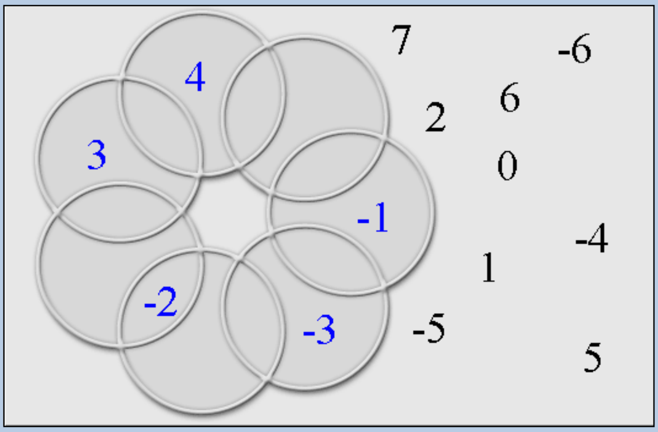
1 Εντοπίζουν διαφορετικούς τρόπους, για να εκφράσουν θετικούς αριθμούς σε γινόμενα. ΑΡ4.9

«Να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως φαίνεται στο παράδειγμα.»

0,24	0,36	0,48	0,64	1	1,92
0,6 X 0,4					
0,8 X 0,3					
1,2 X 0,2					
2 X 0,12					
3 X 0,08					
4 X 0,06					

2 Εκτελούν πράξεις με αρνητικούς αριθμούς σε δραστηριότητες, όπως: ΑΡ4.10

- «Να τοποθετήσετε τους αριθμούς στο διάγραμμα, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε κύκλο να είναι ίσο με 0.»



(Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά, χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα: *"http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_122_g_2_t_1.html?open=instructions&from=topic_t_1.html"*)

	▪ «Να βρείτε τον αριθμό που απέχει εξίσου από το $-3\frac{1}{5}$ και το $-3\frac{2}{5}$.»	
3	Επιλύουν προβλήματα, όπως: «Η Χριστίνα πλήρωσε €23,60 για μια μπλούζα που είχε έκπτωση 20%. (α) Ποια ήταν η αρχική τιμή της μπλούζας; (β) Αν η έκπτωση για την μπλούζα ήταν 25% στην αρχική της τιμή, πόσα θα πλήρωνε η Χριστίνα;»	ΑΡ4.11 ΑΡ4.14
4	Χρησιμοποιούν στρατηγικές στρογγυλοποίησης δεκαδικών αριθμών σε δραστηριότητες, όπως: «Να συμπληρώσετε τα ψηφία που λείπουν από τους δεκαδικούς αριθμούς της πρώτης στήλης, αν γνωρίζετε ότι μετά τη στρογγυλοποίηση στο πλησιέστερο δέκατο είναι ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός της δεύτερης στήλης.»	ΑΡ4.12

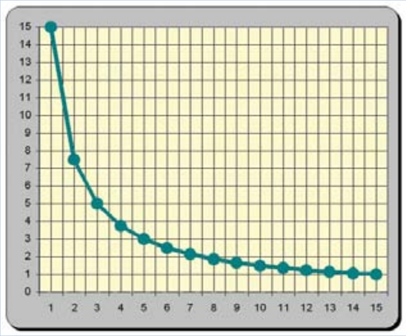
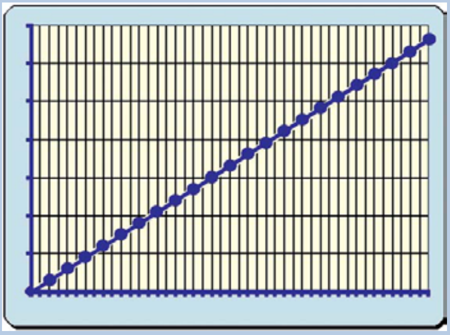
Πριν τη στρογγυλοποίηση	**Μετά τη στρογγυλοποίηση**
17,□7	17,5
232,□43	232,2
5673,□999	5673,8
2,□39	2,3

5	Επιλύουν προβλήματα αναλογίας, όπως: «Πιο κάτω δίνεται μια συνταγή για ζεστή κρέμα σοκολάτας για 3 άτομα. Η κυρία Ελένη θέλει να κατασκευάσει την κρέμα για την οικογένεια της που αποτελείται από τέσσερα άτομα. Να υπολογίσετε την ποσότητα των υλικών που θα χρειαστεί.»	ΑΡ4.13

	120 γρ. σοκολάτα κουβερτούρα 9 κουταλιές κρέμα γάλακτος 3 κρόκοι αυγών 4 κουταλιές λικέρ καφέ 5 κουταλιές ζάχαρη

(Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά, χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα: *"Από το λογισμικό Γεωμετρία, Αριθμοί και Μέτρηση" (Υ.Π.Π.)*)

6	Διατυπώνουν προβλήματα που αναφέρονται σε ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, όπως: «Να γράψετε δύο προβλήματα τα οποία να περιγράφουν αυτό που δείχνει η	ΑΡ4.13

	κάθε μία γραφική αναπαράσταση.»  Γραφική παράσταση Α  Γραφική παράσταση Β	
7	Επιλύουν προβλήματα με δυνάμεις, όπως: «Ο πλανήτης Ερμής απέχει 58 000 000 χιλιόμετρα από τον Ήλιο. Ο πλανήτης Πλούτωνας απέχει 10^2 φορές πιο μακριά από τον Ήλιο σε σχέση με τον Ερμή. Πόσο μακριά είναι ο Πλούτωνας από τον Ήλιο;»	ΑΡ4.14

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1	▪ Να κατατάξετε τους αθλητές στίβου που δίνονται στον πιο κάτω πίνακα, με βάση το χρόνο τους, ξεκινώντας από αυτόν με το μικρότερο χρόνο.	ΑΡ4.1

Όνομα αθλητή στίβου	Χρόνος	
	Λεπτά	Δευτερόλεπτα
Μιχάλης	1	51.7
Μαρίνος	1	$51\frac{4}{5}$
Αντρέας	1	$51\frac{1}{4}$
Πάρης	1	51,55
Μάριος	1	51,2
Χρίστος	1	51,97
Παναγιώτης	1	$51\frac{7}{8}$
Σωτήρης	1	$51\frac{2}{5}$

▪ Ο Πέτρος πιστεύει ότι ο δεκαδικός αριθμός με τα περισσότερα ψηφία είναι πάντα μεγαλύτερος. Να γράψετε κατά πόσο συμφωνείτε με την πιο πάνω άποψη του Πέτρου και να χρησιμοποιήσετε παραδείγματα για να υποστηρίξετε την άποψή σας.

2 Να εξετάσετε ποιοι από τους πιο κάτω ακέραιους αριθμούς μπορεί να γραφτούν ως δύναμη και να τους γράψετε. ΑΡ4.2

(α) 36

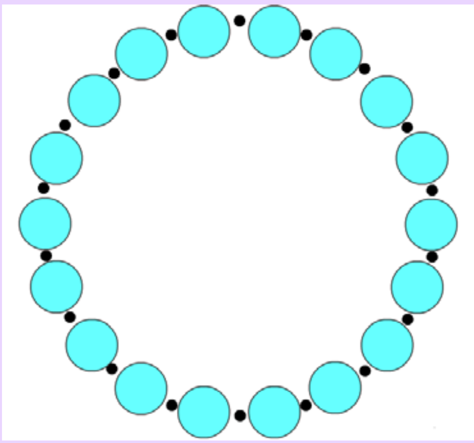
(β) 48

(γ) 123

(δ) 10 000

(ε) 400

3 ▪ Να συμπληρώσετε τα κενά στον κύκλο με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 28, 30, 34, έτσι ώστε το άθροισμα κάθε ΑΡ4.4

	δύο διαδοχικών αριθμών να είναι τετράγωνος αριθμός.  ▪ Ο Μαθηματικός Augustus De Morgan έζησε τον δέκα ένατο αιώνα. Όταν ρωτήθηκε για την ηλικία του, αυτός απάντησε ότι: "Ήμουν ηλικίας x ετών το έτος x^2". Ποιο έτος γεννήθηκε ο De Morgan;	
4	▪ Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ισότητες. (α) $500 = \square^{2} \times \square^{3}$ (β) $1\square\square = \square^{2} \times 5 \times 7$ ▪ Να βρείτε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 2 στο γινόμενο πρώτων παραγόντων του σύνθετου αριθμού 512.	ΑΡ4.5
5	▪ Να βρείτε δύο αριθμούς οι οποίοι έχουν διαφορά 10, ο ΜΚΔ τους ισούται με το 5 και το ΕΚΠ τους είναι ίσο με το 75. ▪ Να βρείτε δύο αριθμούς, των οποίων το ΕΚΠ είναι το 105 και ο ΜΚΔ είναι το 5.	ΑΡ4.6
6	Σε ένα θέατρο υπάρχουν 100 θέσεις: 30 στον εξώστη και 70 στην κύρια αίθουσα. Για μία παράσταση πωλήθηκαν 80 εισιτήρια. Στα 80 αυτά εισιτήρια περιλαμβάνονται όλα τα εισιτήρια της κύριας αίθουσας. Να βρείτε: (α) το λόγο των καθισμάτων του εξώστη προς τα καθίσματα της κύριας αίθουσας (β) το λόγο των άδειων καθισμάτων προς τα γεμάτα καθίσματα (γ) το λόγο των άδειων καθισμάτων του εξώστη προς τα γεμάτα καθίσματα του εξώστη.	ΑΡ4.8
7	• «Η Αγγέλα έχει €71 για να αγοράσει προμήθειες για την εκδρομή που προγραμμάτισε. Συγκεκριμένα, θέλει να αγοράσει: 48 μπιφτέκια, 48 ψωμάκια, 150 ποτήρια, 100 πιάτα και 18L αναψυκτικό. Με βάση τον πιο κάτω πίνακα, να επιλέξετε τις κατάλληλες προσφορές, για να μπορέσει η Αγγέλα να εξοικονομήσει €10, για να πάει σινεμά.»	ΑΡ4.9 ΑΡ4.14

	Προσφορά Α	**Προσφορά Β**	**Καλύτερη επιλογή**
μπιφτέκια	6 για €1,98	8 για €2,72	
ψωμάκια	8 για €2,56	12 για €4,20	
ποτήρια	50 για €2,50	75 για €4,50	
πιάτα	20 για €1,40	50 για €3,00	
αναψυκτικό	3 για €2,88	6 για €5,34	

- Η Μαρίνα έχει αποταμιεύσεις σε τρεις τράπεζες, όπως δείχνει ο πιο κάτω πίνακας. Να κατασκευάσετε έναν τύπο, για να υπολογίζει η Μαρίνα τα υπόλοιπα των λογαριασμών της και το συνολικό τόκο που της δίνουν. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το πρόγραμμα με τα φύλλα επεξεργασίας δεδομένων, για να κάνετε πιο εύκολα τους υπολογισμούς σας.

Τράπεζα	**Υπόλοιπο Λογαριασμού**	**Επιτόκιο**	**Τόκος**	**Νέο Υπόλοιπο**
Πανσέληνος	1 456	3,80%		
Αποταμίευση	8 357	4,30%		
Κοράλλι	67 039	4,75%		
Σύνολο				

- Ο Μάριος, ο Χάρης, η Ειρήνη και η Ζωή απάντησαν σε τρία προβλήματα. Κάθε πρόβλημα έχει συγκεκριμένη βαθμολογία. Τα αποτελέσματα των μαθητών για κάθε πρόβλημα δίνονται στον πίνακα. Να υπολογίσετε τη βαθμολογία που παίρνει κάθε πρόβλημα όταν απαντηθεί σωστά.

	Πρόβλημα 1	**Πρόβλημα 2**	**Πρόβλημα 3**	**Συνολική βαθμολογία**
Μάριος	Λανθασμένη απάντηση (μηδέν βαθμούς)	$\frac{1}{2}$ της βαθμολογίας	Σωστή απάντηση	35
Χάρης	Σωστή απάντηση	Σωστή απάντηση	Σωστή απάντηση	60
Ειρήνη	$\frac{1}{2}$ της	Σωστή απάντηση	Λανθασμένη απάντηση	20

	βαθμολογίας		(μηδέν βαθμούς)	
Ζωή	Σωστή απάντηση	Λανθασμένη απάντηση (μηδέν βαθμούς)	Σωστή απάντηση	50

8 AP4.10

- Η θερμοκρασία στο φεγγάρι είναι διαφορετική ανάλογα με τη θέση του προς τον ήλιο. Το φωτεινό μέρος του φεγγαριού έχει θερμοκρασία 127^{o} C, ενώ το σκοτεινό του μέρος έχει θερμοκρασία -173^{o} C. Να βρείτε τη διαφορά της θερμοκρασίας μεταξύ του φωτεινού και του σκοτεινού μέρους του φεγγαριού.
- Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία στην Ανταρκτική κατά το Χειμώνα, με βάση τις πληροφορίες του πίνακα.

Μέση θερμοκρασία κατά μήνα στην Ανταρκτική

	Γ	Φ	Μ	Α	Μ	Ι	Ι	Α	Σ	Ο	Ν	Δ
C^{o}	-3	-9	-17	-20	-22	-22	-25	-27	-24	-19	-9	-3

9 AP4.12

- Η Μαρίνα αγόρασε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή αξίας €563 και έναν εκτυπωτή αξίας €329 σε 12 μηνιαίες δόσεις. Να εκτιμήσετε πόσα ευρώ περίπου θα είναι η κάθε δόση.
- Ο Κώστας θέλει να αγοράσει αναψυκτικά. Στην υπεραγορά υπάρχουν δύο προσφορές:

  Α: Κάθε αναψυκτικό στοιχίζει 23 σεντ.

  Β: Κάθε εξάδα αναψυκτικών στοιχίζει 1,20 σεντ.

  Να εκτιμήσετε ποια από τις δύο προσφορές του συμφέρει, για να αγοράσει 12 αναψυκτικά.

10 Για να μπογιατιστεί μία πολυκατοικία τεσσάρων ορόφων χρειάζεται να εργαστούν για 30 ημέρες 4 άτομα. Πόσοι ακόμη εργάτες χρειάζονται να προστεθούν ακόμη για να τελειώσει το έργο 10 ημέρες νωρίτερα; AP4.13

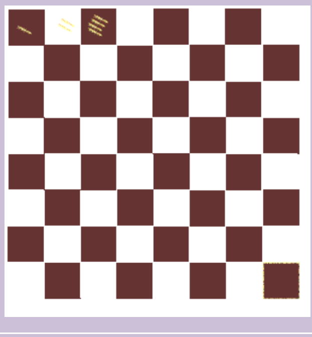
11 Ένα λεωφορείο ξεκινάει με επιβάτες το δρομολόγιο του. Στη πρώτη στάση, το $\frac{1}{3}$ των επιβατών του κατεβαίνει και 8 επιβάτες ανεβαίνουν στο λεωφορείο. Στη δεύτερη στάση , το $\frac{1}{2}$ των επιβατών του λεωφορείου κατεβαίνει και 2 επιβάτες ανεβαίνουν. Στο λεωφορείο είναι πλέον οι μισοί επιβάτες από εκείνους που ξεκίνησαν το δρομολόγιο. Να βρείτε τον αριθμό των επιβατών που ήταν στο λεωφορείο όταν ξεκίνησε. AP4.14

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Μελετούν το θρύλο του Σίσσα:

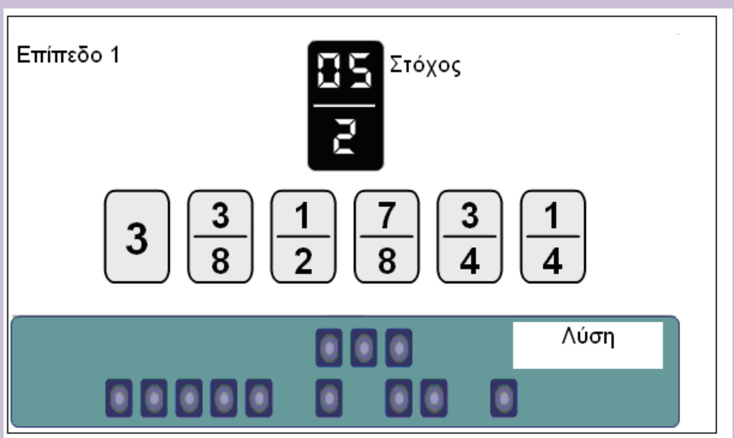
«Ο Σίσσα δούλευε για ένα Ινδό βασιλιά, όπου του κατασκεύασε ένα σκάκι. Ο βασιλιάς ενθουσιάστηκε από το παιγνίδι αυτό και ρώτησε τον Σίσσα τι ήθελε ως αμοιβή. Ο Σίσσα ζήτησε να του δοθούν κόκκοι σιταριού τοποθετημένοι στην σκακιέρα ως εξής: στο πρώτο τετράγωνο ένας κόκκος ,στο δεύτερο δυο κόκκοι, στο τρίτο τέσσερις κόκκοι, στο τέταρτο οκτώ κόκκοι μέχρι το 64ο τετράγωνο. Ο βασιλιάς διέταξε να εκπληρωθεί η επιθυμία του. Να υπολογίσετε τον αριθμό των κόκκων του σιταριού που ζήτησε ο Σίσσα.»



2 Καταγράφουν όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς, που είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτεροι του αθροίσματος των τετραγώνων των ψηφίων του. Για παράδειγμα, 35 = 1 + 3^2 + 5^2

3 Υπολογίζουν συγκεκριμένα αποτελέσματα, χρησιμοποιώντας αριθμούς και πράξεις, όπως:

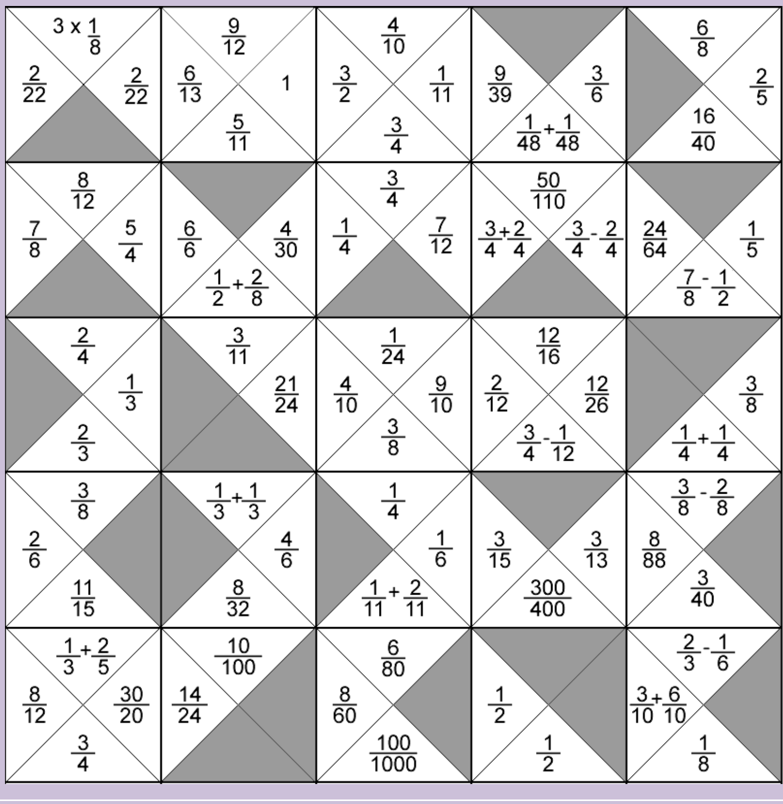
«Να χρησιμοποιήσετε τους αριθμούς: $3, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ μία φορά τον καθένα και τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, για να βρείτε το αποτέλεσμα $\frac{5}{2}$.»



(Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει και ηλεκτρονικά, χρησιμοποιώντας εφαρμογίδια, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα: “*http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=6564*”)

4 Επιλύουν προβλήματα, όπως:

«Να κόψετε τα πιο κάτω τετράγωνα και να ενώσετε τις πλευρές των τετραγώνων που τα κλάσματα τους είναι ισοδύναμα.»



5 Μελετούν από το διαδίκτυο τις τιμές προϊόντων διαφόρων χωρών και τις συγκρίνουν μεταξύ τους, χρησιμοποιώντας τις ισοτιμίες του Ευρώ με ξένα συναλλάγματα.

6 Εντοπίζουν στο διαδίκτυο ή σε βιβλία μαγειρικής την αγαπημένη τους συνταγή για γλυκό ή φαγητό και υπολογίζουν τα υλικά που θα χρειαστούν για να φτιάξουν τη συνταγή για συγκεκριμένο αριθμό ατόμων, όπως:

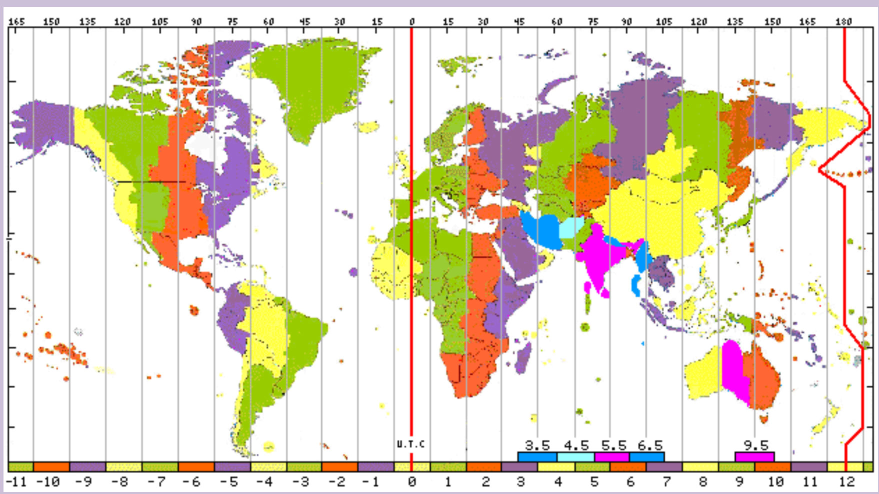
Συνταγή για:____	
Υλικά για 5 άτομα	**Υλικά για όλη την τάξη**

7 Συμπληρώνουν τον πίνακα, υπολογίζοντας τον αριθμό των θερμίδων που καίνε κάθε μέρα, ανάλογα με τη δραστηριότητα που εμπλέκονται.

Δραστηριότητα	**Θερμίδες ανά Λεπτό**	**Χρόνος σε λεπτά**	**Σύνολο**
Καλαθόσφαιρα	4,5		
Ποδήλατο	2,9		

Χορός	3,5
Ποδόσφαιρο	6,3
Τρέξιμο	10,1
Περπάτημα	2,6
Καθαριότητα	3,9
Τηλεόραση	0,6
Διάβασμα	0,8
Ύπνος	0,7

8 Επιλύουν προβλήματα με αρνητικούς αριθμούς, όπως:



«Ο πιο πάνω χάρτης παρουσιάζει τις διεθνείς Ζώνες Ώρας. Οι Ζώνες Ώρας είναι περιοχές της Γης που έχουν θεσμοθετήσει την ίδια ώρα και η οποία αναφέρεται ως τοπική ώρα. Το σημείο αναφοράς των ζωνών ώρας είναι ο Πρώτος Μεσημβρινός (γεωγραφικό μήκος 0°) που περνά από το Βασιλικό Αστεροσκοπείο του Γκρίνουιτς στο Λονδίνο (Ηνωμένο Βασίλειο). Να χρησιμοποιήσετε το γεωγραφικό σας άτλαντα και να συμπληρώσετε τον αριθμό των ωρών που θα πρέπει κάποιος να μετακινήσει προς τα εμπρός ή προς τα πίσω τους δείκτες του ρολογιού του, όταν κάνει τις ακόλουθες διαδρομές.»

- Από τη Λάρνακα στη Νέα Υόρκη: ___________________________
- Από την πόλη του Μεξικού στο Κάιρο:________________________
- Από τη Μόσχα στη Ρώμη:__________________________________
- Από το Παρίσι στο Τόκιο:_________________________________
- Από την Αθήνα στο Σύδνεϋ:_________________________________
- Από το Πεκίνο στη Μαδρίτη:_______________________________
- Από το/τη____ στο/στη____:_________________________________

ΑΡΙΘΜΟΙ

Κλίμακα 5

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
1	Ορίζουν την τέλεια διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς, αναφέρουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες της διαιρετότητας και τα κριτήρια διαιρετότητας.
2	Ορίζουν τους πρώτους αριθμούς, ελέγχουν αν ένας αριθμός είναι πρώτος, και εφαρμόζουν το κόσκινο του Ερατοσθένη στον προσδιορισμό των πρώτων αριθμών.
3	Διερευνούν και αποδεικνύουν την εύρεση του ΜΚΔ δύο φυσικών αριθμών με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο και ορίζουν τους σχετικά πρώτους αριθμούς.
4	Διερευνούν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητές του ΜΚΔ και ΕΚΠ φυσικών αριθμών.
5	Διερευνούν και ορίζουν το λόγο, την αναλογία αριθμών και τις ιδιότητες των αναλογιών.
6	Διακρίνουν πότε δύο ποσά είναι ευθέως ανάλογα και πότε αντιστρόφως ανάλογα, με τη χρήση της αναλογίας και του ποσοστού, και εφαρμόζουν τα ανάλογα ποσά στην επίλυση προβλημάτων.
7	Αναλύουν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (κανονική μορφή), διερευνούν και αποδεικνύουν το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής για την ύπαρξη και μοναδικότητα αναπαράστασης κάθε φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων.
8	Ορίζουν σύστημα αρίθμησης φυσικών αριθμών με οποιαδήποτε βάση και μετατρέπουν αριθμούς από ένα σε άλλο σύστημα αρίθμησης.
9	Ορίζουν το σύνολο των ρητών αριθμών, αναγνωρίζουν, συγκρίνουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς και τους αναπαριστούν στην ευθεία των ρητών αριθμών.
10	Ορίζουν και εκτελούν πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών και αναγνωρίζουν ομόσημους, ετερόσημους, αντίθετους και αντίστροφους ρητούς αριθμούς.
11	Διερευνούν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο αριθμό.

12	Κατανοούν την αριθμητική και γεωμετρική σημασία της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας ρητού αριθμού και αποδεικνύουν την αρρητότητα των τετραγωνικών και κυβικών ριζών των ρητών που δεν είναι δυνάμεις ή κύβοι ρητών αριθμών.
13	Κατανοούν το δεκαδικό ανάπτυγμα των ρητών αριθμών και αναγνωρίζουν τη διαφορά ρητών και άρρητων αριθμών από τη μορφή του δεκαδικού αναπτύγματός τους.
14	Αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και της μιάς σχέσης διάταξης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, συμμετρικά στοιχεία σε μία πράξη, ουδέτερο στοιχείο σε μια πράξη) και διερευνούν κατά πόσο μια πράξη είναι κλειστή στο σύνολο που ορίζεται.
15	Διερευνούν και ορίζουν την έννοια της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού και τις ιδιότητες και εφαρμογές της στην επίλυση προβλημάτων.
16	Διερευνούν στρατηγικές στρογγυλοποίησης πραγματικών αριθμών και κατανοούν την έννοια της σημαντικότητας των ψηφίων.
17	Εφαρμόζουν την έννοια του ποσοστού για προσεγγιστικούς υπολογισμούς και βρίσκουν το απόλυτο και σχετικό σφάλμα.

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ
18	Κάνουν λογικές εκτιμήσεις και ελέγχουν τη λογικότητα των απαντήσεών τους.
19	Επιλύουν προβλήματα που αναφέρονται σε συστήματα αρίθμησης.
20	Ορίζουν και εκτελούν πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων και την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.
21	Κατασκευάζουν και επιλύουν προβλήματα με ρητούς αριθμούς, δεκαδικούς αριθμούς και με ποσοστά.
22	Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις στο σύνολο των ρητών αριθμών.
23	Επιλύουν εκθετικές εξισώσεις στο σύνολο των φυσικών αριθμών.
24	Επιλύουν προβλήματα με ευθέως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά και προβλήματα ποσοστών (τόκου, φορολογίας, κέρδους και ζημιάς, κτλ.).
25	Εκφράζουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών κατά προσέγγιση, υπολογίζουν παραστάσεις με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών.
26	Εφαρμόζουν την Ευκλείδεια Διαίρεση στην επίλυση προβλημάτων.

27	Διερευνούν και εφαρμόζουν έννοιες από τη θεωρία αριθμών (παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών, πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί, διαιρετότητα, υπολογίζουν το Μ.Κ.Δ. και το ΕΚΠ) στην επίλυση προβλημάτων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ	**Δ.Ε.**
	Οι μαθητές:	
1	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες της διαιρετότητας και τα κριτήρια διαιρετότητας στην επίλυση προβλημάτων, όπως: ▪ Να αποδείξετε το κριτήριο διαιρετότητας με το 3. ▪ Να αποδείξετε το κριτήριο διαιρετότητας με το 11. ▪ Αν ο αριθμός $\boxed{x}$ 2722 $\boxed{x}$ διαιρείται με τον 12, να βρείτε τον αριθμό x . ▪ Αν α/β και γ/δ, να αποδείξετε ότι $\alpha\gamma/\beta\delta$. ▪ Αν και $11/\,(35-\beta)$, να αποδείξετε ότι $11/(\alpha+\beta)$. ▪ Να αποδείξετε ότι: (i) Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6. (ii) $6\|\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$ (iii) $6\|(\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$	ΑΡ5.1
2	Διερευνούν και εφαρμόζουν την έννοια του ΜΚΔ σε προβλήματα, όπως: ▪ Ο ΜΚΔ δύο αριθμών είναι το 12. Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών; ▪ Αν ο ΜΚΔ $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\mathbf{12}$ και οι αριθμοί $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ είναι μικρότεροι του $\mathbf{40}$, να βρείτε ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί.	ΑΡ5.3
3	Διερευνούν το λόγο και την αναλογία αριθμών σε δραστηριότητες, όπως: Τα ποσά x και y είναι ανάλογα. α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.	ΑΡ5.5

χ	1	2	4		
y		4		12	20

β) Να βρείτε το συντελεστή αναλογίας και να γράψετε τη σχέση που συνδέει το y με το x.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης –

	συνάρτησης	
4	Με τη χρήση της αναλογίας διακρίνουν πότε δύο ποσά είναι ανάλογα και εφαρμόζουν αναλογίες στην επίλυση προβλημάτων, όπως: «Ένας προβολέας διαφανειών προβάλλει το κείμενο μιας διαφάνειας στο απέναντι τοίχο. Αν ένα γράμμα «Α» έχει ύψος 7 mm στη διαφάνεια και 4,2 cm στον τοίχο, ποια είναι η μεγέθυνση που δίνει ο προβολέας;»	ΑΡ5.6
5	Μετατρέπουν αριθμούς σε ισοδύναμους σε άλλο σύστημα αρίθμησης σε δραστηριότητες, όπως: ▪ Να μετατρέψετε τους αριθμούς 12, 123, 724, 65534, από το δεκαδικό, στο δυαδικό, το οκταδικό και το δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης. ▪ Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις απευθείας στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης: α) $11101101 + 1001$ β) $10110101 - 10110$ γ) $1010 \cdot 1010$.	ΑΡ5.8
6	Κατανοούν και σειροθετούν αριθμούς της μορφής $\alpha \cdot 10^{\nu}$, επιλύοντας προβλήματα, όπως: «Το χρώμα των αστεριών δίνει μια ένδειξη για την ηλικία τους και τη θερμοκρασία που επικρατεί σε αυτά. Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τέσσερις τύπους αστεριών, το χρώμα και τη θερμοκρασία τους.» Να διατάξετε τις θερμοκρασίες, αρχίζοντας από τη μικρότερη.	ΑΡ5.11

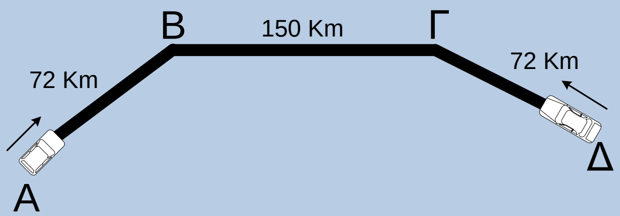
Τύποι αστεριών	Χαμηλότερη Θερμοκρασία	Χρώμα
Α		Ανοικτό γαλάζιο
Β	$2{,}08 \cdot 10^4$	Γαλάζιο
Γ	$9{,}0 \cdot 10^3$	Κίτρινο
Δ	$4{,}5 \cdot 10^4$	Γαλάζιο

7	Υπολογίζουν την τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού και κάνουν αποδείξεις σε δραστηριότητες, όπως: «Να δείξετε ότι : $\sqrt{\mathbf{13}+\sqrt{\mathbf{7}+\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{4}}}}} = \mathbf{4}$».	ΑΡ5.12
8	Σειροθετούν αριθμούς (δεκαδικούς, κλασματικούς αριθμούς, και αριθμούς που εκφράζονται σε άλλη μορφή), όπως: ▪ «$\sqrt{82}$, 3π, $8{,}9$ $9,\frac{37}{4}$, $9{,}3 \cdot 10^0$»	ΑΡ5.13
9	Εφαρμόζουν την απόλυτη τιμή ρητού αριθμού σε προβλήματα, όπως: ▪ Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:	ΑΡ5.15

	o $-2,\ \left\|-\frac{1}{2}\right\|,\ \left\|+\frac{1}{2}\right\|,\ +2,\ \|-2\|,\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}$ ▪ Αν $\|\alpha\| = 2$, να βρείτε τι ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει ο β, όταν ισχύει $\|\beta\| < \|\alpha\| + 2$	
10	Κατανοούν ότι οι υπολογιστικές μηχανές συνήθως δίνουν κατά προσέγγιση απαντήσεις σε περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς, όπως: «Να γράψετε περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς σε μορφή κλάσματος, όπως: $0,\overline{2}$, $0,\overline{23}$, $0,2\overline{3}$».	ΑΡ5.16

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Επιλύουν προβλήματα, όπως: ▪ «Τέσσερα κορίτσια η Μαρία, η Άντρη, η Τασούλα, και η Ελένη τραγούδησαν αριθμό τραγουδιών σε μια συναυλία ως τρίο, με ένα κορίτσι να παραμένει εκτός κάθε φορά. Η Ελένη τραγούδησε επτά τραγούδια, τα οποία ήταν και τα περισσότερα που τραγούδησε οποιοδήποτε άλλο κορίτσι. Η Μαρία τραγούδησε τέσσερα τραγούδια, τα οποία ήταν και τα λιγότερα που τραγούδησε οποιοδήποτε άλλο κορίτσι. Ποιός είναι ο αριθμός των τραγουδιών που τραγούδησαν τα τέσσερα κορίτσια;» ▪ «Σε μια καθημερινή εφημερίδα υπήρχε το πιο κάτω δημοσίευμα: **<u>Χορός και Θερμίδες</u>** Ο χορός δεν είναι μόνο για διασκέδαση αλλά και μια δραστηριότητα, για να καίει κάποιος θερμίδες. Πρόσφατες μελέτες δείχνουν ότι με χορό 30 λεπτών γρήγορου ρυθμού, όπως συρτάκι ή λατινικό χορό, ένα άτομο 90 κιλών καίει περίπου 212 θερμίδες. Το ίδιο άτομο καίει 106 θερμίδες, όταν χορεύει χορό αργού ρυθμού για 30 λεπτά. Έτσι οποιοδήποτε στυλ χορού προτιμάτε, ο χορός είναι υγιεινή εναλλακτική άσκηση. o Για πόση ώρα πρέπει ένα άτομο 90 κιλών να χορεύει χορό αργού ρυθμού, για να κάψει τόσες θερμίδες όσες θα κάψει με ένα πολύ γρήγορου ρυθμού χορό για 45 λεπτά. o Πόσες θερμίδες θα κάψει ένα άτομο των 90 κιλών μετά από 45 λεπτά χορού. o Πόσο περισσότερο χρόνο χρειάζεται ένα άτομο 90 kg να χορεύει λατινικούς χορούς, για να κάψει 500 θερμίδες (Η απάντησή σας να δοθεί με προσέγγιση λεπτού).» ▪ Αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α, για να πάει στην πόλη Δ και ταυτόχρονα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Δ για να πάει στην	ΑΡ5.18 ΑΡ5.19 ΑΡ5.21

πόλη Α, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



Τα δύο αυτοκίνητα στο διάστημα του δρόμου ΒΓ μήκους $150\ \mathrm{Km}$ κινούνται με σταθερή ταχύτητα $100\ \mathrm{Km/h}$. Το αυτοκίνητο που ξεκίνησε από την πόλη Α, στο ανηφορικό κομμάτι ΑΒ μήκους $72\ \mathrm{Km}$, κινείται με σταθερή ταχύτητα που είναι 20% μικρότερη της ταχύτητας που κινείται στο δρόμο ΒΓ. Το αυτοκίνητο που ξεκίνησε από την πόλη Δ στο ανηφορικό κομμάτι ΔΓ μήκους $72\ \mathrm{Km}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα που είναι 10% μικρότερη της ταχύτητας που κινείται στο δρόμο ΒΓ. Σε ποια απόσταση από την πόλη Α θα συναντηθούν τα δύο αυτοκίνητα».

2 Επιλύουν εκθετικές εξισώσεις, όπως: ΑΡ5.23

- Να βρείτε τη τιμή του x ώστε να ισχύουν οι ισότητες.

  α) $2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^x = 2^8$ β) $(-2)^6 : (-2)^x = 2^2$

3 Επιλύουν προβλήματα ποσοστών και αναλογιών, όπως: ΑΡ5.21 ΑΡ5.24

- Οι Μάγια είχαν υπολογίσει (μεταξύ 800π.Χ-300π.Χ) το έτος σε 365.2 μέρες. Αν είναι γνωστό σήμερα ότι ο ακριβής υπολογισμός είναι 365.2422 μέρες, να βρείτε το απόλυτο και το ποσοστιαίο σχετικό σφάλμα.
- Δύο κεφάλαια Α και Β τα οποία διαφέρουν κατά €5000 τοκίζονται με απλό τόκο για δύο χρόνια με επιτόκιο 5%. Αν ο συνολικός τόκος των δύο κεφαλαίων είναι €1600, να υπολογίσετε τα δύο κεφάλαια Α και Β.»
- Η Ελένη διάβασε σε ένα άρθρο ότι ένα άτομο πάνω από 30 χρονών χάνει περίπου 0,06 cm ύψους κάθε χρόνο. Ο ογδοντάχρονος παππούς της Ελένης έχει ύψος 1,76 cm. Αν υποθέσετε ότι το ύψος του παππού της Ελένης μειώνεται σύμφωνα με τα στοιχεία του άρθρου, να υπολογίσετε το ύψος που είχε ο παππούς, όταν ήταν 30 χρονών».
  - Ο θείος της Εβελίνας, ο Νικόλας, είναι 30 χρονών και έχει ύψος 1,80 cm. Με βάση τα στοιχεία του άρθρου, να υπολογίσετε πόσο ύψος θα έχει, όταν θα γίνει 54 χρόνων.

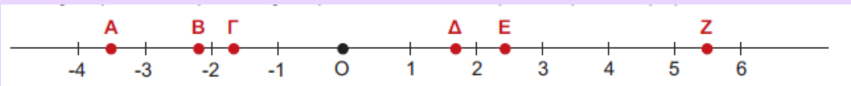
4	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των ριζών στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων, όπως: ▪ Να συμπληρώσετε τα παρακάτω πίνακα:	ΑΡ5.25

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	16				
64	36				

Τι συμπεραίνετε;

5	Διερευνούν και εφαρμόζουν έννοιες από τη θεωρία αριθμών στην επίλυση προβλημάτων, όπως: Να βρείτε και να γράψετε τρεις σύνθετους αριθμούς οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους. ▪ Να αποδειχτεί ότι για τους ακεραίους α, β, κ ισχύουν **(i)** $(\alpha, \beta) = (\alpha - \kappa\beta\ ,\ \beta\ )$ **(ii)** $(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta\ ,\ \beta\ )$ **(iii)** $(\alpha, \alpha + 1) = 1$. • Αν κ > 0, να αποδειχτεί ότι $(\kappa\alpha, \kappa\beta) = \kappa(\alpha, \beta)$. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 63 και 84.	ΑΡ5.27

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Ο αριθμός 60 διαιρούμενος με το θετικό ακέραιο δ δίνει πηλίκο π και υπόλοιπο 12. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές των δ και π. ▪ Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι, όταν διαιρούνται με 3, δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου. ▪ Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 3 είναι διαιρέτης του αθροίσματος τριών διαδοχικών αριθμών.	ΑΡ5.1
2	Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό α για τον οποίο οι αριθμοί: (i) $\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2$ είναι όλοι σύνθετοι (ii) $\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \alpha+3$ είναι όλοι σύνθετοι	ΑΡ5.2
3	Οι αριθμοί $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ έχουν $\boldsymbol{ΕΚΠ(x,y)=48}$ και $\boldsymbol{ΜΚΔ(x,y)=8}$. Αν $\boldsymbol{y=8}$, ποια είναι η τιμή του $\boldsymbol{x}$;	ΑΡ5.3
4	Ο Κος Νίκος περιμένει για ώρες, για να εξυπηρετηθεί στο Νοσοκομείο. Η εξέταση του διάρκεσε 2 λεπτά. Ποιος είναι ο λόγος του χρόνου αναμονής προς τον χρόνο εξέτασης;	ΑΡ5.5
5	Αν α,β είναι δύο περιττοί θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\alpha^2+\beta^2$ είναι σύνθετος.	ΑΡ5.7
6	▪ Ορίζουν και αναγνωρίζουν ομόσημους, ετερόσημους και αντίθετους ρητούς αριθμούς, όπως: ▪ Δίνονται οι αριθμοί: $-\frac{1}{6},\ \ 3,\ \ -4{,}7\ ,\ +4,\ \ 7{,}1,\ \ -\frac{7}{2},\ \ 10,\ \ 11{,}5,\ \ -12$ (α) Να σημειώσετε ποιοι είναι ομόσημοι. (β) Να γράψετε τέσσερα ζεύγη ετερόσημων αριθμών. (γ) Να τους διατάξετε κατά αύξουσα σειρά. ▪ Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης $Α=[\,(α^6β^{-3}\,)^2 : (α\,β^7)^{-3}]^{2005}$.	ΑΡ5.10
7	Στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε τοποθετήσει τα σημεία Α, Β, Γ, Ε και Ζ. Στις παρακάτω περιπτώσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.  (α) Ο αριθμός $\sqrt{\mathbf{3}}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο: Α Ε Γ Δ (β) (α) Ο αριθμός $\sqrt{\mathbf{6}}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο: Γ Δ Ε Ζ (γ) Ο αριθμός $-\sqrt{\mathbf{3}}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο:	ΑΡ5.12

	Γ Β Δ Α (δ) Ο αριθμός -$\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο: Γ Δ Β Α	
8	Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $0{,}4\overline{7}$, $0{,}\overline{474}$, $0{,}\overline{47}$, $\sqrt{0{,}\overline{23}}$.	ΑΡ5.13
9	Να βρείτε τους αντίθετους των παρακάτω αριθμών: $\lvert x\rvert$, $\lvert -x\rvert$, $(-x)$, x. Στη συνέχεια αν $x<0$ να τους διατάξετε σε άξονα.	ΑΡ5.15
10	▪ Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 0,564 στο πλησιέστερο (α) δέκατο, (β) εκατοστό (γ) ακέραιο ▪ Να βρείτε το πλήθος των σημαντικών ψηφίων των πιο κάτω αριθμών: 1,35 , 0,108 , 0,05030 , 500 , $50\cdot 10^1$, $1{,}550\cdot 10^5$, $1{,}4\cdot 10^{-4}$.	ΑΡ5.16
11	Ο αριθμός 192 είναι γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Σε ποιο σύστημα αρίθμησης γράφεται ως 3000;	ΑΡ5.19
12	Η τουριστική συνοδός σε μια εκδρομή θέλει να χωρίσει 90 άτομα σε ομάδες με ίσο αριθμό ατόμων. Κάθε ομάδα πρέπει να έχει από 10 έως 15 άτομα. Πόσα άτομα μπορούν να είναι σε κάθε ομάδα; (α) Να βρείτε όλους τους παράγοντες του 90. (β) Να χρησιμοποιήσετε τους παράγοντες του 90, για να βρείτε όλα τα πιθανά μεγέθη των ομάδων. (γ) Μπορούν να υπάρξουν περισσότερες από μια ομάδες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.	ΑΡ5.20
13	▪ Να λύσετε τις ανισώσεις και να βρείτε τις κοινές λύσεις από τη γραφική τους παράσταση πάνω στον άξονα των ρητών αριθμών. $2(\chi-3)-5(\chi-2)\geq 13$ και $\dfrac{4(\chi-1)}{5}-\chi<\dfrac{2-\chi}{3}$ ▪ Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x που επαληθεύουν τη σχέση $2\leq\lvert x\rvert<5$;	ΑΡ5.22
14	Να βρείτε τη τιμή του x ώστε να ισχύουν οι ισότητες. α) $(-3)^x=1$ β) $[(-2)^{-3}]^x=(-2)^9$	ΑΡ5.22
15	Μια ομάδα καλαθόσφαιρας έχει αγωνισθεί στα $\frac{2}{3}$ των παιχνιδιών του πρωταθλήματος και μέχρι τώρα έχει πετύχει 17 νίκες και 3 ήττες. Για να κερδίσει η ομάδα το πρωτάθλημα πρέπει να κερδίσει τα $\frac{3}{4}$ όλων των αγώνων του πρωταθλήματος. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός από τους υπόλοιπους αγώνες στους οποίους η ομάδα μπορεί ηττηθεί και τελικά να κερδίσει το πρωτάθλημα;	ΑΡ5.21 ΑΡ5.23

16	Ο πληθυσμός μιας πόλης αυξήθηκε κατά 10% τον ένα χρόνο και κατά 15% τον επόμενο χρόνο. Να εξηγήσετε γιατί δεν υπήρξε αύξηση 25% του πληθυσμού στο τέλος του δεύτερου χρόνου.	ΑΡ5.24
17	Να βρείτε με ρητές προσεγγίσεις την τετραγωνική ρίζα του αριθμού $\sqrt{23}$ μέχρι και 2 δεκαδικά ψηφία.	ΑΡ5.27

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

	Οι μαθητές:
1	Υπολογίζουν την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = -(-4\alpha - 2\gamma - \delta) - \beta(-6+2)\,) - 2\epsilon : \frac{1}{z} - (-\delta) + 2008$, αν: – α, β είναι αντίθετοι αριθμοί – γ, δ είναι οι πλευρές ορθογωνίου με περίμετρο 12 – ε, ζ είναι αντίστροφοι αριθμοί
2	Να λύσετε στο $\mathbb{N}$ τις εξισώσεις (i) $\chi^3 + \chi^2 + \chi - 3 = 0$ (ii) $\chi^2 + \chi + p = 112$, όπου p θετικός πρώτος
3	Έστω $\alpha = \mathrm{p}_1^{\alpha_1} \cdot \mathrm{p}_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{p}_\kappa^{\alpha_\kappa}$ είναι η κανονική μορφή ενός θετικού ακεραίου α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου, αν και μόνο αν οι εκθέτες είναι όλοι άρτιοι.
4	Επιλύουν προβλήματα, όπως: Η Μαρία κάθε τέταρτο Σαββάτο κάνει επίσκεψη σε μια θεία της. Η Μαρία και ένας φίλος της αποφάσισαν να αρχίσουν προπονήσεις στο τένις κάθε τρίτο Σάββατο. Η Μαρία πρέπει να επισκεφθεί τη θεία της το επόμενο Σάββατο και θέλει να αρχίσει την προπόνηση του τένις ένα από τα επόμενα τρία Σάββατα. (α) Πότε πρέπει να αρχίσει την προπόνηση του τένις, για να αναβάλει την πρώτη σύγκρουση των δύο δραστηριοτήτων της όσο γίνεται αργότερα; (β) Σε πόσες εβδομάδες θα εμφανιστεί η πρώτη σύγκρουση των δραστηριοτήτων της Μαρίας; (γ) Πόσο συχνά μετά την πρώτη σύγκρουση θα παρουσιαστούν οι άλλες συγκρούσεις; Εξηγήστε πως βρήκατε την απάντηση σας.
5	Μελετούν τη χρυσή τομή, την έννοια του χρυσού λόγου μέσα από την ιστορία των μαθηματικών και κατανοούν πώς οι αρχαίοι Έλληνες εφάρμοσαν τις έννοιες αυτές στην αρχιτεκτονική και την τέχνη. Για παράδειγμα, οι Αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν για τις ιδανικές αναλογίες του ανθρωπίνου σώματος από τον $5^{\text{ο}}$ αιώνα π.Χ. Μια συγκεκριμένη αναλογία, $1{,}618 : 1$, η αναλογία της χρυσής τομής, όπως την ονόμασαν, είναι η σχέση που συνδέει όλα σχεδόν τα μέλη του ιδανικού σώματος. Οι αρχαίοι γλύπτες, έφτιαχναν τα αγάλματα τους τηρώντας τις αναλογίες της χρυσής τομής.
6	Υπολογίζουν δύο σύνθετους αριθμούς των οποίων το άθροισμα των πρώτων παραγόντων τους είναι 18.
7	Να γράψετε 7 διαφορετικούς ρητούς αριθμούς που να έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη του 2. Στη συνέχεια να τους διατάξετε από το μεγαλύτερο στο μικρότερο.

8	Αιτιολογούν τις απαντήσεις τους σε προβλήματα, όπως: ▪ Τα μήκη των πλευρών τριγώνων είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Είναι δυνατόν η περίμετρος του τριγώνου να είναι πρώτος αριθμός; ▪ Σε ένα πάπυρο μιας πυραμίδας της Αιγύπτου βρέθηκε γραμμένος ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρείται με όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 10. Να βρείτε ο ακέραιος αυτός. ▪ Μπορείτε να βρείτε πάντοτε δύο ακέραιους αριθμούς α και β, όπου $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; ▪ Μπορείτε να βρείτε πάντοτε δύο ακέραιους αριθμούς α και β, όπου $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; ▪ Μπορείτε να βρείτε πάντοτε δύο ακέραιους αριθμούς α και β, όπου $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$;

ΑΡΙΘΜΟΙ

Κλίμακα 6

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
1	Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, για να αποδεικνύουν σχέσεις μεταξύ αριθμών.
2	Ορίζουν την έννοια της ν-οστής ρίζας και αποδεικνύουν τις ιδιότητες ριζών, όταν $\nu \in \mathbb{N},\ \nu \neq 0, 1\ ,\ \ \alpha \in \mathbb{R}^{+}$.
3	Αποδεικνύουν την αρρητότητα των ν-οστών ριζών των ρητών που δεν είναι ν-οστές δυνάμεις ρητών αριθμών, κατανοώντας την ανεπάρκεια των ρητών αριθμών και την επάρκεια των πραγματικών αριθμών ως προς την ύπαρξη ν-οστων ριζών κάθε τάξης ν.
4	Ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και παριστάνουν δύναμη με εκθέτη ρητό αριθμό ως ρίζα και αντίστροφα.
5	Εφαρμόζουν την τυποποιημένη μορφή αριθμού, χρησιμοποιούν την έννοια των ποσοστών για προσεγγιστικούς υπολογισμούς, τη θεωρία σφαλμάτων, το απόλυτο και σχετικό σφάλμα.
6	Ορίζουν και εφαρμόζουν τις βασικές συνολοθεωρητικές έννοιες, όπως υποσύνολο, ισότητα συνόλων και αναφέρουν βασικές σχέσεις, όπως η ανακλαστική, η μεταβατική, η συμμετρική, η αντισυμμετρική, η σχέση ισοδυναμίας και διάταξης.
7	Ορίζουν και εφαρμόζουν τις βασικές συνολοθεωρητικές πράξεις, όπως τομή, ένωση, συμπλήρωμα, διαφορά.
8	Διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ πραγματικών, ρητών, άρρητων, ακεραίων και φυσικών αριθμών και αντιλαμβάνονται την ανάγκη επέκτασης του συνόλου $\mathbb{R}$.

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ
9	Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες παραστάσεις με ρητό παρονομαστή.

10	Κάνουν λογικές εκτιμήσεις και ελέγχουν τη λογικότητα των απαντήσεών τους.
11	Εκτελούν πράξεις ριζών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων.
12	Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.
13	Εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων τις ιδιότητες της ν-στης ρίζας πραγματικού αριθμού και δυνάμεων με ρητό εκθέτη.
14	Εφαρμόζουν την έννοια των συνόλων, τις ιδιότητες και τις πράξεις συνόλων στην επίλυση προβλημάτων.
15	Επιλύουν άρρητες, εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις.
16	Ορίζουν και επιλύουν γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις δύο μεταβλητών.
17	Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας Διοφαντικές Εξισώσεις.
18	Χρησιμοποιούν την έννοια των ποσοστών για προσεγγιστικούς υπολογισμούς και χρησιμοποιούν τη θεωρία σφαλμάτων, για να υπολογίζουν το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για να αποδεικνύουν σχέσεις μεταξύ αριθμών σε δραστηριότητες, όπως: Να αποδειχτεί ότι $1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.	ΑΡ6.1
2	Εφαρμόζουν τις ιδιότητες ριζών σε προβλήματα και ασκήσεις, όπως: Να γίνουν οι πράξεις: (α) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{2}$ (β) $\sqrt[5]{160}:\sqrt[5]{5}$ (γ) $\sqrt[4]{\chi^3\psi}:\sqrt[4]{\chi^2\psi}\cdot\sqrt[4]{\chi^3}$	ΑΡ6.2
3	Διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ πραγματικών, ρητών, άρρητων, ακεραίων και φυσικών αριθμών και αντιλαμβάνονται την ανάγκη επέκτασης του συνόλου $\mathbb{R}$	ΑΡ6.3

	σε δραστηριότητες, όπως: ▪ Ποιοι αριθμοί λέγονται άρρητοι; ▪ Ποιοι αριθμοί λέγονται πραγματικοί; ▪ Ένας ρητός αριθμός είναι πραγματικός;	
4	Εφαρμόζουν την τυποποιημένη μορφή αριθμού και υπολογίζουν το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα σε ασκήσεις, όπως: Να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα στον αριθμό 3150, ο οποίος δίνεται με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων.	ΑΡ6.5
5	Χρησιμοποιούν τις έννοιες υποσύνολο, ισότητα συνόλων και τις ιδιότητες συνόλων σε προβλήματα, όπως: ▪ Να παραστήσετε τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *και* $\mathbb{R}$ στο ίδιο Βέννειο διάγραμμα και να τα διατάξετε, χρησιμοποιώντας την έννοια του υποσυνόλου. ▪ Να βρείτε δύο υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{N}$. ▪ Να εξετάσετε αν τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{N} : 2x^2 - 32 = 0\}$ *και* $B = \{x \in \mathbb{Z} : 3x^2 - 48 = 0\}$ είναι ίσα.	ΑΡ6.6
6	Εφαρμόζουν τις πράξεις των συνόλων σε δραστηριότητες, όπως: ▪ (α) Να κατασκευάσετε ένα Βέννειο διάγραμμα για καθένα από τα πιο κάτω σύνολα και να σκιάσετε το μέρος που αναπαριστούν: $A'\ A \cap B\ , A \cup B, A' \cap B$ *και* $A \cup B'$. (Να διερευνήσετε όλες τις πιθανές θέσεις των κύκλων που αναπαριστούν τα σύνολα Α και Β) ▪ Έστω το υπερσύνολο Ω={1,2,3,4,5,6} και τα υποσύνολα του $A = \{x \in \Omega: x \text{ πρώτος αριθμός}\}$, $B = \{x \in \Omega: x \text{ άρτιος αριθμός}\}$ *και* $\Gamma = \{x \in \Omega: x < 3\}$.	ΑΡ6.7

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή σε δρατηριότητες, όπως: ▪ Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε άλλα ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή. (α) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (β) $\frac{2-\sqrt{2}}{5-\sqrt{3}}$	ΑΡ6.9
2	Υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων, όπως: ▪ Α=$A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 3^2 + (7 - 12 \cdot 11^4)^0$ Εκτελούν πράξεις ριζών σε προβλήματα και ασκήσεις, όπως:	ΑΡ6.11

	▪ Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} + (4^{\frac{1}{2}} - 6)$.	
3	Υπολογίζουν την τιμή αλγεβρικών παραστάσεων, όπως: ▪ Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $3x\psi - 4x^{-1}\psi^{-3} + 9\psi^2$ αν $x = \frac{1}{2}$ και $\psi = -\frac{2}{3}$:	ΑΡ6.12
4	Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της ν-στης ρίζας πραγματικού αριθμού στην απλοποίηση παραστάσεων σε δραστηριότητες, όπως: ▪ Αν α > β να δείξετε ότι : $\sqrt{(\alpha-\beta)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2}} : \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3\beta^3}} = (\alpha-\beta)\sqrt{\alpha\beta}$ ▪ Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: (α) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{2}}$ (β) $3\cdot 8^{\frac{2}{3}} - 2\cdot 25^{\frac{1}{2}} + 7\cdot 243^{\frac{2}{5}}$ (γ) $\sqrt{3\alpha\beta}\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta^2}\cdot\sqrt[6]{2\alpha^2\beta}$ (α, β > 0)	ΑΡ6.13
5	Λύνουν προβλήματα με τη χρήση των συνόλων, όπως: ▪ Σε μια έρευνα που έγινε με δείγμα 170 παιδιά ενός λυκείου της Λευκωσίας με θέμα τα μέσα που χρησιμοποιούν για τη μετάβαση τους στο σχολείο, είχαμε τα ακόλουθα αποτελέσματα: 80 παιδιά χρησιμοποιούν αστική συγκοινωνία, 40 ταξί, 75 ιδιωτικό αυτοκίνητο και 2 άλλο μεταφορικό μέσο. Δεκαπέντε παιδιά χρησιμοποιούν αστική συγκοινωνία και ταξί, 12 παιδιά ταξί και ιδιωτικό αυτοκίνητο και 10 αστικό λεωφορείο και ιδιωτικό αυτοκίνητο. Να βρείτε πόσα παιδιά χρησιμοποιούν και τα τρία μέσα συγκοινωνίας.	ΑΡ6.14
6	Επιλύουν εξισώσεις, όπως: $\sqrt{x-2} = 3$, $2^{3x+2} = 8$.	ΑΡ6.15
7	Ορίζουν και επιλύουν γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις δύο μεταβλητών, όπως. ▪ Ο Α. χρειάζεται κέρματα, για να ρίξει στο μηχάνημα στάθμευσης, και ανταλλάσσει ένα χαρτονόμισμα των 20 ευρώ με κέρματα των 10 και 20 σεντ. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η ανταλλαγή, αν ο Α. θέλει οπωσδήποτε κέρματα των 10 και 20 σεντ. ▪ Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν ακέραιες λύσεις; (i) $4x + 6y = 5$ (ii) $4x - 6y = 2$ (iii) $3x + 5y = k,\ k \in \mathbb{Z}$ (iv) $\kappa x + (\kappa+1)x = \lambda,\ \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ • Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων (i) $2x + 3y = 5$, (ii) $6x - 4y = 8$	ΑΡ6.16
8	Επιλύουν προβλήματα, όπως: Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας (ε): 6x + 5y = 4, τα οποία έχουν αρνητική	ΑΡ6.17

	ακέραια τετμημένη και θετική ακέραια τεταγμένη.	
9	Χρησιμοποιούν την έννοια των ποσοστών για προσεγγιστικούς υπολογισμούς, τη θεωρία σφαλμάτων, το απόλυτο και σχετικό σφάλμα σε προβλήματα, όπως: ▪ Ένας φοιτητής εφαρμοσμένης μηχανικής βρήκε ότι το μέγιστο ασφαλές φορτίο μιας γέφυρας είναι 1000(99 – 702) τόνοι. Χρησιμοποίησε το 1,41 ως προσέγγιση του 2 στους υπολογισμούς του. Όταν η γέφυρα χτίστηκε και εξετάστηκε σε μια προσομοίωση υπολογιστών, για να ελεχθεί το μέγιστο βάρος, που αντέχει ως φορτίο, η γέφυρα κατέρρευσε! Ο φοιτητής είχε υπολογίσει ότι η γέφυρα θα υποβάσταζε δέκα φορές το βάρος που εφαρμόστηκε σε αυτήν, όταν κατέρρευσε. Να υπολογίστε το βάρος που ο φοιτητής υπολόγισε ότι η γέφυρα θα μπορούσε να αντέξει, όταν χρησιμοποίησε το 1,41 ως εκτίμηση για το 2. ▪ Να υπολογίσετε άλλες τιμές για το βάρος, χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις του 2 που έχουν περισσότερες δεκαδικές θέσεις. Ποιος μπορεί να είναι ένας λογικός βαθμός ακρίβειας που απαιτείται, για να υπολογιστεί ακίνδυνα το βάρος που μπορεί να υποβαστάζει η γέφυρα; Να δικαιολογήστε την απάντησή σας.	ΑΡ6.18

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της τέλειας Επαγωγής, για να αποδεικνύουν σχέσεις μεταξύ αριθμών, όπως: ▪ Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\nu(\nu+1)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$ ▪ Με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο αριθμό $\nu \geq 1$, $1+3+5+\cdots+(2\nu-1)=\nu^2$. ▪ Με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής να δείξετε ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές ισούται με $(\nu-2)\cdot 180^o$.	ΑΡ6.1
2	▪ Να βρείτε οι τιμές των παραστάσεων : Α = $\sqrt{64}-\sqrt{100}+\sqrt[3]{8}$ Β = $3\cdot\sqrt{4}+2\cdot\sqrt[3]{125}$ Γ = $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$ ▪ Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου και το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου του σχήματος  $\sqrt{3}-1$ $\sqrt{3}+1$	ΑΡ6.2
3	▪ Ποιοι από τους αριθμούς $\sqrt{7}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{28}, \sqrt{29}$ είναι άρρητοι; ▪ Τι αριθμός είναι το γινόμενο ενός ρητού με έναν άρρητο; ▪ Ένας δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία είναι πάντοτε άρρητος;	ΑΡ6.3
4	Να αποδείξετε ότι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $4+2\sqrt{3}$ είναι ο $1+\sqrt{3}$.	ΑΡ6.4
5	▪ Να αναφέρετε ποιες από τις ιδιότητες συνόλων ικανοποιούν οι πιο κάτω σχέσεις : $A=A$ .... Αν Α=Γ, τότε και Γ=Α .... Αν $\Delta\subseteq E$ και $E\subseteq Z$, τότε $\Delta\subseteq Z$ .... ▪ Να εξηγήσετε γιατί στη σχέση ⊂ (του γνήσιου εγκλεισμού) ισχύει μόνο η μεταβατική ιδιότητα και όχι η ανακλαστική και η συμμετρική.	ΑΡ6.6
6	▪ Να βρείτε τα σύνολα A', $A\cap B\cap \Gamma$, $(A\cup B)\cap\Gamma'$, $A'\cap B$ και $A'\cup B'\cup\Gamma'$. ▪ Να χαρακτηρίσετε ψευδείς ή αληθείς τις πιο κάτω προτάσεις: $\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}'\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\emptyset$,	ΑΡ6.7

	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q},\ \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},\ (1,4) \cap [2,5) = (2,4)$	
7	▪ Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε άλλα ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή. (α) $\dfrac{\chi}{\sqrt[5]{\chi^2}}$ (β) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ▪ Να βρείτε τον αντίστροφο της παράστασης $-3-\sqrt{5}$.	ΑΡ6.9
8	Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης 1– (-10 +3 –20) + [-7 + (-10 –1) + 45] –-2010 =	ΑΡ6.11
9	Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης όταν α = -4 , β = -3 , γ = 10, Α = $\alpha^3 + \beta^3 + 2\gamma^3 - (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) + 3$	ΑΡ6.12
10	Αν α, β είναι αριθμοί αντίστροφοι να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: . $\left[\left(\alpha^3\beta^{-1}\right)^2\alpha^{-5}\beta^4\left(\alpha\beta^2\right)^{-3}\right]^{-5} : \left(-\dfrac{1}{\beta^{-5}}\right)^2$	ΑΡ6.13
11	▪ Να λύσετε την εξίσωση $2x-\left(\sqrt{3}-x\right)=2\sqrt{5}+\sqrt{18}x$ ▪ Να λύσετε την εξίσωση $2^x = 8^{3x}$ ▪ Να λύσετε την εξίσωση $\log 2x = 1-\log x$	ΑΡ6.15
12	Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων (i) $2x+3y=5$, (ii) $6x-4y=8$ (iii) $7x-5y=19$, (iv) $5x-3y=7$	ΑΡ6.16
13	α) Οι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί. Να εξετάσετε αν η περίμετρός του είναι δυνατό να είναι πρώτος αριθμός. β) Οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί. Να εξετάσετε αν το εμβαδόν του είναι δυνατό να είναι πρώτος αριθμός.	ΑΡ6.17

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Ερευνούν ειδικά θέματα κρυπτογραφίας, όπως η χρήση των πρώτων αριθμών στην κρυπτογραφία.
2	Αποδεικνύουν ότι για όλους τους θετικούς ακέραιους ν με $\nu \geq 2$ και για όλους τους πραγματικούς α με $\alpha \neq \mathbf{0}$ και $\alpha > -\mathbf{1}$ ισχύει: $(\mathbf{1}+\alpha)^{\nu} > \mathbf{1}+\nu\alpha$. (Ανισότητα του Bernoulli)
3	Αποδεικνύουν ότι οι ακέραιοι της μορφής ν^4+4, όπου ν θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 και οι ακέραιοι της μορφής $8^{\nu}+1$, όπου ν θετικός ακέραιος, είναι σύνθετοι αριθμοί.
4	Μελετούν τους «τέλειους» αριθμούς και «Φίλους» αριθμούς («Τέλειος αριθμός έστιν ο τοις εαυτού μέρεσιν ίσος ών.»)
5	Αποδεικνύουν προτάσεις, όπως: ▪ Αν ο αριθμός $1+2+2^2+\ldots+2^{\nu-1}=2^{\nu}-1$ είναι πρώτος, τότε ο αριθμός $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ είναι τέλειος.

ΑΡΙΘΜΟΙ

Κλίμακα 7

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
1	Διατυπώνουν και εφαρμόζουν τον ορισμό του παραγοντικού φυσικού αριθμού (ν!).
2	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια του συνόλου, τις πράξεις συνόλων και τις διάφορες μορφές αναπαράστασης των συνόλων.
3	Διατυπώνουν και εφαρμόζουν το νόμο του αθροίσματος ξένων ανά δύο συνόλων και τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης και χρησιμοποιούνται στη λύση προβλημάτων.
4	Αναφέρουν και εφαρμόζουν την Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού σε σύνολα.
5	Διατυπώνουν την αρχή του **Dirichlet** (αρχή της περιστερονοφωλιάς) για πεπερασμένα και άπειρα σύνολα και την εφαρμόζουν σε προβλήματα.
6	Ορίζουν λογικές προτάσεις, εφαρμόζουν την αρχή του Αριστοτέλη και διακρίνουν απλές και σύνθετες λογικές προτάσεις.
7	Αναφέρουν τις λογικές πράξεις άρνηση, σύζευξη, διάζευξη, αποκλειστική διάζευξη, συνεπαγωγή και ισοδυναμία και σχηματίζουν τους αντίστοιχους πίνακες αληθείας και μελετούν τις λογικά ισοδύναμες προτάσεις, και την διαφορά μεταξύ αντιστροφής και αντιθετοαντιστροφής.
8	Ορίζουν προτασιακούς τύπους και εκτελούν πράξεις με προτασιακούς τύπους.
9	Ορίζουν λογικούς τύπους, τύπους με μεταβλητές, και τον υπαρξιακό και καθολικό ποσοδείκτη. Εφαρμόζουν τις βασικές μεθόδους απόδειξης στα Μαθηματικά. (Ευθεία απόδειξη με συνεπαγωγές, αντιθετοαντιστροφή και απαγωγή σε άτοπο).
10	Διατυπώνουν τον ορισμό του φανταστικού αριθμού, συμβολίζουν τη φανταστική μονάδα **i** και υπολογίζουν ακέραιες δυνάμεις του **i**.

11	Ορίζουν τους μιγαδικούς αριθμούς και τους συμβολίζουν στη μορφή $z = a + \beta i$, $z \in \mathbb{C}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
12	Χρησιμοποιούν και εφαρμόζουν τους συμβολισμούς $Re(Z)$, $Im(Z)$, αναγνωρίζουν ότι το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι υπερσύνολο του $\mathbb{R}$ και ορίζουν συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς.
13	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της ισότητας δύο μιγαδικών αριθμών.
14	Ορίζουν και συμβολίζουν ισοϋπόλοιπους αριθμούς.
15	Αναφέρουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν ιδιότητες και θεωρήματα ισοϋπόλοιπων αριθμών.
16	Ορίζουν το λογάριθμο θετικού αριθμού $\alpha > 0$ με βάση οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό $\beta \neq 0,\ \beta \neq 1$, αναφέρουν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων.
17	Εφαρμόζουν την έννοια των λογαρίθμων στην επίλυση προβλημάτων.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ	
18	Κάνουν λογικές εκτιμήσεις και ελέγχουν τη λογικότητα των απαντήσεών τους.
19	Ορίζουν τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών και κάνουν πράξεις των μιγαδικών αριθμών όπως πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση.
20	Επιλύουν εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
21	Επιλύουν λογαριθμικές εξισώσεις.
22	Εφαρμόζουν τη θεωρία συνόλων στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
23	Επιλύουν προβλήματα, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ισοδυναμιών.
24	Ορίζουν και επιλύουν γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις δύο μεταβλητών.
25	Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας Διοφαντικές Εξισώσεις.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια του συνόλου, τις πράξεις συνόλων και τις διάφορες μορφές αναπαράστασης των συνόλων, όπως: ▪ Να γράψετε το παρακάτω σύνολο Α με αναγραφή των στοιχείων του: (α) $A = \{x\ /x$ θετικός ακέραιος μικρότερος του $6\}$ (β) $B = \{x\ /\ x\ \in N$ με $2 < x < 8\}$. (γ) $B = \{x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 5$ και $x + y = 6\}$ ▪ Έστω ένα σύνολο Α, υποσύνολο ενός καθολικό συνόλου Ω. Να αποδείξετε ότι : i) $(A')' = A$ ii) Αν $A \subseteq B$ τότε $B' \subseteq A'$.	ΑΡ7.2
2	Εφαρμόζουν τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης στην επίλυση προβλημάτων, όπως: Σε ένα πανεπιστήμιο προσφέρονται 6 μαθήματα πρωινά και 5 μαθήματα απογευματινά. Με πόσους τρόπους μπορεί ένας φοιτητής να επιλέξει μάθημα, (α) αν δικαιούται να διαλέξει ένα πρωινό και ένα απογευματινό μάθημα και (β) αν πρέπει να διαλέγει ένα μόνο μάθημα, αδιαφορώντας αν είναι πρωί ή απόγευμα.	ΑΡ7.3
3	Εφαρμόζουν την Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού σε σύνολα σε δραστηριότητες, όπως: ▪ Να συμπληρώσετε τις προτάσεις: (α)αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $v(A \cup B) =$…………………… (β) αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $v(A \cup B) =$…………………… ▪ Να χρησιμοποιήσετε την Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού, για να αποδείξετε ότι ο αριθμός των θετικών διαιρετών μικρότερων ή ίσων του 140, που δεν διαιρούνται με τους πρώτους αριθμούς 2, 5 και 7, είναι 48.	ΑΡ7.4
4	Εφαρμόζουν την αρχή του **Dirichlet** σε προβλήματα, όπως: ▪ Να αποδείξετε ότι (α)Μεταξύ 8 ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον δύο που γεννήθηκαν την ίδια μέρα. (β) Μεταξύ 13 ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον δύο που γεννήθηκαν τον ίδιο	ΑΡ7.5

	μήνα (γ) Αν γράψουμε 12 οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς, τότε σίγουρα δύο τουλάχιστον από αυτούς έχουν διαφορά που είναι πολλαπλάσιο του 11. (δ) Στο εσωτερικό ενός ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά 2 cm υπάρχουν 5 σημεία. Να αποδείξετε ότι 2 τουλάχιστον σημεία απέχουν το πολύ 1 cm.	
5	Εφαρμόζουν την αρχή του Αριστοτέλη σε λογικές προτάσεις, όπως: ▪ Να χαρακτηρίσετε ψευδείς ή αληθείς τις πιο κάτω λογικές προτάσεις. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος .... Το 24 είναι πολλαπλάσιο του 6 και του 7 .... Οι αριθμοί 8,15 και 17 αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα .... Ο αριθμός $\sqrt{2}\,\pi$ είναι άρρητος	ΑΡ7.6
6	Σχηματίζουν πίνακες αληθείας σε λογικές προτάσεις, όπως: ▪ Να αναφέρετε την άρνηση(p') της πρότασης (p) : "Το 3 είναι πρώτος αριθμός" και να εξετάσετε ποια είναι αληθής ή ψευδής. ▪ Έστω οι προτάσεις (p): "Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο" και (q): "το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές". Να διατυπώσετε τη σύζευξη p και q $(p \wedge q)$, καθώς και τη διάζευξη p **ή** q $(p \vee q)$. Να σχηματίσετε τους αντίστοιχους πίνακες αληθείας στις πιο πάνω λογικές πράξεις.	ΑΡ7.7
7	Ορίζουν προτασιακούς τύπους και εκτελούν πράξεις με προτασιακούς τύπους, όπως: ▪ Έστω ο προτασιακός τύπος: $p(x)$: "$x^2 \geq x + 6'$". Να αναφέρετε δύο προτασιακούς τύπους που η σύζευξή τους δίνει τον προτασιακό τύπο $p(x)$ και να βρείτε το σύνολο αληθείας του $p(x)$. ▪ Να γράψετε την άρνηση των πιο κάτω προτασιακών τύπων και να τους χαρακτηρίσετε αληθής ή ψευδής $p(x,y)$: $\exists\, x,y \in \mathbb{R}: x + y = 0$, $p(x)$: $\exists\, x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - \chi - 1 = 0$ $p(v)$: $\forall v \in \mathbb{N}, v^2 \geq 1$	ΑΡ7.8
8	Εφαρμόζουν βασικές μεθόδους απόδειξης στα Μαθηματικά σε προβλήματα, όπως: Να αποδείξετε την πρόταση: "Το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού είναι περιττός" με τη μέθοδο (α) της ευθείας απόδειξης, (β) της αντιθετοαντιστροφής και (γ) με τη μέθοδο της σε άτοπο απαγωγής.	ΑΡ7.9
9	Υπολογίζουν ακέραιες δυνάμεις του $\mathbf{i}$, όπως: ▪ Να βρείτε όλες τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει το $i^k, k \in \mathbb{N}$.	ΑΡ7.10
10	Γράφουν στη μορφή $z = \alpha + \beta i$ μιγαδικούς αριθμούς, όπως: ▪ Να γράψετε τους αριθμούς $z_1 = 2 + \sqrt{-9}$, $z_2 = \frac{3}{\sqrt{36}} - \sqrt{-\frac{4}{49}}$,	ΑΡ7.11

	$z_3 = \sqrt{5}$ στη μορφή $z = α + βi$.	
11	Αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν ότι το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι υπερσύνολο του $\mathbb{R}$ σε προβλήματα, όπως: ▪ Να γράψετε το πραγματικό ($\mathrm{Re}(z)$) και το φανταστικό μέρος ($\mathrm{Im}(z)$) των πιο κάτω αριθμών $z_1 = 2 - 8i\,, z_2 = -3i\,, z_3 = 7, z_4 = \frac{2-8i}{10}, z_4 = r(συνθ + iημθ)$ ▪ Να εξηγήσετε γιατί ισχύει $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;	ΑΡ7.12

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Κάνουν πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς – πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση, όπως. ▪ Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις και το αποτέλεσμα να το εκφράσετε στη μορφή $\alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (α) $\frac{2i}{1-i}$ (β) $\frac{1+\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta-i\sigma\upsilon\nu\theta}$. (γ) $\left(2-\sqrt{3}i\right)^4$	ΑΡ7.19
2	Εφαρμόζουν τη θεωρία συνόλων για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων, όπως: ▪ Μεταξύ 40 κοριτσιών υπάρχουν 18 που τους αρέσει το σκάκι,23 που τους αρέσει το ποδόσφαιρο και υπάρχουν και μερικές στις οποίες αρέσει η ποδηλασία. Στις 9 αρέσει και το σκάκι και το ποδόσφαιρο, στις 7 αρέσει το σκάκι και η ποδηλασία και σε 12 αρέσει το ποδόσφαιρο και η ποδηλασία. Σε 4 μόνο κορίτσια αρέσουν και τα τρία σπορ, ενώ σε όλες αρέσει τουλάχιστον ένα σπορ. Σε πόσα κορίτσια αρέσει η ποδηλασία;	ΑΡ7.22

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα του αριθμού $(5+12i)$.	ΑΡ7.13
2	Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς (1-4i) και (1+4i).	ΑΡ7.12
3	Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του αριθμού z που επαληθεύει την εξίσωση: $\frac{z}{z+2}=2-i$.	ΑΡ7.12
4	Αν ισχύει $i^2=-1$ και $[(i^2)^3]^k=1$, ποια είναι η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου κ;	ΑΡ7.10
5	Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=1+i,\quad z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i,\quad z_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}i,\quad z_4=\frac{1}{8}+\frac{1}{27}i,\quad z_5=\frac{1}{16}+\frac{1}{54}i,\quad +\ldots$ Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων $w=z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+\ \ldots$	ΑΡ7.19
6	Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου ν να υπολογιστεί το άθροισμα $S=i+i^2+i^3+\ldots+i^\nu$.	ΑΡ7.10
7	Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^\nu+i^{-\nu}$;	ΑΡ7.10
8	Αν $\bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$ και $z_1\cdot z_2\neq-1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $v=\frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}$ είναι φανταστικός.	ΑΡ7.12
9	• Αν $\Omega=\{x\mid x^2-3\lvert x\rvert+2=0\}$ είναι το καθολικό σύνολο και $A=\{x\mid x^2-1=0\}$, $B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, να βρείτε τα: A', B', $A\cup B$, $(A\cup B)'$, $A\cap B$, $(A\cap B)'$, $A-B, A'\cup B$, $(A-B)\cup(B-A)$. • Δίνονται τα σύνολα: $\Sigma=\{x\mid x$ ακέραια λύση της ανίσωσης $x^2-4\leq0\}$, $T=\{x\mid x\in(-2,0)\cup(0,3)\}$. Να βρείτε τα σύνολα: $\Sigma\cup T$, $\Sigma\cap T$, $\Sigma-T$, $T-\Sigma$.	ΑΡ7.2
10	Να δείξετε ότι το 139 είναι πρώτος αριθμός και στη συνέχεια να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y, ώστε να ισχύει $x^2-y^2=139$.	ΑΡ7.25

11	Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο δυνάμεις του 2, που διαφέρουν με κάποιο πολλαπλάσιο του 2009.	ΑΡ7.2 ΑΡ7.9
12	Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1 = \sqrt{2}$ και $\alpha_2 = \log 2$ είναι άρρητοι.	ΑΡ7.9
13	Ένας αριθμός καλείται αλγεβρικός, αν είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Να δείξετε ότι οι αριθμοί: $x_1 = 3 + \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $x_3 = 3 + 2i$, είναι αλγεβρικοί.	ΑΡ7.9
14	Να αποδείξετε ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.	ΑΡ7.9
15	Σε ένα δωμάτιο υπάρχουν 20 άτομα. Να δείξετε ότι δύο από αυτούς έχουν τον ίδιο αριθμό γνωριμιών.	ΑΡ7.4
16	Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πάντοτε περιττός αριθμός. Ισχύει το ίδιο όταν οι δύο φυσικοί αριθμοί δεν είναι διαδοχικοί; Να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.	ΑΡ7.9
17	α) Να ονομάσετε και αναγράψετε στοιχεία από τα σύνολα των αριθμών που αναπαριστούν: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ποιο σύνολο είναι το συμπλήρωμα του $\mathbb{Q}$; β) Να εξηγήσετε γιατί είναι ορθές οι πιο κάτω προτάσεις: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \left\{-1, \frac{3}{7}, 3.14, \quad 2.\dot{8}\right\} \subset \mathbb{Q}.$	ΑΡ7.12

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι: ο $w = \frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.
2	α) Αν $\lvert z \rvert = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$. β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\kappa$ ισχύει $\lvert z_1 \rvert = \lvert z_2 \rvert = ... = \lvert z_\kappa \rvert = 1$, να αποδείξετε ότι: $\lvert z_1 + z_2 + ... + z_\kappa \rvert = \left\lvert \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_\kappa} \right\rvert$.
3	Να δείξετε ότι το 1200 μπορεί να πάρει τη μορφή $2^\kappa \cdot 3^\lambda \cdot 5^\mu, \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$. Να χρησιμοποιήσετε την αρχή του εγκλεισμού- αποκλεισμού για να βρείτε πόσοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 1200 είναι σχετικά πρώτοι με το 1200;
4	Να δείξετε ότι αν δοθούν 7 πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, ..., x_7$, υπάρχουν δύο από αυτούς έτσι ώστε να ισχύει: $0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i \cdot x_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$
5	Σε ένα τετράγωνο 70cm x 70cm τοποθετούμε τυχαία 50 σημεία. Να δείξετε ότι δεν μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που να απέχουν περισσότερο από 15cm.
6	Υπολογίζουν τα μέτρα μιγαδικών αριθμών, όπως: • Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών: $(1+i)^2$, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$, $\left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ με $\lvert \lambda \rvert + \lvert \mu \rvert \neq 0$.

ΑΡΙΘΜΟΙ

Κλίμακα 8

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
1	Ορίζουν και εφαρμόζουν το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$και τους συμβολίζουν στη μορφή $z = \alpha + \beta i$, $z \in \mathbb{C}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ως επέκταση του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών (και της δομής τους) και τους αναπαριστάνουν τους στο επίπεδο (επίπεδο Gauss).
2	Χρησιμοποιούν τους συμβολισμούς $Re(Z), Im(Z)$, ορίζουν το συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού και κατανοούν τη σημασία του στην εύρεση του μέτρου και του αντίστροφου ενός μιγαδικού αριθμού.
3	Εφαρμόζουν την αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών στο επίπεδο Gauss (διαγράμματα Argand) και κατανοούν την έννοια της διανυσματικής ακτίνας, του μέτρου και του ορίσματος μιγαδικού αριθμού.
4	Γράφουν και μετατρέπουν μιγαδικούς αριθμούς σε τριγωνομετρική ή εκθετική μορφή και εκτελούν πράξεις σε αυτές τις μορφές.
5	Αναφέρουν και αποδεικνύουν το θεώρημα του De Moivre, και το εφαρμόζουν για την εύρεση των ριζών του πολυωνύμου $z^n = w$.

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ
6	Επεκτείνουν το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.
7	Κάνουν λογισμό με μιγαδικούς αριθμούς σε τριγωνομετρική μορφή και επιλύουν εξισώσεις στο σύνολο $\mathbb{C}$.
8	Διατυπώνουν το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας και κατανοούν την επάρκεια των μιγαδικών αριθμών στην εύρεση των ριζών πολυωνύμων.
9	Αποδεικνύουν αλγεβρικές σχέσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Αναπαριστούν τους μιγαδικούς αριθμούς στο επίπεδο Gauss (διαγράμματα Argand), όπως: ▪ Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = 2 + 3i$. ▪ Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που αναπαριστούν τους μιγαδικούς αριθμούς z , iz, i^2z, i^3z και i^4z.	ΑΡ8.1
2	Γράφουν και μετατρέπουν μιγαδικούς αριθμούς σε τριγωνομετρική μορφή, όπως: ▪ Να γράψετε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς σε τριγωνομετρική μορφή $(\rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta))$ $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = 4, z_4 = -3i$	ΑΡ8.4
3	Εφαρμόζουν το θεώρημα του De Moivre σε προβλήματα, όπως: (α) Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής το θεώρημα του De Moivre: $(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^{\nu} = \text{συν}(\nu\theta) + i\ \text{ημ}(\nu\theta)$για $\nu \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι το θεώρημα ισχύει και για $\nu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{Q}$. (β)Να απλοποιήσετε το κλάσμα:$\frac{(\sqrt{3}-i)^5}{\sqrt{3}+i}$ (γ)Να εκφράσετε το ημ5θ συναρτήσει του ημθ και συνθ, και το συν5θ, συναρτήσει του συνθ μόνο.	ΑΡ8.5

	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Κάνουν λογισμό με μιγαδικούς αριθμούς σε τριγωνομετρική μορφή και επιλύουν εξισώσεις στο σύνολο $\mathbb{C}$, όπως: ▪ Η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών διευκολύνει τη λύση της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$. Η λύση της $z^{\nu} = \alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{C}$ ανάγεται στη λύση της $z^{\nu} = 1$.	ΑΡ8.7
2	Αποδεικνύουν αλγεβρικές σχέσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, όπως: ▪ Αν $\omega = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\ \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$, να αποδειχτεί ότι: (α) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{\nu-1} = 0$.	ΑΡ8.9

(β) $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \cdots \cdot \omega^{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση των γεωμετρικών τόπων $\|z\| = \sqrt{17}$ και $\|z-2\| = \|z\|$ και στη συνέχεια τα σημεία τομής τους. ▪ Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z, αν $Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$.	ΑΡ8.3
2	▪ Να γράψετε τον αριθμό $z = 1 + \sqrt{3}i$ σε τριγωνομετρική μορφή. Να δείξετε ότι το $z^{12} \in \mathbb{R}$. ▪ Αν $z_1 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{24} + i\eta\mu\frac{13\pi}{24}\right) \kappa\alpha\iota\ z_2 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{24} + i\eta\mu\frac{5\pi}{24}\right)$ να εκφράσετε τους αριθμούς $z_1 \cdot z_2\ \kappa\alpha\iota\ \frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $\alpha + \beta i$.	ΑΡ8.4
3	Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του De Moivre, για να δείξετε τις ταυτότητες: $\alpha)\sigma\upsilon\nu 4\theta = 8\sigma\upsilon\nu^4\theta - 8\sigma\upsilon\nu^2\theta + 1\ \kappa\alpha\iota\ \beta)\varepsilon\varphi 4\theta = \dfrac{4\varepsilon\varphi\theta - 4\varepsilon\varphi^3\theta}{1 - 6\varepsilon\varphi^2\theta + \varepsilon\varphi^4\theta}$.	ΑΡ8.5
4	Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $x^2 - 6x + 13 = 0$, (β) $x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$, γ) $z^6 = 1$, $\delta)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^6 = 1$	ΑΡ8.7
5	▪ Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει: $\sqrt{2} \cdot \|z\| \geq \|Re(z)\| + \|Im(z)\|$. ▪ (α) Να βρείτε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού w, όπου $w = \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta-i\,\eta\mu\theta}\right)^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\theta \neq (2\kappa\pi + 1)\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. (β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{100}$.	ΑΡ8.9

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του De Moivre για να δείξετε ότι: $z^{\nu} - z^{-\nu} = 2i\eta\mu\theta$ Στη συνέχεια να δείξετε ότι: $16\eta\mu^5\theta = \eta\mu 5\theta - 5\eta\mu 3\theta + 10\eta\mu\theta$ και (α) Να υπολογίσετε $\int \eta\mu^5\theta d\theta$. (β) Να λύσετε την εξίσωση $4\,\eta\mu^5\theta + \eta\mu 5\theta = 0$ $\sigma\tau o$ $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ $[0,2\pi]$.
2	Αν $P(x, y)$ το σημείο που αντιπροσωπεύει το μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$, να σχεδιάσετε το γεωμετρικό τόπο του P, αν $\|z - 1 - i\| = \sqrt{2}$. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $\|z\|$ για τα σημεία P που βρίσκονται στον πιο πάνω γεωμετρικό τόπο.
3	Να δείξετε ότι οι μη πραγματικές κυβικές ρίζες της μονάδας είναι: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. $A\nu$ οι δύο αυτές ρίζες αντιπροσωπεύονται από τα σημεία Α και Β στο μιγαδικό επίπεδο και ο μιγαδικός αριθμός $z = -2$ αντιπροσωπεύεται από το σημείο Γ, να δείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΓΑΒ με κέντρο το Γ είναι $\frac{\pi}{2}$.
4	(α) Αν $\|z\| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$. (β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \cdots, z_\kappa$ ισχύει $\|z_1\| = \|z_2\| = \cdots = \|z_\kappa\| = 1$, να αποδείξετε ότι: $\|z_1 + z_2 + \cdots + z_\kappa\| = \left\|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_\kappa}\right\|$.

ΜΕΤΡΗΣΗ

Κλίμακα 1

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ
1	Συγκρίνουν και σειροθετούν αντικείμενα με βάση το ύψος, το μήκος και τη μάζα τους, χρησιμοποιώντας άμεση σύγκριση ή και μη συμβατικές μονάδες.
2	Εκτιμούν και μετρούν το μήκος και τη μάζα αντικειμένων με συμβατικές μονάδες μέτρησης (εκατοστόμετρα (cm) και κιλά (kg), αντίστοιχα).
3	Εκτιμούν και υπολογίζουν την περίμετρο απλών δισδιάστατων σχημάτων με μη συμβατικές και συμβατικές μονάδες μέτρησης (cm).
4	Εκτιμούν και υπολογίζουν το εμβαδόν απλών δισδιάστατων σχημάτων με μη συμβατικές μονάδες μέτρησης.
5	Αναγνωρίζουν νομίσματα και τις σχέσεις μεταξύ τους.
6	Χρησιμοποιούν εργαλεία ή συσκευές, όπως ζυγαριές και θερμόμετρα, για να κάνουν εκτιμήσεις.

	ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ
7	Διακρίνουν έννοιες χρόνου (π.χ. πρωί, μεσημέρι, απόγευμα, βράδυ, αύριο, χθες, εβδομάδα, χρόνος) και χρησιμοποιούν μέσα μέτρησης του χρόνου (π.χ. ρολόι, ημερολόγιο).
8	Ονομάζουν και αναγνωρίζουν τις ημέρες, τους μήνες και τις εποχές του χρόνου.
9	Διαβάζουν και γράφουν την ώρα, χρησιμοποιώντας αναλογικά και ψηφιακά ρολόγια.
10	Τοποθετούν γεγονότα σε χρονολογική σειρά με βάση την καθημερινή εμπειρία ή πληροφορίες που δίνονται.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

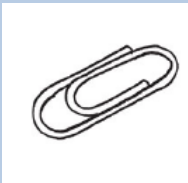
ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

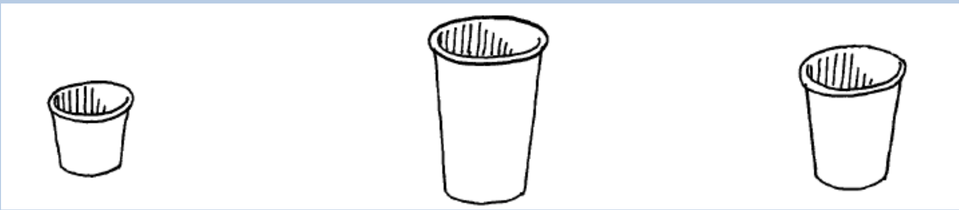
1 Συγκρίνουν αντικείμενα με βάση το ύψος, το μήκος και τη μάζα τους, χρησιμοποιώντας άμεση σύγκριση ή και μη συμβατικές μονάδες μέτρησης σε δραστηριότητες, όπως: — M1.1

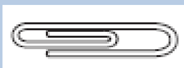
- «Να βάλετε σε κύκλο το πιο κοντό μολύβι.»

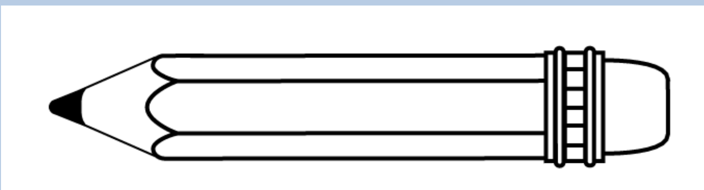
- «Να χρωματίσετε με κόκκινο χρώμα το πιο βαρύ αντικείμενο.»


- «Να βάλετε στη σειρά τα πιο κάτω δοχεία, ξεκινώντας από αυτό που χωρεί περισσότερο νερό.»



- «Να μετρήσετε με συνδετήρες  το μήκος του πιο κάτω μολυβιού.»



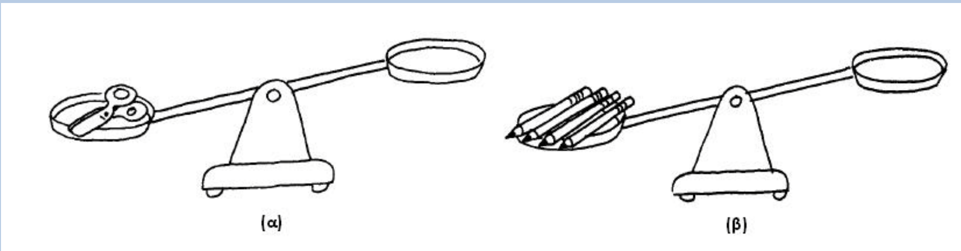
- «Να μετρήσετε το μήκος της μεγάλης πλευράς του βιβλίου των μαθηματικών σας με σπιρτόξυλα, καλαμάκια και οδοντογλυφίδες και να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

	σπιρτόξυλα	**καλαμάκια**	**Οδοντογλυφίδες**
Μήκος μεγάλης πλευράς του βιβλίου των μαθηματικών			

- «Να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

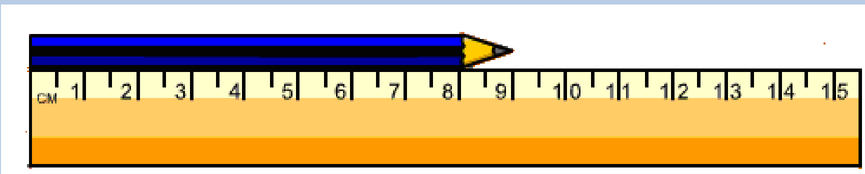
	ΕΚΤΙΜΩ Πόσα σπιρτόξυλα είναι περίπου το μήκος των αντικειμένων;	**ΜΕΤΡΩ** Πόσα ακριβώς σπιρτόξυλα είναι το μήκος των αντικειμένων;
Μολύβι		
Χάρακας		
Μαρκαδόρος		

- «Να υπολογίσετε πόσα περίπου νομίσματα των 5 σεντς  θα πρέπει να τοποθετήσετε στις πιο κάτω ζυγαριές ώστε να ισορροπούν.»

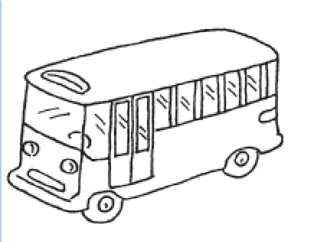


2 Εκτιμούν και μετρούν το μήκος και τη μάζα αντικειμένων με συμβατικές μονάδες μέτρησης σε δραστηριότητες, όπως: Μ1.2

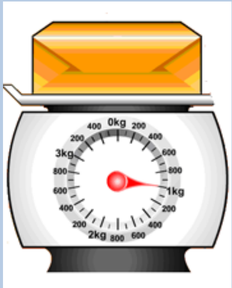
- «Πόσο είναι το μήκος του μολυβιού;»



- «Να βάλετε σε κύκλο τα αντικείμενα που ζυγίζουν περισσότερο από ένα κιλό.»

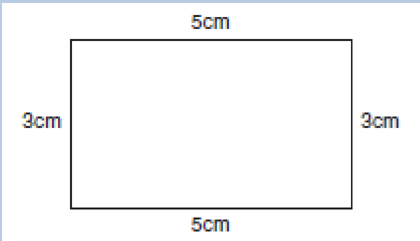


- «Πόσα κιλά ζυγίζει το πιο κάτω κουτί;»



3 Εκτιμούν και υπολογίζουν την περίμετρο δισδιάστατων σχημάτων με μη συμβατικές και συμβατικές μονάδες μέτρησης σε δραστηριότητες, όπως: M1.3

- «Να εκτιμήσετε και να μετρήσετε με τις παλάμες των χεριών σας  την περίμετρο του θρανίου σας.»
- «Πόσα σπιρτόξυλα είναι η περίμετρος του βιβλίου σας;»
- «Να υπολογίσετε την περίμετρο του πιο κάτω σχήματος.»

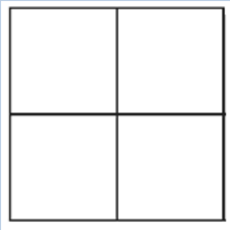


- «Να εκτιμήσετε και να υπολογίσετε την περίμετρο αντικειμένων που υπάρχουν γύρω σας, χρησιμοποιώντας το χάρακά σας και να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

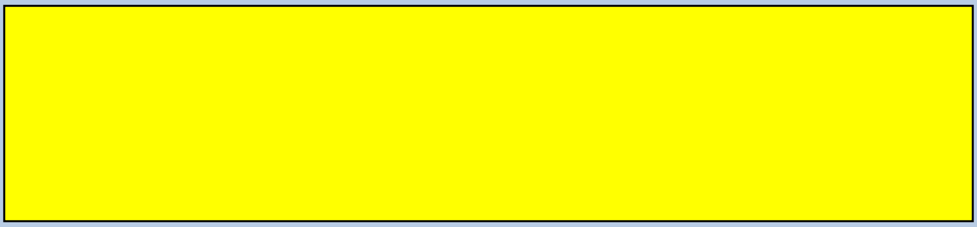
	ΕΚΤΙΜΩ ΤΗΝ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟ	**ΜΕΤΡΩ ΤΗΝ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟ**
Εξώφυλλο του βιβλίου της γεωγραφίας		
Οθόνη ηλεκτρονικού υπολογιστή		

4 Εκτιμούν και υπολογίζουν το εμβαδόν δισδιάστατων σχημάτων με μη συμβατικές μονάδες μέτρησης σε δραστηριότητες, όπως: Μ1.4

- «Πόσα τετράγωνα υπάρχουν στο πιο κάτω σχήμα;»



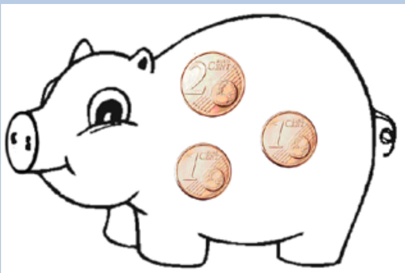
- «Να βρείτε τον αριθμό των κερμάτων των 5 σεντ  που χρειάζεστε για να καλύψετε το μεγαλύτερο δυνατό μέρος της επιφάνειας του πιο κάτω σχήματος.»



Χρησιμοποίησα ☐ κέρματα των 5 σεντ .

5 Αναγνωρίζουν τα νομίσματα του ευρώ και τις σχέσεις μεταξύ τους σε δραστηριότητες, όπως: Μ1.5

- «Πόσα χρήματα έχει ο κάθε κουμπαράς;»



(α) Έχει ☐ σεντ.

(β) Έχει ☐ σεντ.

(γ) Έχει ☐ σεντ.

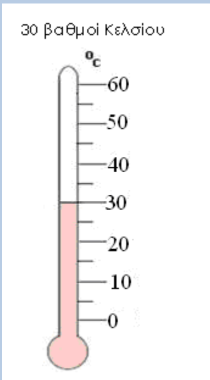
(δ) Έχει ☐ σεντ.

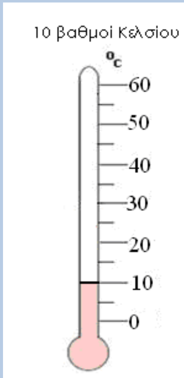
- «Να συμπληρώσετε τον πίνακα, για να δείξετε με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους πώς θα πληρώσετε το ποσό των 40 σεντ.»

ΠΟΣΟ	ΝΟΜΙΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΕΥΡΩ				
					
40 σεντ					
40 σεντ					
40 σεντ					
40 σεντ					

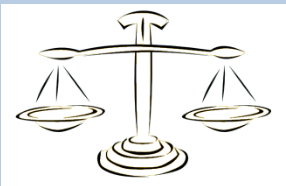
6 Χρησιμοποιούν εργαλεία ή συσκευές, για να κάνουν εκτιμήσεις σε δραστηριότητες, όπως: M1.6

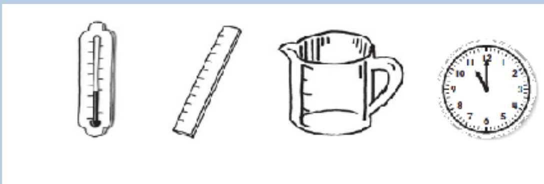
- «Να περιγράψετε τη θερμοκρασία που δείχνει κάθε θερμόμετρο με τις λέξεις κρύο ή ζεστό.»

(α) 

(β) 

- «Να βάλετε σε κύκλο το όργανο που θα χρησιμοποιήσετε, για να βρείτε τη θερμοκρασία της τάξης σας.»





- «Να βάλετε σε κύκλο το όργανο που θα χρησιμοποιήσετε, για να υπολογίσετε τη μάζα που έχει το βιβλίο των μαθηματικών σας.»

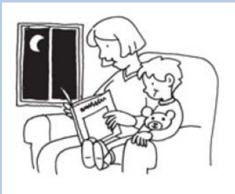
- Να εκτιμήσετε πόσα ποτήρια  μπορεί να χωρέσουν σε μία κανάτα .

	ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ	**Δ.Ε.**
	Οι μαθητές:	
1	Διακρίνουν τις έννοιες του χρόνου σε δραστηριότητες, όπως:	Μ1.7
2	Ονομάζουν ημέρες, μήνες και εποχές σε δραστηριότητες, όπως:	Μ1.8

1 Διακρίνουν τις έννοιες του χρόνου σε δραστηριότητες, όπως:

- «Να γράψετε κάτω από κάθε εικόνα τη στιγμή της ημέρας που συμβαίνουν τα γεγονότα: πρωί, μεσημέρι, απόγευμα, βράδυ.»

(α) _______________



(β) _______________

2 Ονομάζουν ημέρες, μήνες και εποχές σε δραστηριότητες, όπως:

- «Να βάλετε αριθμούς στους μήνες του χρόνου, με βάση τη σειρά τους στο ημερολόγιο.»

☐ Νοέμβριος	1 Ιανουάριος	☐ Οκτώβριος
☐ Μάρτιος	☐ Ιούλιος	☐ Φεβρουάριος
☐ Αύγουστος	☐ Δεκέμβριος	☐ Σεπτέμβριος
☐ Φεβρουάριος	☐ Μάιος	☐ Ιούνιος

- «Να γράψετε κάτω από κάθε εικόνα την εποχή που περιγράφουν.»



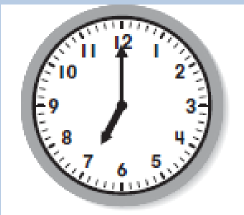

(α) ____________ (β) ____________ (γ) ____________ (δ) ___________

- «Να συμπληρώσετε το πιο κάτω ημερολόγιο.»

Φεβρουάριος 2010						
Κυριακή	Δευτέρα	Τρίτη				
				11		
28						

3 Διαβάζουν και γράφουν την ώρα σε δραστηριότητες, όπως: Μ1.9

- «Να γράψετε κάτω από κάθε ρολόι την ώρα που δείχνει.»

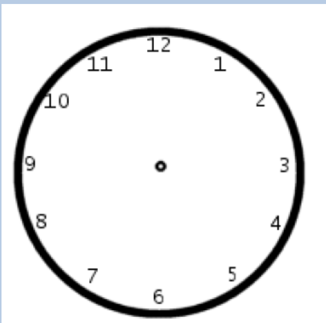


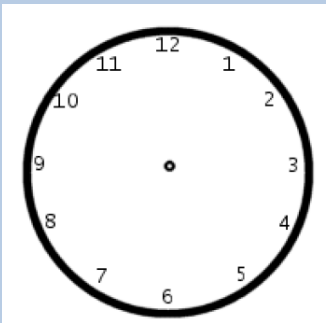
(α) _______________ (β)_____________ (γ)_______________

- «Να βάλετε σε κύκλο την εικόνα που δείχνει τη δραστηριότητα που χρειάζεται το περισσότερο χρόνο για να γίνει.»



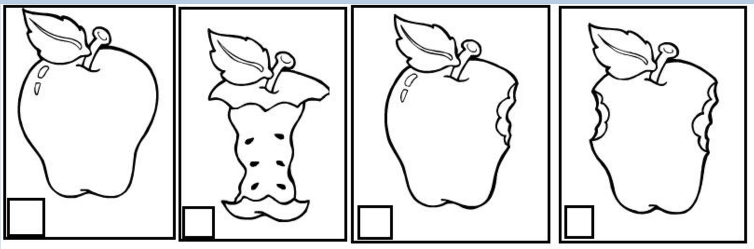
- «Να σχεδιάσετε του δείκτες στα πιο κάτω ρολόγια, ώστε να δείχνουν την ώρα που αναγράφεται κάτω από αυτά.»

(α)

11:30

(β)

6:00

4 Τοποθετούν γεγονότα σε χρονολογική σειρά σε δραστηριότητες, όπως: Μ1.10

- «Να βάλετε τους αριθμούς στις εικόνες, για να δείξετε τη χρονική τους σειρά.»

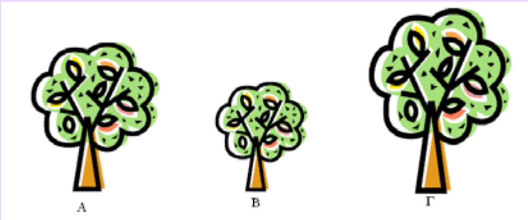
(α) 

(β) 

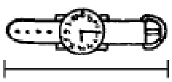
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι μαθητές: Δ.Ε.

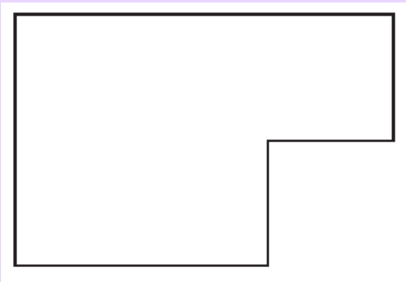
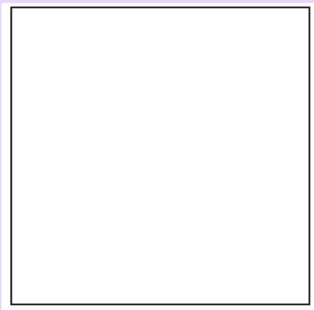
1
- Να βάλετε στη σειρά τα πιο κάτω δέντρα από το ψηλότερο ως το χαμηλότερο. Τα δέντρα βρίσκονται στην ίδια σειρά. Μ1.1



2
- Να εκτιμήσετε το μήκος των πιο κάτω αντικειμένων και να ελέγξετε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας το χάρακά σας. Μ1.2

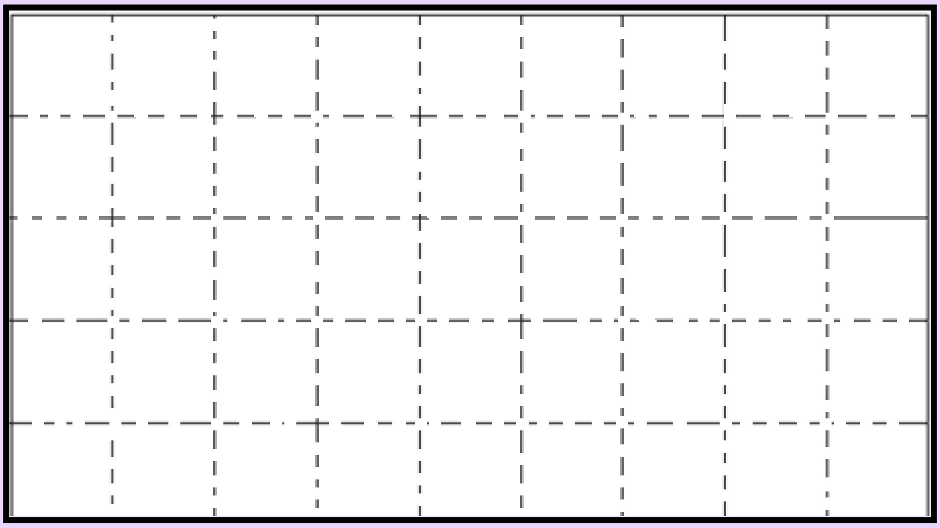
	ΕΚΤΙΜΩ	**ΜΕΤΡΩ**
Μήκος του ποδιού της καρέκλας 		
Μήκος ενός ρολογιού χεριού 		

3
- Να εκτιμήσετε ποιο από τα πιο κάτω σχήματα έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο και να το βάλετε σε κύκλο. Να ελέγξετε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας το χάρακά σας. Μ1.3

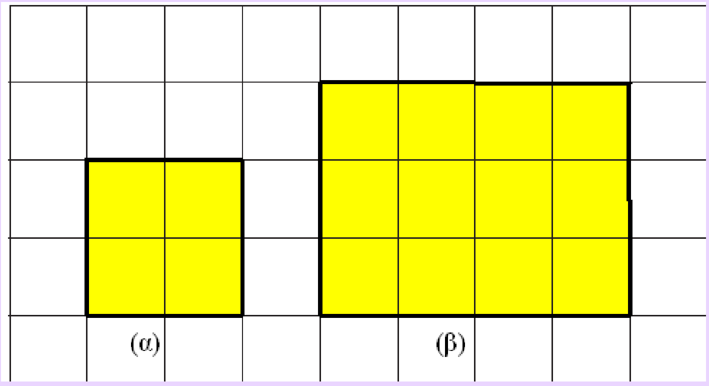
(α)  (β) 

4

- Να κατασκευάσετε στο πιο κάτω πλαίσιο δύο σχήματα που να καλύπτουν οχτώ τετράγωνα το καθένα. Μ1.4



- Πόσα τετράγωνα περισσότερα καλύπτει το σχήμα (β) από το σχήμα (α);



5

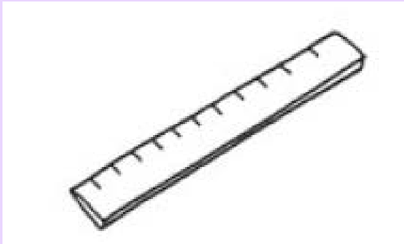
- Να γράψετε κάτω από κάθε κουμπαρά πόσα χρήματα έχει και να βάλετε σε κύκλο τον κουμπαρά που έχει τα περισσότερα χρήματα. Μ1.5

(α) Έχει ___ ευρώ.

(β) Έχει ___ ευρώ.

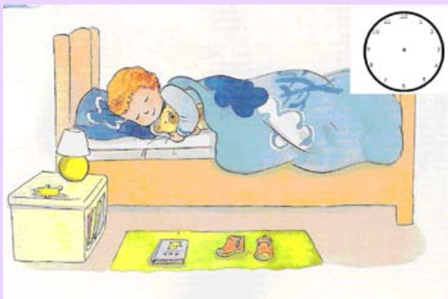
6

- Η Μαρία έχει δύο κουτιά. Θέλει να βρει ποιο από τα δύο κουτιά ζυγίζει περισσότερο. Ποιο από τα πιο κάτω όργανα μέτρησης θα χρησιμοποιήσει; Μ1.6



7 ▪ Η Μαρία θα ταξιδέψει την ερχόμενη Δευτέρα από τη Λάρνακα στο Λονδίνο. Θα μείνει στο Λονδίνο για 5 ημέρες. Πότε θα επιστρέψει στη Λάρνακα; Μ1.7

8 ▪ Να γράψετε κάτω από κάθε εικόνα τη στιγμή της ημέρας στην οποία συμβαίνει το γεγονός που φαίνεται και να σχεδιάσετε τους δείκτες στα ρολόγια, ώστε να δείχνουν την ώρα που περίπου συμβαίνουν τα γεγονότα. Μ1.7 Μ1.9



(α) ___________________ (β)______________________

9 ▪ Πόσα Σάββατα υπάρχουν το Μάιο του 2010 με βάση το πιο κάτω ημερολόγιο; Μ1.8

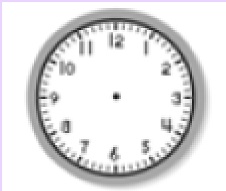
ΜΑΙΟΣ 2010

Κυριακή	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

10

- Να βάλετε σε κύκλο τα ρολόγια που δείχνουν την ίδια ώρα. Μ1.9

- Η Μαρία και ο Νίκος πηγαίνουν στο πάρκο στις 5:00 ακριβώς το απόγευμα και φεύγουν ύστερα από μία ώρα και τριάντα λεπτά. Να δείξετε στο πιο κάτω ρολόι την ώρα που φεύγουν από το πάρκο.



11

- Να γράψετε τους αριθμούς στα κουτάκια, για να δείξετε τη σειρά με την οποία κάνει τις δουλειές της η Μαρία. Μ1.10

☐ Πηγαίνω στη κουζίνα.

☐ Φεύγω για το σχολείο.

☐ Πλένω τα δόντια μου.

☐ Σηκώνομαι από το κρεβάτι.

☐ Φορώ τα ρούχα μου.

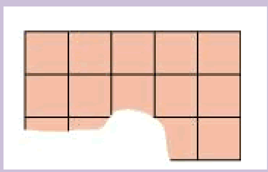
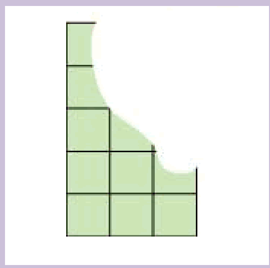
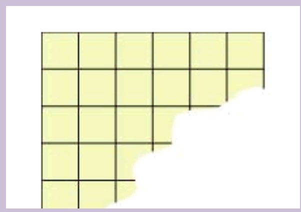
☐ Πηγαίνω στο μπάνιο.

☐ Τρώγω το πρόγευμα που μου ετοίμασε η μητέρα μου.

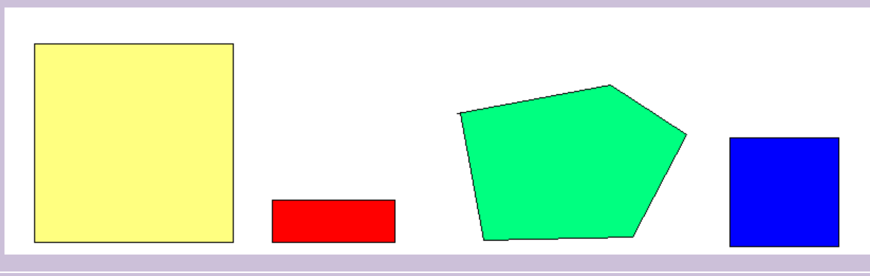
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

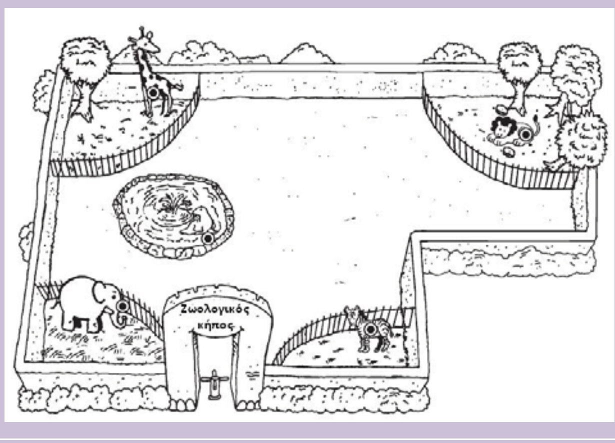
1 Συμπληρώνουν τα πιο κάτω σχήματα, ώστε να προκύψουν ορθογώνια και υπολογίζουν κάθε φορά τον αριθμό των τετραγώνων που αποτελούνται τα συμπληρωμένα ορθογώνια.

(α)  (β)  (γ) 

2 Τοποθετούν στη σειρά τα πιο κάτω σχήματα, αρχίζοντας από αυτό που καλύπτει την μικρότερη επιφάνεια.



3 Ενώνουν με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στα ζώα στην πιο κάτω εικόνα και μετρούν με το χάρακά τις αποστάσεις που απέχουν μεταξύ τους αυτά.

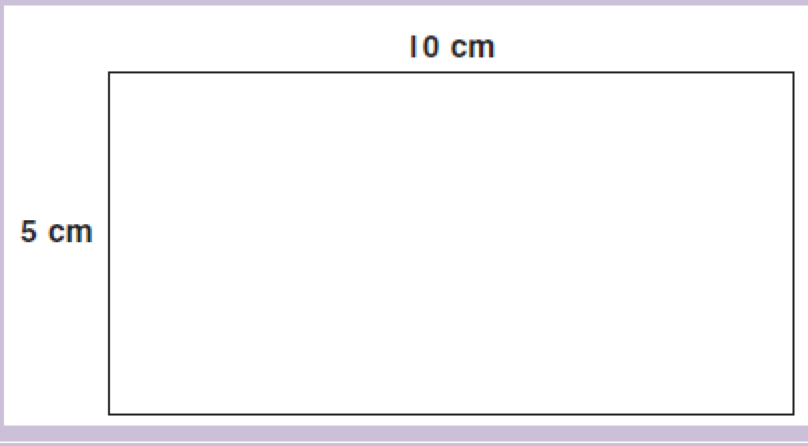


4 Επιλύουν προβλήματα, όπως:

«Η Ειρήνη θέλει να τοποθετήσει γύρω από τη φωτογραφοθήκη της διακοσμητική κορδέλα. Πόσο θα πρέπει να είναι το μήκος της κορδέλας σε εκατοστόμετρα, αν το σχήμα της φωτογραφοθήκης είναι τετράγωνο με πλευρά

3 cm;»

5 Υπολογίζουν την περίμετρο του πιο κάτω ορθογωνίου.



6 Πραγματοποιούν εργασίες πρότζεκτ, όπως:

- «Να καταγράψετε αντικείμενα που υπάρχουν στην τάξης σας με τα οποία μπορείτε να μετρήσετε, χρησιμοποιώντας τα πιο κάτω όργανα μέτρησης.»

Όργανα μέτρησης			
			

ΜΕΤΡΗΣΗ

Κλίμακα 2

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ
1	Χρησιμοποιούν διαφορετικές μονάδες μέτρησης, για να εκτιμήσουν και να μετρήσουν τα ίδια αντικείμενα.
2	Εκτιμούν και υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραγώνου, του ορθογωνίου και του ορθογώνιου τριγώνου, χρησιμοποιώντας κατάλληλες μονάδες μέτρησης.
3	Χρησιμοποιούν συμβατικές μονάδες μέτρησης του μήκους (cm και m), της μάζας (Kg και g) και της χωρητικότητας (L).
4	Χρησιμοποιούν τη γωνία των 90^0, για να συγκρίνουν, να ταξινομούν και να κάνουν εκτιμήσεις γωνιών.
5	Μετρούν το μήκος ενός αντικειμένου με ακρίβεια εκατοστόμετρου.
6	Μετατρέπουν μέτρα σε εκατοστόμετρα και κιλά σε γραμμάρια και αντίστροφα.
7	Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα αναπαριστώντας, προσθέτοντας και αφαιρώντας ποσά χρημάτων.

	ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ
8	Διαβάζουν και γράφουν ημερομηνίες με διάφορους τρόπους, διακρίνοντας τη θέση της ημέρας, του μήνα και του έτους και απαντούν ερωτήσεις σχετικές με ημερολόγιο.
9	Διαβάζουν και γράφουν την ώρα, χρησιμοποιώντας ψηφιακά και αναλογικά ρολόγια.
10	Σειροθετούν γεγονότα με βάση τη χρονική διάρκεια πραγματοποίησής τους και τη λογική.
11	Αναγνωρίζουν τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης του χρόνου.

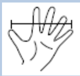
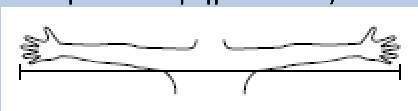
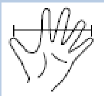
12 Διαβάζουν, γράφουν και εκτιμούν τη θερμοκρασία, χρησιμοποιώντας θερμόμετρα.

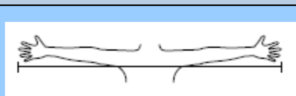
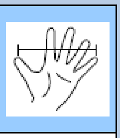
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

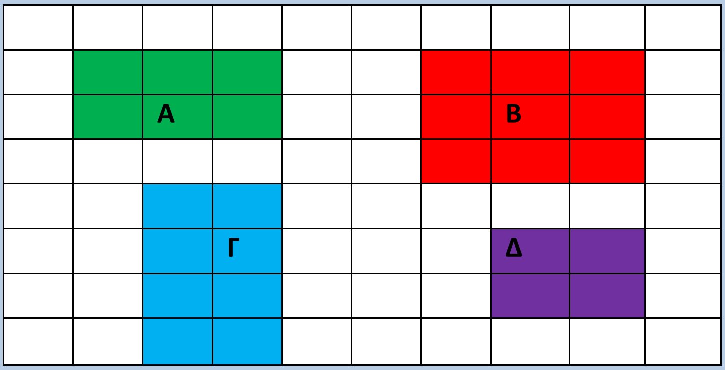
1 Χρησιμοποιούν διαφορετικές μονάδες, για να εκτιμήσουν και να μετρήσουν τα ίδια αντικείμενα σε δραστηριότητες, όπως: — M2.1

- «Τρεις μαθητές μετρούν με τις παλάμες των χεριών τους  το μήκος της μεγάλης πλευράς του πίνακα της τάξης τους. Η Μαρία μέτρησε 11 παλάμες, ο Νίκος μέτρησε 8 παλάμες και η Άννα μέτρησε 10 παλάμες. Ποιος από τους τρεις μαθητές έχει τη παλάμη με το μεγαλύτερο μήκος;»
- «Να χρησιμοποιήσετε τα βήματα σας , το άνοιγμα το χεριών σας  και τις παλάμες των χεριών σας , για να μετρήσετε το μήκος της μεγάλης πλευράς της τάξης σας και το ύψος της βιβλιοθήκης της τάξης σας. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

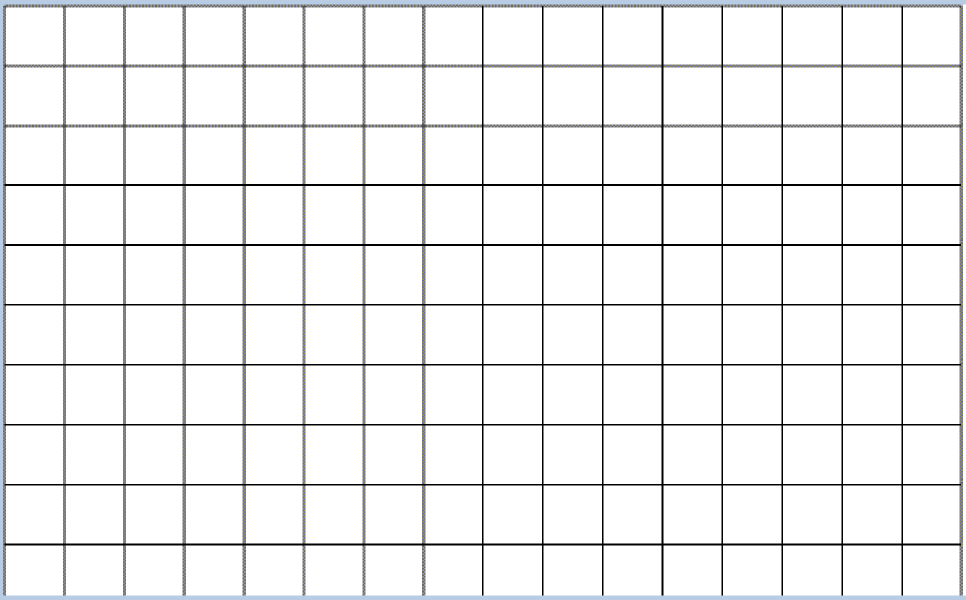
			
Μήκος μεγάλης πλευράς της τάξης			
Ύψος της βιβλιοθήκης			

2 Εκτιμούν και υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν δισδιάστατων σχημάτων, χρησιμοποιώντας κατάλληλες μονάδες μέτρησης σε δραστηριότητες, όπως: — M2.2

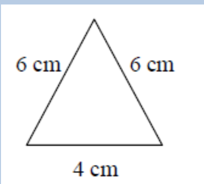
- «Ποιο από τα πιο κάτω σκιασμένα σχήματα έχει τη μικρότερη περίμετρο;»

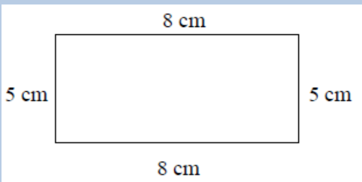


- «Να κατασκευάσετε διαφορετικά σχήματα που να έχουν περίμετρο ίση με 24 cm στο τετραγωνισμένο χαρτί. Κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm.»



- «Να υπολογίσετε την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων.»

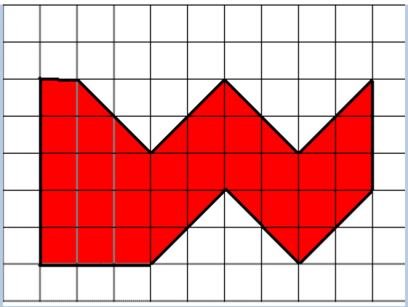
(α) 

(β) 

- «Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους στο πιο κάτω τετραγωνισμένο χαρτί.»

Κάθε τετραγωνάκι είναι ίσο με ένα τετραγωνικό εκατοστό.

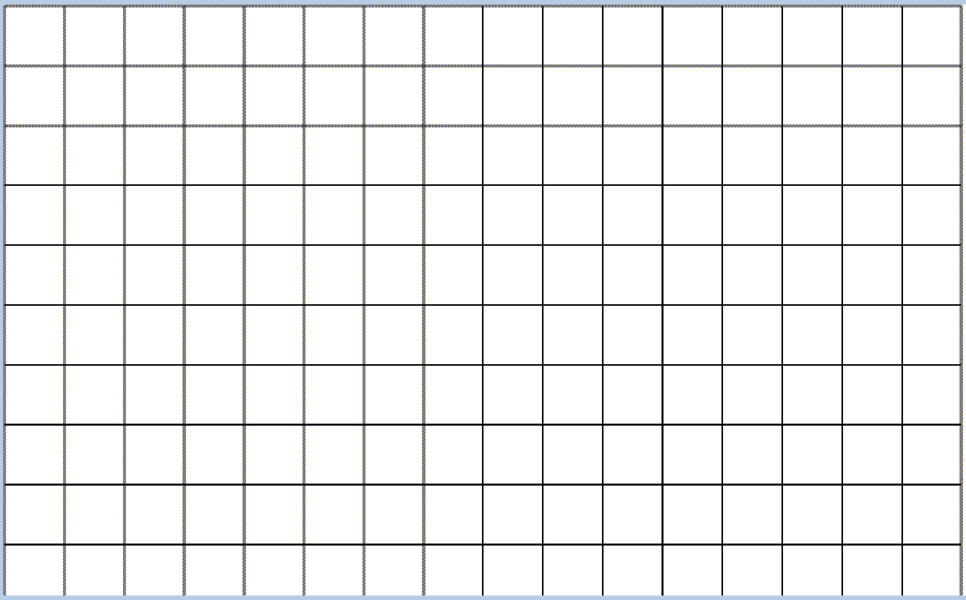
1 □ = 1 cm^2



- «Να κατασκευάσετε στο τετραγωνισμένο φύλλο χαρτιού ένα ορθογώνιο που να έχει μήκος ίσο με 6 cm και πλάτος ίσο με 4 cm και ένα τετράγωνο που να έχει την ίδια περίμετρο με το ορθογώνιο. Να βρείτε κατά πόσο το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τετραγώνου.»

Κάθε τετραγωνάκι είναι ίσο με ένα τετραγωνικό εκατοστό.

1 □ = 1 cm^2



3 Εκτιμούν και μετρούν το μήκος, τη μάζα και τη χωρητικότητα αντικειμένων, χρησιμοποιώντας συμβατικές μονάδες μέτρησης σε δραστηριότητες, όπως: Μ2.3

- «Να εκτιμήσετε και να μετρήσετε το μήκος των πιο κάτω, χρησιμοποιώντας το μέτρο.»

	ΕΚΤΙΜΩ	**ΜΕΤΡΩ**
Μήκος της μεγάλης πλευράς της τάξης		
Ύψος της βιβλιοθήκης της τάξης		

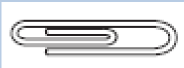
- «Να συμπληρώσετε τον πίνακα με αντικείμενα της τάξης σας τα που έχουν μήκος:

(α) μικρότερο του 1 m

(β) ίσο με το 1 m

(γ) μεγαλύτερο του 1 m.»

Μικρότερο από 1 m	**1 m**	**Μεγαλύτερο από 1 m**

- «Πόσους συνδετήρες  θα πρέπει να βάλετε σε ευθεία γραμμή, ώστε το μήκος τους να είναι περίπου 1 m;»
- «Να γράψετε δίπλα από κάθε αντικείμενο τη μονάδα μέτρησης που είναι κατάλληλη για να υπολογιστεί η μάζα του: Kg ή g.»

(α)  (β)  (γ) 

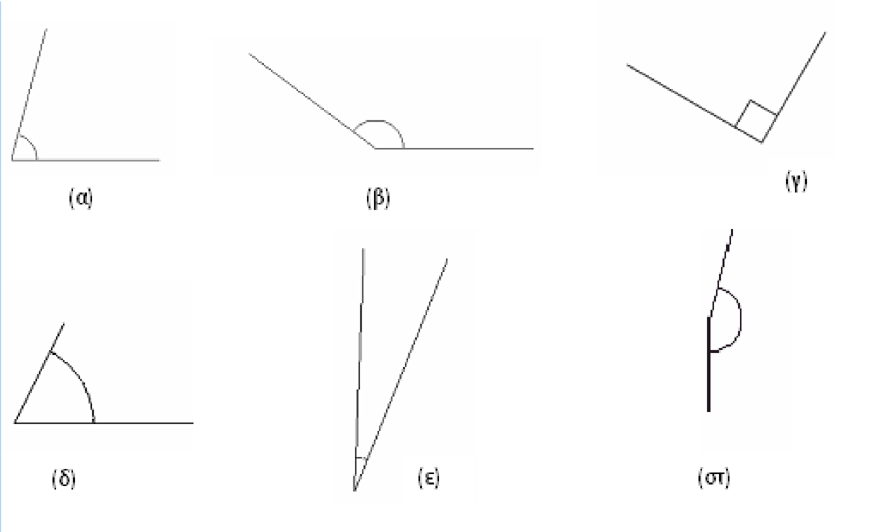
- «Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό κάτω από κάθε αντικείμενο που εκτιμάτε ότι είναι η χωρητικότητα του.»

(α) 4 L / 0,5 L

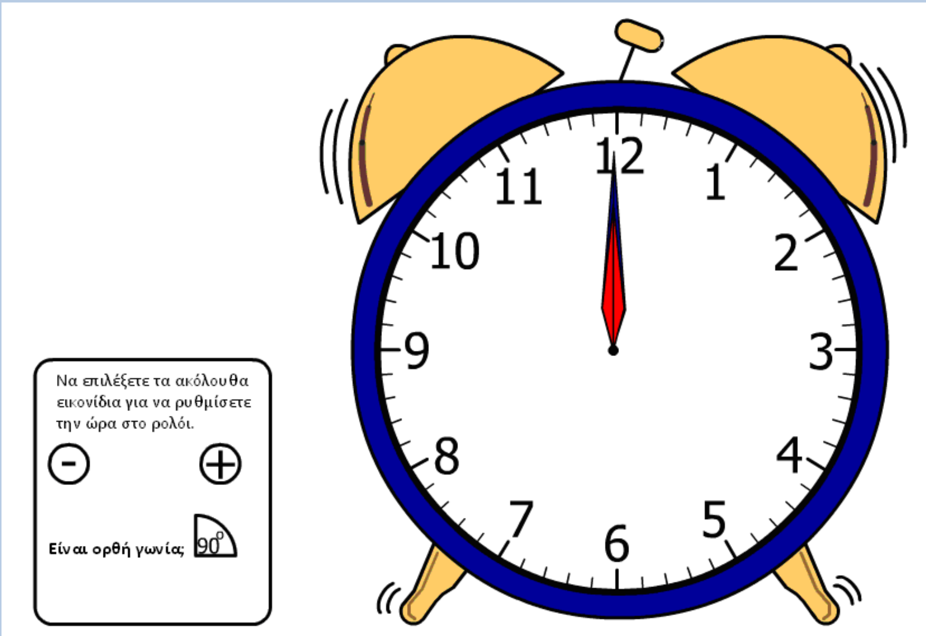
(β) 15 L / 1,5 L

4 Διακρίνουν γωνίες, χρησιμοποιώντας τη γωνία των 90^0 σε δραστηριότητες, όπως: M2.4

- «Να βάλετε σε κύκλο τις γωνίες που είναι μεγαλύτερες από 90^o.»



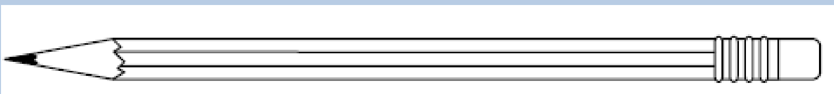
- «Πόσες φορές σε διάστημα 12 ωρών οι δείκτες ενός ρολογιού σχηματίζουν ορθές γωνίες; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό, όπως το πιο κάτω.»

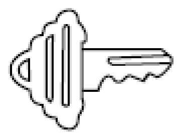


(“*http://nrich.maths.org/content/03/03/penta1/clock.swf*”)

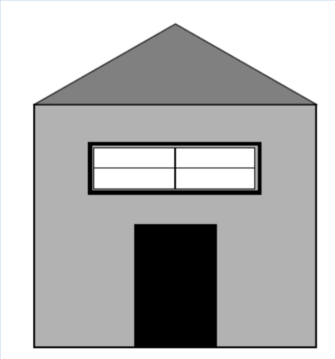
5 Μετρούν το μήκος ενός αντικειμένου με ακρίβεια εκατοστόμετρου σε δραστηριότητες, όπως: M2.5

- «Να μετρήσετε το μήκος των πιο κάτω αντικειμένων με ακρίβεια εκατοστόμετρου, χρησιμοποιώντας το χάρακά σας.»

(α) 

(β) 

- «Να εκτιμήσετε και να μετρήσετε το μήκος των σχημάτων που αποτελούν το πιο κάτω σπίτι στο πλησιέστερο εκατοστόμετρο, χρησιμοποιώντας το χάρακά σας. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.»



	Εκτιμώ	**Μετρώ**
Ύψος σπιτιού (με τη στέγη)		
Ύψος σπιτιού (χωρίς στέγη)		
Μήκος μεγάλης πλευράς του παραθύρου		
Ύψος της πόρτας		

6 Μετατρέπουν μέτρα σε εκατοστόμετρα και κιλά σε γραμμάρια και αντίστροφα σε δραστηριότητες, όπως: Μ2.6

- «Να συμπληρώσετε τον πίνακα με βάση τις πιο κάτω πληροφορίες.»

Είδη φαλαινών	
Όνομα φάλαινας	**Μήκος**
	15 m
	9m
	2700 cm
	250 cm

(α) Η γαλάζια φάλαινα έχει μήκος 27 m.

(β) Η γκρίζα φάλαινα έχει μήκος 1500 cm.

(γ) Το δελφίνι έχει μήκος 2,5 m.

(δ) Η φάλαινα όρκα έχει μήκος 900 cm.

- «Να συμπληρώσετε τα κενά με τις μετρήσεις που φαίνονται πιο κάτω, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις που φαίνονται ανάμεσά τους.»

3000 cm   150 cm   15 m   1300 cm   2,8 m   30 m

______	>	______	>	______
=				
______	>	______	>	______

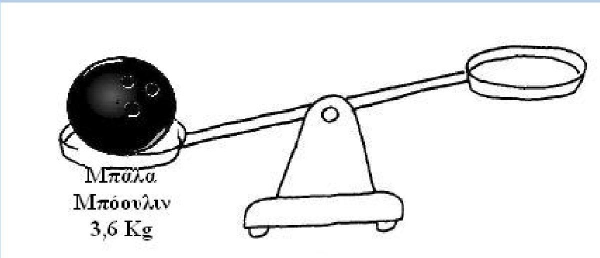
- «Να μελετήσετε τον πίνακα και να απαντήσετε στις πιο κάτω ερωτήσεις.»

Μπάλες που χρησιμοποιούνται σε αθλήματα	
Άθλημα	**Πόσο ζυγίζει η μπάλα;**
Καλαθόσφαιρα	0,6 kg
Μπέιζμπολ	145 g
Αντισφαίριση	56 g
Πετόσφαιρα	260 g
Μπόουλιν	3,6 kg
Γκόλφ	45 g

(α) Να βάλετε στη σειρά τις μπάλες του κάθε αθλήματος, αρχίζοντας από αυτή που ζυγίζει λιγότερο.

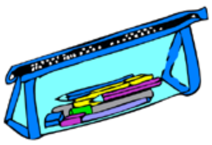
(β) Ποιες μπάλες ζυγίζουν περισσότερο από 1 kg;

(γ) Πόσες μπάλες καλαθόσφαιρας θα πρέπει να τοποθετήσετε στην πιο κάτω ζυγαριά, για να ισορροπήσει;



7 Επιλύουν προβλήματα με χρήματα, όπως: Μ2.7

- «Να βάλετε σε κύκλο τα χαρτονομίσματα και νομίσματα που το άθροισμα της αξίας τους δίνει την τιμή του αντικειμένου.»

Αντικείμενα	**Χαρτονομίσματα και Νομίσματα**
 Παντελόνι €58	
 Δύο μπάλες καλαθόσφαιρας €17	
 Κασετίνα €4,5	
 Μικρό μπουκάλι νερό €0,35	

- «Να βρείτε διάφορους συνδυασμούς χαρτονομισμάτων και νομισμάτων που να έχουν συνολική αξία 7 ευρώ και να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

						
€7						
€7						
€7						
€7						
€7						

ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Διαβάζουν και γράφουν ημερομηνίες με διάφορους τρόπους σε δραστηριότητες, όπως: Μ2.8

- «Να γράψετε για καθεμιά από τις πιο κάτω ημερομηνίες το μήνα και το έτος που δείχνουν.»

	Μήνας	**Έτος**
20/06/1995		
3/12/2001		
4/5/2009		

- «Να γράψετε με δύο διαφορετικούς τρόπους τις ημερομηνίες που δίνονται στην πρώτη στήλη του πίνακα, όπως το παράδειγμα.»

Ημερομηνία	**Α' τρόπος**	**Β' τρόπος**
Παράδειγμα: 16/06/2006	16 Ιουνίου 2006	16 – 6 – 2006
21/12/2009		
03/03/2004		
25/05/1998		

28/10/1990		

2 Επιλύουν προβλήματα σχετικά με το ημερολόγιο, όπως: Μ2.8

- «Να συμπληρώσετε το ημερολόγιο που δείχνει τους μήνες του Φθινοπώρου του 2010 και να απαντήσετε στις πιο κάτω ερωτήσεις.»

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010							ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2010							ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2010						
Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ	Κ	Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ	Κ	Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ	Κ
		8									8			8						

(α) Ποια είναι η πρώτη μέρα του Σεπτέμβρη του 2010;

(β) Πόσες Δευτέρες έχει ο Οκτώβρης του 2010;

(γ) Πόσες Παρασκευές έχουν συνολικά οι μήνες του Φθινοπώρου του 2010;

(δ) Τι μέρα είναι η 26η Νοεμβρίου του 2010;

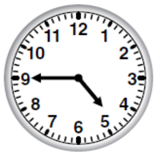
(ε) Τα σχολεία ανοίγουν τη δεύτερη Πέμπτη του Σεπτέμβρη. Να γράψετε την ημερομηνία που αντιστοιχεί στο άνοιγμα των σχολείων για το έτος 2010.

(στ) Πόσες ημέρες και πόσες εβδομάδες έχουν οι μήνες του Φθινοπώρου του 2010;

3 Διαβάζουν και γράφουν την ώρα με διάφορους τρόπους σε δραστηριότητες, όπως: Μ2.9

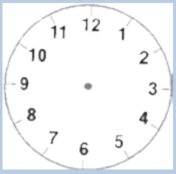
- «Να γράψετε την ώρα που δείχνουν τα ρολόγια της πρώτης στήλης του πίνακα με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως το παράδειγμα.»

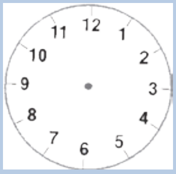
Ρολόγια	**Α'τρόπος**	**Β'τρόπος**	**Γ'τρόπος**
Παράδειγμα: 	2:15	Δύο και τέταρτο	Δύο και δεκαπέντε

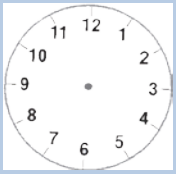
			
			
			

4 Γράφουν την ώρα σε αναλογικά και ψηφιακά ρολόγια σε δραστηριότητες, όπως: M2.9

- «Να γράψετε τις ώρες στα δύο διαφορετικά ρολόγια.»

(α) οκτώ παρά δέκα πριν από το μεσημέρι:  :

(β) πέντε και είκοσι μετά το μεσημέρι:  :

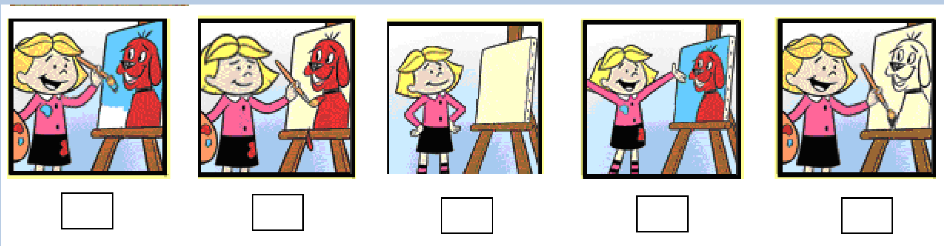
(γ) Δύο και τριάντα πέντε μετά τα μεσάνυχτα :  :

5 Τοποθετούν γεγονότα σε λογική και χρονική σειρά σε δραστηριότητες, όπως: M2.10

- «Να γράψετε δίπλα από κάθε πρόταση τους αριθμούς 1-4, για να δείξετε τη σειρά με την οποία έγινε η κάθε δραστηριότητα.»

	Το γλύκισμα μπήκε στο φούρνο ύστερα από 30 λεπτά.
	Η μητέρα άρχισε το γλύκισμα στις 4:00.
	Αφήσαμε το γλύκισμα να κρυώσει για 30 λεπτά.
	Το γλύκισμα ψηνόταν για μια ώρα.

- «Να γράψετε κάτω από κάθε φωτογραφία τους αριθμούς 1-5, για να δείξετε τη σειρά με την οποία βγήκαν οι φωτογραφίες.»



6 Αναγνωρίζουν τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης του χρόνου σε δραστηριότητες, όπως: Μ2.11

- «Η Μαρία θα πάει για ένα μήνα διακοπές στο χωριό της γιαγιάς της. Πόσες ημέρες συνολικά θα μείνει στο χωριό;»
- «Ο Νίκος ξυπνά το πρωί και χρειάζεται 10 λεπτά, για να φορέσει τα ρούχα του και $\frac{1}{4}$ της ώρας για το πρωινό του. Σε πόσα λεπτά ο Νίκος είναι έτοιμος, για να πάει στο σχολείο;»
- «Να γράψετε την ηλικία σας σε μήνες.»
- «Να συμπληρώσετε τα κενά.»

(α) 80 λεπτά = ______ ώρα ______λεπτά

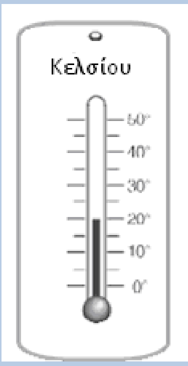
(β) 3 μήνες = ___________ ημέρες

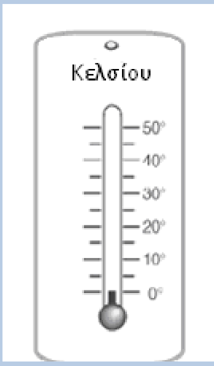
(γ) 1 μήνας = __________ εβδομάδες

(δ) 20 εβδομάδες = _______ ημέρες

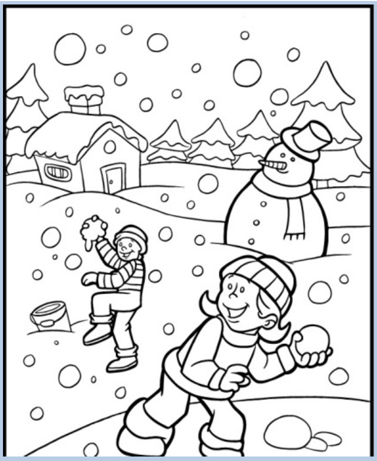
7 Διαβάζουν και γράφουν τη θερμοκρασία σε δραστηριότητες, όπως: Μ2.12

- «Να γράψετε κάτω από κάθε θερμόμετρο τη θερμοκρασία που δείχνει.»

(α) 

(β) 

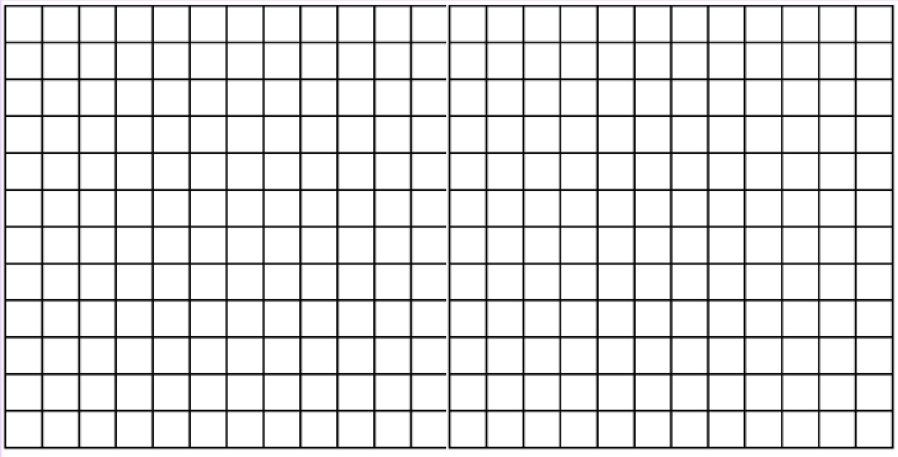
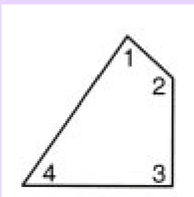
- «Να βάλετε σε κύκλο τη θερμοκρασία που αντιστοιχεί στις εικόνες.»

(α) 

(β) 

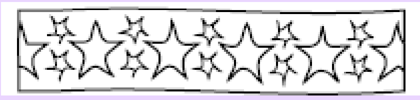
(α)	(β)
4^oC 34^oC	4^oC 34^oC

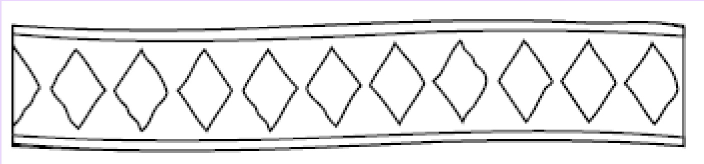
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Να κατασκευάσετε στο πιο κάτω τετραγωνισμένο χαρτί σχήματα που να έχουν εμβαδόν 25 cm^2 και να χρωματίσετε με κόκκινο χρώμα αυτό που έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο. Κάθε τετραγωνάκι είναι ίσο με 1 cm^2. 	Μ2.2
2	▪ Να βάλετε σε κύκλο αυτό που είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα. (α) Μήκος παπουτσιού: [25 m / 25 cm] (β) Μάζα αυτοκινήτου: [875 g / 875 Kg] (γ) Μπουκάλι με νερό: [1,5 L / 150 L] ▪ Ποια μονάδα μέτρησης θα χρησιμοποιήσετε, για να μετρήσετε τα πιο κάτω; (α) τη μάζα του τετραδίου των μαθηματικών (β) το μήκος του διαδρόμου (γ) την απόσταση από το σχολείο μέχρι την εκκλησία	Μ2.3
3	▪ Να χρωματίσετε με κόκκινο χρώμα τις γωνίες που είναι μικρότερες των 90^o. 	Μ2.4

4

- Να μετρήσετε το μήκος των πιο κάτω κορδελών με ακρίβεια εκατοστόμετρου. M2.5

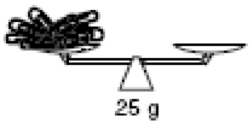
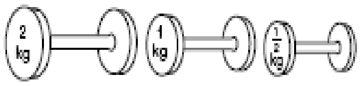
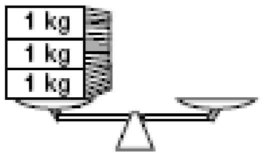
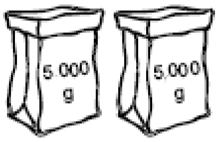
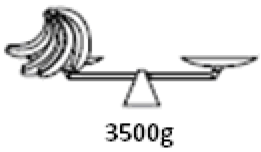
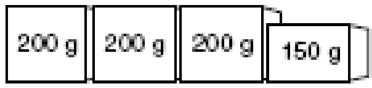
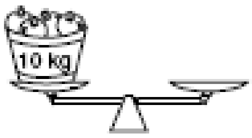
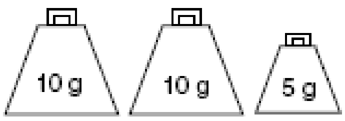
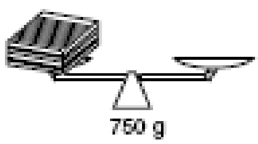
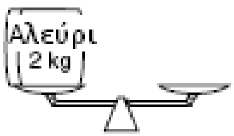
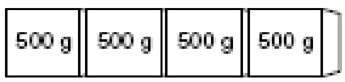
(α)  (β) 

(γ) 

6

- Τρία κουτιά τοποθετήθηκαν το ένα πάνω στο άλλο για να κατασκευαστεί ένας πύργος. Το ένα κουτί είχε ύψος 32 cm, το άλλο 0,29 m και το άλλο 57 cm. Να υπολογίσετε το συνολικό ύψος του πύργου. M2.6

- Να αντιστοιχίσετε τις ζυγαριές της πρώτης στήλης του πίνακα με τα σταθμά της δεύτερης στήλης.

ΖΥΓΑΡΙΕΣ	**ΣΤΑΘΜΑ**
1. 	(α) 
2. 	(β) 
3. 	(γ) 
4. 	(δ) 
5. 	(ε) 
6. 	(στ) 

7 — Μ2.7

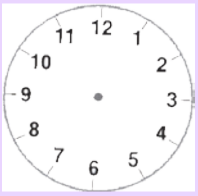
- Η Νίκη αγόρασε ένα τετράδιο και δύο μολύβια που στοίχιζαν €7,50 και πλήρωσε με χαρτονόμισμα των €20. Να βάλετε σε κύκλο το χαρτονόμισμα και τα νομίσματα που θα πάρει ως ρέστα.

8 — Μ2.8

- Η Μαρία γεννήθηκε στις 18 Ιουλίου του 2001 και ο Μαρίνος έχει γεννήθηκε στις 18/6/2001. Ποιος από τους δύο μαθητές είναι μεγαλύτερος σε ηλικία και πόσο μεγαλύτερος είναι;

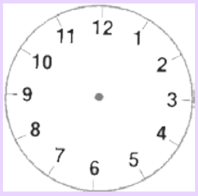
9 — Μ2.9

- Να γράψετε την ώρα και να σχεδιάσετε τους δείχτες στα πιο κάτω ρολόγια, ώστε να δείχνουν πέντε ώρες μετά την ώρα που υπάρχει κάτω από αυτά.



:

(α) 17:35



:

(β) 8:20

10 — Μ2.10

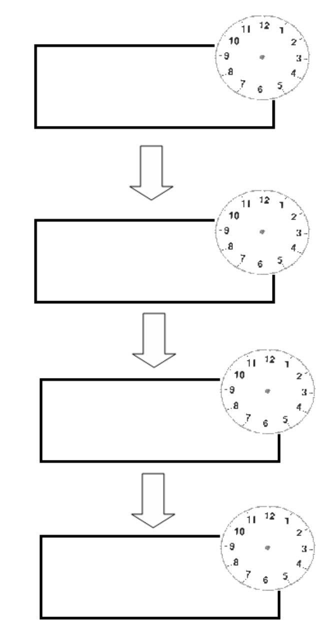
- Να γράψετε τις προτάσεις στα κουτιά με τη σειρά, για να δείξετε το πρόγραμμα της Μαρίας μετά το σχολείο και να σχεδιάσετε τους δείχτες στα ρολόγια.

Η Μαρία έφυγε από το πάρκο στις 18:00.

Η Μαρία και η μητέρα της έφτασαν στο σπίτι στις μία και τριάντα.

Η Μαρία τελείωσε το διάβασμά της στις 16:00 και πήγε στο πάρκο.

Η μητέρα της Μαρίας ετοίμασε το φαγητό σε 45 λεπτά.



11 ▪ Να συμπληρώσετε τα κενά με τα σύμβολα **>, <, =**. M2.11

(α) 1 ώρα ☐ 90 λεπτά

(β) 120 λεπτά ☐ 2 ώρες

(γ) 1 ώρα ☐ 45 λεπτά

▪ Να απαντήσετε στις ερωτήσεις, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς

168, 24, 60, 1440, 3600

(α) Πόσα δευτερόλεπτα έχει ένα λεπτό; ________________________

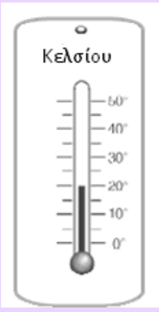
(β) Πόσες ώρες έχει μία εβδομάδα; ___________________________

(γ) Πόσα λεπτά έχει μία ημέρα; _______________________________

(δ) Πόσες ώρες έχει μία ημέρα; ___________________________

(ε) Πόσα δευτερόλεπτα έχει μία ώρα; ________________

12 ▪ Πόσους βαθμούς θα πρέπει να αυξηθεί η θερμοκρασία στο πιο κάτω θερμόμετρο, για να δείχνει 40^{o}C; M2.12



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Μελετούν τις γωνίες που σχηματίζονται ανάμεσα στα δάκτυλα των χεριών τους. 
2	Πραγματοποιούν εργασίες προτζεκτ, όπως: ▪ «Να μελετήσετε την ιστορία των κυπριακών νομισμάτων και να δημιουργήσετε μία παρουσίαση.»

ΜΕΤΡΗΣΗ

Κλίμακα 3

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ
1	Χρησιμοποιούν συμβατικές μονάδες μέτρησης του μήκους (mm, cm, m, km), της μάζας (Kg, g), της χωρητικότητας (L, ml) και του όγκου σχημάτων (m^3, cm^3).
2	Κάνουν μετατροπές μεταξύ των μονάδων μέτρησης του ίδιου μετρικού συστήματος.
3	Ανακαλύπτουν τους τύπους υπολογισμού της περιμέτρου και του εμβαδού του παραλληλογράμμου και του τριγώνου, χρησιμοποιώντας λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας.
4	Διερευνούν ισοδύναμα σχήματα και εξετάζουν σε ποιες περιπτώσεις έχουν και την ίδια περίμετρο.
5	Διερευνούν τη σχέση μεταξύ χωρητικότητας και όγκου συγκεκριμένων αντικειμένων.
6	Εκτιμούν, μετρούν, ταξινομούν και κατασκευάζουν γωνίες (με ή χωρίς τη χρήση της τεχνολογίας).
7	Επιλύουν προβλήματα που περιέχουν σχέσεις μεταξύ των χαρτονομισμάτων και νομισμάτων.

	ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ
8	Διαβάζουν και γράφουν την ώρα (ώρα, λεπτά, δευτερόλεπτα), χρησιμοποιώντας ψηφιακά και αναλογικά ρολόγια.
9	Περιγράφουν το αποτέλεσμα της αλλαγής μιας πλευράς ενός δισδιάστατου σχήματος στο εμβαδόν και την περίμετρό του.
10	Επιλύουν προβλήματα που περιέχουν σχέσεις μεταξύ έτους, δεκαετίας και αιώνα.
11	Εκτιμούν και υπολογίζουν διάρκεια χρόνου πραγματοποίησης γεγονότων στο

	πλησιέστερο δευτερόλεπτο.
12	Καταγράφουν και υπολογίζουν αλλαγές θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια συγκεκριμένων χρονικών διαστημάτων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας συμβατικές μονάδες μέτρησης μήκους, μάζας, χωρητικότητας και όγκου σχημάτων, όπως:	Μ3.1

- «Ποια μονάδα μέτρησης χρησιμοποιούμε, για να μετρήσουμε:

(α) Την απόσταση μεταξύ δύο πόλεων ______________________________

(β) Την ποσότητα του χυμού σε ένα ποτήρι _________________________

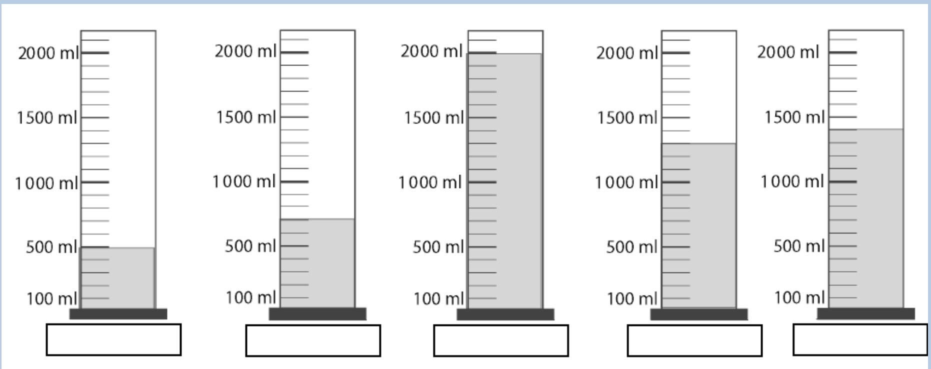
(γ) Πόσο ζυγίζει ένα σβηστήρι ______________________________________

(δ) Το ύψος ενός μαθητή ____

(ε) Την κατανάλωση βενζίνης ενός αυτοκινήτου______________________

(ζ) Το ύψος ενός σπιτιού ____»

- «Να γράψετε κάτω από τους ογκομετρικούς σωλήνες το όνομα του μαθητή στον οποίο ανήκει, με βάση τις πληροφορίες.»

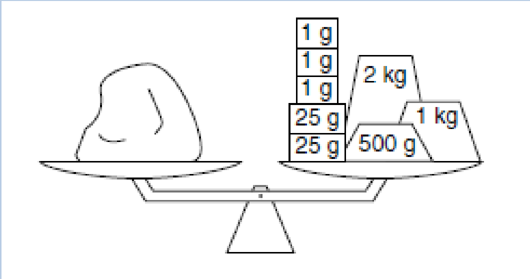


ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ
(α) Ο ογκομετρικός σωλήνας της Μαρίας περιέχει νερό διπλάσιας ποσότητας από αυτό του Νίκου.
(β) Ο ογκομετρικός σωλήνας του Μηνά περιέχει το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας του νερού που περιέχει ο σωλήνας του Γιάννη.

(γ) Ο ογκομετρικός σωλήνας της Ελπίδας περιέχει 100 ml λιγότερο νερό από αυτό της Μαρίας.

2 Κάνουν μετατροπές ανάμεσα στις μονάδες μέτρησης του ίδιου μετρικού συστήματος σε δραστηριότητες, όπως: Μ3.2

- «Πόσο ζύγιζε η πέτρα σε γραμμάρια;»



- «Να συμπληρώσετε τα κενά.»

(α) 5 km = ___________ m

(β) 4,1 kg = __________g

(γ) 5,5 cm = __________ km

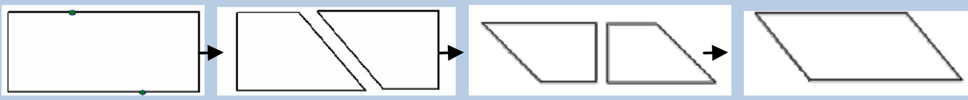
(δ) 3,75 L = _________ ml

(ε) 650 cm = ________ m

(στ) 96 ml = ________ L

3 Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να διερευνήσουν τους τύπους υπολογισμού της περιμέτρου και του εμβαδού του παραλληλογράμμου και του τριγώνου σε δραστηριότητες, όπως: Μ3.3

- (α) «Να χρησιμοποιήσετε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, για να διαχωρίσετε ορθογώνια με διάφορους τρόπους σε δύο σχήματα, ώστε όταν ενωθούν να σχηματίσουν παραλληλόγραμμο. Ένας τρόπος διαχωρισμού φαίνεται στην εικόνα.»



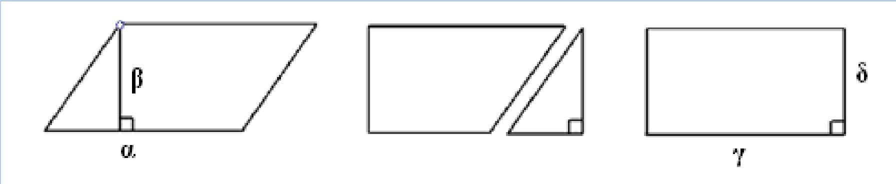
(β) «Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να γράψετε τα συμπεράσματά σας.»

	Εμβαδόν ορθογωνίου	**Εμβαδόν παραλληλογράμμου**
1		
2		
3		

____

____

(γ) «Να χρησιμοποιήσετε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, για να διαχωρίσετε ένα παραλληλόγραμμο με διάφορους τρόπους σε δύο σχήματα, ώστε όταν ενωθούν να σχηματίζουν ορθογώνιο. Ένας τρόπος διαχωρισμού φαίνεται στην εικόνα.»



(δ) «Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα και να γράψετε τα συμπεράσματά σας.»

	Αρχικό παραλληλόγραμμο		**Ορθογώνιο**	
	Μήκος α	**Ύψος β**	**Μήκος γ**	**Μήκος δ**
1				
2				

____

____

(ε) «Να γράψετε έναν τύπο υπολογισμού του εμβαδού του παραλληλογράμμου.»

____

____

4 Επιλύουν προβλήματα με ισοδύναμα σχήματα, όπως: Μ3.4

- «Να κατασκευάσετε στο τετραγωνισμένο φύλλο χαρτιού τα ορθογώνια που έχουν εμβαδόν ίσο με 24 cm^2 και να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

Κάθε τετραγωνάκι είναι ίσο με ένα τετραγωνικό εκατοστό.
1 □ = 1 cm^2

Σχήμα	Μήκος	Πλάτος	Περίμετρος	Εμβαδόν
1ο				24 cm^2
2ο				24 cm^2
3ο				24 cm^2
4ο				24 cm^2

- (α) «Να κατασκευάσετε στο τετραγωνισμένο φύλλο χαρτιού διάφορα ορθογώνια και τετράγωνα που να έχουν εμβαδόν ίσο με 6 cm^2, 8 cm^2, 12 cm^2, 15 cm^2, 16 cm^2, 18 cm^2 και να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

Κάθε τετραγωνάκι είναι ίσο με ένα τετραγωνικό εκατοστό.

1 □ = 1 cm^2

Σχήμα	Μήκος	Πλάτος	Περίμετρος	Εμβαδόν
1ο				6 cm^2
2ο				6 cm^2
3ο				8 cm^2
4ο				8 cm^2
5ο				12 cm^2
6ο				12 cm^2
7ο				12 cm^2
8ο				15 cm^2
9ο				15 cm^2
10ο				16 cm^2
11ο				16 cm^2
12ο				16 cm^2
13ο				18 cm^2
14ο				18 cm^2
15ο				18 cm^2

(β) «Να μελετήσετε τον πίνακα και να γράψετε σε ποιες περιπτώσεις τα σχήματα των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους.»

____

____

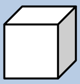
(γ) «Να βρείτε και άλλα σχήματα των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους.»

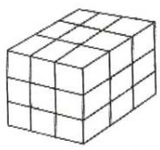
____

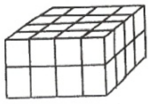
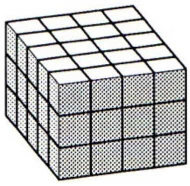
____

5 Διερευνούν τη σχέση μεταξύ χωρητικότητας και όγκου συγκεκριμένων αντικειμένων σε δραστηριότητες, όπως: M3.5

- (α) «Να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

Κάθε κύβος  **είναι ίσος με 1 cm^3.**

	Εμβαδόν βάσης (αριθμός κύβων της βάσης)	**Ύψος**	**Όγκος** (αριθμός κύβων που αποτελούν το σχήμα)
			

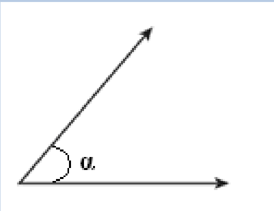
(β) «Να μελετήσετε τον πίνακα και να γράψετε τη σχέση μεταξύ του εμβαδού βάσης, του ύψους και του όγκου του κάθε αντικειμένου.»

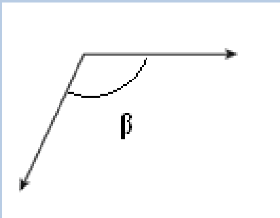
____

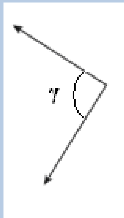
____

6 Εκτιμούν, μετρούν και κατασκευάζουν γωνίες, χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και λογισμικά σε δραστηριότητες, όπως: Μ3.6

- «Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι πιο κάτω γωνίες, χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιό σας.»

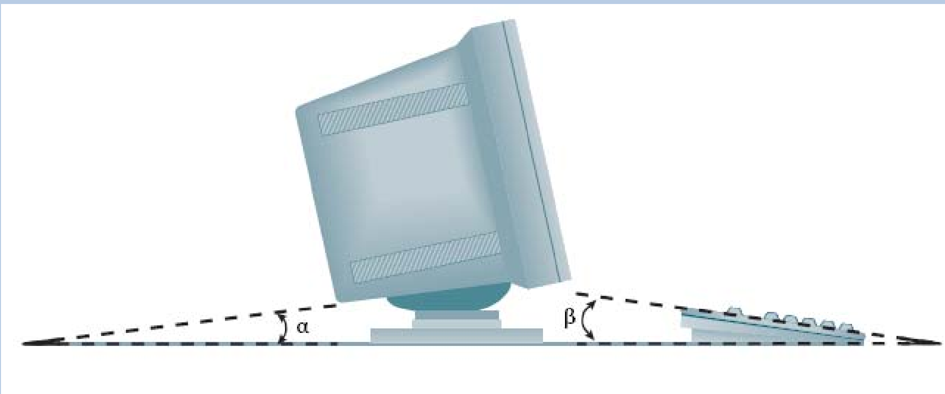






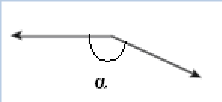
(α) Γωνία α =___ (β) Γωνία β =_____ (γ) Γωνία γ =_____

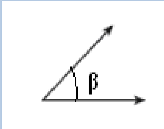
- «Να μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιό σας τις γωνίες α και β που φαίνονται στην πιο κάτω εικόνα.»



- «Να κατασκευάσετε με το μοιρογνωμόνιό σας στο πιο κάτω πλαίσιο γωνίες ίσες με (α) 20^{o}, (β) 45^{o}, (γ) 70^{o}, (δ) 122^{o} και (ε) 157^{o}.»

- «Να κατασκευάσετε με το μοιρογνωμόνιό σας γωνίες ίσες με:

(α) το $\frac{1}{4}$ της γωνίας α: 

(β) το τριπλάσιο της γωνίας β: 

.»

7 Επιλύουν προβλήματα που περιέχουν σχέσεις με χαρτονομίσματα και νομίσματα, όπως: M3.7

- «Να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

ΑΓΟΡΑΣΑ	ΠΛΗΡΩΣΑ	ΡΕΣΤΑ
Χρωματιστά μολύβια:  €4,39		
Υπολογιστική μηχανή:  €13,31		
Τρία Λογοτεχνικά βιβλία:		

 €21,49		
Σχολική τσάντα:  €59,99		

- «Να βρείτε και να γράψετε το χαρτονόμισμα ή/και το νόμισμα το οποίο αντιστοιχεί στα πιο κάτω.»

(α) Τα $\frac{2}{5}$ του 

είναι: ____________________________.

(β) Το $\frac{1}{2}$ του 

είναι: __________________________.

(γ) Το $\frac{1}{4}$ του 

είναι: ______________________________.

(δ) Τα $\frac{1}{5}$ του 

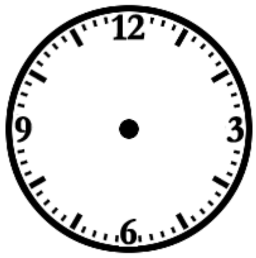
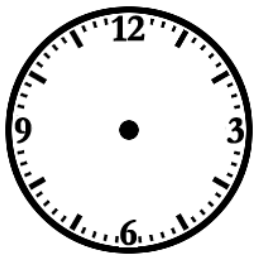
είναι: _________________________________.

(ε) Το $\frac{1}{10}$ του 

είναι: ___________________________________.

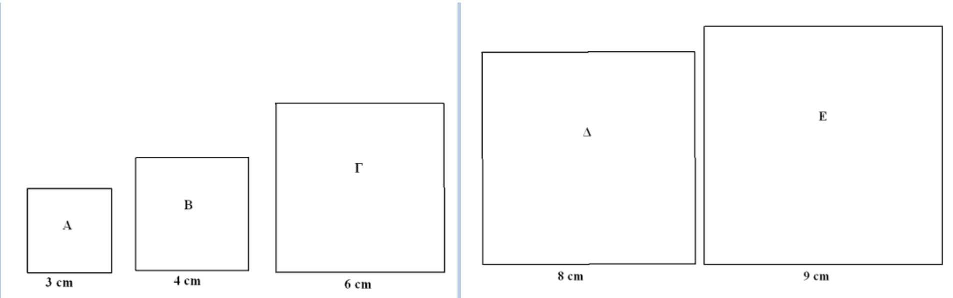
	ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Διαβάζουν και γράφουν την ώρα σε δραστηριότητες, όπως:	Μ3.8

- «Να γράψετε την ώρα που δείχνουν τα ρολόγια της πρώτης στήλης του πίνακα και την ώρα που θα δείχνουν ύστερα από 2 ώρες και 13 λεπτά, όπως το παράδειγμα.»

	Ύστερα από 2 ώρες και 13 λεπτά
Παράδειγμα:  6:57	 9:10
 :	 :
 :	 :

2 Περιγράφουν το αποτέλεσμα της αλλαγής μιας πλευράς ενός δισδιάστατου σχήματος στο εμβαδόν και την περίμετρό του σε δραστηριότητες, όπως: Μ3.9

- (α) «Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων και να συμπληρώσετε τον πίνακα.»



	Μήκος πλευράς	Περίμετρος	Εμβαδόν
Α			
Β			
Γ			
Δ			
Ε			

(β) «Όταν διπλασιαστεί το μήκος της πλευράς ενός σχήματος, πώς αλλάζει ο αριθμός που δείχνει την περίμετρο του και πώς ο αριθμός που δείχνει το εμβαδό του;»

____

____

(γ) «Όταν τριπλασιαστεί το μήκος της πλευράς ενός σχήματος, πώς αλλάζει ο αριθμός που δείχνει την περίμετρο του και πώς ο αριθμός που δείχνει το εμβαδό του;»

____

____

3 Επιλύουν προβλήματα που περιέχουν σχέσεις μεταξύ έτους, δεκαετίας και αιώνα, όπως: Μ3.10

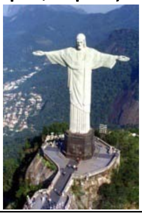
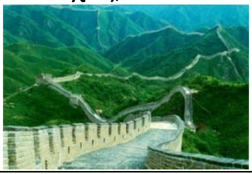
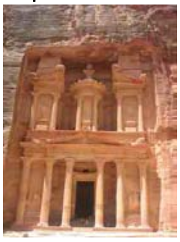
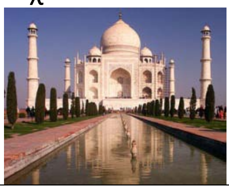
- «Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ισότητες.»

(α) 3 δεκαετίες = ______ έτη

(β) 1 αιώνας = _______ δεκαετίες = ________ έτη

(γ) $\frac{1}{5}$ του αιώνα = _____ δεκαετίες = __________ έτη

- «Ο πίνακας παρουσιάζει τα 7 νέα θαύματα του κόσμου και το έτος δημιουργίας τους. Να υπολογίσετε πόσα χρόνια έχουν περάσει από τότε που έγινε το καθένα μέχρι σήμερα.»

7 νέα Θαύματα του κόσμου	Έτος δημιουργίας	Πόσα χρόνια έχουν περάσει από τότε μέχρι σήμερα;
Πυραμίδα στο Chichen Itza, Χερσόνησος Γιουκατάν, Μεξικό 	800 μ.Χ.	
Άγαλμα του Χριστού, Ρίο ντε Ζανέιρο, Βραζιλία 	1931 μ.Χ.	
Σινικό Τοίχος, Κίνα 	200 π.Χ.	
Μάτσου Πίτσου, Περού 	1460 μ.Χ.	
Πέτρα, Ιορδανία 	9 π.Χ.	
Ρωμαϊκό Κολοσσαίο, Ρώμη, Ιταλία 	70 μ.Χ.	
Τάι Μαχάν 	1630 μ.Χ.	

- «Ο αρχαιότερος οικισμός στην Κύπρο, η Χοιροκοιτία, χτίστηκε το 7000 π.Χ. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από τότε μέχρι σήμερα;»

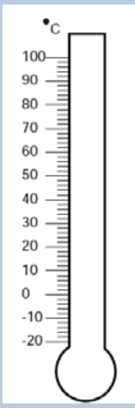
4 Εκτιμούν και υπολογίζουν τη διάρκεια χρόνου πραγματοποίησης γεγονότων σε δραστηριότητες, όπως: Μ3.11

- «Ο πίνακας παρουσιάζει την ώρα έναρξης και την ώρα λήξης τηλεοπτικών προγραμμάτων. Να υπολογίσετε τη χρονική διάρκεια κάθε τηλεοπτικού προγράμματος.»

Τηλεοπτικό Πρόγραμμα	**Ώρα Έναρξης**	**Ώρα Λήξης**	**Χρονική διάρκεια**
"Ώρα γυμναστικής"	11:25	12:10	
"Μεσημεριανή ενημέρωση"	14:32	15:15	
"Πρωινή παρέα"	09:05	10:25	
"Η Μαίρη και οι φίλοι της"	15:09	16:13	

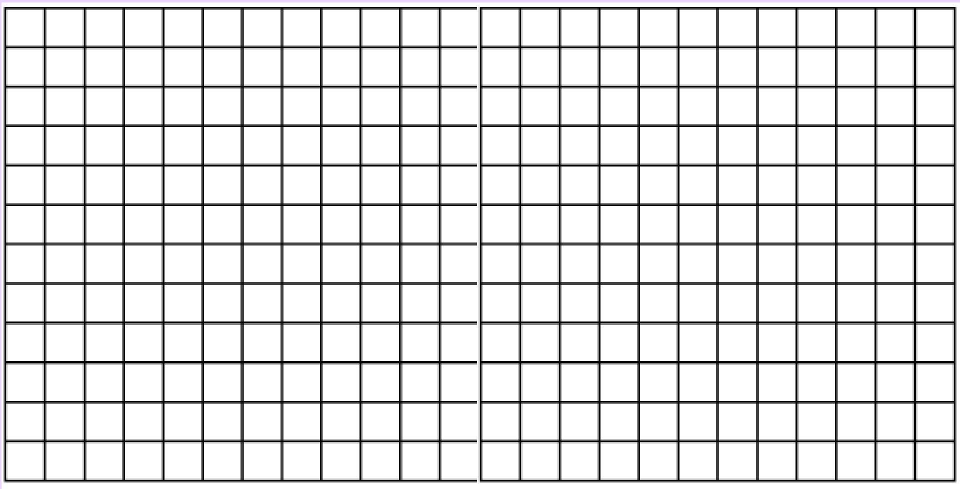
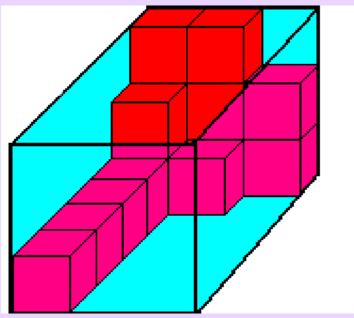
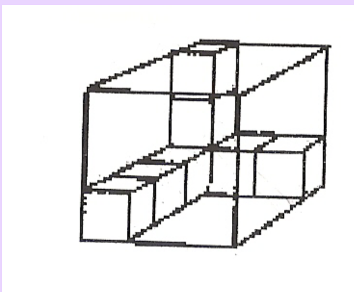
5 Καταγράφουν και υπολογίζουν αλλαγές θερμοκρασίας σε δραστηριότητες, όπως: Μ3.12

- «Η θερμοκρασία στο Τρόοδος στις 7:00 π.μ. ήταν -4°C. Στις 12:00 μ.μ. η θερμοκρασία αυξήθηκε κατά 7°C. Στις 7:00 μ.μ. η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 3°C. Να υπολογίσετε πόση ήταν η θερμοκρασία στο Τρόοδος στις 7:00 μ.μ και να την σημειώσετε στο πιο κάτω θερμόμετρο.»

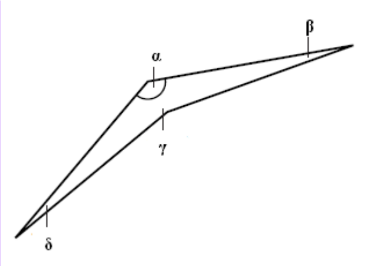


7 μ.μ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

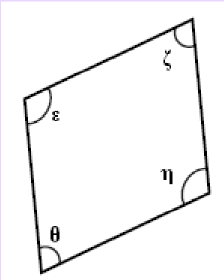
	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1	▪ Πώς θα χρησιμοποιήσετε τα σταθμά του 1kg, των 2kg, των 6kg και των 8kg, για να ελέγξετε κατά πόσο ένα κουτί ζυγίζει 13 kg;	Μ3.1
2	▪ Η κυρία Μαρία έχει 4 L χυμό πορτοκάλι και θέλει να το μοιράσει στα 8 εγγόνια της. Πόσα χιλιοστόλιτρα (ml) χυμού θα πάρει το κάθε εγγόνι της κυρίας Μαρίας; ▪ Δύο διαφορετικής μάζας βιβλία ζυγίζουν μαζί 5,34 kg. Αν τοποθετηθούν τα δύο βιβλία ξεχωριστά σε μία ζυγαριά, θα πρέπει να προστεθούν 650 g στο δίσκο που βρίσκεται το ελαφρύτερο για να ισορροπήσει η ζυγαριά. Πόσα γραμμάρια ζυγίζουν το καθένα από τα δύο βιβλία;	Μ3.2
4	▪ Να κατασκευάσετε στο τετραγωνισμένο φύλλο χαρτιού τετράγωνα και τρίγωνα των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους. Κάθε τετραγωνάκι είναι ίσο με 1 cm^2. 	Μ3.4
5	▪ Να υπολογίσετε τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, για να συμπληρωθούν τα πιο κάτω κουτιά. (α)  (β) 	Μ3.5
6	▪ Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες στα πιο κάτω σχήματα, χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιό σας.	Μ3.6

(α)



Γωνία α = _____ ^{o}
Γωνία β = _____ ^{o}
Γωνία γ = _____ ^{o}
Γωνία δ = _____ ^{o}

(β)



Γωνία ε = _____ ^{o}
Γωνία ζ = _____ ^{o}
Γωνία η = _____ ^{o}
Γωνία θ = _____ ^{o}

- Να κατασκευάσετε στο πιο κάτω πλαίσιο τρεις γωνίες που να έχουν άθροισμα 360^o. Να γράψετε κάτω από κάθε γωνία πόσες μοίρες είναι.

(α) ________ ^{o} (β) ________ ^{o} (γ) ________ ^{o}

7

- Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω αντικειμένων με βάση τις πληροφορίες που δίνονται και να τις γράψετε στο κουτί. Μ3.7

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ	ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ
Μπλούζα  €	- Τα ψηφία που αντιστοιχούν στον αριθμό που δείχνει την τιμή της μπλούζας είναι το 0, 1, 3 και 5. - Για να αγοράσει κάποιος την μπλούζα, θα πρέπει να δώσει δύο διαφορετικής αξίας χαρτονομίσματα, ένα κέρμα των 20 σεντ και ένα κέρμα των 10 σεντ.
Μπάλα καλαθόσφαιρας	- Τα ρέστα που θα πάρει κάποιος όταν δώσει χαρτονόμισμα των €20 για να αγοράσει την μπάλα καλαθόσφαιρας είναι: (α) ένα χαρτονόμισμα που έχει

 €	αξία ίση με το $\frac{1}{2}$ του €20 (β) δύο κέρματα που έχουν αξία ίση με το $\frac{1}{5}$ του €10 (γ) ένα κέρμα των 50 σεντ (δ) δύο κέρματα των 1 σεντ

8 ▪ Να γράψετε τις ώρες σε αναλογικό και σε ψηφιακό ρολόι. Μ3.8

ΩΡΑ	**ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΡΟΛΟΙ**	**ΨΗΦΙΑΚΟ ΡΟΛΟΙ**
(α) 4:35 μ.μ.		:
(β) 12: 20 π.μ.		:
(γ) 8:09 π.μ.		:
(δ) 9:18 μ.μ.		:

▪ Στον πίνακα δίνονται ρολόγια που δείχνουν την ώρα ταυτόχρονα σε διάφορες πόλεις του κόσμου. Να τον μελετήσετε και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.

Λευκωσία	**Νέα Υόρκη**	**Λονδίνο**
		
7:35	**00:35**	**5:35**

Πεκίνο	**Τόκιο**	**Παρίσι**
		
12:35	**13:35**	**6:35**

(α) Να υπολογίσετε πόσες ώρες διαφορά υπάρχουν ανάμεσα στις τοπικές ώρες των διαφόρων πόλεων.

(β) Ο Μάριος σπουδάζει στη Νέα Υόρκη. Η μητέρα του στην Κύπρο θέλει να του τηλεφωνήσει, ώστε η τοπική ώρα στη Νέα Υόρκη να είναι 12:35 μ.μ. Τι ώρα θα πρέπει να τον πάρει τηλέφωνο;

(γ) Η Νίκη βρίσκεται στο Πεκίνο για διακοπές και θέλει να τηλεφωνήσει στην Κύπρο. Η ώρα στο Πεκίνο είναι 5:25 μ.μ.. Τι ώρα θα είναι στην Κύπρο;

(δ) Η πτήση Λονδίνο – Λάρνακα διαρκεί 4 ώρες και 25 λεπτά. Αν κάποιος αναχωρήσει από το Λονδίνο στις 12:35 π.μ., τι ώρα θα είναι στη Λάρνακα όταν θα προσγειωθεί;

9

- Το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι ίσο με 25 cm^2. Αν το μήκος της πλευράς του αυξηθεί κατά 4 cm, πόσο θα αλλάξει η περίμετρος και το εμβαδόν του; M3.9
- Να βρείτε το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου, το οποίο έχει εμβαδόν ίσο με 36 cm^2 και όταν διπλασιαστεί το μήκος του, ο αριθμός που δείχνει την περίμετρο του γίνεται ίσος με τον αριθμό που έδειχνε το αρχικό εμβαδόν του.

10

- Να συμπληρώσετε τα κενά με τα σύμβολα **>, <, =**. M3.10

(α) $\frac{3}{4}$ του αιώνα ☐ 113 έτη

(β) 6 δεκαετίες ☐ $\frac{4}{5}$ του αιώνα

(γ) 3 δεκαετίες + 55 χρόνια ☐ $\frac{17}{20}$ του αιώνα

- Ο ναός της Αρτέμιδος στην Έφεσο, ένα από τα 7 θαύματα του αρχαίου κόσμου, χτίστηκε τρεις αιώνες, 5 δεκαετίες και 6 χρόνια πριν από τη γέννηση του Χριστού. Να υπολογίσετε τη χρονολόγια που έχει χτιστεί αυτός ο ναός και τα χρόνια που έχουν περάσει από τότε μέχρι σήμερα.

11

- Ο Νίκος σύνθεσε ένα τραγούδι και θέλει να το ηχογραφήσει σε ένα στούντιο. Η τιμή ενοικίασης του στούντιο ηχογράφησης ήταν €17 την ώρα. Η ηχογράφηση του Νίκου ξεκίνησε το μεσημέρι και τελείωσε στις 5:00 μ.μ. Πόσα θα πρέπει να πληρώσει ο Νίκος για το στούντιο; M3.11

12

- Η θερμοκρασία μειώνεται κατά 2^{o}C κάθε 500 m που ανεβαίνει ένας ορειβάτης σε ένα βουνό. Αν το θερμόμετρο ενός ορειβάτη, πριν ξεκινήσει τη διαδρομή του, έδειχνε 7^{o}C και όταν έφτασε στον προορισμό του έδειχνε – 3^{o}C, να υπολογίσετε πόσα μέτρα ο ορειβάτης έχει ανέβει στο βουνό. Μ3.12

- Στον Πρόδρομο, μία χειμωνιάτικη μέρα, η θερμοκρασία διαμορφώθηκε ως εξής:

- Στις 7 π.μ. η θερμοκρασία ήταν -8 ^{o}C.
- Από τις 7 π.μ. μέχρι το μεσημέρι η θερμοκρασία αυξήθηκε κατά 8 ^{o}C.
- Από το μεσημέρι μέχρι τις 7 μ.μ. η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 4 ^{o}C.
- Από τις 7 μ.μ. μέχρι τα μεσάνυχτα η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 5 ^{o}C.

Πόση ήταν η θερμοκρασία τα μεσάνυχτα;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

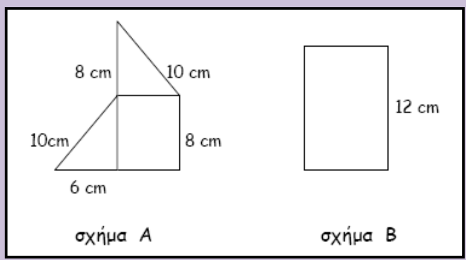
Οι μαθητές:

1 Με βάση την εικόνα, απαντούν τις ερωτήσεις:

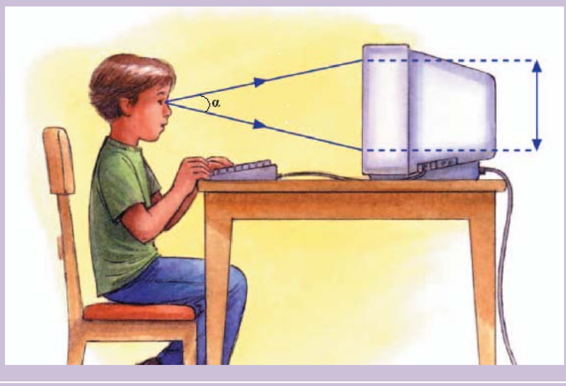
(α) Αν ένα μήλο ζυγίζει 180 g, πόσο μπορεί να ζυγίζει ένα βαρίδιο;

(β) Αν ένα μήλο ζυγίζει 375 g, πόσο μπορεί να ζυγίζει ένα βαρίδιο;

2 Υπολογίζουν το πλάτος του ορθογωνίου στο σχήμα Β, αν τα σχήματα Α και Β είναι ισεμβαδικά.



3 Μετρούν με το μοιρογνωμόνιο τους τη γωνία α που σχηματίζουν τα μάτια του μαθητή με την οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή και διερευνούν κατά πόσο η θέση αυτή είναι ορθή.



4 Επιλύουν προβλήματα, όπως:

«Ένα αυγό για να βράσει χρειάζεται 15 λεπτά. Έχετε στη διάθεσή σας μόνο μία κλεψύδρα των 7 λεπτών και μία κλεψύδρα των 11 λεπτών. Να βρείτε έναν τρόπο για να ελέγξετε ότι το αυγό θα βράσει στα 15 λεπτά.»

5 Πραγματοποιούν εργασίες προτζεκτ, όπως:

- «Ένας ηλεκτρικός λαμπτήρας έχει διάρκεια ζωής περίπου 1000 ώρες. Σε πόσες μέρες θα χρειαστείτε να αντικαταστήσετε το λαμπτήρα, αν τον έχετε τοποθετήσει σήμερα στους πιο κάτω χώρους;»

(α) Στην τάξη σας

(β) Στο δωμάτιο σας

(γ) Στο σαλόνι του σπιτιού σας

(δ) Στην αποθήκη ή στο γκαράζ του σπιτιού σας

(ε) Σε ένα ηλεκτρικό πάσαλο στο δρόμο

ΜΕΤΡΗΣΗ

Κλίμακα 4

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ
1	Χρησιμοποιούν συμβατικές μονάδες μέτρησης του μήκους (mm, cm, m, km), της μάζας (Kg, g, τόνος) και της χωρητικότητας (L, ml).
2	Κάνουν μετατροπές μεταξύ των μονάδων μέτρησης του ίδιου μετρικού συστήματος.
3	Υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν του τραπεζίου και σύνθετων σχημάτων.
4	Υπολογίζουν τον όγκο και το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας τρισδιάστατων σχημάτων, χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και λογισμικά.
5	Υπολογίζουν την περιφέρεια και το εμβαδόν του κύκλου με διαφορά μέσα και λογισμικά.
6	Υπολογίζουν το άθροισμα γωνιών πολυγώνων.
7	Επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ ακτίνας, διαμέτρου, εμβαδού και περιφέρειας κύκλου.
8	Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούν και να αποδεικνύουν σχέσεις.

	ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ
9	Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις και υπολογίζουν την ταχύτητα ή την απόσταση κινητών σε ορισμένο χρονικό διάστημα.
10	Περιγράφουν το αποτέλεσμα της αλλαγής της ακμής ενός τρισδιάστατου σχήματος στο εμβαδόν και στον όγκο του.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας συμβατικές μονάδες μέτρησης του μήκους, της μάζας και της χωρητικότητας αντικειμένων, όπως: M4.1

- «Έχετε στη διάθεσή σας σταθμά των 0,15 kg, 0,55 kg, 1 kg, 3 kg, 9 kg, και 27 kg. Πώς θα ζυγίσετε ένα αντικείμενο μάζας 34,30 kg;»

2 Κάνουν μετατροπές μεταξύ των μονάδων μέτρησης του ίδιου μετρικού συστήματος σε δραστηριότητες, όπως: M4.2

- «Να βάλετε στη σειρά τα πιο κάτω μεγέθη, ξεκινώντας από το μικρότερο.»

(α) 17 m, 17 040 000 cm, 17 400 000 005 mm

(β) 435 678 g, 4,32 kg, 432 g, 0,50 τόνοι

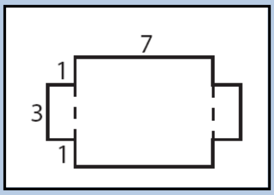
(γ) 4788 ml, 47,6 L, 489 654 ml

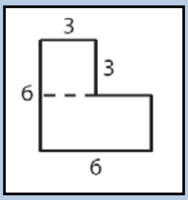
- «Ο πίνακας παρουσιάζει τις αποστάσεις μεταξύ διάφορων πόλεων στην Ευρώπη σε mm, cm, m και km. Να συμπληρώσετε τα κενά στον πίνακα.»

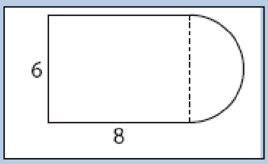
Αποστάσεις	σε **mm**	σε **cm**	σε **m**	σε **km**
Λευκωσία - Λεμεσός				72
Αθήνα - Θεσσαλονίκη			504000	
Παρίσι – Ρώμη				1105,76
Λονδίνο – Μαδρίτη			1261000	

3 Εκτιμούν και υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν σύνθετων δισδιάστατων σχημάτων σε δραστηριότητες, όπως: M4.3

- «Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό των πιο κάτω σχημάτων.»

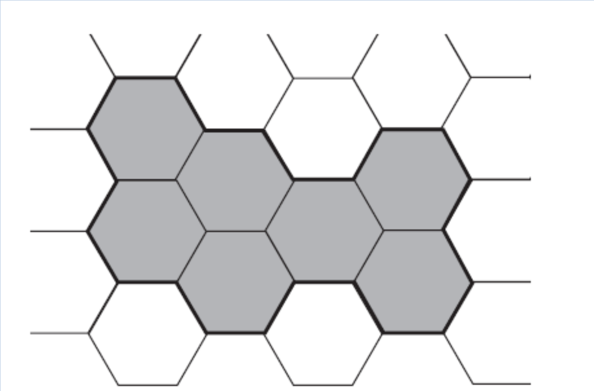
(α) 

(β) 

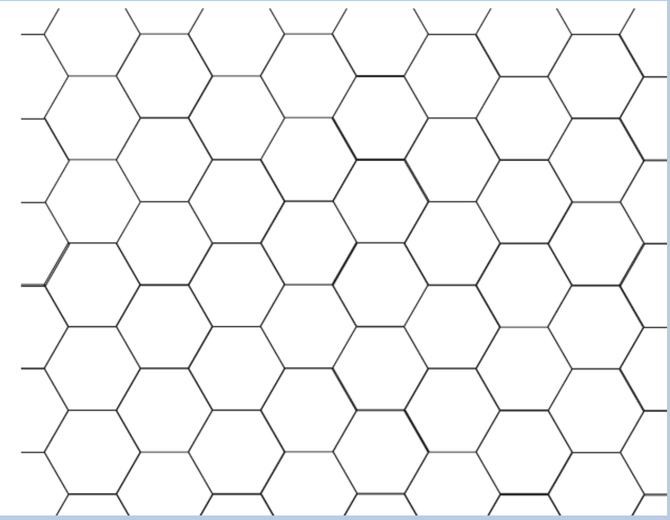
(γ) 

Περίμετρος=___cm Εμβαδόν = ___cm^2	Περίμετρος=___cm Εμβαδόν = ___cm^2	Περίμετρος=___cm Εμβαδόν = ___cm^2

- «Να υπολογίσετε την περίμετρο του πιο κάτω σχήματος, αν το μήκος της πλευράς κάθε εξαγώνου είναι ίσο με 1 cm.»



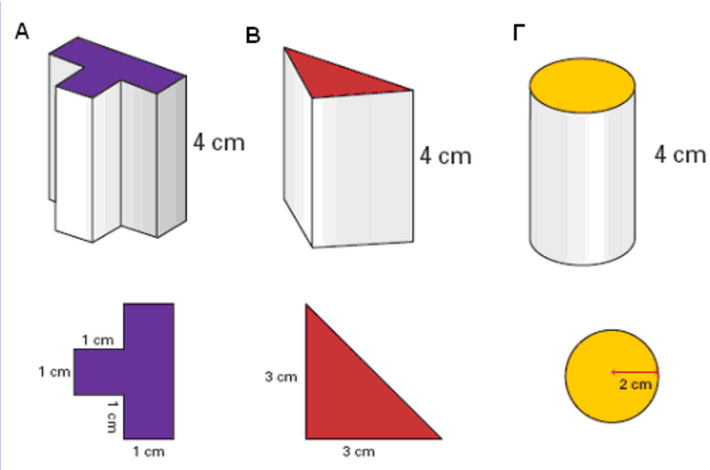
- «Να χρωματίσετε 7 εξάγωνα, ώστε να δημιουργούν σχήμα που να έχει τη μικρότερη δυνατή περίμετρο.»



4	Υπολογίζουν τον όγκο και το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας τρισδιάστατων σχημάτων, χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και λογισμικά σε δραστηριότητες, όπως:	Μ4.4

- «Να υπολογίσετε το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας του Χέοπα που έχει βάση τετράγωνο με μήκος πλευράς 233 m και ύψος 146 m.»

- «Να υπολογίσετε τον όγκο και την εξωτερική επιφάνεια των πιο κάτω τρισδιάστατων σχημάτων.»

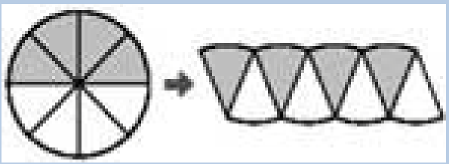


- «Να υπολογίσετε το ύψος μίας κυλινδρικής συσκευασίας αναψυκτικού, αν η χωρητικότητα της είναι ίση με 330 ml και η διάμετρος της βάσης της είναι ίση με 6 cm.»

5 Υπολογίζουν την περιφέρεια και το εμβαδόν του κύκλου, χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και λογισμικά σε δραστηριότητες, όπως: M4.5

- (α) «Να κόψετε έναν κύκλο σε 8 ίσα μέρη και να τα τοποθετήσετε το ένα δίπλα από τον άλλο, όπως το παράδειγμα. Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία και σε άλλους κύκλους, κόβοντάς τους σε 16, 24, 36 και 48 ίσα μέρη αντίστοιχα.»

Παράδειγμα:

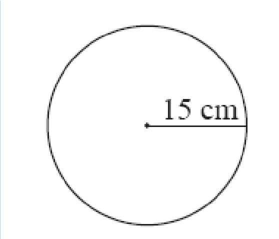


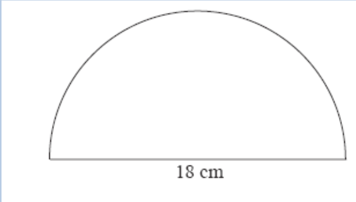
(β) «Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των σχημάτων που κατασκευάσατε.»

____

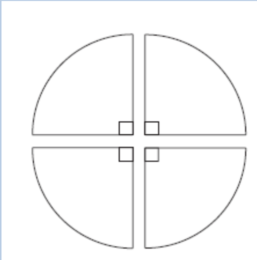
____

- «Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των πιο κάτω.»

(α) 

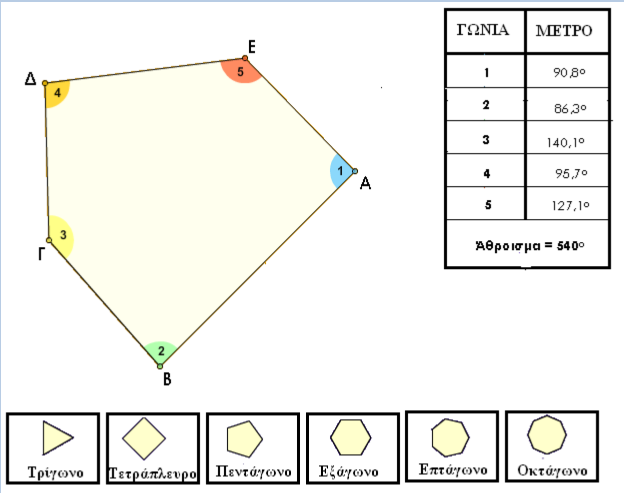
(β) 

- «Ένας κύκλος με ακτίνα 8 cm χωρίζεται σε 4 ίσα κομμάτια, όπως φαίνεται πιο κάτω. Να υπολογίσετε την περίμετρο του κάθε κομματιού.»



6 Υπολογίζουν το άθροισμα γωνιών πολυγώνων σε δραστηριότητες, όπως: Μ4.6

- «Να χρησιμοποιήσετε λογισμικό, για να συμπληρώσετε τον πίνακα.»

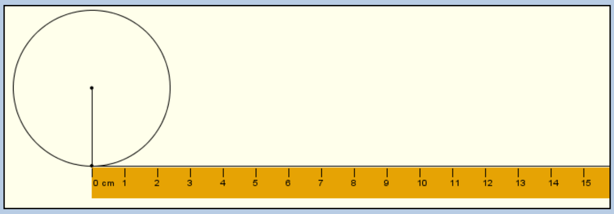


(“*http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=9*”)

ΠΟΛΥΓΩΝΟ	ΆΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ
Τρίγωνο	
Τετράπλευρο	
Πεντάγωνο	
Εξάγωνο	
Επτάγωνο	
Οκτάγωνο	

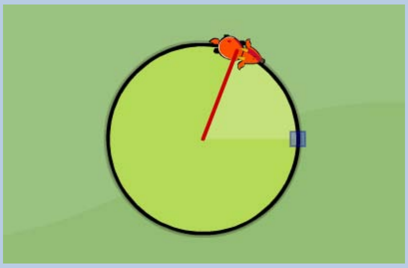
7 Επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ ακτίνας, διαμέτρου, εμβαδού και περιφέρειας κύκλου, όπως: Μ4.7

- «Να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου, αν το μήκος της περιφέρειας του είναι ίσο με 120 cm.»
- «Η διάμετρος του πιο κάτω κύκλου είναι ίση με 4,8 cm. Αν περιστραφεί ώστε να κάνει μία πλήρη στροφή, πόσα εκατοστόμετρα θα διανύσει;»



(“*http://users.ira.sch.gr/thafounar/classB/lessons/LehghtCircle/lenghtCircle.htm*”)

- «Ένα πρόβατο είναι δεμένο με ένα σχοινί, σε ένα ξύλινο πάσσαλο στο κέντρο του χωραφιού που έχει σχήμα κύκλου. Αν το πρόβατο έχει φάει όλα τα χόρτα που απείχαν μικρότερη ή ίση απόσταση από το σχοινί, που ήταν δεμένο, δηλαδή 113,10 cm^2 χόρτο, ποιο είναι το μήκος του σχοινιού;»



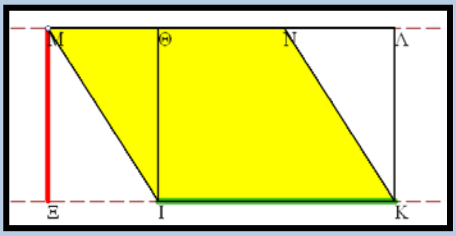
(“*http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=116*”)

8 Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να εντοπίζουν και να αποδεικνύουν σχέσεις σε δραστηριότητες, όπως: Μ4.8

- (α) «Να μετακινήσετε τη ΜΝ κατά μήκος της ΘΛ και να γράψετε τι παρατηρείτε όταν η ΜΝ γίνει ίση με τη ΘΛ.»

____

____

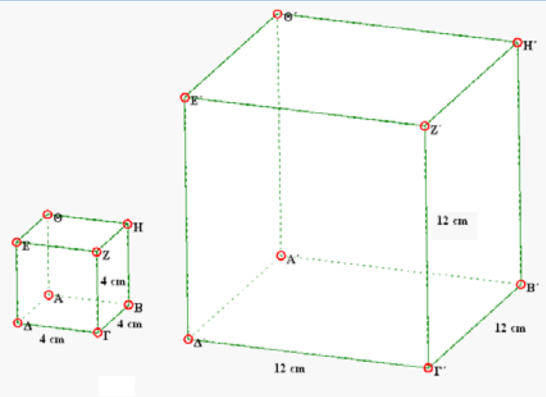


(β) «Να συγκρίνετε το παραλληλόγραμμο ΜΝΚΙ με το ορθογώνιο ΘΛΚΙ.»

____

____

- «Να χρησιμοποιήσετε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, για να βρείτε πότε ένα ορθογώνιο έχει ίσο εμβαδόν με ένα παραλληλόγραμμο.»

	ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις και υπολογίζουν την ταχύτητα ή την απόσταση κινητών σε ορισμένο χρονικό διάστημα σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τη διαδρομή ενός αυτοκινήτου από το Μιλάνο στην Αθήνα. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία κινείται το αυτοκίνητο.»  	Μ4.9
2	Επιλύουν προβλήματα που αφορούν το αποτέλεσμα της αλλαγής ακμής ενός τρισδιάστατου σχήματος στο εμβαδό και στον όγκο του, όπως: ▪ «Ένας κύβος έχει μήκος ακμής 4 cm. Αν κάθε ακμή του τριπλασιαστεί, να υπολογίσετε το εμβαδόν της εξωτερικής του επιφάνειας του κύβου και τον όγκο του. Τι παρατηρείτε;»  	Μ4.10

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**

1

- Μία φωτογραφία σε σχήμα ορθογωνίου έχει μήκος 20,32 cm και πλάτος 30,48 cm. Αν η φωτογραφία σμικρυνθεί κατά $\frac{1}{4}$, ποιες θα είναι οι διαστάσεις της σε εκατοστόμετρα (cm); — Μ4.1

2

- Η γαλάζια φάλαινα ζυγίζει 130 τόνους και το χρυσόψαρο ζυγίζει 26,5 g. Πόσα kg περισσότερα ζυγίζει η γαλάζια φάλαινα από το χρυσόψαρο; — Μ4.2
- Δύο βήματα ενός μέσου ανθρώπου καλύπτουν 1 m. Πόσα βήματα θα πρέπει να κάνει ένας μέσος άνθρωπος, ώστε να διανύσει απόσταση 5 Km;
- Να συμπληρώσετε τα κενά.

(α) 43 mm = _____ cm

(β) 8 τόνοι = ______ kg

(γ) 378 ml = _____ L

(δ) 3,24 km = ______ cm

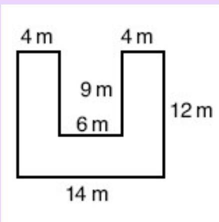
(ε) 45,94 Kg = ______ g

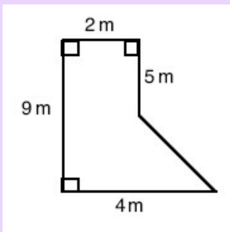
(στ) 33 m = _____ cm

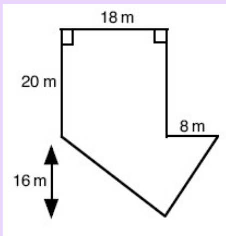
(ζ) 654,2 km = _____ mm

3

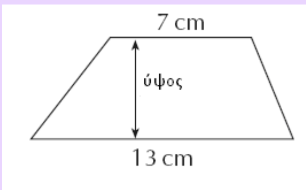
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων. — Μ4.3

(α) 

(β) 

(γ) 

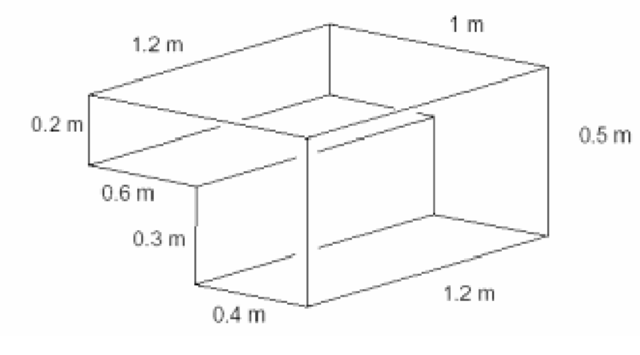
- Να υπολογίσετε το ύψος του πιο κάτω τραπεζίου, αν το εμβαδόν του είναι ίσο με 100 cm^2.



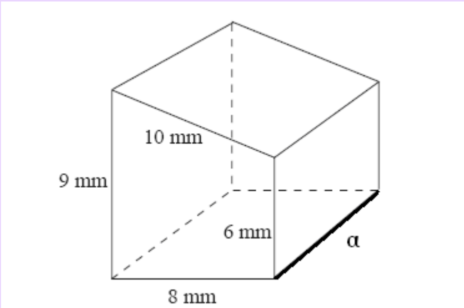
- Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ενός κανονικού πενταγώνου, αν η περίμετρος του είναι ίση με 100 cm.

4

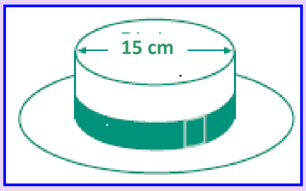
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας και τον όγκο του πιο κάτω σχήματος. — Μ4.4



- Να υπολογίσετε το μήκος της ακμής α του πιο κάτω σχήματος, αν ο όγκος του είναι ίσος με 720 mm^3.

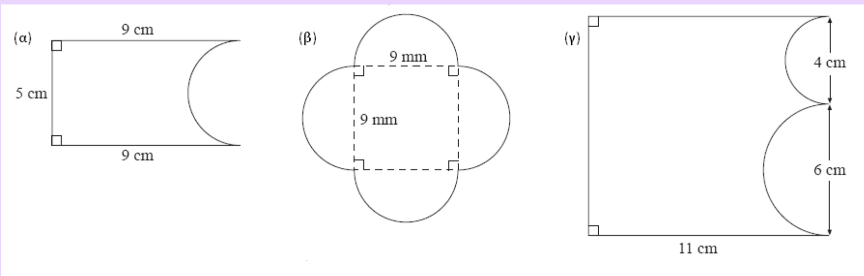


- Το πιο κάτω καπέλο έχε κυλινδρικό σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος της κορδέλας που υπάρχει γύρω από το καπέλο.

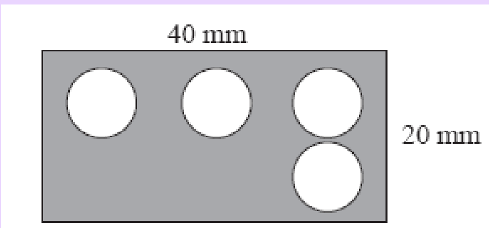


5

- Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων. M4.5



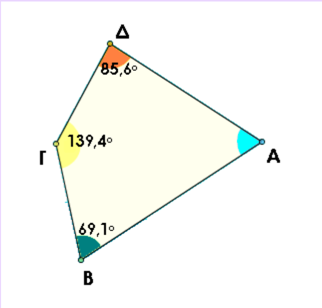
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος, αν η διάμετρος του κάθε κύκλου είναι ίση με 8 mm.



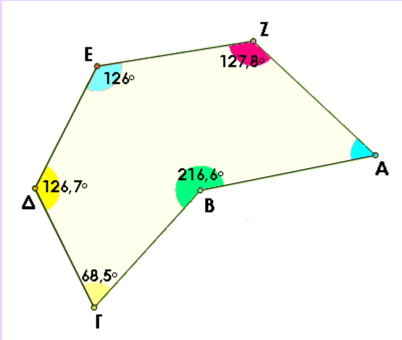
6

- Πόσες μοίρες είναι η γωνία α στο καθένα από τα πιο κάτω πολύγωνα; **M4.6**

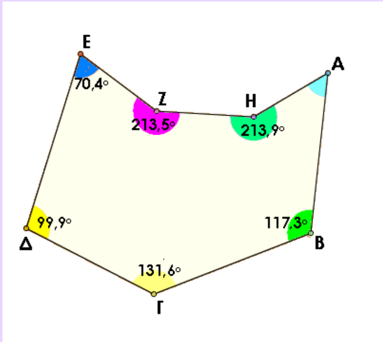
(α)



(β)



(γ)

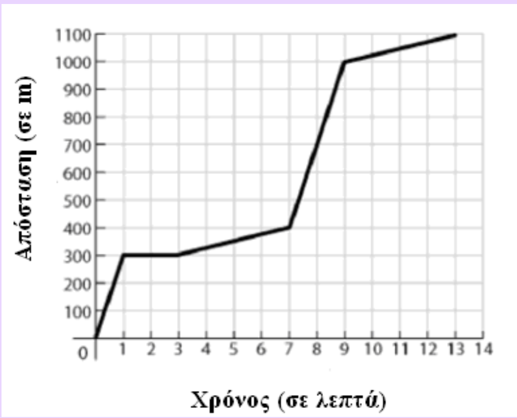


7

- Να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου, αν το εμβαδόν του είναι ίσο με $20\pi\ cm^2$. **M4.7**

8

- Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τη διαδρομή ενός σκύλου στο δάσος του Τροόδους. Να τη μελετήσετε και να απαντήσετε στις ερωτήσεις. **M4.9**



(α) Να περιγράψετε τη διαδρομή του σκύλου, αν γνωρίζετε ότι κινείται γρήγορα, όταν βρίσκεται σε μονοπάτι, κινείται αργά, όταν βρίσκεται μέσα σε θαμνώδη περιοχή και σταματά σε περιοχή με νερό.

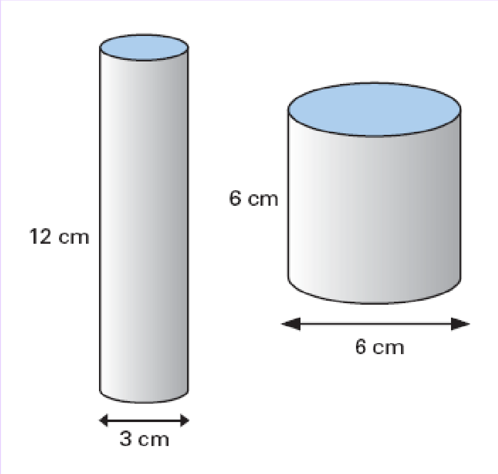
(β) Να υπολογίσετε την απόσταση που διανύει ο σκύλος από το $3^{ο}$ λεπτό μέχρι το $13^{ο}$.

(γ) Να υπολογίσετε τη ταχύτητα του σκύλου από το $7^{ο}$ λεπτό μέχρι το $9^{ο}$.

9

- Ο όγκος ενός κύβου είναι ίσος με $64\ cm^3$. Αν το μήκος της κάθε ακμής του αυξηθεί κατά 6 cm, πόσο θα αλλάξει ο όγκος και το εμβαδόν της **M4.10** εξωτερικής του επιφάνειας;

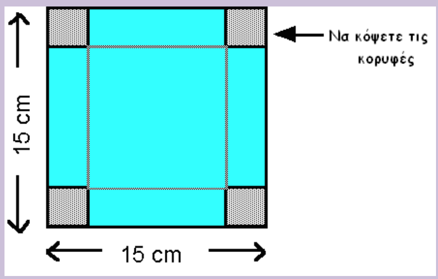
- Να συγκρίνετε τον όγκο των πιο κάτω κυλίνδρων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

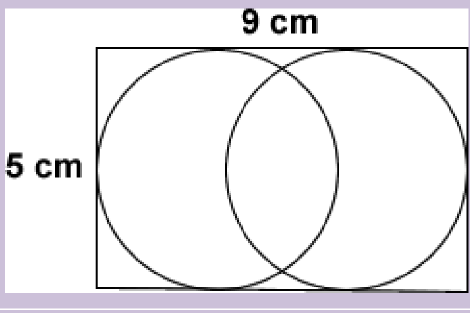
Οι μαθητές:

1 Κατασκευάζουν με τη χρήση λογισμικού ανοικτά κουτιά με διαφορετικό όγκο, χρησιμοποιώντας το πιο κάτω τετράγωνο και συμπληρώνουν τον πίνακα.



	Μήκος (cm)	Πλάτος (cm)	Ύψος (cm)	Όγκος (cm^3)
Κουτί 1				
Κουτί 2				
Κουτί 3				

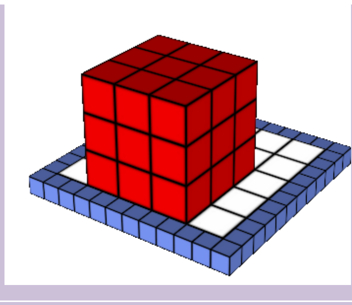
2 Υπολογίζουν την απόσταση μεταξύ των δύο κέντρων των πιο κάτω κύκλων.



3 Καταγράφουν τις διαστάσεις των κουτιών σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν της εξωτερικής του επιφάνειας είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει τον όγκο τους.

Ένα παράδειγμα είναι το κουτί με διαστάσεις 4 επί 6 επί 12.

4 Περιγραφούν με ποιο τρόπο μπορούν να αφαιρέσουν 10 κύβους από τον πιο κάτω τρισδιάστατο σχήμα, ώστε το εμβαδόν της εξωτερικής του επιφάνειας να είναι ίσο με 54 cm^2.



5 Πραγματοποιούν εργασίες προτζεκτ, όπως:

- «Να μελετήσετε την ιστορία του ρολογιού και τον τρόπο που λειτουργούν διάφοροι τύποι ρολογιών.»
- «Να μελετήσετε από πηγές την ιστορία των κλεψύδρων.»

ΜΕΤΡΗΣΗ

Κλίμακα 5

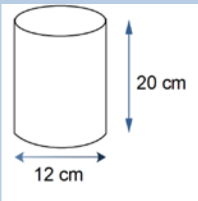
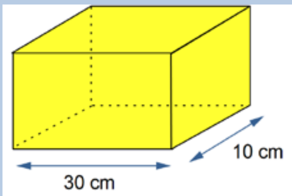
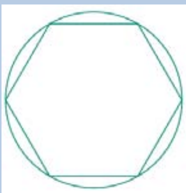
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

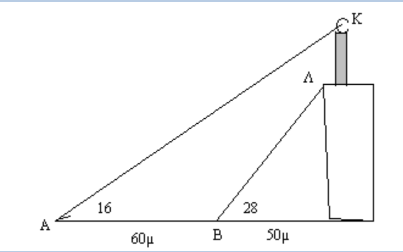
Οι μαθητές:

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ
1.	Κάνουν λογικές εκτιμήσεις αποστάσεων, εμβαδών και όγκου και εκτιμούν το σφάλμα των εκτιμήσεών τους.
2.	Υπολογίζουν την περίμετρο, το εμβαδόν και τον όγκο αντικειμένων.
3.	Διερευνούν και εφαρμόζουν σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων συγκεκριμένων σχημάτων και του εμβαδού ή/και όγκου τους.
4.	Ανακαλύπτουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τύπους για την εύρεση του εμβαδού επίπεδων σχημάτων, της εξωτερικής επιφάνειας και του όγκου στερεών.
5.	Εφαρμόζουν ιστορικές προσεγγίσεις του π και του εμβαδού σχημάτων στην επίλυση προβλημάτων.
6.	Κατασκευάζουν και ερμηνεύουν σχέδια υπό κλίμακα.
7.	Μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς αριθμούς και το πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίζουν αποστάσεις και γωνίες.
8.	Χρησιμοποιούν και εφαρμόζουν με ευχέρεια τις μονάδες μέτρησης του μήκους, του χρόνου, του εμβαδού, της μάζας, του όγκου, κ.τ.λ. και κατανοούν την ισοδυναμία μετρήσεων (π.χ. 1 cm^3 νερού είναι ισοδύναμο με 1 ml νερού).
9.	Επιλύουν προβλήματα μέτρησης, χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές.

	ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΡΟΝΟΥ, ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗΣ
10.	Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες αλλαγής που παρουσιάζονται λεκτικά, αριθμητικά, συμβολικά, γραφικά ή σε πίνακες (φόρος εισοδήματος, πληθωρισμός, συνάλλαγμα, κτλ.).
11.	Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις και υπολογίζουν την ταχύτητα ή την απόσταση κινητών σε ορισμένο χρονικό διάστημα.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1.	Διερευνούν τη μέθοδο εκτίμησης του εμβαδού κύκλου στην αρχαία Αίγυπτο και τον κατά προσέγγιση υπολογισμό του π.	Μ5.2
2.	Επιλύουν προβλήματα υπολογισμού όγκου και εμβαδών στερεών, όπως: • Να βρείτε τον όγκο μιας πυραμίδας της Γκίζας, αν το ύψος της είναι 50 m και η βάση της είναι τετράγωνο πλευράς 60 m.  • Το δοχείο Α έχει κυλινδρικό σχήμα και είναι γεμάτο με νερό. Αν αδειάσουμε το νερό στο δοχείο Β, μέχρι ποιο ύψος θα φθάσει;   	Μ5.3
3.	Προσεγγίζουν τη σταθερά π με τη μέθοδο του Αρχιμήδη (με τη βοήθεια της τεχνολογίας). • Χρησιμοποιούν την περίμετρο κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, για να εξηγήσουν ότι π>3.  • Προσεγγίζουν το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με το εμβαδόν εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου με τη βοήθεια της	Μ5.5

	τεχνολογίας.	
4.	Σε ένα σχέδιο κάτοψης ενός σπιτιού που σχεδιάστηκε με κλίμακα 1 : 80, οι διαστάσεις του σαλονιού είναι 6×8 cm. Ποιες είναι οι πραγματικές διαστάσεις του σαλονιού σε m ;	Μ5.6
5.	Χρησιμοποιούν τριγωνομετρικούς αριθμούς, για να υπολογίζουν αποστάσεις, όπως: • Ο καπετάνιος του πλοίου Α βλέπει την κορυφή Κ του φάρου υπό γωνία 30^{o} (δείτε σχήμα) .Ο καπετάνιος του πλοίου Β βλέπει την κορυφή του λόφου Λ υπό γωνία 60^{o}. Αν η απόσταση μεταξύ των πλοίων είναι 60 m και το πλοίο Β απέχει από τον λόφο 50 m, να υπολογιστεί το ύψος του φάρου.  	Μ5.7
6.	Χρησιμοποιούν το πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίζουν αποστάσεις, όπως: • Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων (-2,3) και (4,7). • Να εφαρμόσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα για να βρείτε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων Α και Β στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.	Μ5.7
7.	Επιλύουν προβλήματα με μονάδες μέτρησης, όπως: • Η ταχύτητα του φωτός είναι ίση με 300000 km/s.Να υπολογίσετε σε km την απόσταση ενός πλανήτη από τη Γη, αν ο πλανήτης αυτός απέχει από τη Γη εννιά έτη φωτός. (Έτος φωτός ονομάζεται το διάστημα που διανύει το φως σε 365 μέρες).	Μ5.8

- Συμπληρώνουν πίνακες σχέσεων μεταξύ μονάδων μέτρησης, όπως:

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

mm	cm	dm	m	km
	150			
		26		
				1,68
			4.500	
75.000				

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

m^3	dm^3	cm^3	mm^3
4,5			
	2,68		
		250.000	
			8.700.000

8. Επιλύουν προβλήματα μέτρησης, όπως: — Μ5.9

- Οι διαστάσεις ενός δωματίου είναι 4 m × 5 m × 3 m. Ποια είναι η πιο μεγάλη απόσταση μέσα στο δωμάτιο; Επεξήγησε την απάντησή σου.
- Στις 8.30 π.μ. παρατηρήθηκε βλάβη σε μια βρύση νερού. Η βρύση παρουσίαζε διαρροή νερού ίση με 3 σταγόνες το δευτερόλεπτο. Πόσα λίτρα νερού σπαταλήθηκαν, αν η βρύση επιδιορθώθηκε στις 6:45 μμ. (ΣΗΜ: 20 σταγόνες αντιστοιχούν σε 1 cm^3 νερού);

ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΡΟΝΟΥ, ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗΣ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1. Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες αλλαγής σε προβλήματα, όπως: — Μ5.10

- Να διερευνήσετε την ορθότητα των προτάσεων:

  (α) Το εμβαδόν ενός τραπεζίου διπλασιάζεται, όταν διπλασιαστούν οι βάσεις και το ύψος του.

  (β) Όταν αυξάνεται η περίμετρος ενός τριγώνου, αυξάνεται και το εμβαδόν του.

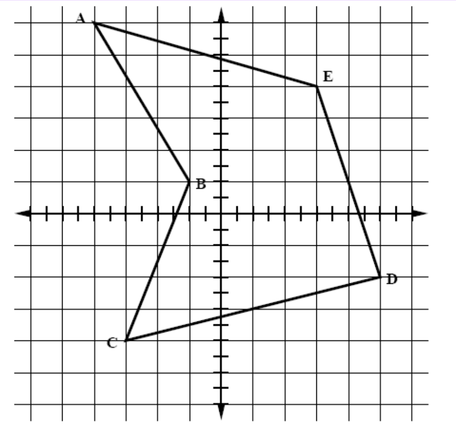
2. Κατασκευάζουν τμηματικές γραφικές παραστάσεις και υπολογίζουν την ταχύτητα ή την απόσταση κινητών σε ορισμένο χρονικό διάστημα σε προβλήματα, όπως: — Μ5.11

- Να παραστήσετε γραφικά τις πληροφορίες του προβλήματος (με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού) και να επιλύσετε το πρόβλημα με βάση τη γραφική παράσταση.

Η απόσταση μιας πόλης από τον σταθμό είναι 580km. Ένα λεωφορείο αναχώρησε από το σταθμό στις 8:20 π.μ. και αφού έκανε ενδιάμεσα μια στάση 40 λεπτών, έφθασε στην πόλη στις 4:15μ.μ. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα του λεωφορείου;

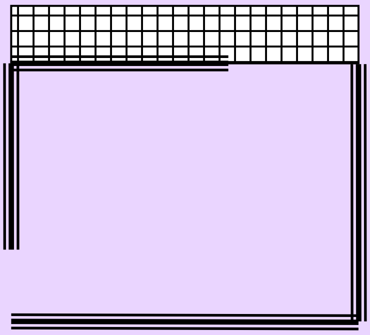
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος. Μ5.3



2. Να επιλέξετε τη θέση που θα τοποθετήσετε τα έπιπλα στο δωμάτιο σας. Στη συνέχεια να τα σχεδιάσετε στην κάτοψη του δωματίου, αν γνωρίζετε ότι οι διαστάσεις είναι: Κρεβάτι 2,20 m x 1,10 m, Κομοδίνο 65 cm x 65 cm, Γραφείο 1,20 m x 0,75 m Μ5.6

Κλίμακα 1:50



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Επιλύουν προβλήματα που μπορούν να αναπαρασταθούν με γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις. «Ο διευθυντής ενός εργοστασίου γνωρίζει ότι για την παραγωγή 100 καρεκλών σε μια μέρα κοστίζει στο εργοστάσιο €2200, ενώ για την κατασκευή 300 καρεκλών το κόστος είναι €4800 τη μέρα. (α) Να εκφράσετε το κόστος ως συνάρτηση του αριθμού των καρεκλών, αν θεωρήσουμε ότι είναι γραμμικό. (β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση και να ερμηνεύσετε τι αντιπροσωπεύει η κλίση καθώς και η τομή με τον άξονα των y».
2	Επιλύουν προβλήματα που μπορούν να αναπαρασταθούν με γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις. «Το 2000 ο πληθυσμός της Κύπρου ήταν 635 χιλιάδες. Κατά τη διάρκεια των ετών 2000 και 2008 ο πληθυσμός αυξανόταν κατά 35 χιλιάδες κατοίκους το χρόνο. (α) Να γράψετε μια εξίσωση η οποία να παρουσιάζει τον πληθυσμό (P) της Κύπρου, συναρτήσει του χρόνου t, όπου $t = 0$ θεωρείται το έτος 2000. (β) Να χρησιμοποιήσετε αυτό το μοντέλο, για να εκτιμήσετε τον πληθυσμό της Κύπρου για το έτος 2032, αν ο ρυθμός αύξησης παραμείνει σταθερός.»
3	Ερμηνεύουν προτάσεις από τα Στοιχεία του Ευκλείδη, όπως: Να ανατρέξετε στην 35η πρόταση των Στοιχείων του Ευκλείδη, για την οποία ο σχολιαστής των **Στοιχείων** του Ευκλείδη, Πρόκλος, αναφέρει τα ακόλουθα: «Στους άπειρους περί την γεωμετρία αυτή η Πρόταση [Ι.35] θα φαίνονταν ‘παντελώς θαυμαστόν’, διότι αδυνατεί να αντιληφθεί ‘πως είναι δυνατόν να αυξάνεται ‘επ’ ‘απειρον’ η περίμετρος, ενώ ‘μένει η των χωρίων ισότης’…

ΜΕΤΡΗΣΗ

Κλίμακα 6

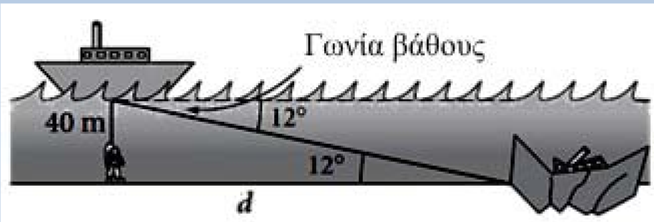
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

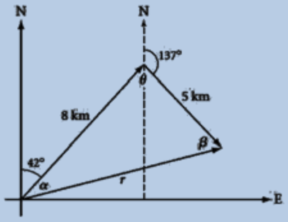
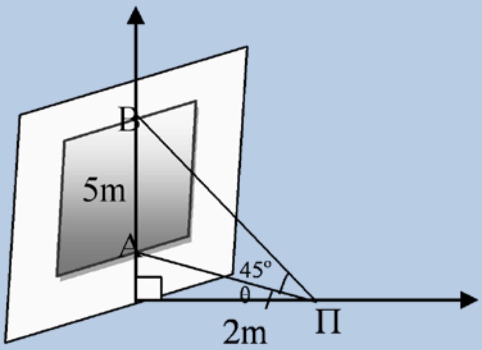
Οι μαθητές:

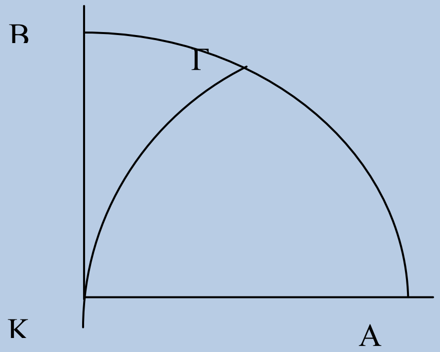
	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ
1.	Επιλύουν προβλήματα με βάση τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθογώνιο τρίγωνο.
2.	Εφαρμόζουν και επιλύουν προβλήματα μετρικών σχέσεων και εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από τη γεωμετρία, τριγωνομετρία, αναλυτική γεωμετρία και διανυσματικό λογισμό.
3.	Εφαρμόζουν και επιλύουν προβλήματα, χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος και διαφοράς.
4.	Υπολογίζουν το άθροισμα και τη διαφορά διανυσμάτων, το γινόμενο αριθμού επί διάνυσμα, το μέτρο διανύσματος, όταν δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων του, τη γωνία δύο διανυσμάτων, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων και σημείου από ευθεία και τη γωνία δύο ευθειών.
5.	Επιλύουν προβλήματα με πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό πινάκων.
6.	Επιλύουν προβλήματα αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.
7.	Υπολογίζουν το εμβαδόν απλών καμπυλόγραμμων και μεικτόγραμμων επιφανειών.
8.	Εφαρμόζουν τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου τρισδιάστατων σχημάτων.
9.	Αναγνωρίζουν και υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο των στερεών που δημιουργούνται από την περιστροφή επίπεδου σχήματος γύρω από άξονα που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο.

ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΡΟΝΟΥ, ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗΣ	
10.	Υπολογίζουν το συντελεστή κατεύθυνσης (κλίση) ευθείας και επεξηγούν τη σχέση μεταξύ της κλίσης μιας ευθείας και του ρυθμού μεταβολής.
11.	Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες μεταβολής που παρουσιάζονται αριθμητικά, γραφικά ή σε πίνακες.

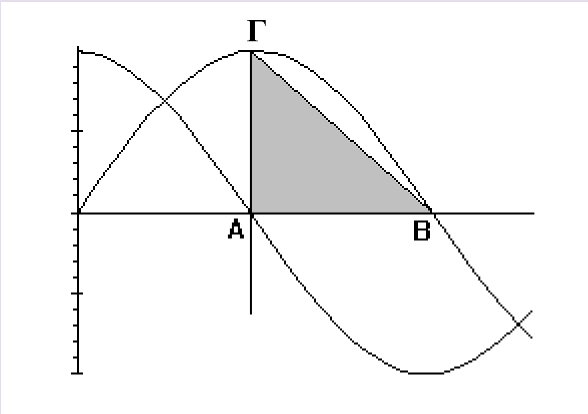
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1.	Χρησιμοποιούν τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών για την επίλυση προβλημάτων, όπως: • Ένα πλοίο διάσωσης εντοπίζει ναυάγιο στο βυθό της θάλασσας το οποίο βρίσκεται υπό γωνία 12^0 ως προς το πλοίο. Ένας δύτης καταδύεται από το πλοίο 40 m κατακόρυφα και πατά στο βυθό της θάλασσας. Πόσα μέτρα πρέπει να περπατήσει στο βυθό, για να φτάσει στο ναυάγιο;  	Μ6.1
2.	Εφαρμόζουν τους Νόμους του Ημιτόνου και του Συνημιτόνου στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων, όπως: • Ο Δημήτρης και ο Κώστας κατασκηνώνουν σε ένα δάσος. Μια μέρα ξεκινούν από τον κατασκηνωτικό χώρο και περπατούν 8 km υπό γωνία 42^0, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ξεκουράζονται και συνεχίζουν περπατώντας υπό γωνία 137^0 (δείτε το σχήμα) για ακόμα 5km.	Μ6.2

	Αποφασίζουν ότι πρέπει να επιστρέψουν στον κατασκηνωτικό χώρο. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει να περπατήσουν και υπό ποια γωνία σε σχέση με το Βορρά;  	
3.	Επιλύουν προβλήματα, χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος και διαφοράς, όπως: • Ένα διαφημιστικό ταμπλό φωτίζεται από ένα προβολέα γωνίας 45^0, από απόσταση 2 m (δείτε το σχήμα).Να βρεθεί σε τι ύψος (από τον προβολέα) πρέπει να τοποθετηθεί μια διαφημιστική αφίσα ύψους 5 m, ώστε να φωτίζεται επακριβώς από τον προβολέα.  	Μ6. 3
4.	Χρησιμοποιούν τις πράξεις διανυσμάτων, το μέτρο διανύσματος, τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων και τον τύπο εύρεσης εμβαδού τριγώνου με ορίζουσα στην επίλυση προβλημάτων, όπως: • Αν $\vec{\alpha}=(1,2)$, $\vec{\beta}=(3,-7)$, και $\vec{\gamma}=(-2,5)$ να βρείτε α) τα διανύσματα $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-8\vec{\gamma}$ β) τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. • Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφή το σημείο Α(2,-3). Δύο από τις πλευρές του έχουν εξισώσεις 2χ-3ψ+5=0 και 3χ+2χ-7=0. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Ο του ορθογωνίου και το εμβαδόν του ορθογωνίου.	Μ6.4

5.	Υπολογίζουν το εμβαδόν απλών καμπυλόγραμμων και μεικτόγραμμων επιφανειών, όπως: • Δίνεται τεταρτοκύκλιο με κέντρο Κ και ακτίνα R=KA. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΚΑ, γράφουμε τόξο ΚΓ μέσα σε αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΒΚΓ, συναρτήσει της R.  	Μ6.8
6.	Εφαρμόζουν τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου στερεών όπως: • Ο κ. Γ. θα κατασκευάσει ένα μεταλλικό ντεπόζιτο χωρητικότητας 64 m^3. Έχει δύο επιλογές: α) το ντεπόζιτο να είναι κύβος και β) το ντεπόζιτο να είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο πλάτους 4m και μήκους 8m. Ποιο ντεπόζιτο θα στοιχίσει φθηνότερα, αν λάβουμε υπόψη μόνο το υλικό κατασκευής του ντεποζίτου;	Μ6.8

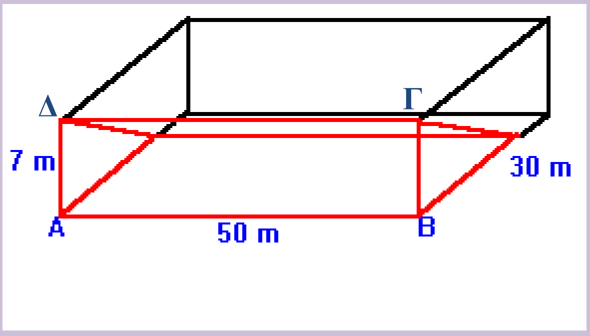
	ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΡΟΝΟΥ, ΡΥΘΜΟΥ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗΣ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1.	Επεξηγούν τη σχέση μεταξύ της κλίσης μιας ευθείας και του ρυθμού μεταβολής.	Μ6.10

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ		
1.	Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο μεταξύ των γραφικών παραστάσεων f(x) = 5ημx και g(x) = 5συνx. Η κορυφή Γ είναι το μέγιστο σημείο της f(x) στο διάστημα [0, 2π] και τα σημεία Α και Β είναι οι λύσεις των εξισώσεων f(x) = 0 και g(x) = 0 στο διάστημα [π, 2π]. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. 	Μ6.2
2.	Η μεγάλη πυραμίδα της Αιγύπτου έχει βάση τετράγωνο πλευράς 234 m και ύψος 146 m. α) Να υπολογίσετε την παράπλευρη επιφάνεια και τον όγκο της πυραμίδας. β) Να αποδείξετε ότι ο όγκος της μεγάλης πυραμίδας δεν μεταβάλλεται, αν η μία ακμή της βάσης μετακινηθεί στο φορέα της, χωρίς να αλλάξει μήκος και το ύψος της παραμένει σταθερό.	Μ6.8
3.	Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $9\sqrt{2}\,\pi\ cm^2$ και η γενέτειρα του κώνου λ σχηματίζει με τη βάση γωνία 45^o. Να βρείτε τον όγκο του κώνου.	Μ6.9
4.	Υπολογίζουν το συντελεστή κατεύθυνσης (κλίση) ευθείας. Δίνονται τα σημεία Α(-1/2, 1), Β(2, -1), Γ(6, 4). Να δειχθεί ότι η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.	Μ6.10

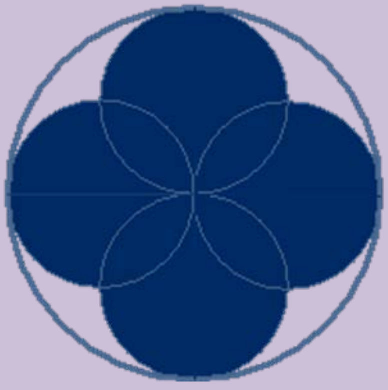
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Μια πισίνα έχει πλάτος 30 m, μήκος 50 m και βάθος 7 m. Μετά από ένα σεισμό, η πισίνα παίρνει κλίση και γέρνει προς την ακμή ΑΒ, όπως στο σχήμα. Το νερό καλύπτει πλήρως την έδρα ΑΒΓΔ της πισίνας. Τα ¾ της βάσης της πισίνας καλύπτονται από το νερό. Ποιο ήταν το ύψος του νερού στην πισίνα πριν από το σεισμό;



2 Δίδεται κύκλος (Ο,R) και δύο διάμετροι κάθετοι μεταξύ τους. Κατασκευάζουμε τέσσερις κύκλους εσωτερικά, εφαπτόμενους στον (Ο, R), με ακτίνα R/2. Το κέντρο των δύο κύκλων βρίσκεται στη μια διάμετρο και το κέντρο των άλλων δύο κύκλων στην άλλη διάμερο. Να βρεθεί το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του κύκλου, συναρτήσει του R.



3 Ο πρώτος Τροχός (Ferris Wheel) κατασκευάστηκε από τον George Ferris το 1893. Η διάμετρος του ήταν 75 m και το ανώτατο σημείο του τροχού απείχε από το έδαφος 79 m. Είχε 36 ξύλινα βαγόνια που το καθένα μπορούσε να μεταφέρει 60 άτομα. Ο τροχός κινείτο με τη βοήθεια δύο μηχανών των 1000 ίππων και συμπλήρωνε μία πλήρη στροφή σε 20 λεπτά.

Ο πρωτότυπος τροχός έπαψε να χρησιμοποιείται το 1904. Στις μέρες μας ο Τροχός του

Ferris είναι μέρος των Luna Parks.

http://www.ies.co.jp/math/java/trig/kanran/kanran.html

Η καμπύλη που περιγράφει την απόσταση ενός επιβάτη του τροχού από το έδαφος μιμείται ένα ημιτονοειδές κύμα. Η γενική μορφή μιας ημιτονικής εξίσωσης είναι:

$$h = a\eta\mu(bt + c) + d$$

Όπου,

h = αποσταση επιβάτη από το έδαφος σε μέτρα.

t = χρόνος από την εκκίνηση του τροχού σε λεπτά.

Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που δίνονται στην πιο πάνω παράγραφο, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a, b, c και d στην περίπτωση του πρωτότυπου Ferris Wheel.

4 Το σημείο απογείωσης των αεροπλάνων σε ένα στρατιωτικό αεροδρόμιο, θεωρείται αρχή ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων με άξονα χχ΄ το διάδρομο απογείωσης . Ένα αεροπλάνο απογειώνεται υπό γωνία 30^0, κινούμενο σε ευθύγραμμη τροχιά με ταχύτητα 500 Km/h. Ένα άλλο αεροπλάνο απογειώνεται 3 λεπτά αργότερα από το πρώτο αεροπλάνο υπό γωνία 45^0 κινούμενο σε ευθύγραμμη τροχιά και με την ίδια ταχύτητα. Ο χρόνος t μετριέται, από τη στιγμή της απογείωσης του πρώτου αεροπλάνου πάνω στον άξονα χχ΄. Έξι λεπτά μετά την απογείωση του πρώτου αεροπλάνου ζητούνται:

α) Οι εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες διαγράφεται η ευθύγραμμη τροχιά που ακολουθούν τα αεροπλάνα κατά την απογείωσή τους.

β) Η απόσταση μεταξύ των δύο αεροπλάνων.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα σημεία των δυο αεροπλάνων με το σημείο απογείωσης.

δ) Η απόσταση του δεύτερου αεροπλάνου από την τροχιά του πρώτου.

ΜΕΤΡΗΣΗ

Κλίμακα 7

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

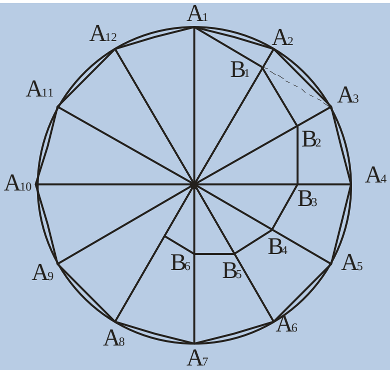
Οι μαθητές:

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ
1.	Ορίζουν και εφαρμόζουν τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου πολυγωνικών χωρίων και των εμβαδών ισοδύναμων ευθύγραμμων σχημάτων και επιλύουν προβλήματα όμοιων πολυγώνων.
2.	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τους λόγους περιμέτρων και εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων και μετασχηματίζουν πολύγωνο σε ισοδύναμό του.
3.	Προσεγγίζουν το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου με κανονικά πολύγωνα και αποδεικνύουν τους τύπους υπολογισμού μήκους και εμβαδού κύκλου, εμβαδού κυκλικού τομέα, κυκλικού τμήματος και υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν μεικτογράμμων επίπεδων σχημάτων.
4.	Ορίζουν τα στερεά εκ περιστροφής και τα στοιχεία τους, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τους τύπους υπολογισμού επιφάνειας και όγκου τους (Κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος , σφαίρα).
5.	Διερευνούν και εφαρμόζουν την πλήρη περιστροφή τριγώνου γύρω από άξονα και υπολογίζουν τους τύπους για την επιφάνεια και τον όγκο του στερεού που παράγεται.
6.	Μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις , χρησιμοποιώντας τις παραγώγους σε ρεαλιστικά προβλήματα π.χ. στον υπολογισμό μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης μιας ποσότητας (π.χ. Υπολογισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης ενός κινητού, όταν δίνεται η εξίσωση της απόστασης του σε σχέση με το χρόνο).
7.	Επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων καθημερινής ζωής (με τη χρήση αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων).
8.	Ορίζουν κανονικά πολύγωνα και υπολογίζουν την κεντρική γωνία του πολυγώνου,

	τη γωνία του πολυγώνου, την πλευρά, το απόστημα, την περίμετρο και το εμβαδόν συναρτήσει της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου ή της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου.

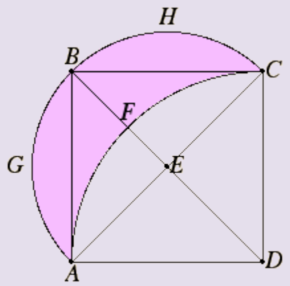
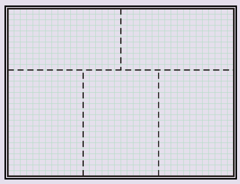
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1.	Εφαρμόζουν τις έννοιες εμβαδού και περιμέτρου, για να επιλύουν προβλήματα, όπως: • «Δίνεται ένα κυρτό πολύγωνο με ν πλευρές. Να κατασκευαστεί πολύγωνο ισοδύναμο με το αρχικό με $\nu - 1$ πλευρές.» • «Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, να κατασκευαστεί τετράγωνο που να είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο.» • «Να αιτιολογήσετε γιατί κυρτό πολύγωνο τετραγωνίζεται.» • «Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να διαιρεθεί με δύο ευθείες που άγονται από την κορυφή του Α σε τρία μέρη των οποίων τα εμβαδά τους να είναι ανάλογα τριών δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων μ, ν, λ.»	Μ7.1
2.	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων, για να επιλύουν προβλήματα, όπως: • «Δίνεται ένα εγγεγραμμένο κανονικό δωδεκάγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \ldots \mathrm{A}_{12}$ στον κύκλο (O, R). Έστω B_1 η προβολή του A_1 στην OA_2, B_2 η προβολή B_1πάνω στην OA_3 κτλ. Να βρεθεί το άθροισμα $\mathrm{S} = \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{B}_2\mathrm{B}_3 + \ldots$ συναρτήσει της ακτίνας R.»	Μ7.3

		
3.	Επιλύουν προβλήματα με στερεά εκ περιστροφής, όπως: • «Αν σε κόλουρο κώνο ισχύει $h = R + \rho$, να δειχθεί ότι $V = \frac{1}{6}E \cdot \upsilon$, όπου Ε το ολικό εμβαδόν του κόλουρου κώνου.»	Μ6.4
4.	Εφαρμόζουν τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων, για να επιλύουν προβλήματα όπως: • «Να βρεθούν η γωνία και η κεντρική γωνία ενός κανονικού πενταγώνου.» • «Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$. Να βρεθεί η ακτίνα του.» • «Σε κύκλο (Ο,R), να εγγραφεί κανονικό οκτάγωνο, με χάρακα και διαβήτη, να αιτιολογηθεί κάθε βήμα της κατασκευής και να υπολογισθούν η πλευρά $\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ και το απόστημά του $a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.»	Μ7.8
5.	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν σε προβλήματα τους τύπους του εμβαδού της παράπλευρης, της ολικής επιφάνειας και τον όγκο παραλληλεπίπεδου, ορθού πρίσματος, κύβου, πυραμίδας και κόλουρης πυραμίδας, σε προβλήματα, όπως: • «Να υπολογίσετε το ύψος και το απόστημα κανονικού τετραέδρου ακμής α.» • «Μια κανονική τετραγωνική κόλουρη πυραμίδα έχει πλευρές βάσεων 2α και α. Αν το παράπλευρο ύψος σχηματίζει γωνία 60° με τη βάση, να υπολογίσετε: (α) το εμβαδόν της επιφάνειας της και (β) τον όγκο της.» • «Αν ο όγκος κύβου είναι τριπλάσιος του όγκου άλλου κύβου να βρείτε των λόγο των εμβαδών των επιφανειών τους.»	Μ7.4

6.	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τους τύπους της κυρτής και της ολικής επιφάνειας και τον όγκο των στερεών εκ περιστροφής (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα), όπως: • «Κύλινδρος είναι περιγεγραμμένος σε σφαίρα ακτίνας R. Αν E_1 , V_1 είναι το εμβαδόν και ο όγκος της σφαίρας και E_2, V_2 είναι το εμβαδόν και ο όγκος του κυλίνδρου, να βρείτε τους λογους: (α) $\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}$ και (β) $\frac{\mathrm{V}_1}{\mathrm{V}_2}$.» • «Κώνος παράγεται από την περιστροφή ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου γύρω από το ύψος του. Αν ρ είναι η ακτίνα της βάσης του κώνου, να υπολογίσετε τον όγκο και την κυρτή επιφάνεια του κώνου». • «Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν κύκλου ακτίνας α. Να βρείτε την κυρτή επιφάνεια και τον όγκο του κώνου, αν έχει ακτίνα ρ.»	
7.	Διερευνούν και εφαρμόζουν την πλήρη περιστροφή τριγώνου γύρω από άξονα και υπολογίζουν τους τύπους για την επιφάνεια και τον όγκο του στερεού που παράγεται, όπως: • «Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά του ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ=ΑΒ. Στο σημείο Δ φέρουμε ευθεία ξ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται από το ισόπλευρο τρίγωνο, αν αυτό περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία ξ.»	Μ7.5

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1.	• Δίδεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α. Με κέντρο το Δ και ακτίνα ΑΔ κατασκευάζουμε το τόξο ΑΖΓ. Με κέντρο το Ε και ακτίνα ΑΕ κατασκευάζουμε το τόξο ΑΒΓ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μηνίσκου, συναρτήσει του α.  • Ένα τετράπλευρο με περίμετρο $198\,\text{cm}$ διαιρείται σε πέντε ίσα ορθογώνια, όπως φαίνεται στο πιο κάτω διάγραμμα. Ποια είναι η περίμετρος ενός από τα πέντε ίσα ορθογώνια; 	Μ7.1
2.	Σε κύκλο (Ο,ρ) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ=ρ και ΓΔ=ρ$\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ, το ύψος του και το εμβαδόν του, ως συνάρτηση του ρ.	Μ7.8
3.	• Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 2 cm, 3 cm και 4 cm. Ένα τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 36cm. Ποία είναι τα μήκη των πλευρών του; • Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε, Ζ, αντίστοιχα και έτσι ώστε να είναι $\mathrm{B\Delta} = \frac{2}{3}\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{AE} = \frac{1}{3}\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{AZ} = \frac{1}{2}\mathrm{ZB}$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 54 cm^2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΔΓΕΖ.	Μ7.2
4.	Δίνεται κώνος με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_\kappa = 50\pi\ \text{cm}^2$. Η	Μ7.4

απόσταση του κέντρου της βάσης του από τη γενέτειρά του είναι 8 cm. Να βρείτε τον όγκο του κώνου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Η καμπύλη $4χ^2+ψ^2-4χψ+2ψ-8χ+4=0$ και η ευθεία $χ=1$ είναι οι εικόνες δύο καμπυλών μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού με πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

α) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις των δύο προτύπων είναι οι $ψ=(χ-1)^2$, $χ+ψ=1$.

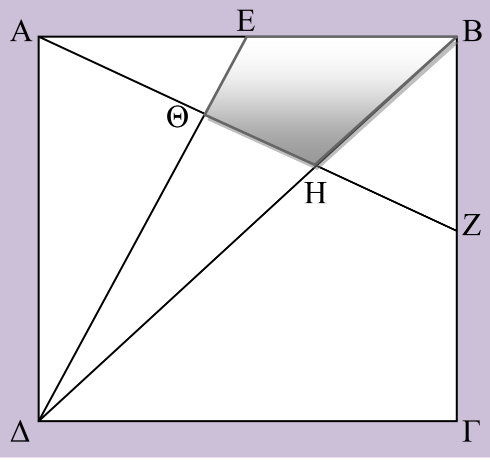
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δύο εικόνες.

2

- Ένας παραγωγός έχει ένα περιβόλι με μηλιές. Στο πρώτο πελάτη πουλά τα μισά κιλά μήλα της παραγωγής και επιπλέον μισό κιλό μήλα. Στο δεύτερο, τα μισά κιλά από τα εναπομείναντα και επιπλέον μισό κιλό μήλα, κ.ο.κ., μέχρι και τον έβδομο πελάτη. Πόσα κιλά μήλα πώλησε συνολικά, αν έχει διαθέσει πλήρως την παραγωγή του;
- Με βάση τον πολεοδομικό δείκτη μιας πόλης, το μέγιστο ύψος των οικοδομών είναι 28 m, ενώ το ελάχιστο ύψος κάθε ορόφου είναι 2,85 m. Αν ο πρώτος όροφος είναι υπερυψωμένος κατά 1,5 m από το έδαφος, να βρείτε πόσοι το πολύ όροφοι μπορούν να κατασκευαστούν στην περιοχή αυτή.

3

- Αν είναι γνωστό ότι η απόσταση μεταξύ της Γης και Ηλίου είναι 149637000 km, σκεφτείτε τρόπο υπολογισμού της διαμέτρου του Ήλιου.
- Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ με μήκος πλευράς α=2. Ε και Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ και Η το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΔ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΕΒΗΘ.



4	Δίνονται δύο κύκλοι K_1 και K_2 και μια ευθεία (λ). Χρησιμοποιώντας την αξονική συμμετρία, να βρείτε ένα τετράγωνο ΠΡΣΤ που να έχει τις κορυφές του Π και Σ πάνω στην ευθεία (λ), την κορυφή Ρ πάνω στον κύκλο K_1 και την κορυφή Τ στον κύκλο K_2.
5	Οι μαθητές κάνουν μικρές έρευνες για την ιστορία εξέλιξης των μιγαδικών αριθμών όπως: «Ο Διόφαντος προσπάθησε αλλά δεν κατάφερε να λύσει το λογικό πρόβλημα: Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με περίμετρο 12 μονάδες μήκους και εμβαδόν 7 τετραγωνικές μονάδες ».

ΜΕΤΡΗΣΗ

Κλίμακα 8

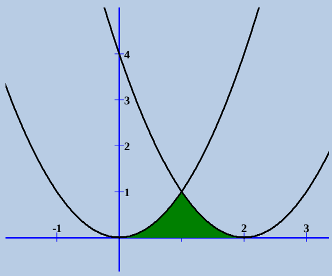
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ
1.	Μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις , χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα, για να υπολογίζουν εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την συνάρτηση $y = f(x)$,τον άξονα του χ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματά τους.
2.	Εφαρμόζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα για να υπολογίζουν: Α) Το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από μία καμπύλη και τον άξονα των χ ή τον άξονα των y. Β) Το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = f_1\,(x)$ και $y = f_2\,(x)$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$ (ή τις των καμπυλών $x = f_1\,(y)$ και $x = f_2\,(y)$ και τις ευθείες $y = \alpha$ και $y = \beta$). Γ) Το εμβαδόν και τον όγκο στερεών εκ περιστροφής γύρω από έναν από τους άξονες των συντεταγμένων, όταν η καμπύλη δίνεται με καρτεσιανή εξίσωση. Δ) Τον όγκο που παράγεται από την περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από ευθεία $x = \alpha$ ή $y = \beta$.
3.	Αναφέρουν, ερμηνεύουν γεωμετρικά και εφαρμόζουν το θεώρημα του $Bolzano$.
4.	Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της διχοτόμησης για να υπολογίζουν ρίζες σε μη γραμμική εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$.
5.	Αναφέρουν, ερμηνεύουν γεωμετρικά και εφαρμόζουν την μέθοδο Newton-Raphson για τον εντοπισμό και προσέγγιση των ριζών εξισώσεων .
6.	Εφαρμόζουν τον Κανόνα του Τραπεζίου για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της συνάρτησης f(x) στην περίπτωση που το διάστημα ολοκληρώσεως αποτελείται από κ διαδοχικά διαστήματα, ίσο το καθένα με βήμα h

	$\int_{x_0}^{x_\kappa} f(x)dx \approx \frac{1}{2}h\left[(y_0+y_\kappa)+2(y_1+y_2+...+y_{\kappa-1})\right]$
7.	Εφαρμόζουν τον Κανόνα του Simpson για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της συνάρτησης f(x) στην περίπτωση που το διάστημα ολοκληρώσεως αποτελείται από κ διαδοχικά διαστήματα, ίσο το καθένα με βήμα h, όπου κ άρτιος αριθμός $\int_{x_0}^{x_\kappa} f(x)dx \approx \frac{1}{3}h\left[(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4...+4f_{\kappa-1}+f_\kappa)\right]$
8.	Εφαρμόζουν ορισμένο ολοκλήρωμα για την εύρεση μήκους τόξου ΚΛ καμπύλης της μορφής ψ=f(x) στο διάστημα (α,β) με τον τύπο $S = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2}dx$ Όπου α και β οι τετμημένες των σημείων Κ και Λ αντίστοιχα.
9.	Εφαρμόζουν ορισμένο ολοκλήρωμα για την εύρεση μήκους τόξου καμπύλης που δίνεται παραμετρικά $x = f(t)$ και $\psi = g(t)$ για $t \in [t1, t2]$ με τον τύπο $S = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}dt$
10.	Εφαρμόζουν ορισμένο ολοκλήρωμα για την εύρεση εμβαδού επιφάνειας στερεού που παράγεται με την περιστροφή τόξου ΚΛ καμπύλης της μορφής $\psi = f(x)$ με τον τύπο $A = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi\sqrt{1+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2}dx$ Όπου α και β οι τετμημένες των σημείων Κ και Λ αντίστοιχα.
11.	Εφαρμόζουν ορισμένο ολοκλήρωμα για την εύρεση εμβαδού επιφάνειας στερεού που παράγεται με την περιστροφή τόξου ΚΛ καμπύλης που δίνεται παραμετρικά x = f(t) και ψ = g(t) για $t \in [t_1, t_2]$ με τον τύπο $A = 2\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}dt$
12.	Χρησιμοποιούν διαφορικές εξισώσεις για την επίλυση προβλημάτων Γεωμετρίας, Φυσικής και Μηχανικής.
13.	Χρησιμοποιούν αριθμητικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1.	Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = -x^2 + 4x$, τον άξονα του x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.	Μ8.1
2.	Να βρεθεί το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου που περικλείεται από τις καμπύλες ψ=(χ-2)^2, ψ=χ^2 και τον άξονα των χ΄χ.  Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ και τον άξονα $x΄x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(\chi) = ln\chi$, τον άξονα $\chi΄\chi$ και την ευθεία $y = 3$. Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται μεταξύ της παραβολής $y = (x-2)^2$ και της ευθείας $y = 2x - 4$ όταν το χωρίο αυτό περιστραφεί κατά 360^0 γύρω από α) τον άξονα OX, β) τον άξονα OY, γ) την ευθεία $y = 4$.	Μ8.1
3.	Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{συνx}{x} = e^x + 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.	Μ8.3
4.	Έστω η εξίσωση: $f(x) = \lvert x+1\rvert - 2e^{-\lvert x\rvert} = 0$ (α) Να υπολογίσετε γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ (β) Να γίνει προσέγγιση της θετικής ρίζας με τη μέθοδο $Newton - Raphson$ με 2 επαναλήψεις.	Μ8.5
5.	Αν για την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3$ υπάρχει μια ρίζα $\xi = \sqrt{3} = 1{,}732$ στο διάστημα $(a_0, \beta_0) = (1,2)$, να βρεθεί: (α) Ο αριθμός των επαναλήψεων n που θα χρειαστούν με την μέθοδο της	Μ8.5

	Διχοτόμησης, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = \sqrt{3} = 1{,}732$ με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου και (β) οι διαδοχικές προσεγγίσεις $x_0, x_1, \cdots, x_n$.	
6.	Στην συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3$ υπάρχει μια ρίζα $\xi = \sqrt{3} = 1{,}732$ στο διάστημα $(a_0, \beta_0) = (1{,}2)$. Με $x_0 = \frac{3}{2} \in [a_0, \beta_0] = [1{,}2]$ να βρεθούν οι διαδοχικές προσεγγίσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ που θα χρειαστούν με τη μέθοδο $Newton - Raphson$ για να υπολογιστεί η προσέγγιση της θετικής ρίζας με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.	Μ8.5

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1.	(α) Δίδεται η παραβολή $y^2 = 9x$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Τ(1,3) τέμνει τον άξονα των ψ στο σημείο Α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου OTA (Ο αρχή των αξόνων). (β) Η περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = 2$ στρέφεται κατά γωνία 180^0 γύρω από τον άξονα των y. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.	Μ8.1
2.	Να προσεγγίσετε την πραγματική λύση με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων της εξίσωσης $x^3 + 5x - 3 = 0$. Να υπολογίσετε όλες τις λύσεις της της $e^{2x} = x + 6$, ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων με την μέθοδο Newton-Raphson.	Μ8.5

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1. Να χρησιμοποιηθεί το σχήμα των $Newton–Raphson$ για την εύρεση της, $\sqrt[3]{7}$ με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου, παίρνοντας ως αρχική προσέγγιση $x_0 = 1$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & αν \;\; x \neq 0 \\ 0, & αν \;\; x = 0 \end{cases}$

   Η συνάρτηση f είναι παντού συνεχής, και παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και το 0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να δείξετε ότι εάν $x_o = 0{,}0001$, χρειάζονται περισσότερες από εκατό εκατομμύρια επαναλήψεις με τη μέθοδο $Newton - Raphson$, ώστε να προκύψει τιμή μικρότερη από $0{,}00005$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κλίμακα 1

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

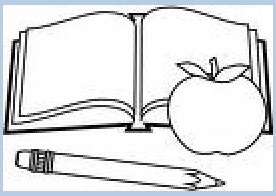
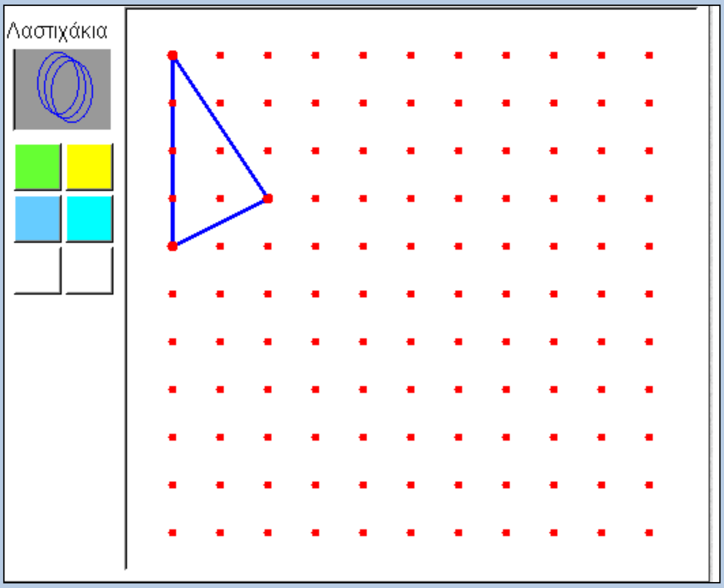
Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ
1	Περιγράφουν και κατασκευάζουν διάφορα είδη γραμμών (ανοιχτές, κλειστές, ευθείες, καμπύλες) και δισδιάστατα σχήματα με διάφορα μέσα και λογισμικά.
2	Αναγνωρίζουν, ονομάζουν, περιγράφουν και ταξινομούν δισδιάστατα σχήματα (τρίγωνο, ορθογώνιο, παραλληλόγραμμο, τετράγωνο, κύκλο, ρόμβο) ανεξάρτητα από το μέγεθος και τον προσανατολισμό τους.
3	Διερευνούν και κατανοούν τις βασικές ιδιότητες των δισδιάστατων σχημάτων (τρίγωνο, τετράγωνο, παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο) και του κύκλου.
4	Ονομάζουν, περιγράφουν ταξινομούν και κατασκευάζουν τρισδιάστατα σχήματα (κύβο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, σφαίρα, κύλινδρο, κώνο) και τα συσχετίζουν με αντικείμενα του περιβάλλοντος.
5	Περιγράφουν και καθορίζουν θέσεις αντικειμένων στο χώρο, χρησιμοποιώντας έννοιες όπως πάνω-κάτω, μέσα-έξω, πίσω-μπρος, δίπλα, μεταξύ, δεξιά-αριστερά.
6	Διακρίνουν τοπολογικές έννοιες (π.χ., ανοιχτό-κλειστό, μέσα-έξω) σε γεωμετρικά σχήματα και στο περιβάλλον.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ
7	Αναγνωρίζουν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα καθώς και σχήματα του περιβάλλοντος, που έχουν έναν άξονα συμμετρίας (κατακόρυφο ή οριζόντιο).
8	Κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα, χρησιμοποιώντας υλικά και λογισμικά.
9	Διερευνούν μετασχηματισμούς (μεταφορά, περιστροφή, ανάκλαση) δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων με τη χρήση υλικών και λογισμικών.
10	Ομαδοποιούν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα και αντικείμενα του περιβάλλοντος.

11	Συνθέτουν και διαχωρίζουν δισδιάστατα σχήματα σε άλλα επιμέρους σχήματα (π.χ. διαχωρίζουν ένα τραπέζιο σε ένα ορθογώνιο και δύο τρίγωνα).

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

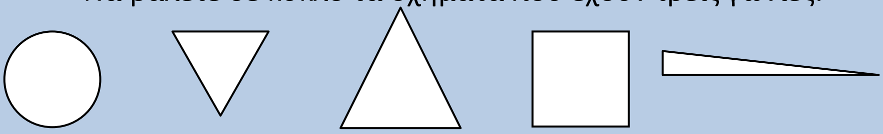
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Κατασκευάζουν δισδιάστατα σχήματα και διάφορα είδη γραμμών σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να χρωματίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα με κόκκινο χρώμα και τις καμπύλες γραμμές με πράσινο χρώμα.» (α)  (β)  (γ)  ▪ «Να κατασκευάσετε όσα περισσότερα και διαφορετικά τρίγωνα μπορείτε, χρησιμοποιώντας το γεωπίνακα» (ο γεωπίνακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη φυσική ή/και στην ηλεκτρονική του μορφή).  (“*http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_277_g_1_t_3.html?open=activities&from=category_g_1_t_3.html*”)	Γ1.1
2	Αναγνωρίζουν, ονομάζουν και ταξινομούν δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα σε	Γ1.2

δραστηριότητες, όπως:

- «Να παρατηρήσετε τα πιο κάτω σήματα τροχαίας και να ονομάσετε τα γεωμετρικά σχήματα που διακρίνετε σε αυτά.»

- «Πόσα τρίγωνα βλέπετε στην πιο κάτω εικόνα;»

- «Να βάλετε σε κύκλο τα σχήματα που έχουν τρεις γωνίες.»



3 Διερευνούν τις βασικές ιδιότητες των δισδιάστατων σχημάτων και του κύκλου σε δραστηριότητες, όπως: Γ1.3

- «Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως το παράδειγμα.»

Παράδειγμα:

Σχήμα	**Αριθμός γωνιών**	**Αριθμός πλευρών**	**Αριθμός κορυφών**
Τετράγωνο	4	4	4

Σχήμα	**Αριθμός γωνιών**	**Αριθμός πλευρών**	**Αριθμός κορυφών**
Παραλληλόγραμμο			
	3	3	3
Ορθογώνιο			
Κύκλος			

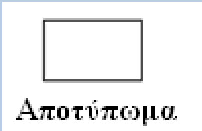
Ρόμβος			

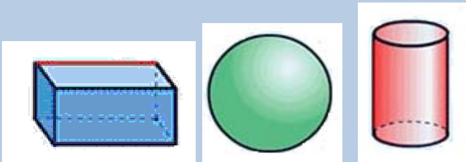
4 Εντοπίζουν, ονομάζουν, ταξινομούν και κατασκευάζουν τρισδιάστατα σχήματα σε δραστηριότητες, όπως: Γ1.4

- «Να παρατηρήσετε τα πιο κάτω αντικείμενα και να αναφέρετε ποιο σχήμα σας θυμίζουν.»

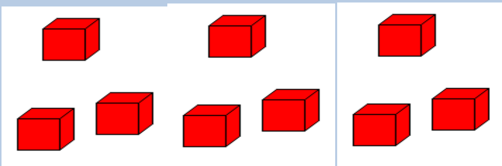
(α)  (β)  (γ) 

- «Να βάλετε σε κύκλο το στερεό που μπορεί να αφήσει το πιο κάτω αποτύπωμα στη βρεγμένη άμμο. »



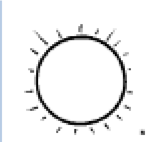


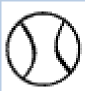
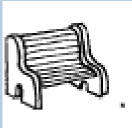
- «Να κατασκευάσετε όσα περισσότερα και διαφορετικά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα μπορείτε, χρησιμοποιώντας μικρούς κύβους.»

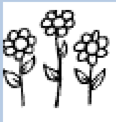


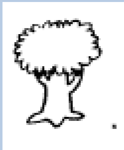
5 Συμπληρώνουν εικόνες με βάση συγκεκριμένες οδηγίες, όπως: Γ1.5

«Να συμπληρώσετε την εικόνα, ακολουθώντας τις οδηγίες.»

(α) Να σχεδιάσετε ένα  πίσω από τον 

(β) Να σχεδιάσετε μια  δίπλα από το 

(γ) Να σχεδιάσετε τρία  μπροστά από το 

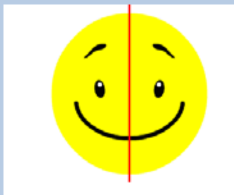
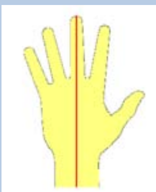
(δ) Να σχεδιάσετε τέσσερα  πάνω στο 

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ — Δ.Ε.

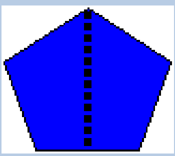
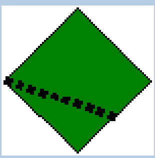
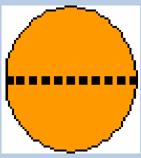
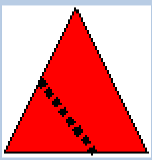
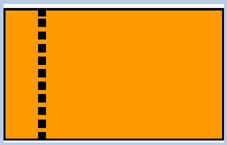
Οι μαθητές:

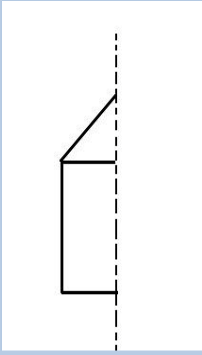
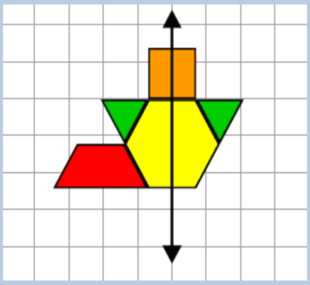
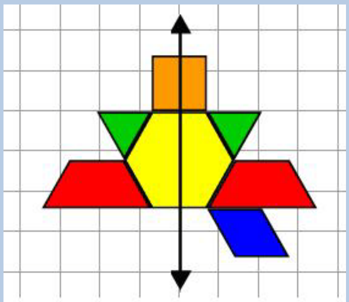
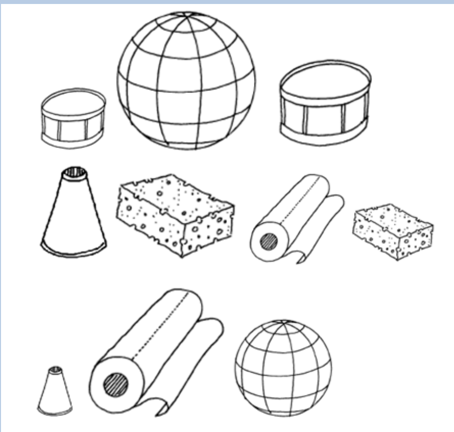
1 Αναγνωρίζουν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα με έναν άξονα συμμετρίας σε δραστηριότητες, όπως: Γ1.7

- «Να βάλετε σε κύκλο τα αντικείμενα που είναι συμμετρικά.»

(α)  (β)  (γ)  (δ)  (ε) 

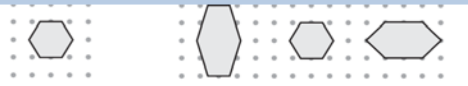
- «Σε ποια από τα πιο κάτω σχήματα, οι διακεκομμένες γραμμές είναι άξονες συμμετρίας;»

2	Κατασκευάζουν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα, τα οποία έχουν έναν άξονα συμμετρίας, όπως: ▪ «Να χρησιμοποιήσετε το καθρεφτάκι σας, για να συμπληρώσετε την εικόνα.»  ▪ «Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω σχέδια χρησιμοποιώντας σχήματα μοτίβων, ώστε να γίνουν συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας.»  (α)  (β) 	Γ1.8
3	Εντοπίζουν όμοια αντικείμενα και σχήματα σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να χρωματίσετε με το ίδιο χρώμα τα αντικείμενα που είναι όμοια.»  ▪ «Να βάλετε σε κύκλο το σχήμα που είναι όμοιο με το πρώτο, όπως το παράδειγμα.»	Γ1.10

Παράδειγμα: 

(α) 

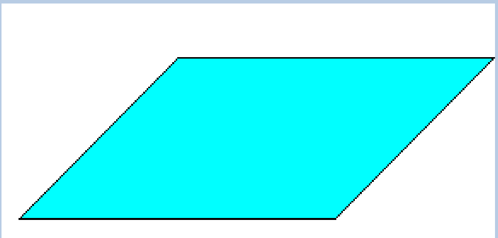
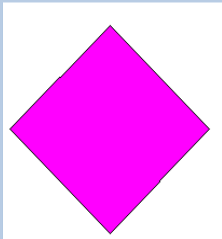
(β) 

4 Συνθέτουν και διαχωρίζουν σχήματα δισδιάστατα σχήματα σε άλλα επιμέρους σχήματα σε δραστηριότητες, όπως: Γ1.11

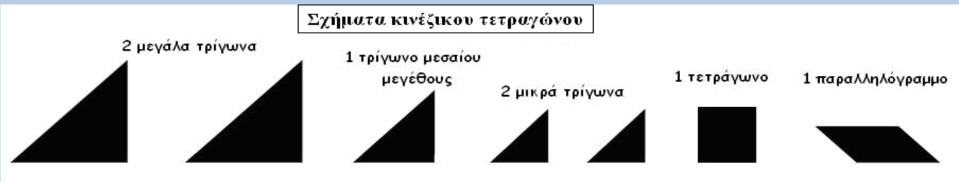
- «Να χρησιμοποιήσετε σχήματα μοτίβων, για να κατασκευάσετε ένα εξάγωνο με διάφορους τρόπους. Κάθε σχήμα μοτίβων μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορά σε κάθε εξάγωνο.» (Τα σχήματα μοτίβων μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη φυσική ή στην ηλεκτρονική μορφή τους)

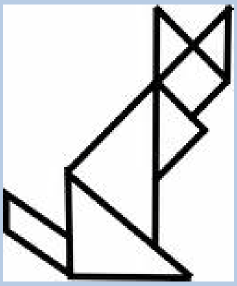
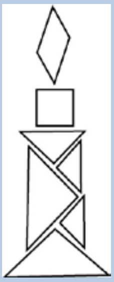
  (“*http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=27*”)

- «Να κόψετε τα πιο κάτω σχήματα σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα. Να δώσετε όσες περισσότερες και διαφορετικές απαντήσεις μπορείτε.»

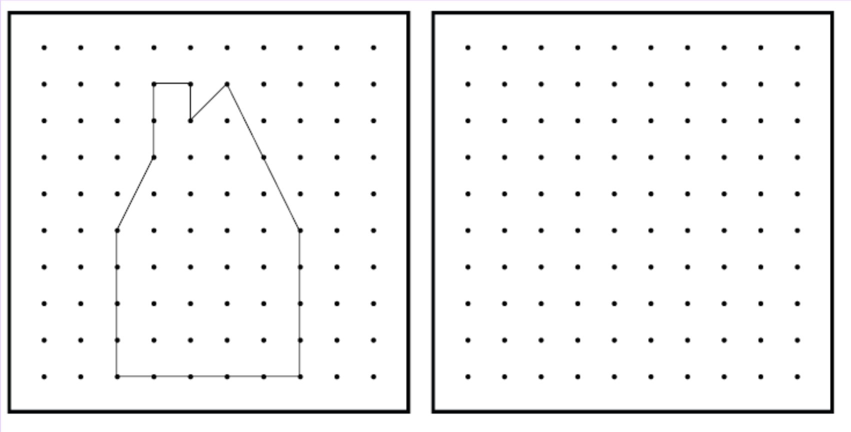
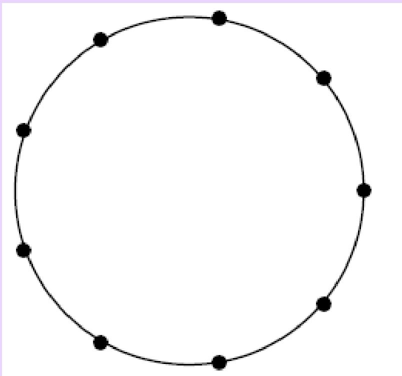
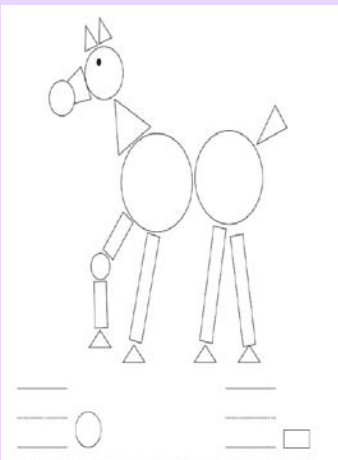
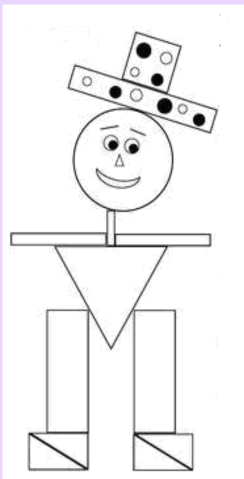
 

- «Να κατασκευάσετε τις πιο κάτω εικόνες, χρησιμοποιώντας τα σχήματα του κινέζικο τετράγωνο που δίνονται. Κάθε κομμάτι του κινέζικου τετραγώνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο μία φορά σε κάθε εικόνα.»



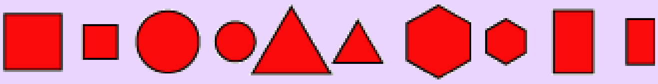
(α)  (β) 

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Να σχεδιάσετε το σχήμα που βλέπετε, χρησιμοποιώντας το χάρακά σας.  ▪ Να κατασκευάσετε διαφορετικά τρίγωνα, ενώνοντας σημεία που υπάρχουν πάνω στον κύκλο. 	Γ1.1
2	▪ Να χρωματίσετε τους κύκλους με γαλάζιο χρώμα, τα ορθογώνια με κόκκινο χρώμα και τα τρίγωνα με κίτρινο χρώμα. (α)  (β) 	Γ1.2

3

- Να βάλετε σε κύκλο τα σχήματα που έχουν τέσσερις γωνίες. Γ1.3



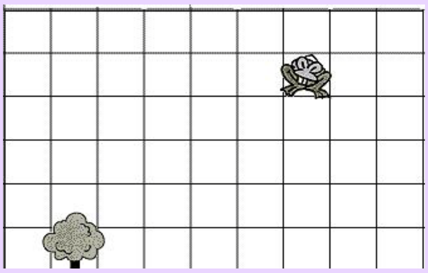
4

- Να αντιστοιχίσετε τα τρισδιάστατα σχήματα (στήλη Α) με τα αντικείμενα της καθημερινής ζωής (στήλη Β). Γ1.4

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Κώνος	Μπάλα
Σφαίρα	Μπαστούνι
Κύβος	Χωνάκι παγωτού
Κύλινδρος	Ζάρι

5

- Να σχεδιάσετε και να περιγράψετε τα βήματα που θα κάνει ο βάτραχος, για να φτάσει στο δέντρο. Ο βάτραχος μπορεί να κινηθεί μόνο οριζόντια και κατακόρυφα. Γ1.5



6

- Να βάλετε σε κύκλο τα γράμματα που έχουν τη μορφή κλειστού σχήματος. Γ1.6

Π Ο Ν Ξ Γ Δ Ε

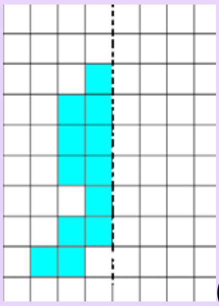
7

- Να βάλετε σε κύκλο τα αντικείμενα τα οποία δεν είναι συμμετρικά. Γ1.7

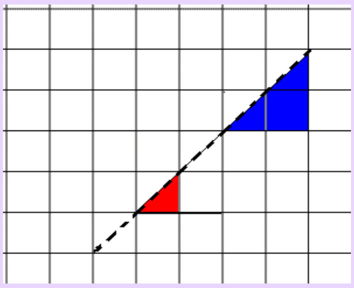
8

- Να σχεδιάσετε και να χρωματίσετε το άλλο μισό. Γ1.8

(α)

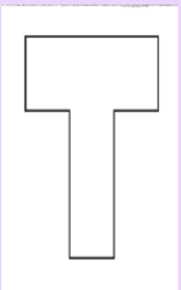


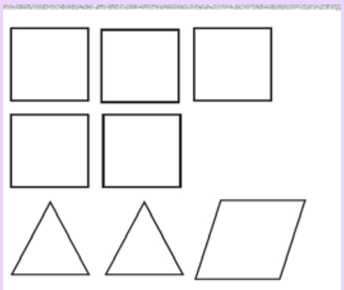
(β)



9

- Να βάλετε σε κύκλο τα κομμάτια που χρειάζεστε για να κατασκευάσετε το σχήμα 1. Γ1.11



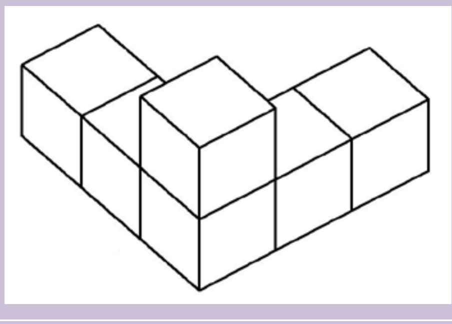


Σχήμα 1

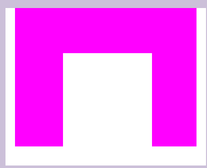
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται, ώστε το πιο κάτω σχήμα να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



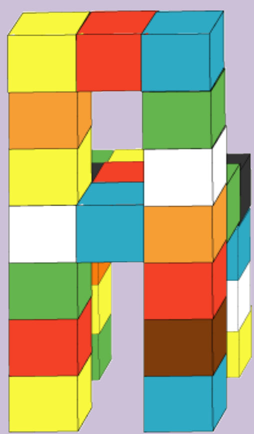
2 Κατασκευάζουν ψηφιδωτά, χρησιμοποιώντας μόνο το γράμμα Π.



3 Χρησιμοποιούν τα σχήματα μοτίβων σε ηλεκτρονική μορφή, για να κατασκευάσουν διάφορα ζώα.

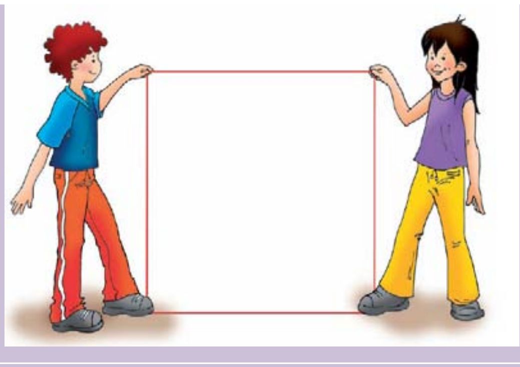
(“*http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=27*”)

4 Υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων που χρειάστηκαν για την κατασκευή του πιο κάτω σχήματος.



Στερεά	**Αριθμός**
Κύβοι	

5 Χρησιμοποιούν λάστιχο ή κορδέλα, για να δημιουργήσουν σε συνεργασία με τους συμμαθητές τους διάφορα δισδιάστατα σχήματα, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα.



6	Κατασκευάζουν σχήματα, χρησιμοποιώντας το κινέζικο τετράγωνο σε ηλεκτρονική μορφή. (“*http://pbskids.org/cyberchase/games/area/tangram.html*”)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κλίμακα 2

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

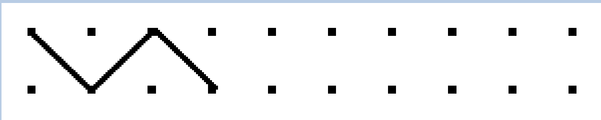
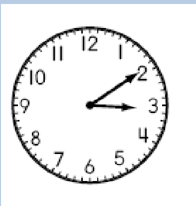
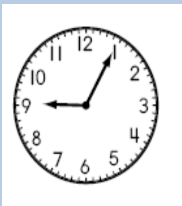
Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ
1	Ονομάζουν και κατασκευάζουν σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, ημιευθείες, ευθείες και διάφορα είδη γραμμών (καμπύλες, ευθείες, τεθλασμένες) με διάφορα μέσα και λογισμικά.
2	Ονομάζουν, περιγράφουν και κατασκευάζουν γωνίες (οξείες, ορθές, αμβλείες) με διάφορα μέσα και λογισμικά.
3	Ονομάζουν, περιγράφουν, συγκρίνουν, αναλύουν, ταξινομούν και κατασκευάζουν δισδιάστατα σχήματα με βάση τις γωνίες και τις πλευρές τους, με διάφορα μέσα και λογισμικά.
4	Διερευνούν, περιγράφουν και ονομάζουν τα βασικά στοιχεία και ιδιότητες των δισδιάστατων σχημάτων και του κύκλου.
5	Αναγνωρίζουν τα διαφορετικά είδη παραλληλογράμμων και επεξηγούν τις μεταξύ τους ομοιότητες και διαφορές.
6	Ονομάζουν, περιγράφουν και ταξινομούν τρισδιάστατα σχήματα (κύβο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πυραμίδα, σφαίρα, κύλινδρο, κώνο), χρησιμοποιώντας μαθηματική ορολογία (έδρες, ακμές, κορυφές) και τα συσχετίζουν με αντικείμενα του περιβάλλοντος.
7	Χρησιμοποιούν διατεταγμένα ζεύγη, για να καθορίσουν και να σχεδιάσουν σημεία και δισδιάστατα τμήματα στο πρώτο τεταρτημόριο πλέγματος συντεταγμένων.
8	Περιγράφουν και καθορίζουν θέσεις στο χώρο, χρησιμοποιώντας έννοιες του χώρου και δίνουν οδηγίες κατεύθυνσης.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ
9	Αναγνωρίζουν άξονες συμμετρίας σε πολύγωνα και κατασκευάζουν σχήματα με περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας.

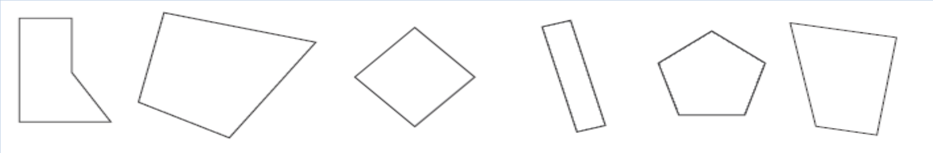
10	Κάνουν μετασχηματισμούς δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων (μεταφορά, περιστροφή, ανάκλαση) με διάφορα μέσα και λογισμικά.
11	Κατανοούν την έννοια της ομοιότητας, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς όπως, μεγέθυνση, σμίκρυνση, μετατόπιση, ανάκλαση, περιστροφή.
12	Περιγράφουν το αποτέλεσμα του διαχωρισμού και της σύνθεσης δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων με διάφορα μέσα και λογισμικά.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

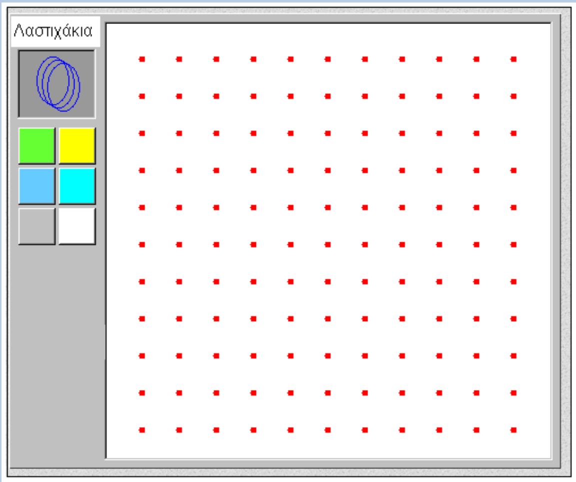
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Κατασκευάζουν σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, ημιευθείες, ευθείες και διάφορα είδη γραμμών σε δραστηριότητες, όπως: «Να συνεχίσετε τις πιο κάτω γραμμές, χρησιμοποιώντας το χάρακά σας.» 	Γ2.1
2	Εντοπίζουν και ονομάζουν διάφορα είδη γωνιών σε δραστηριότητες, όπως: «Να γράψετε κάτω από κάθε ρολόι, το είδος της γωνίας που σχηματίζουν οι δείκτες του.» (α)  (β)  (γ)  ____________ ____________ ____________	Γ2.2

3 Ταξινομούν και κατασκευάζουν δισδιάστατα σχήματα με διάφορα μέσα σε δραστηριότητες, όπως: Γ2.3

- «Να βάλετε σε κύκλο τα σχήματα που έχουν τουλάχιστον μία ορθή γωνία.»

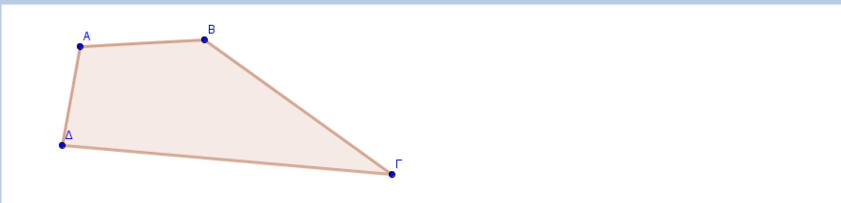


- «Να κατασκευάσετε διαφορετικά τετράπλευρα, χρησιμοποιώντας το γεωπίνακα.» (Ο γεωπίνακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη φυσική ή/και στην ηλεκτρονική του μορφή.)



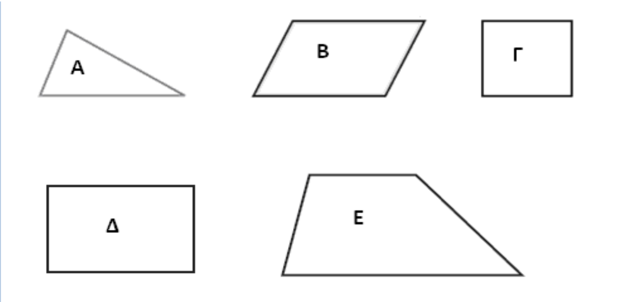
(“*http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_277_g_1_t_3.html?open=activities&from=category_g_1_t_3.html*”)

- «Να κατασκευάσετε διάφορα πολύγωνα, χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας.»



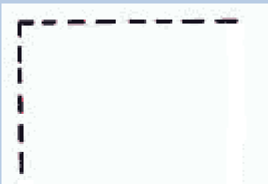
4 Περιγράφουν και ονομάζουν τις βασικές ιδιότητες δισδιάστατων σχημάτων και κύκλου σε δραστηριότητες, όπως: Γ2.4

- «Να συμπληρώσετε τον πίνακα. Το κάθε δισδιάστατο σχήμα μπορεί να έχει περισσότερες από μία ιδιότητες.»



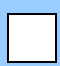
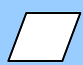
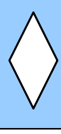
Ιδιότητες	**Δισδιάστατα σχήματα**
Έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες.	
Έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες.	
Έχουν μία γωνία ορθή.	
Έχουν αμβλείες γωνίες.	
Έχουν οξείες γωνίες.	
Έχουν παράλληλες πλευρές.	

- «Να συμπληρώσετε το σχήμα ώστε να έχει τέσσερις πλευρές που να μην είναι παράλληλες.»



5 Αναγνωρίζουν και συγκρίνουν τα διαφορετικά είδη παραλληλογράμμων σε δραστηριότητες, όπως: Γ2.5

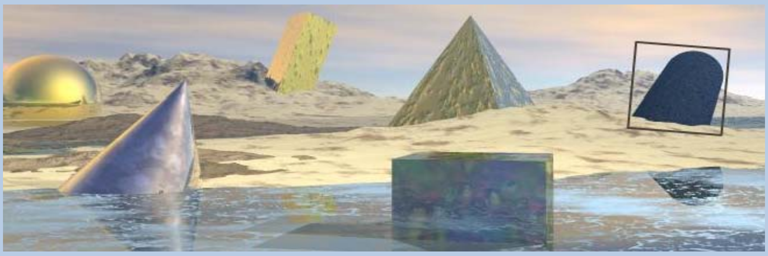
«Να σημειώσετε με √ ότι ισχύει σε καθένα από τα πιο κάτω τετράπλευρα.»

Ιδιότητες	**Τετράπλευρα**			
	Τετράγωνο 	**Ορθογώνιο** 	**Παραλληλόγραμμο** 	**Ρόμβος** 
Όλες οι πλευρές είναι ίσες.				
Όλες οι γωνίες είναι ορθές.				

Απέναντι πλευρές ίσες.				
Διαδοχικές πλευρές ίσες.				
Απέναντι πλευρές παράλληλες				

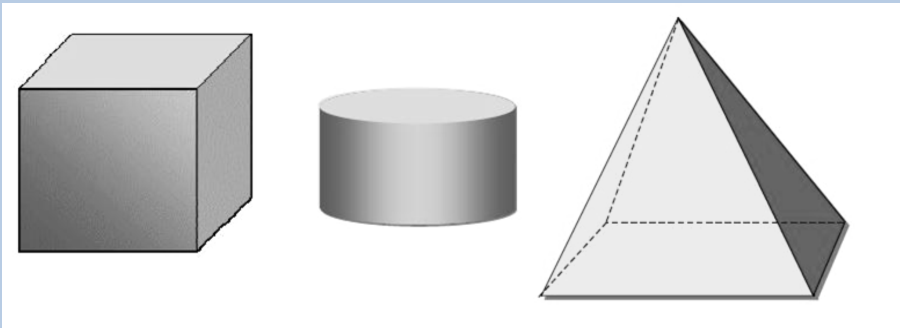
6 Αναγνωρίζουν, ονομάζουν, περιγράφουν και ταξινομούν τρισδιάστατα σχήματα σε δραστηριότητες, όπως: Γ2.6

- «Να ονομάσετε τα τρισδιάστατα σχήματα που φαίνονται στην εικόνα.»



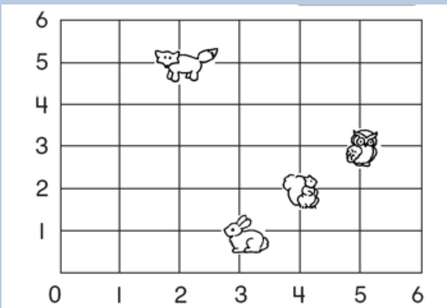
(*“http://www.primaryresources.co.uk/online/longshape3d.html”*)

- «Να βάλετε σε κύκλο το τρισδιάστατο σχήμα που έχει έξι έδρες, οκτώ κορυφές και δώδεκα ακμές.»

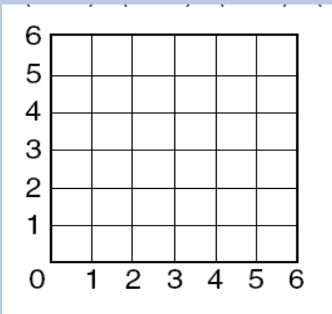


7 Καθορίζουν σημεία, χρησιμοποιώντας διατεταγμένα ζεύγη στο πρώτο τεταρτημόριο πλέγματος συντεταγμένων, σε δραστηριότητες, όπως: Γ2.7

- «Ποια ζώα βρίσκονται στα σημεία (5, 3), (3, 1), (4, 2) και (2, 5);»

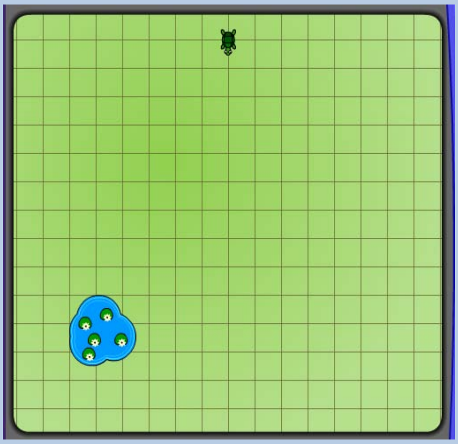


- «Να τοποθετήσετε τα σημεία (1, 1), (3, 1), (3, 5) και (1, 5) στο πιο κάτω πλέγμα συντεταγμένων, να τα ενώσετε και να ονομάσετε το σχήμα που θα προκύψει.»



8 Επιλύουν προβλήματα, όπως: Γ2.8

- «Να ζωγραφίσετε 2 διαφορετικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει η χελώνα, για να φτάσει στη λίμνη. Η χελώνα μπορεί να κινηθεί μόνο οριζόντια και κατακόρυφα.»

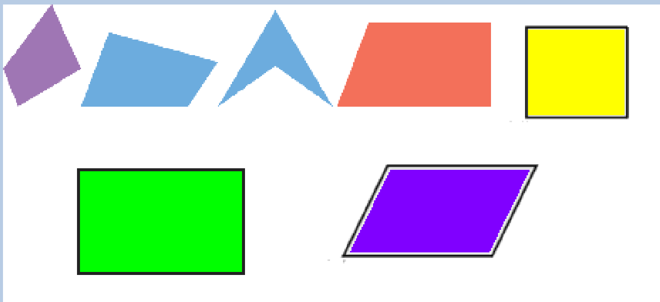


(“*http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=83*”)

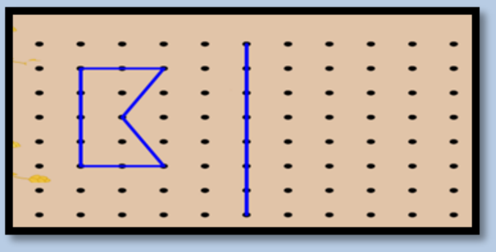
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	

1 Αναγνωρίζουν συμμετρικά πολύγωνα και συμπληρώνουν σχήματα, ώστε να είναι συμμετρικά σε δραστηριότητες, όπως: **Γ2.9**

- «Να βάλετε σε κύκλο τα τετράπλευρα που έχουν περισσότερους από έναν άξονα συμμετρίας.»



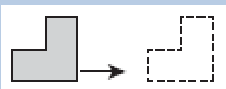
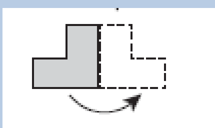
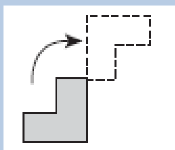
- «Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του πιο κάτω σχήματος, χρησιμοποιώντας το γεωπίνακά σας.» (Ο γεωπίνακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη φυσική ή/και στην ηλεκτρονική μορφή του.)



Αναγνωρίζουν τους μετασχηματισμούς σε δραστηριότητες, όπως:

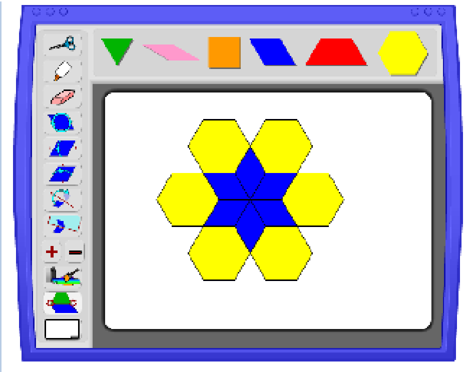
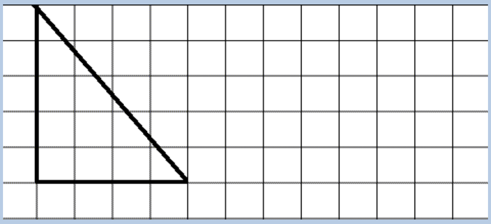
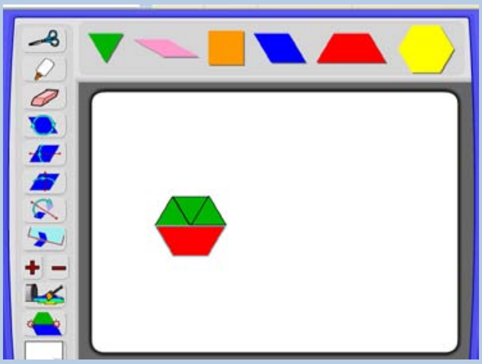
- «Να αντιστοιχίσετε τις εικόνες με τις λέξεις.»

Μεταφορά	Ανάκλαση	Περιστροφή

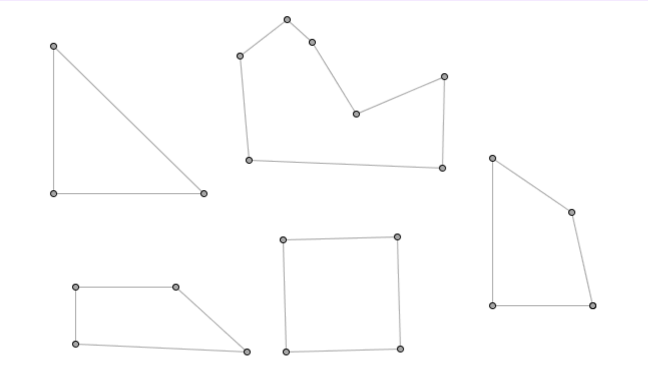
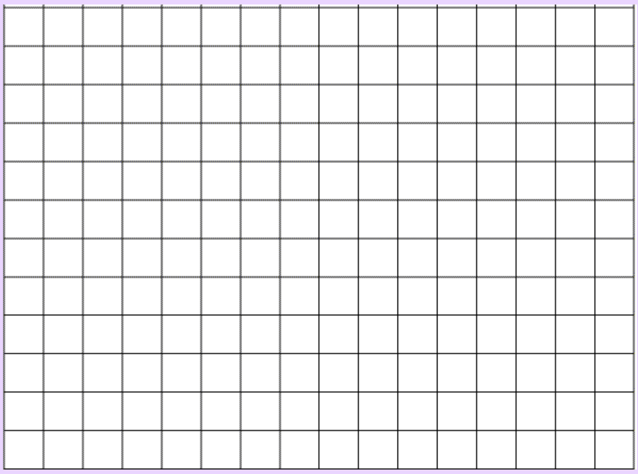
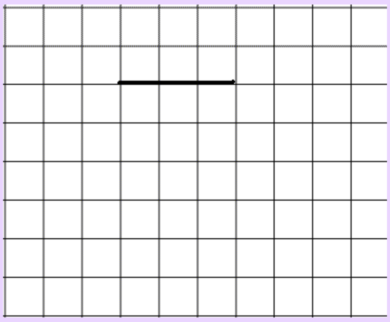
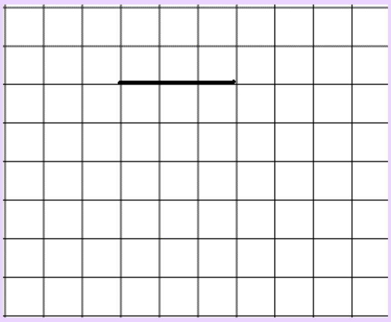
(α)  (β)  (γ) 

2 Μετασχηματίζουν δισδιάστατα σχήματα με λογισμικό, όπως: **Γ2.10**

- «Να επιλέξετε το εξάγωνο και το τρίγωνο και χρησιμοποιώντας τα εικονίδια της μεταφοράς, της ανάκλασης και της περιστροφής του λογισμικού να κατασκευάσετε τα μοτίβο.»

	 (*“http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=35”*)	
3	Κατασκευάζουν όμοια σχήματα με το δοσμένο, όπως: ▪ «Να κατασκευάσετε σε τετραγωνισμένο χαρτί, ένα τρίγωνο που να είναι όμοιο με αυτό που φαίνεται στην εικόνα.» 	Γ2.11
4	Συνθέτουν σχήματα σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να κατασκευάσετε διάφορα πολύγωνα, χρησιμοποιώντας σχήματα μοτίβων. » (*“http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=35”*)	Γ2.12

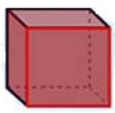
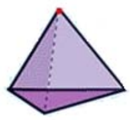
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Να βρείτε τις ορθές γωνίες στα πιο κάτω δισδιάστατα σχήματα, χρησιμοποιώντας το γνώμονά σας και να τις σημειώσετε. 	Γ2.2
2	▪ Να κατασκευάσετε διαφορετικά τετράπλευρα που να έχουν μία ορθή γωνία. 	Γ2.2 Γ2.3
3	▪ Με βάση το ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευάσετε: (α) Ένα τετράγωνο  (β) Ένα παραλληλόγραμμο  ▪ Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα με την ένδειξη Σ(Σωστό) ή Λ (Λάθος) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.	Γ2.5

		Σωστό	**Λάθος**
1	Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει περισσότερες από μία ορθές γωνίες		
2	Ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία αμβλείες γωνίες.		
3	Τα τετράγωνα έχουν τέσσερις ορθές γωνίες.		
4	Τα ορθογώνια έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες.		
5	Τα παραλληλόγραμμα έχουν αμβλείες και οξείες γωνίες.		

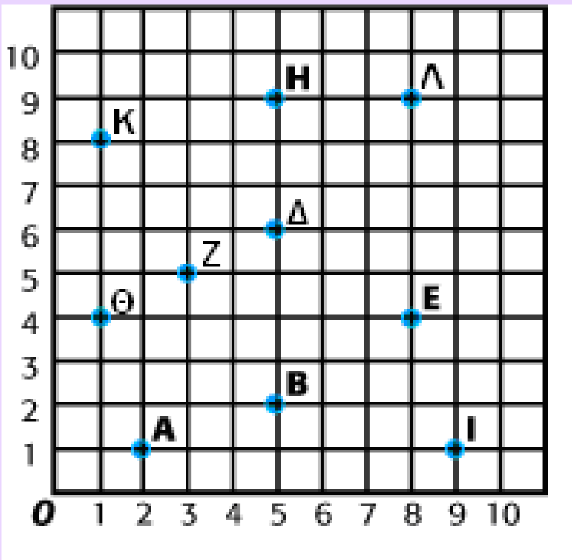
4

- Να σημειώσετε με √ το τρισδιάστατο σχήμα στο οποίο αναφέρεται η περιγραφή της πρώτης στήλης του πίνακα. Γ2.6

Περιγραφή στερεών				
Έχει 12 ακμές και 8 κορυφές.				
Όλες οι έδρες του είναι τρίγωνα.				
Δεν έχει καθόλου ακμές και κορυφές.				

5

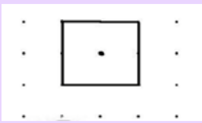
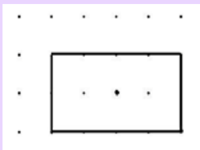
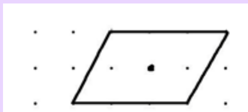
- Να γράψετε τις συντεταγμένες των γραμμάτων που υπάρχουν στο πιο κάτω πλέγμα. Γ2.7



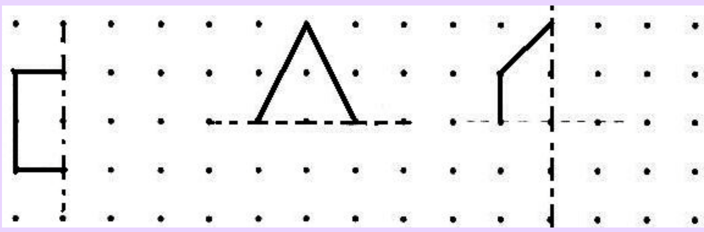
Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	
Ζ	
Η	
Θ	
Ι	
Κ	
Λ	

6

- Να σχεδιάσετε με το χάρακά σας τους άξονες συμμετρίας των τετραπλεύρων. Γ2.9

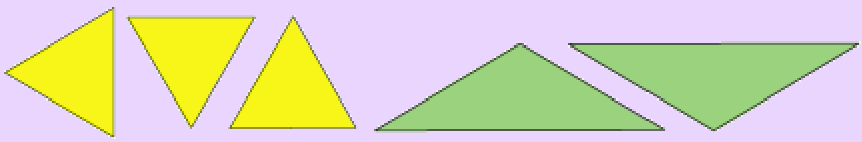
(α)  (β)  (γ) 

- Να συμπληρώσετε τα σχήματα, αν οι διακεκομμένες γραμμές είναι άξονες συμμετρίας.



7

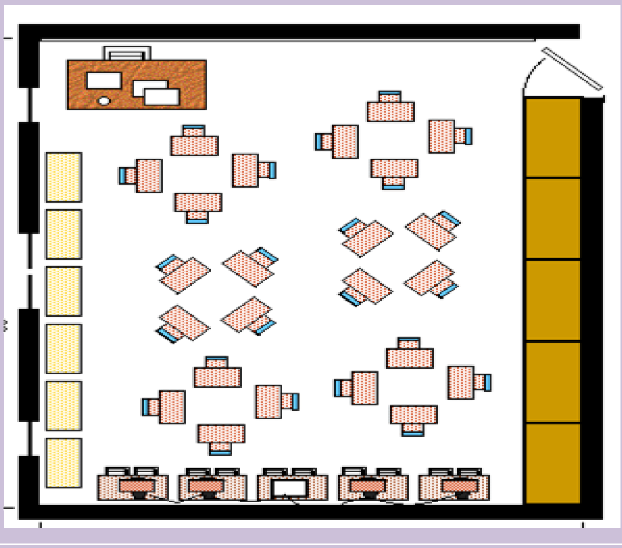
- Να επιλέξετε δύο από τα πιο κάτω σχήματα για να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο. Γ2.12



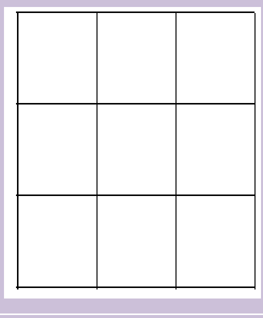
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

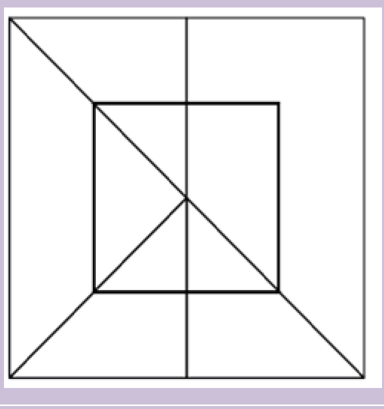
1 Κατασκευάζουν την κάτοψη της τάξης τους, όπως το πιο κάτω παράδειγμα.



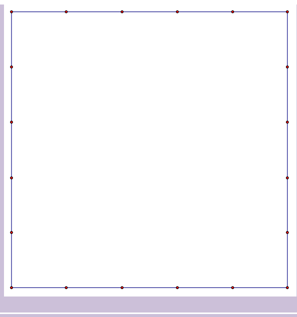
2 Χρωματίζουν ένα ή περισσότερα τετράγωνα, ώστε να προκύψουν συμμετρικά σχέδια.



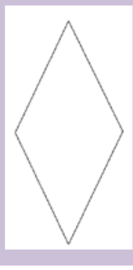
3 Χρωματίζουν με το ίδιο χρώμα όμοια σχήματα.



4 Χωρίζουν το πιο κάτω τετράγωνο σε πέντε σχήματα με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους.



5 Χωρίζουν το ρόμβο σε τέσσερις μικρότερους ρόμβους.



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κλίμακα 3

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ
1	Ονομάζουν, και κατασκευάζουν ευθείες και γωνίες στο επίπεδο.
2	Αναλύουν, ταξινομούν και κατασκευάζουν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους με διάφορα μέσα και λογισμικά.
3	Αναγνωρίζουν, ονομάζουν και περιγράφουν τα βασικά στοιχεία και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
4	Διακρίνουν τα είδη των πολυγώνων και διερευνούν τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων.
5	Διερευνούν ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα με τη χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας.
6	Αναγνωρίζουν, ταξινομούν και περιγράφουν διαφορετικά είδη τριγώνων με κριτήριο το μήκος των πλευρών και το μέτρο των γωνιών τους.
7	Αναγνωρίζουν, ονομάζουν και περιγράφουν τα βασικά στοιχεία και ιδιότητες του κύκλου.
8	Διακρίνουν τις μεταβλητές και μη ιδιότητες ενός σχήματος και συγκρίνουν τάξεις σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους.
9	Ελέγχουν την εγκυρότητα βασικών γεωμετρικών θεωρημάτων ή προτάσεων, χρησιμοποιώντας επαγωγικό συλλογισμό.
10	Σχεδιάζουν απλές γεωμετρικές κατασκευές (π.χ. μέσο ευθύγραμμου τμήματος), χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας.
11	Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν αναπτύγματα κύβου, ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων, πρισμάτων και πυραμίδων, χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και λογισμικά.
12	Διερευνούν την έννοια των συντεταγμένων, χρησιμοποιώντας χάρτες, πλέγματα συντεταγμένων και κατάλληλα λογισμικά.

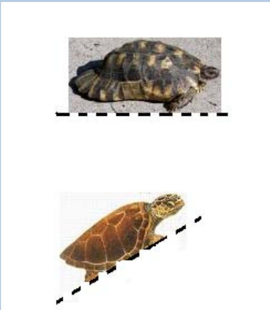
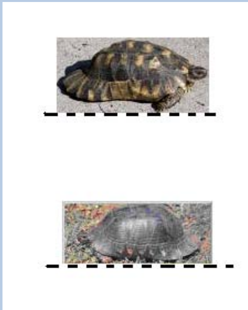
13	Κατασκευάζουν απλά δισδιάστατα σχήματα και περιγράφουν οδηγίες κατεύθυνσης, χρησιμοποιώντας ευθύγραμμες κινήσεις και στροφές (λογισμικά γεωμετρίας της χελώνας).

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ
14	Αναγνωρίζουν σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς άξονα ή ως προς κέντρο και εντοπίζουν τον άξονα συμμετρίας ή το σημείο περιστροφής.
15	Αναλύουν και συνθέτουν μοτίβα γεωμετρικών σχημάτων που καλύπτουν πλήρως μια επιφάνεια.
16	Σχεδιάζουν και περιγράφουν το αποτέλεσμα μετασχηματισμών, όπως μεταφοράς, περιστροφής, ανάκλασης, μεγέθυνσης και σμίκρυνσης.
18	Προβλέπουν και αιτιολογούν τα αποτελέσματα του διαχωρισμού, της σύνθεσης και του μετασχηματισμού δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων.

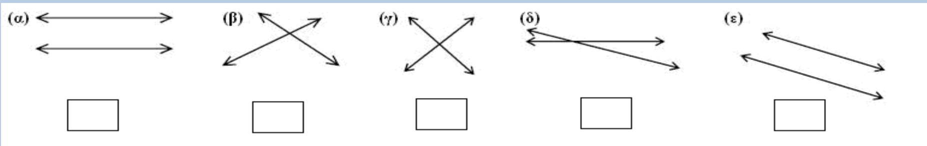
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Ονομάζουν ευθείες στο επίπεδο σε δραστηριότητες, όπως:	Γ3.1

- «Να βάλετε σε κύκλο την εικόνα που δείχνει δύο χελώνες να κινούνται παράλληλα.»

(α)  (β) 

- «Σε ποιες περιπτώσεις οι ευθείες είναι παράλληλες; Να τις σημειώσετε με √.»

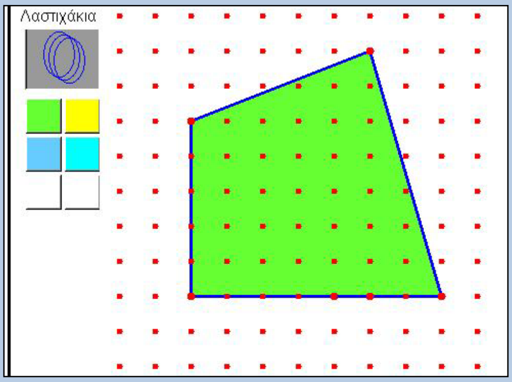


2	Ταξινομούν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα σε δραστηριότητες, όπως:	Γ3.2

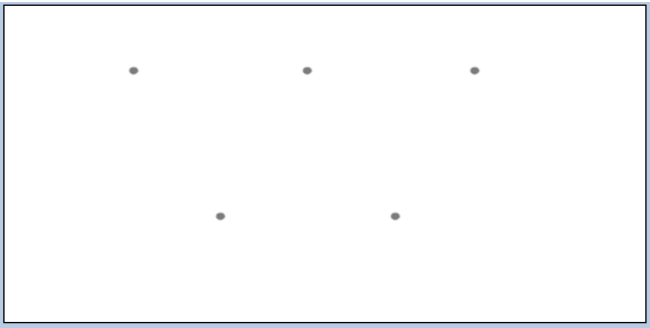
- «Να κατασκευάσετε στο γεωπίνακα ένα τετράπλευρο που να έχει:

  (α) Δύο πλευρές μεταξύ τους κάθετες

  (β) Μία αμβλεία και δύο οξείες γωνίες»



- «Να κατασκευάσετε πέντε κύκλους με κέντρο τα σημεία που εμφανίζονται στην εικόνα και ακτίνα 1,5cm. Ποιο γνωστό έμβλημα σχηματίζεται;»



3 Διερευνούν τις ιδιότητες κανονικών πολυγώνων σε δραστηριότητες, όπως: Γ3.4

- (α) «Να κατασκευάσετε με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας κανονικά πολύγωνα και να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.»

Σχήμα	Αριθμός πλευρών	Μήκος πλευρών (cm)	Μέγεθος γωνιών (^{o})
Α	3	2,1, 2,1, 2,1	60^o, 60^o, 60^o
Β			
Γ			
Δ			
Ε			

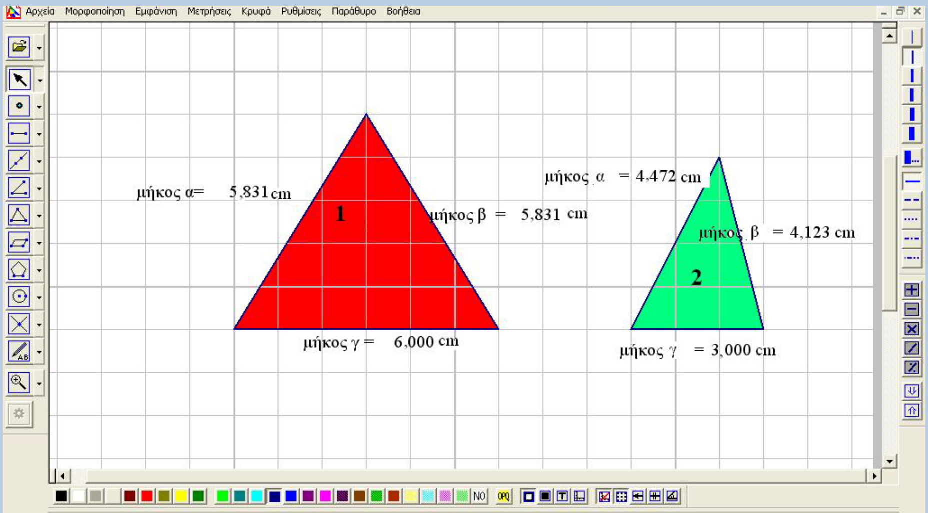
(β) «Να γράψετε το συμπέρασμά σας με βάση τον πίνακα.»

____

____

4 Αναγνωρίζουν ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα, χρησιμοποιώντας λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, όπως: Γ3.5

- «Να κατακευάσετε διάφορα τρίγωνα με λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας και να συμπληρώσετε τον πίνακα.



Τρίγωνο	Μήκος πλευράς α	Μήκος πλευράς β	Μήκος πλευράς γ	α + β	β+γ	α+γ
1						
2						
3						

Με βάση τον πίνακα, να συμπληρώσετε τα κενά με τα σύμβολα: >, <, =.»

α + β ☐ γ

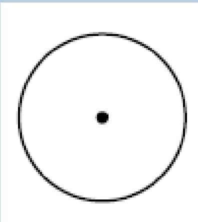
β + γ ☐ α

α + γ ☐ β

5 Ονομάζουν και περιγράφουν τα βασικά στοιχεία και τις ιδιότητες του κύκλου σε δραστηριότητες, όπως: Γ3.7

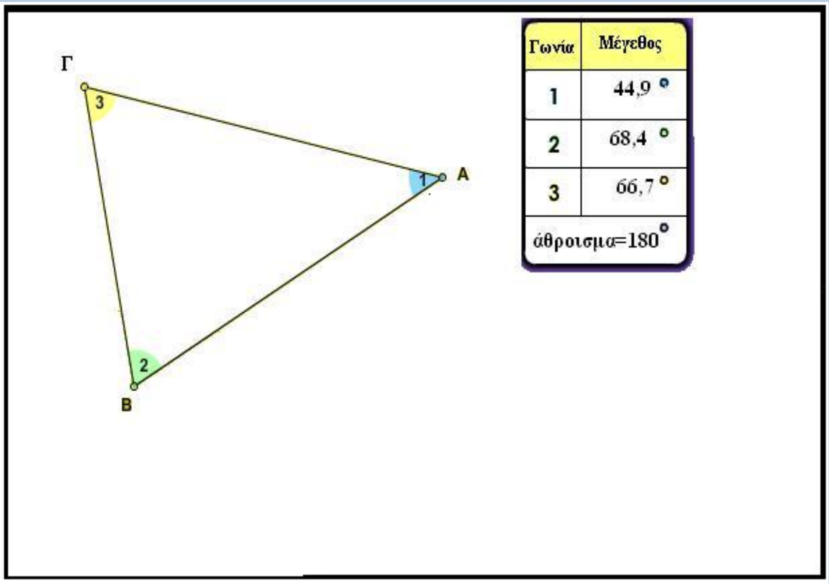
- «Η εικόνα παρουσιάζει το ‘Μάτι του Λονδίνου’, το οποίο έχει σχήμα κύκλου. Να σημειώσετε στην εικόνα το κέντρο, την ακτίνα, τη διάμετρο και την περιφέρεια.»

- «Να κατασκευάσετε στον πιο κάτω κύκλο τρεις χορδές που να σχηματίζουν ένα τρίγωνο.»



6 Ελέγχουν την εγκυρότητα βασικών γεωμετρικών θεωρημάτων ή προτάσεων, χρησιμοποιώντας επαγωγικό συλλογισμό σε δραστηριότητες, όπως: Γ3.9

«Να συμπληρώσετε τον πίνακα, χρησιμοποιώντας διαφορετικά τρίγωνα.»



(*“http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=9”*)

Τρίγωνα	**Γωνία 1**	**Γωνία 2**	**Γωνία 3**	**(Γωνία1+Γωνία2+Γωνία3)**
(I)				
(II)				
(III)				

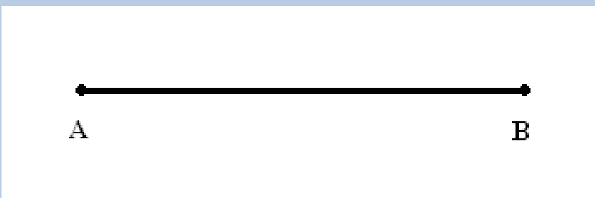
Να παρατηρήσετε τον πίνακα και να γράψετε ένα συμπέρασμα.

____

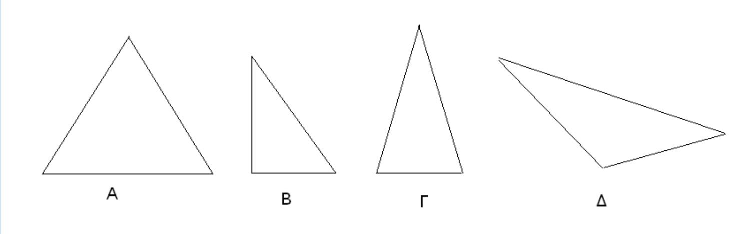
____

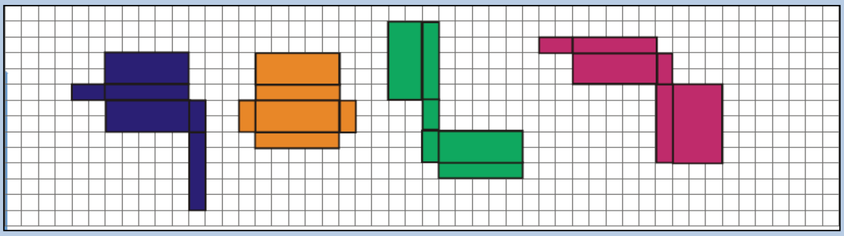
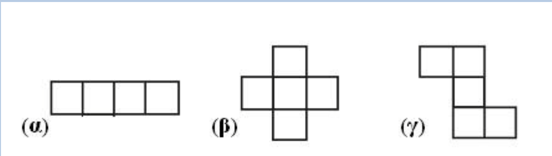
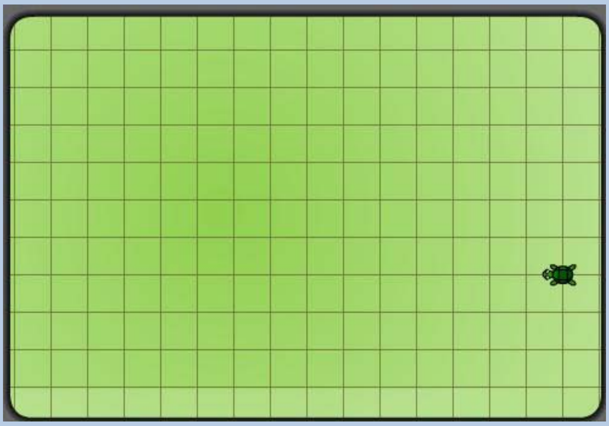
7 Δημιουργούν γεωμετρικές κατασκευές, χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, όπως: Γ3.10

- «Να κατασκευάσετε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος, χρησιμοποιώντας το διαβήτη σας.»



- «Να χαράξετε τα ύψη στα πιο κάτω τρίγωνα, χρησιμοποιώντας το χάρακα και το γνώμονά σας.»



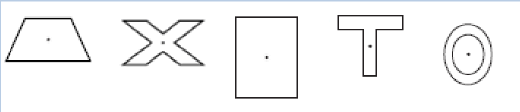
8	Αναγνωρίζουν αναπτύγματα τρισδιάστατων σχημάτων σε δραστηριότητες, όπως: «Να βάλετε σε κύκλο τα αναπτύγματα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.» 	Γ3.11
9	Κατασκευάζουν αναπτύγματα τρισδιάστατων σχημάτων με διάφορα μέσα και λογισμικά, όπως: «Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω αναπτύγματα, ώστε όταν διπλωθούν να σχηματιστούν κύβοι.»  	Γ3.11
10	Σημειώνουν τις συντεταγμένες σημείων σε δραστηριότητες, όπως: «Να τοποθετήσετε τα σημεία Α(5, 5), Β(5,10), Γ(10, 15), Δ(15,10) και Ε(15, 5) σε πλέγμα συντεταγμένων. Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔΕ;»	Γ3.12
11	Κατασκευάζουν απλά δισδιάστατα σχήματα, με λογισμικά γεωμετρίας της χελώνας, όπως: «Να δώσετε οδηγίες στη χελώνα, ώστε η πορεία που θα ακολουθήσει να σχηματίζει ένα ορθογώνιο.»  (*“http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=83”*)	Γ3.13

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Αναγνωρίζουν σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς άξονα ή ως προς κέντρο σε δραστηριότητες, όπως: — Γ3.14

«Να βάλετε σε κύκλο τα σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς κέντρο.»



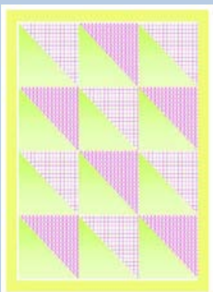
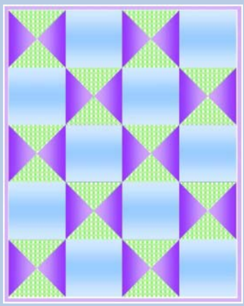
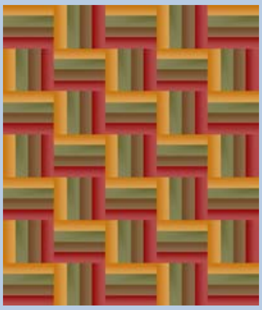
2 Σχεδιάζουν τον άξονα ή το σημείο περιστροφής σε συμμετρικά σχήματα σε δραστηριότητες, όπως: — Γ3.14

«Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας.»

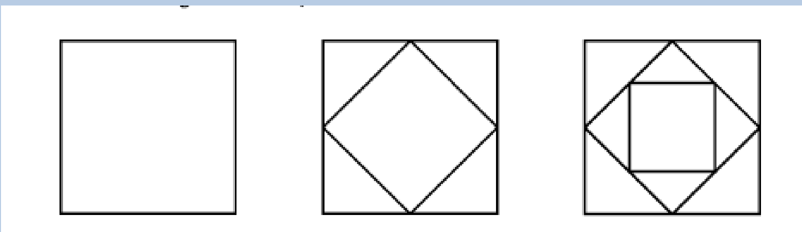
	
Γάτα	Πεταλούδα

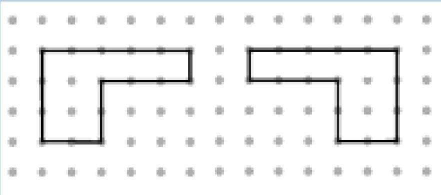
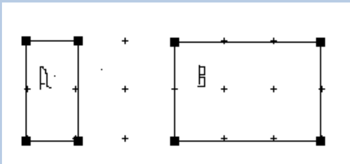
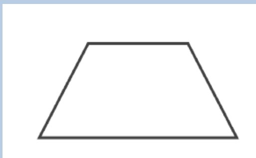
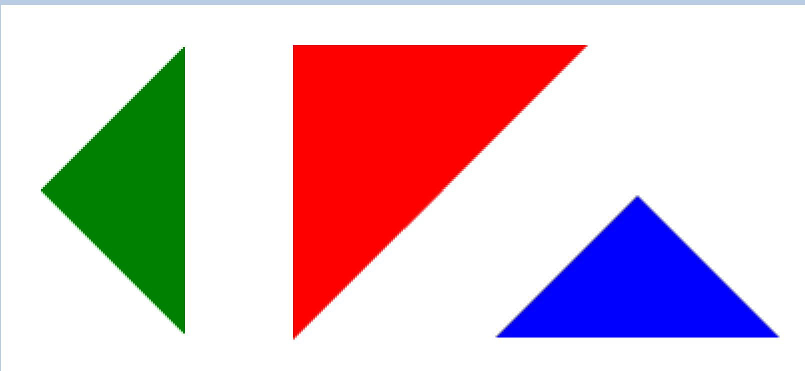
3 Εντοπίζουν και διερευνούν μοτίβα γεωμετρικών σχημάτων που καλύπτουν πλήρως μία επιφάνεια σε δραστηριότητες, όπως: — Γ3.15

- «Να εντοπίσετε μοτίβα γεωμετρικών σχημάτων στις πιο κάτω εικόνες.»

(α)  (β)  (γ) 

- «Να συνεχίσετε το πιο κάτω μοτίβο.»



4	Διερευνούν και περιγράφουν το αποτέλεσμα μετασχηματισμών σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να περιγράψετε τον τρόπο με το οποίο πρέπει να μετακινηθεί το πρώτο σχήμα για να καλύψει το δεύτερο.»  ▪ «Πόσες φορές έχει μεγαλώσει το σχήμα A, για να γίνει όπως το σχήμα B;» 	Γ3.16
5	Αναλύουν δισδιάστατα σχήματα σε επιμέρους σχήματα με διάφορα μέσα σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να χωρίσετε το τραπέζιο σε τέσσερα μικρότερα τραπέζια με το ίδιο μέγεθος.» 	Γ3.18
6	Κατασκευάζουν δισδιάστατα σχήματα σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο χρησιμοποιώντας τα τρία τρίγωνα που βλέπετε πιο κάτω.» 	Γ3.18

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι μαθητές: **Δ.Ε.**

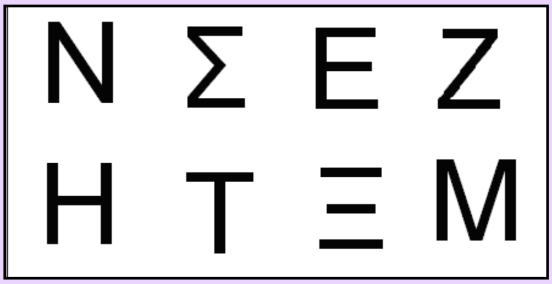
1

- Να γράψετε ποια από τα πιο κάτω γράμματα: Γ3.1

(α) Έχουν ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα μεταξύ τους: ___________

(β) Έχουν ευθύγραμμα τμήματα κάθετα μεταξύ τους:_______________

(γ) Έχουν παράλληλα και κάθετα ευθύγραμμα τμήματα: ____________



2

- Να κατασκευάσετε ένα χάρτη με βάση τις πληροφορίες: Γ3.1

- Οι οδοί «Κυπαρίσσι», «Πεύκου» και «Πλάτανος» είναι παράλληλες μεταξύ τους.

- Η λεωφόρος «Λεύκα» είναι κάθετη με την οδό «Πεύκου» και καταλήγει στην οδό «Κυπαρίσσι».

3

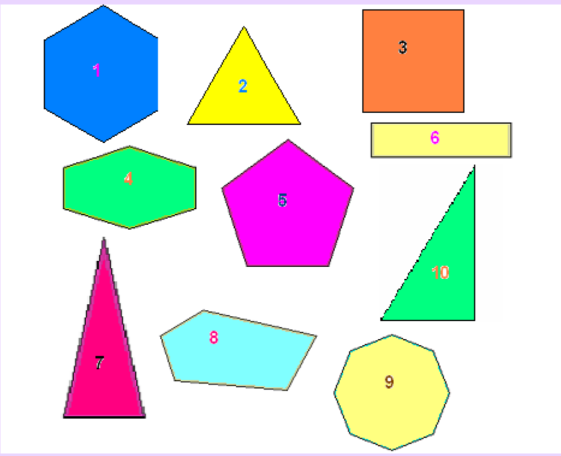
- Να συμπληρώστε τον πιο κάτω πίνακα με την ένδειξη Σ(Σωστό) ή Λ (Λάθος). Γ3.3 Γ3.5 Γ3.6 Γ3.7 Γ3.8

		Σωστό	**Λάθος**
1	Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια.		
2	Όλα τα ορθογώνια είναι τετράγωνα.		
3	Όλα τα παραλληλόγραμμα είναι ορθογώνια.		
4	Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα.		
5	Ορισμένα παραλληλόγραμμα είναι τετράγωνα.		
6	Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει τρεις πλευρές με μήκος 6 cm, 2 cm και 3 cm αντίστοιχα.		
7	Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει τρεις πλευρές με μήκος 4cm, 5cm και 2cm αντίστοιχα.		
8	Ένα τρίγωνο μπορεί να είναι και αμβλυγώνιο και ισόπλευρο.		
9	Ένα ισόπλευρο τρίγωνο μπορεί να είναι και οξυγώνιο.		

10	Ένα σκαληνό τρίγωνο μπορεί να είναι και αμβλυγώνιο.		
11	Η μεγαλύτερη χορδή που μπορεί να κατασκευαστεί σε κύκλο είναι η διάμετρος.		
12	Η ακτίνα ενός κύκλου είναι πάντα μεγαλύτερη από τη διάμετρό της.		

4

- Να βάλετε σε κύκλο τα κανονικά πολύγωνα. Γ3.4



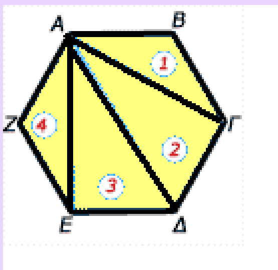
5

- Να αναγνωρίσετε και να γράψετε το είδος του τριγώνου που περιγράφεται στην πρόταση της πρώτης στήλης του πιο κάτω πίνακα. Γ3.6

	Είδος τριγώνου
Το τρίγωνο έχει μία γωνία 90^{o} και δύο πλευρές με μήκος 5cm.	
Το τρίγωνο έχει μία γωνία 120^{o} και δύο πλευρές με μήκος 8cm και 5cm αντίστοιχα. Το άθροισμα του μήκους των πλευρών του είναι ίσο με 21cm.	

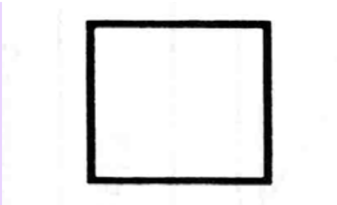
6

- Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών του πιο κάτω πολυγώνου, χρησιμοποιώντας τα τέσσερα τρίγωνα που φαίνονται. Γ3.9



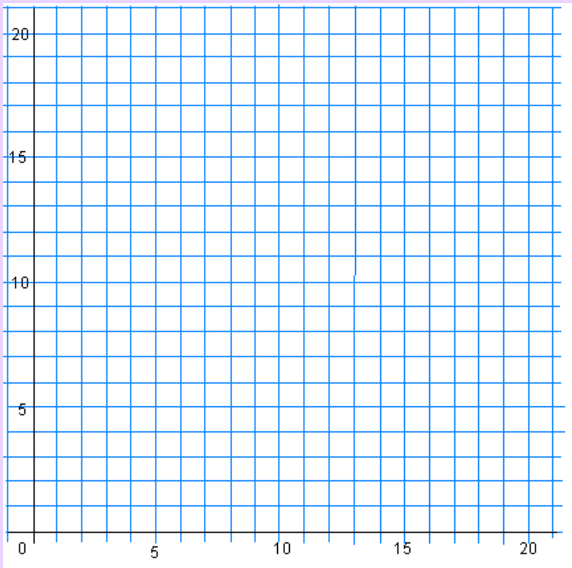
7

- Να κατασκευάσετε το μέσο των πλευρών του πιο κάτω τετραγώνου. Γ3.10

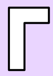


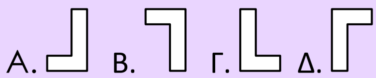
8

- Να τοποθετήσετε σημεία στο πλέγμα συντεταγμένων, τα οποία, όταν ενωθούν, σχηματίζουν κανονικά πολύγωνα. Γ3.12



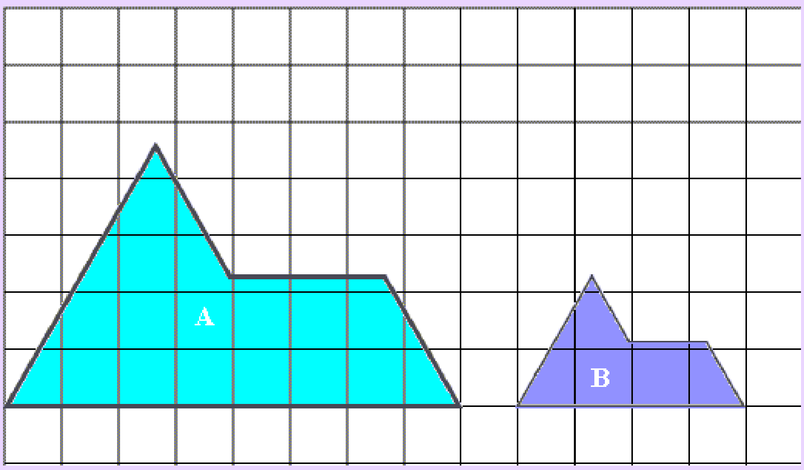
9

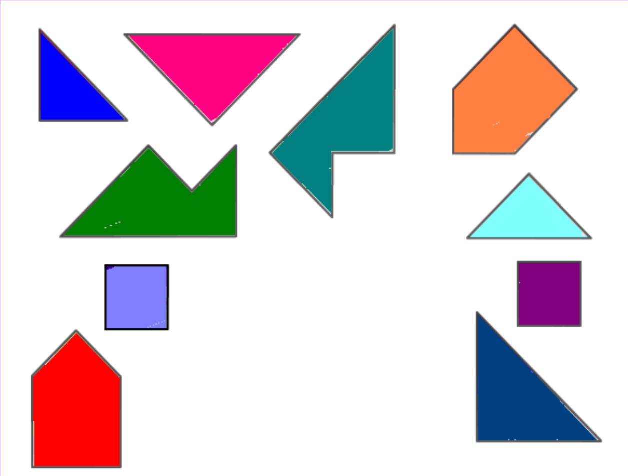
- Ποιο από τα πιο κάτω σχήματα θα προκύψει, όταν το σχήμα  περιστραφεί 180°; Γ3.16



10

- Πόσες φορές έχει σμικρυνθεί το σχήμα Α ώστε να πάρει τη μορφή του σχήματος Β; Γ3.17

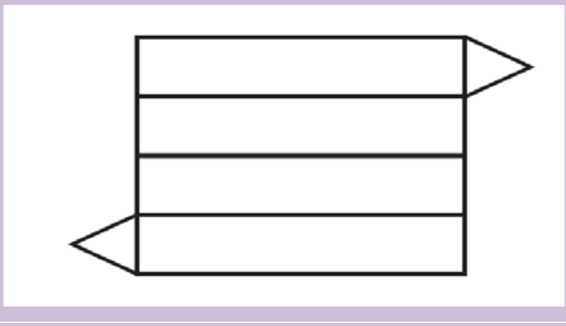


11	▪ Να κατασκευάσετε τετράγωνα, χρησιμοποιώντας πέντε από τα πιο κάτω σχήματα. 	Γ3.18

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Ονομάζουν το τρισδιάστατο σχήμα που έχει το ανάπτυγμα που φαίνεται στην εικόνα:

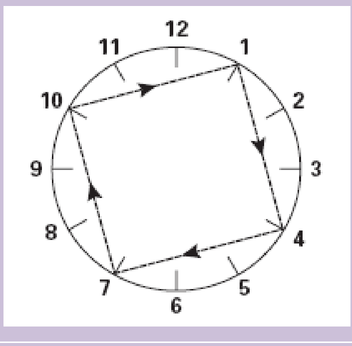


2 Υπολογίζουν το μέγιστο αριθμό διαγωνίων σε ένα οκτάγωνο, χωρίς να κατασκευάσουν το σχήμα.

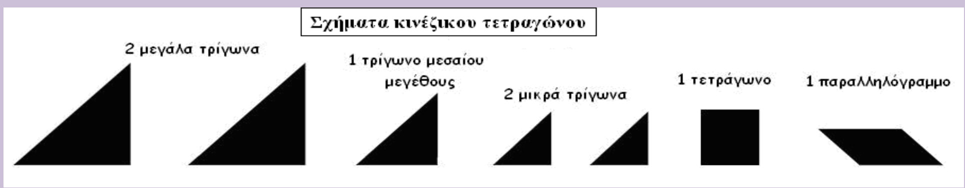
3 Επιλύουν προβλήματα, όπως:

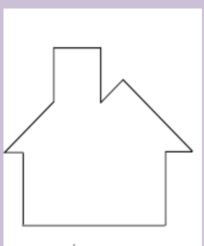
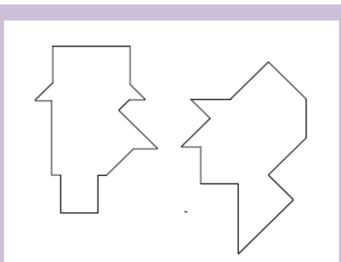
«Ο Δημήτρης έχει έναν κήπο σε σχήμα ορθογωνίου. Θέλει να φυτέψει ένα δέντρο ακριβώς στο κέντρο του κήπου. Πώς μπορεί να βρει το κέντρο του κήπου χωρίς να μετρήσει;»

4 Σχεδιάζουν κανονικά πολύγωνα, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα, ενώνοντας με ευθείες γραμμές αριθμούς του ρολογιού.



5 Καλύπτουν τις εικόνες, χρησιμοποιώντας τα σχήματα του κινέζικου τετραγώνου.



(α)  (β) 

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κλίμακα 4

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

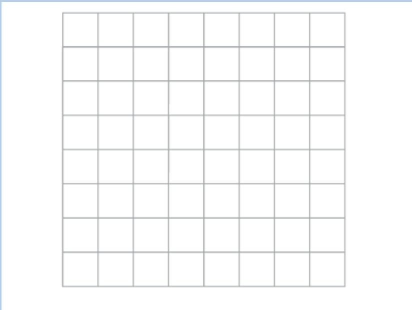
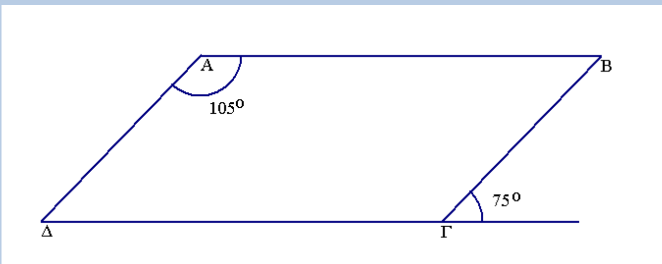
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ	
1	Αναγνωρίζουν, περιγράφουν και κατασκευάζουν[1] δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα, γωνίες, παράλληλες και κάθετες ευθείες.
2	Κατασκευάζουν το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο τριγώνων και παρατηρούν τα χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου (κέντρο βάρους, περίκεντρο, ορθόκεντρο).
3	Κατασκευάζουν το μέσο ευθύγραμμου τμήματος, την απόσταση μεταξύ παραλλήλων και την απόσταση σημείου και ευθείας.
4	Αναγνωρίζουν και ονομάζουν είδη γωνιών στο επίπεδο και στο χώρο (π.χ. συμπληρωματικές και παραπληρωματικές, κατακορυφήν γωνίες που σχηματίζονται, όταν μια ευθεία τέμνει δύο παράλληλες ευθείες).
5	Αναγνωρίζουν, ονομάζουν και περιγράφουν τα βασικά στοιχεία και τις ιδιότητες των τριγώνων, των τραπεζίων, των παραλληλογράμμων, των πολυγώνων και του κύκλου.
6	Διερευνούν βασικά θεωρήματα τετραπλεύρων (π.χ. το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της).
7	Επεξηγούν τις απαραίτητες συνθήκες για την ισότητα δύο σχημάτων και αναγνωρίζουν ίσα τρίγωνα.
8	Διατυπώνουν υποθέσεις για σχέσεις ισότητας και ομοιότητας μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και ελέγχουν τις υποθέσεις τους, χρησιμοποιώντας επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό.
9	Διερευνούν το πυθαγόρειο θεώρημα (ιστορικές αποδείξεις).
10	Αναπαριστούν τρισδιάστατα σχήματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλα μοντέλα, δισδιάστατες αναπαραστάσεις (με έμφαση στην πλάγια και ορθογώνια προβολή) και αναπτύγματα, ερμηνεύουν δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων σχημάτων και μεταφράζουν μια μορφή προβολής σε μια άλλη (π.χ. ορθογώνια σε πλάγια προβολή).

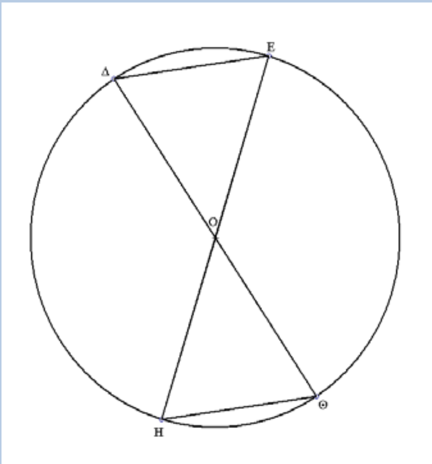
[1] Οι κατασκευές, όταν δεν ορίζεται ο τρόπος κατασκευής τους, μπορούν να γίνουν με λογισμικά ή άλλα μέσα.

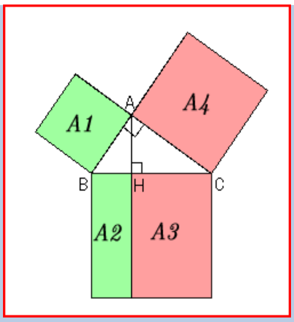
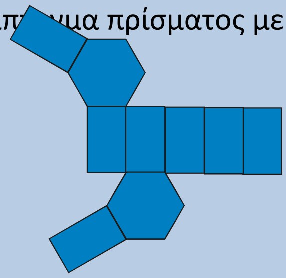
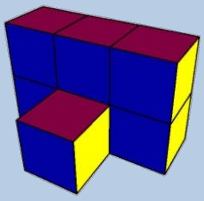
11	Αναγνωρίζουν στοιχεία των τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων (π.χ. διαγώνιοι πρισμάτων) και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ στερεών.
12	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων στην επίλυση και μοντελοποίηση προβλημάτων.
13	Περιγράφουν πώς σχετίζονται δύο ή περισσότερα αντικείμενα στο χώρο και αντιλαμβάνονται σχέσεις στο χώρο (π.χ. ασύμβατες ευθείες, τρόποι τομής τριών επιπέδων).
14	Επεξηγούν τις βασικές ιδιότητες του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων και υπολογίζουν την απόσταση μεταξύ δύο σημείων ή σημείου και ευθείας σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
15	Κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα και περιγράφουν οδηγίες κατεύθυνσης, χρησιμοποιώντας ευθύγραμμες κινήσεις και στροφές με λογισμικά γεωμετρίας της χελώνας.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	
16	Κατασκευάζουν πολύγωνα και σχέδια με πολλούς άξονες συμμετρίας ή σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς ένα σημείο.
17	Περιγράφουν και εκτελούν μετασχηματισμούς (περιστροφή υπό συγκεκριμένη γωνία, μεταφορά, ανάκλαση ως προς ένα ή περισσότερους άξονες) δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων, χρησιμοποιώντας τους όρους μετατόπιση, ανάκλαση και περιστροφή.
18	Μεγεθύνουν και σμικρύνουν δισδιάστατα και τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα και εικόνες με βάση δεδομένους λόγους και διερευνούν τις ιδιότητές τους.
19	Διαχωρίζουν και συνθέτουν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα.
20	Κατασκευάζουν και περιγράφουν στερεά, περιστρέφοντας πλήρως δισδιάστατα σχήματα γύρω από έναν άξονα.

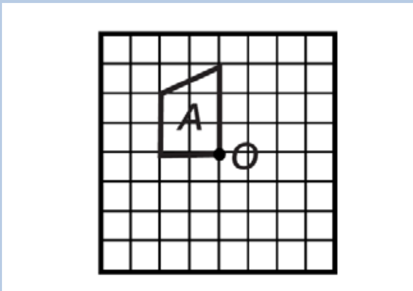
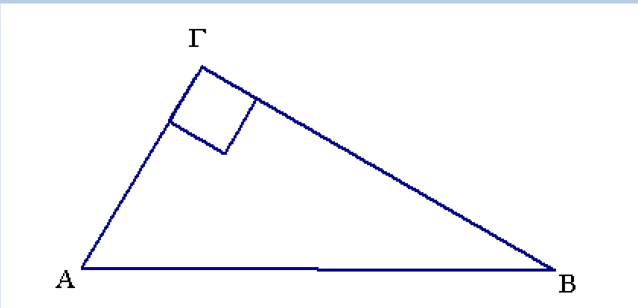
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

<table>
<tr><th></th><th>ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ</th><th>Δ.Ε.</th></tr>
<tr><td></td><td>Οι μαθητές:</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα, όπως:
▪ «Να σχεδιάσετε στο πιο κάτω πλέγμα ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση 4cm και ύψος 5cm.»

▪ «Να εξετάσετε κατά πόσον μπορείτε να κατασκευάσετε τρίγωνο με πλευρές ΑΒ=5cm, ΒΓ=8cm και ΑΓ=2cm.»
▪ «Να κατασκευάσετε ένα τριγωνικό πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 4cm και ύψος 8cm, χρησιμοποιώντας χαρτόνι.</td><td>Γ4.1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Κατασκευάζουν τα ύψη του τριγώνου και διερευνούν τη θέση του ορθόκεντρου, όπως:
▪ «Να βρείτε σε ποιες περιπτώσεις το ορθόκεντρο ενός τριγώνου βρίσκεται εκτός του τριγώνου.»</td><td>Γ4.2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Κατασκευάζουν τη διχοτόμο μιας γωνίας και διερευνούν ιδιότητες της, όπως:
▪ «Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο μιας γωνίας. Να εξετάσετε κατά πόσο κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της.»</td><td>Γ4.3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Αναγνωρίζουν είδη γωνιών στο επίπεδο, όπως:
▪ «Να ονομάσετε τις παραπληρωματικές γωνίες.»

</td><td>Γ4.4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Διερευνούν ιδιότητες δισδιάστατων σχημάτων, όπως:</td><td>Γ4.5</td></tr>
</table>

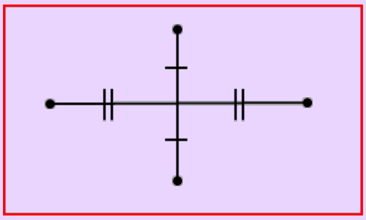
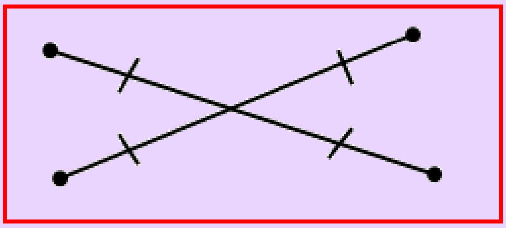
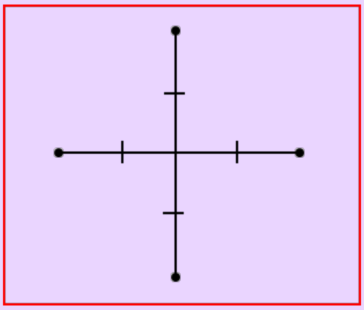
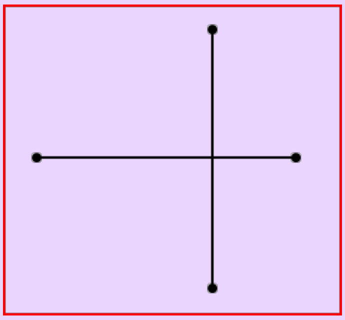
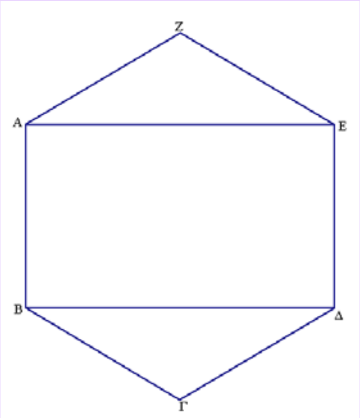
	▪ «Να εξετάσετε τη σχέση μεταξύ της απόστασης ενός τυχαίου σημείου από το κέντρο ενός κύκλου και της ακτίνας του κύκλου, για να καθορίσετε τη θέση του σημείου σε σχέση με τον κύκλο.» ▪ «Να βρείτε τον τύπο υπολογισμού του αθροίσματος των γωνιών οποιουδήποτε πολυγώνου.» ▪ «Να επεξηγήσετε γιατί κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.»	
6	Διερευνούν βασικά θεωρήματα τετραπλεύρων, όπως: ▪ «Να βρείτε τι είδους τετράπλευρο σχηματίζεται, αν ενώσετε τα μέσα των διαδοχικών πλευρών ενός τετραπλεύρου.»	Γ4.6
7	Αναγνωρίζουν ίσα τρίγωνα, όπως: ▪ «Να εξετάσετε τη σχέση μεταξύ των τεσσάρων τριγώνων που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του ρόμβου.»	Γ4.7
8	Διατυπώνουν υποθέσεις για σχέσεις μεταξύ σχημάτων και ελέγχουν τις υποθέσεις τους, όπως: ▪ «Ποια είναι η σχέση μεταξύ των τριγώνων ΔΕΟ και ΗΟΘ;»  ▪ «Να βρείτε τις πιθανές θέσεις δύο κύκλων στο επίπεδο και να εξετάσετε κατά πόσο στην περίπτωση των τεμνόμενων κύκλων η διάκεντρός τους είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.»	Γ4.8
9	Διερευνούν γεωμετρικές αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος, όπως: ▪ «Να εκτελέσετε κατάλληλους διαχωρισμούς και μετασχηματισμούς, για να δείξετε ότι τα εμβαδά Α1=Α2 και Α3=Α4.»	Γ4.9 Γ4.17

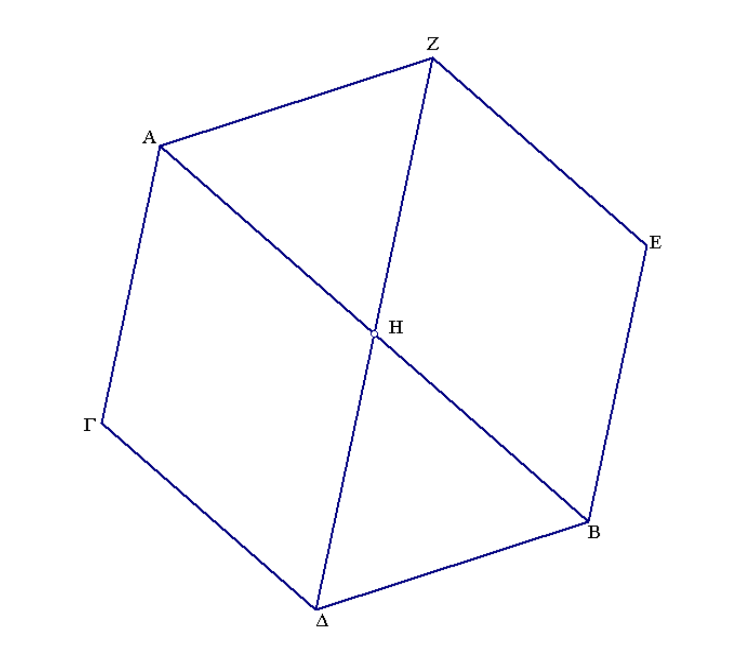
	 	
10	Αναπαριστούν τρισδιάστατα σχήματα και ερμηνεύουν δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων σχημάτων, όπως: ▪ «Να κατασκευάσετε διαφορετικά αναπτύγματα πρίσματος με βάση τρίγωνο, χρησιμοποιώντας λογισμικό.» ▪ «Να αφαιρέσετε ένα πολύγωνο από το πιο κάτω σχήμα, ώστε να δημιουργηθεί ανάπτυγμα πρίσματος με βάση κανονικό εξάγωνο.»  ▪ «Να σχεδιάσετε την ορθογώνια προβολή του πιο κάτω αντικειμένου.» 	Γ4.10
11	Αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ των στοιχείων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ στερεών, όπως: ▪ «Να επεξηγήσετε γιατί το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ειδική περίπτωση πρίσματος.» ▪ «Να ανακαλύψετε τη σχέση μεταξύ αριθμού κορυφών, ακμών και εδρών στα πρίσματα και να ελέγξετε κατά πόσο ισχύει και στις πυραμίδες.»	Γ4.11
12	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των δισδιάστατων σχημάτων στη μοντελοποίηση προβλημάτων, όπως: ▪ «Τέσσερις πόλεις θέλουν να κτίσουν ένα αεροδρόμιο που να εξυπηρετεί τις ανάγκες τους. Να καθορίσετε το ιδανικό σημείο για την οικοδόμηση του αεροδρομίου, ώστε να εξυπηρετούνται οι ανάγκες των τεσσάρων πόλεων με δίκαιο τρόπο.»	Γ4.12
13	Κατανοούν τις ιδιότητες του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων και υπολογίζουν αποστάσεις, όπως:	Γ4.14

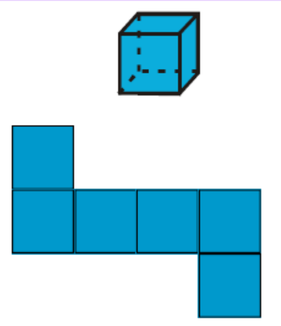
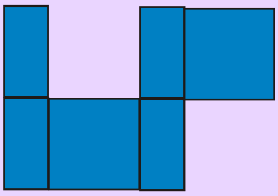
	▪ «Να τοποθετήσετε τα σημεία Α(0,0), Β(0,3) και Γ(3,3) σε σύστημα συντεταγμένων. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.»	
14	Κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα, χρησιμοποιώντας ευθύγραμμες κινήσεις και στροφές, όπως: ▪ «Να γράψετε μια διαδικασία κατασκευής κανονικών πολυγώνων σε λογισμικό γεωμετρίας της χελώνας.»	Γ4.15

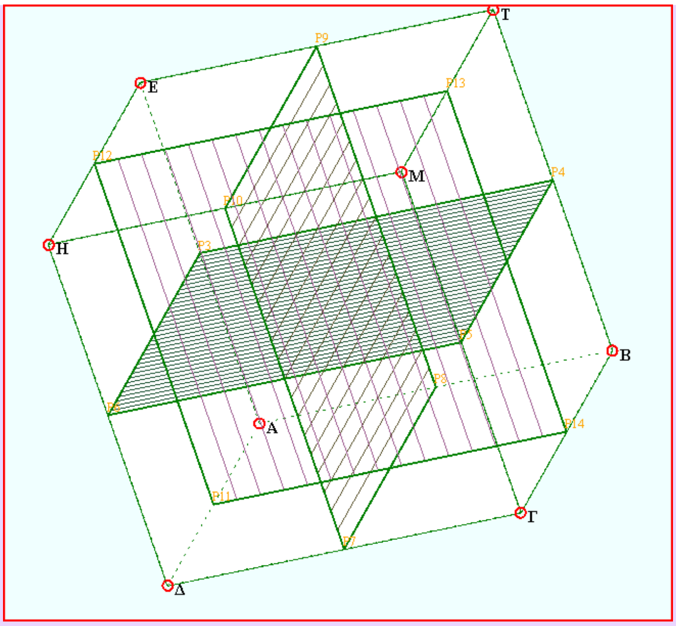
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Περιγράφουν και εκτελούν μετασχηματισμούς, όπως: ▪ «Να περιστρέψετε το τραπέζιο Α κατά 90° δεξιόστροφα και να ονομάσετε το νέο τραπέζιο Β.» 	Γ4.17
2	Διερευνούν στερεά που παράγονται από την πλήρη περιστροφή δισδιάστατων σχημάτων, όπως: ▪ «Το πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο θα περιστραφεί πλήρως γύρω από την πλευρά ΑΒ. Να περιγράψετε το στερεό που θα δημιουργηθεί.» 	Γ4.20

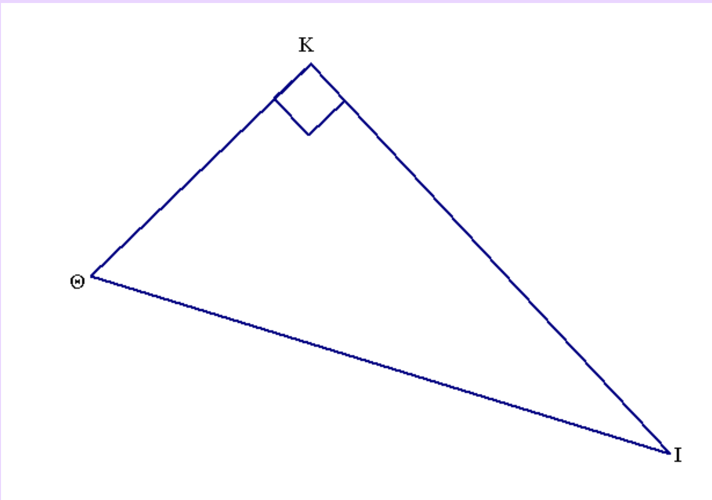
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

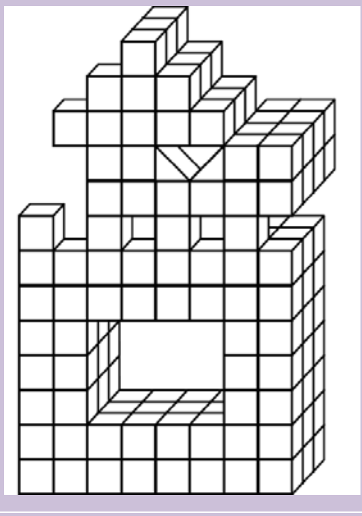
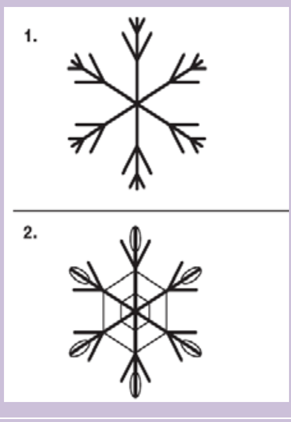
	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Τι σχήμα προκύπτει κάθε φορά, αν ενωθούν τα άκρα των ευθύγραμμων τμημάτων;    	Γ4.1
2	▪ Να τοποθετήσετε σε πλέγμα συντεταγμένων τα σημεία Α(1,1), Β(3,1), Γ(1,3), Δ(3,3). Να αιτιολογήσετε τι είδους σχήμα είναι το ΑΒΓΔ;	Γ4.5 Γ4.14
3	▪ Να αποδείξετε ότι το ΑΕΔΒ είναι ορθογώνιο (ΑΖΕΔΓΒ κανονικό εξάγωνο). 	Γ4.5
4	▪ Να εξετάσετε τη σχέση μεταξύ των σχημάτων ΑΗΔΓ και ΖΗΒΕ. Το σημείο Η είναι το κέντρο του κανονικού εξαγώνου.	Γ4.7 Γ4.8

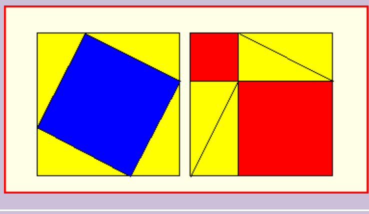


5	▪ Να χρωματίσετε τις ακμές του κύβου κατά μήκος των οποίων πρέπει να κοπεί ο κύβος, για να σχηματιστεί το πιο κάτω ανάπτυγμα. 	Γ4.10
6	▪ Να σκιάσετε το ορθογώνιο στο πιο κάτω σχήμα το οποίο πρέπει να μετακινηθεί, ώστε να κατασκευαστεί το ανάπτυγμα ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. 	Γ4.10
7	▪ (α) Να ονομάσετε επίπεδα που τέμνονται κάθετα στον πιο κάτω κύβο. (β) Ποια είναι η σχέση των ευθειών ΑΔ και ΕΓ;	Γ4.13



8	▪ Να γράψετε μια διαδικασία κατασκευής ενός ημικυκλίου σε λογισμικό γεωμετρίας της χελώνας.	Γ4.15
9	▪ Να σχεδιάσετε το σχήμα ΑΒΓ ως εξής: Α = (3, 4), Β = (3, 2), Γ = (5, 2). (α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Β, όταν το σχήμα ΑΒΓ ανακλάται με άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΓ. (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ, όταν το σχήμα ΑΒΓ περιστραφεί 90^o δεξιόστροφα γύρω από το σημείο Α.»	Γ4.17
10	▪ Περιγράφουν το στερεό που θα δημιουργηθεί όταν το πιο κάτω τρίγωνο περιστραφεί πλήρως γύρω από την πλευρά ΚΘ. 	Γ4.20

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Σχεδιάζουν την πρόσοψη του κτιρίου από τη βόρεια και τη δυτική πλευρά. Επεξηγούν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν. 
2	Ταξινομούν τα είδη των τετραπλεύρων και συγκρίνουν την ταξινόμησή τους με την ταξινόμηση των τετραπλεύρων κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ήρωνα. Πηγή: Euclid, & Heath, S.T. (1956). The Thirteen Books of Euclid’s Elements (σελίδα. 189) http://books.google.com
3	Σχεδιάζουν τους άξονες συμμετρίας στις νιφάδες χιονιού. 
4	Επεξηγούν γιατί η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.
5	Διερευνούν τα κριτήρια, για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο.
6	Επιλύουν προβλήματα, όπως: «Ποια από τις πιο κάτω σχέσεις ισχύει σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, όταν η γωνία Α είναι αμβλεία: (i) $α^2=β^2+γ^2$

	(ii) $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ (iii) $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$»
7	Διερευνούν ιστορικές γεωμετρικές αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος. Για παράδειγμα, αιτιολογούν γιατί το πιο κάτω σχήμα αποδεικνύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα: 
8	Σχεδιάζουν 11 διαφορετικά αναπτύγματα του κύβου.
9	Βρίσκουν το σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου.
10	Πραγματοποιούν εργασίες πρότζεκ, όπως: «Να μελετήσετε τους πίνακες του Escher, για να διερευνήσετε τις ιδιότητες των σχημάτων που δεν αφήνουν κενό, όταν καλύπτουν μια επιφάνεια, όπως πιο κάτω.» Πηγή: http://www.mcescher.net/ 

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κλίμακα 5

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

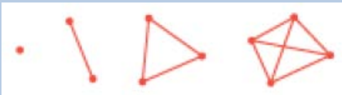
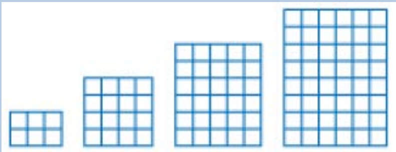
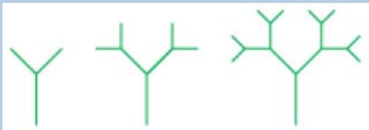
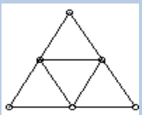
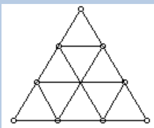
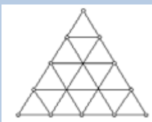
Οι μαθητές:

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ	
1	Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.
2	Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό.
3	Διατυπώνουν την αντίθετη και αντίστροφη μιας μαθηματικής πρότασης και ελέγχουν την εγκυρότητα/αλήθεια της πρότασης με τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής.
4	Ορίζουν βασικές γεωμετρικές έννοιες και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικών προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας (στερεά, γεωμετρικά σχήματα, επίπεδο, ημιεπίπεδο, σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, απόσταση δύο σημείων - μέσο ευθύγραμμου τμήματος, σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων, πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων, σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο, σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο, κάθετες ευθείες - απόσταση σημείου από ευθεία, χάραξη παράλληλων ευθειών, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος).
5	Ορίζουν και εφαρμόζουν γεωμετρικές έννοιες γωνιών και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικών προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας (έννοια της γωνίας, σύγκριση γωνιών - είδη γωνιών, μέτρηση γωνιών, πράξεις μεταξύ γωνιών, είδη γωνιών, διχοτόμος γωνιών, εφεξής γωνίες, κατακορυφήν γωνίες, συμπληρωματικές γωνιές, παραπληρωματικές γωνιές, σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από παράλληλες ευθείες και μια τέμνουσα ευθεία τους, άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου).
6	Ορίζουν αποδεικνύουν και εφαρμόζουν την έννοια της ισότητας επίπεδων ευθύγραμμων σχημάτων (ίσα σχήματα - ίσα τρίγωνα, κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων, κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων, ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου)
7	Ορίζουν και κατασκευάζουν τον κύκλο, κυκλικό δίσκο και τα στοιχεία τους και διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ τους (κύκλος - κυκλικός δίσκος, ακτίνα κύκλου, χορδή κύκλου, απόστημα χορδής, κυκλικός τομέας, κυκλικό τμήμα, σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, σχετικές θέσεις δύο κύκλων, μέτρο τόξου και γωνίας, επίκεντρες γωνίες, εγγεγραμμένες

	γωνίες, γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης).
8	Αναγνωρίζουν, κατασκευάζουν βασικά είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο), αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες και τα κριτήριά τους στη λύση προβλημάτων.
9	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και επεξηγούν τις οπτικές αναπαραστάσεις αποδείξεών του.
10	Κατασκευάζουν τα δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν σχετικά θεωρήματα (κέντρο βάρους, ορθόκεντρο, έγγεντρο, περίκεντρο, παράκεντρα κτλ.).
11	Ορίζουν τα κανονικά πολύγωνα, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητές τους στην επίλυση προβλημάτων (πλευρά κανονικού πολυγώνου, γωνία κανονικού πολυγώνου, απόστημα, κεντρική γωνία, περίμετρος, εμβαδόν).
12	Ορίζουν το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό, διαιρούν ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη, βρίσκουν τον λόγο των ευθύγραμμων τμημάτων, ορίζουν την αναλογία ευθύγραμμων τμημάτων, διαιρούν ευθύγραμμα τμήματα εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δεδομένο λόγο, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή και τα θεωρήματα εσωτερικής και εσωτερικής διχοτόμου.
13	Ορίζουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων την έννοια της ομοιότητας ευθύγραμμων σχημάτων, αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων και του λόγου περιμέτρων και εμβαδών όμοιων σχημάτων.
14	Ορίζουν και εφαρμόζουν έννοιες στο χώρο (ευθείες και επίπεδα στο χώρο, θέσεις ευθείας και επιπέδου, σχετικές θέσεις σφαίρας και επιπέδου).
15	Επεξηγούν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες τριγώνων και τετραπλεύρων σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
16	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια του διανύσματος (ορισμός διανύσματος, συντεταγμένες διανύσματος, πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα)
17	Σχεδιάζουν σε ισομετρικό χαρτί και στον υπολογιστή στερεά και συμπληρώνουν αναπτύγματα, για να κατασκευάζουν στερεά.
18	Σχεδιάζουν στερεά σε τετραγωνισμένο χαρτί, όταν γνωρίζουν τις τρεις βασικές όψεις τους.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	
19	Αναγνωρίζουν την ομοιότητα σχημάτων, υπολογίζουν το λόγο ομοιότητας και εφαρμόζουν την ομοιότητα στη λύση προβλημάτων.
20	Ορίζουν, κατασκευάζουν και εφαρμόζουν συμμετρικά σχήματα (σχήματα με άξονα συμμετρίας, σχήματα συμμετρικά ως προς ευθεία, κατασκευές συμμετρικών σχημάτων ως προς ευθεία, σχήματα με κέντρο συμμετρίας, κατασκευές συμμετρικών σχημάτων ως προς σημείο).
21	Αναγνωρίζουν και περιγράφουν μετασχηματισμούς σχημάτων μέσω της ανάκλασης, της περιστροφής και της μεταφοράς.
22	Κατανοούν την έννοια της ομοιοθεσίας ως το μετασχηματισμό που παράγει ένα νέο σχήμα όμοιο με το αρχικό (σμίκρυνση ή μεγέθυνση) και κατασκευάζουν το ομοιόθετο ενός σχήματος με βάση δεδομένο λόγο.

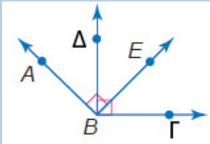
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

<table>
<tr><th></th><th>ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ</th><th>Δ.Ε.</th></tr>
<tr><td></td><td>Οι μαθητές:</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>Εφαρμόζουν τον επαγωγικό συλλογισμό στην ανάπτυξη γεωμετρικών μοτίβων, όπως:
▪ «Να σχεδιάσετε το επόμενο σχήμα στα πιο κάτω μοτίβα».
 
 </td><td>Γ5.1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό, όπως:
▪ «Η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι μήκους ν εκατοστών, όπου ν φυσικός αριθμός με $ν \geq 2$. Με ευθείες παράλληλες στις πλευρές του, το τρίγωνο χωρίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά μήκους 1 εκατοστού. Για παράδειγμα:
 Για ν = 2 σχηματίζονται 4 ισόπλευρα τρίγωνα
 Για ν = 3 σχηματίζονται 9 ισόπλευρα τρίγωνα
 Για ν = 4 σχηματίζονται 16 ισόπλευρα τρίγωνα
Να εκτιμήσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε τον αριθμό των ισόπλευρων τριγώνων που σχηματίζονται, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά μήκους ν εκατοστών;»</td><td>Γ5.2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Διατυπώνουν και ελέγχουν την αντιθετοαντίστροφη πρόταση μιας γεωμετρικής πρότασης, όπως:
▪ «Αν ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοι του είναι ίσες.
Να γράψετε αντιθετοαντίστροφη πρόταση και να διερευνήσετε κατά πόσο είναι αληθής».
Διερευνούν την ορθότητα υποθέσεων με τη χρήση δυναμικής γεωμετρίας, όπως:</td><td>Γ5.3</td></tr>
</table>

- «Αν η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΒΑΓ».

4 Χρησιμοποιούν βασικές έννοιες και προτάσεις της Γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων, όπως: **Γ5.4**

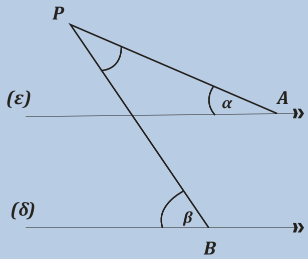
- «Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\angle ABE$ και $\angle \Delta B\Gamma$ είναι ορθές γωνίες. Να αποδείξετε ότι $\angle AB\Delta = \angle EB\Gamma$.»



- «Να χρησιμοποιήσετε δυναμικό πρόγραμμα γεωμετρίας και να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήμα ΑΒ. Να βρείτε το μέσο του Γ. Να σχεδιάσετε την μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ που περνά από το σημείο Γ. Να κατασκευάσετε ένα σημείο Δ πάνω στην μεσοκάθετη και να μετρήσετε τα τμήματα ΔΑ και ΔΒ. Να μετακινήσετε το σημείο Δ πάνω στην μεσοκάθετη. Ποιο θεώρημα παρουσιάζεται σε αυτή την κατασκευή;»

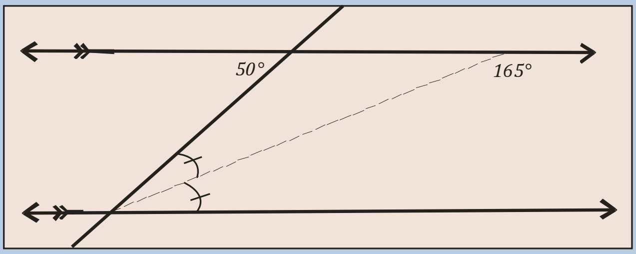
5 Εφαρμόζουν σχέσεις γωνιών σε παράλληλες ευθείες, όπως: **Γ5.5**

- «Να εκφράσετε τη γωνία Ρ συναρτήσει των α και β».



Διερευνούν και απορρίπτουν λανθασμένους μαθηματικούς συλλογισμούς, όπως:

- «Στο πιο κάτω σχήμα να βρείτε το λάθος που υπάρχει και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας».

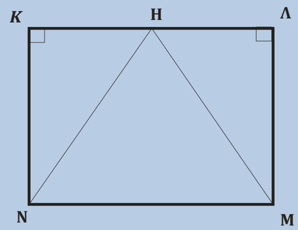
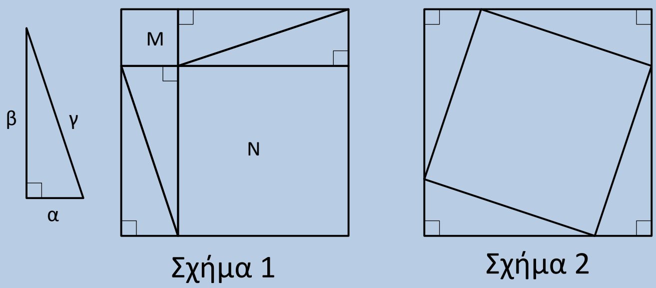
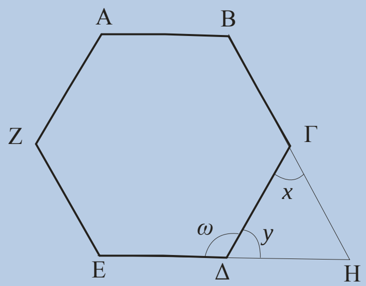


6 Κατασκευάζουν και διερευνούν ίσα τρίγωνα, όπως: **Γ5.6**

- «Με τη χρήση του χάρακα και του μοιρογνωμονίου να κατασκευάσετε τρίγωνο που να έχει μια πλευρά με μήκος 9 cm και μια προσκείμενή της γωνία με μέτρο 45^0. Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα δεύτερο τρίγωνο με τις προηγούμενες μετρήσεις το οποίο να μην είναι ίσο με το πρώτο;».

7 Διερευνούν και αποδεικνύουν θεωρήματα στον κύκλο, όπως: **Γ5.7**

- «Δύο χορδές που ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου είναι ίσες».

	▪ «Αν η ακτίνα κύκλου είναι κάθετη σε χορδή, τότε τη διχοτομεί».	
8	Εφαρμόζουν τα θεωρήματα των τετραπλεύρων σε προβλήματα, όπως: ▪ «Στο σχήμα το σημείο Η είναι το μέσο του ΚΛ και $\angle \mathrm{K} = \angle \Lambda = 90^{o}$ και το τρίγωνο ΝΗΜ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΝΜ. Να αποδείξετε ότι Δ $\mathrm{KHN} =$ Δ ΛΗΜ».  Αποδεικνύουν βασικές ιδιότητες τετραπλεύρων, όπως: ▪ «Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι των ορθογωνίων είναι ίσες. Ισχύει αυτή η ιδιότητα για όλα τα παραλληλόγραμμα;»	Γ5.8
9	Επεξηγούν τις οπτικές αναπαραστάσεις αποδείξεων του πυθαγόρειου θεωρήματος, όπως: ▪ «Το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές α, β και γ, χρησιμοποιείται, για να κατασκευαστούν τα σχήματα 1 και 2. Να επεξηγήσετε γιατί τα σχήματα 1 και 2 αποτελούν οπτικές αναπαραστάσεις της απόδειξης του πυθαγόρειου θεωρήματος». 	Γ5.9
10	Εφαρμόζουν τις ιδιότητές κανονικών πολυγώνων στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, όπως: ▪ «Στο πιο κάτω σχήμα το εξάγωνο ΑΒΓΔ είναι κανονικό. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\omega}$ και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΗΒΕ είναι ισοσκελές.»  ▪ «Ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με	Γ5.11

ακτίνα R. Αν λ είναι η πλευρά του, α το απόστημά του και Π η περίμετρός του, να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha^2 + \frac{\lambda^2}{4} = R^2$ (β) $\Pi^2 = 4\nu^2(R^2 - a^2)$. »

11 Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή και τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου στην επίλυση προβλημάτων, όπως: Γ5.12

- «Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρείτε μεταξύ των Α και Β σημείο Μ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{AM} = \frac{2}{3}\boldsymbol{MB}$.»

12 Εφαρμόζουν τα κριτήρια ομοιότητας για να επιλύουν προβλήματα, όπως: Γ5.13

- «Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ), το σημείο τομής Ο των διαγωνίων και η παράλληλη από το Ο προς τη ΓΔ που τέμνει τις ΑΔ, ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι : α)τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΔΓ είναι όμοια β)τα τρίγωνα ΒΟΖ και ΒΔΓ είναι όμοια. γ)$\frac{ΕΑ}{ΑΔ} = \frac{ΒΖ}{ΓΒ}$ δ) ΟΕ = ΟΖ.»

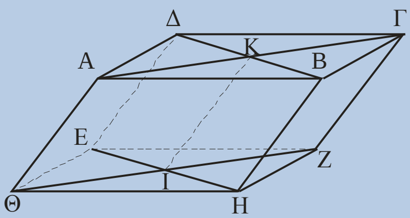
13 Εφαρμόζουν βασικές έννοιες του χώρου στη λύση προβλημάτων, όπως: Γ5.14

- «Στο πιο κάτω παραλληλεπίπεδο να βρείτε:

(α) τα ζεύγη των παράλληλων ευθειών,

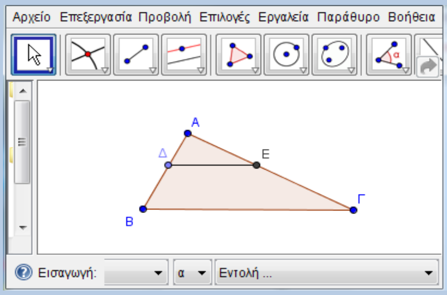
(β) τις ακμές του που είναι ασύμβατες προς την ΗΖ,

(γ) την τομή των επιπέδων ΑΓΖΘ και ΑΒΗΕ.»



Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις, όπως:

- «Οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι παράλληλες. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στην ευθεία (ϵ_1) και τα σημεία Γ και Δ στην ευθεία (ϵ_2). Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $\Delta\,ABE \approx \Delta\,\Gamma\Delta E$. »



(β) Να μετρήσετε τις $\widehat{ΑΔΕ}$ και $\widehat{ΑΓΒ}$ και μετά τις $\widehat{ΑΕΔ}$ και $\widehat{ΑΒΓ}$. Τι παρατηρείτε;

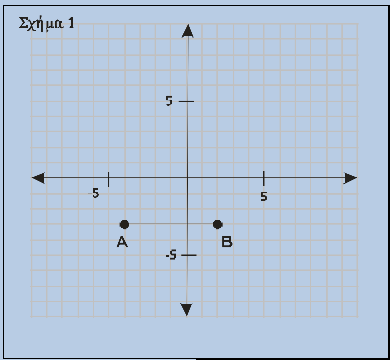
(γ) Ποιο θεώρημα ισχύει για τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΑΔΕ}$ και $\overset{\Delta}{ΑΓΒ}$;

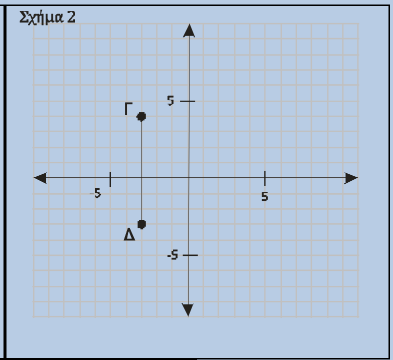
(δ) Να μετρήσετε όλες τις πλευρές. Να δείξετε ότι τα αντίστοιχα μήκη των πλευρών είναι ανάλογα.

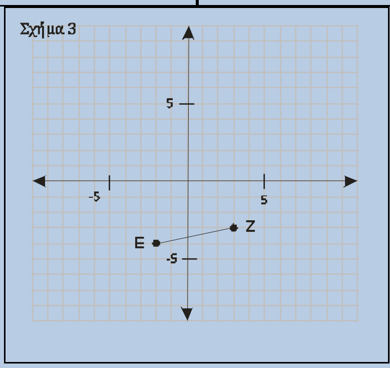
(ε) Να μετακινήσετε την κορυφή Α για να σχηματίσετε νέα τρίγωνα. Πώς μεταβάλλονται οι μετρήσεις στα ερωτήματα (β) και (δ); Τα νέα τρίγωνα που σχηματίζονται παραμένουν όμοια;

14 Εφαρμόζουν ιδιότητες τριγώνων σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπως: Γ5.15

- «Να βρείτε και να σημειώσετε στο σχήμα 1 σημείο Κ έτσι ώστε το τρίγωνο ΚΑΒ να είναι ισοσκελές τρίγωνο.»
- «Να βρείτε και να σημειώσετε στο σχήμα 2 σημείο Λ έτσι ώστε το τρίγωνο ΛΓΔ να είναι ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο.»
- «Να βρείτε και να σημειώσετε στο σχήμα 3 σημείο Μ έτσι ώστε το τρίγωνο ΜΕΖ να είναι ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο.»
- «Μπορείτε σε κάθε περίπτωση να βρείτε περισσότερες από μια απαντήσεις;»

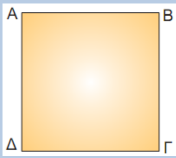






15 Εφαρμόζουν τις πράξεις διανυσμάτων για την επίλυση προβλημάτων, όπως: Γ5.16

- «Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Ποια από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}, \overrightarrow{\Delta A}, \overrightarrow{A\Delta}$,



(α) έχουν ίσα μέτρα; (β) είναι ίσα; (γ) είναι αντίθετα;»

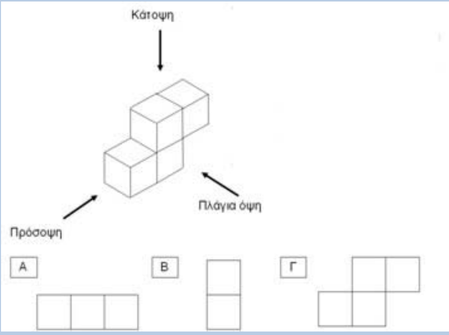
- «Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.»

16 Διερευνούν τομές στερεών σε ισομετρικό χαρτί και με λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, όπως: Γ5.17

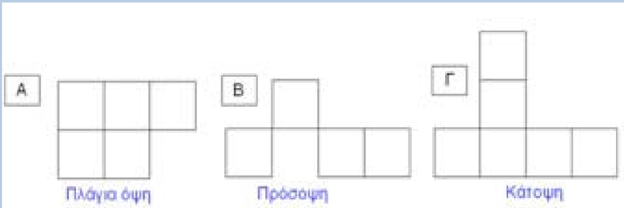
- «Αναγνωρίζουν τις τρεις βασικές όψεις ενός στερεού, όπως.
«Ποια όψη από τα Α, Β, Γ αντιστοιχεί στην πρόσοψη, στην πλάγια όψη και

στην κάτοψη του στερεού σχήματος, που φαίνεται στο σχήμα».



17 Σχεδιάζουν στερεά σε τετραγωνισμένο χαρτί, όταν γνωρίζουν τις τρεις βασικές όψεις τους, όπως: Γ5.18

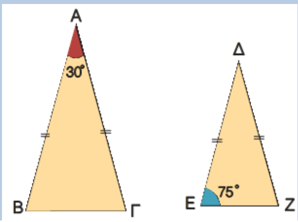
- «Να σχεδιάσετε ένα στερεό του οποίου η πλάγια όψη, η κάτω όψη και η πρόσοψη δίνονται από τα σχήματα Α, Β, Γ.»



	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	

1 Εφαρμόζουν την έννοια της ομοιότητας στην επίλυση προβλημάτων, όπως: Γ5.19

- «Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια.»



2 Απαντούν σε ερωτήσεις σχετικές με συμμετρικά σχήματα όπως: Γ5.20

- «Ποια σημεία είναι συμμετρικά ως προς μια ευθεία;»
- «Να φέρετε μια ευθεία (ε) και να πάρετε ένα σημείο Α πάνω στην ευθεία και ένα σημείο Μ που να μην είναι πάνω στην ευθεία. Να βρείτε το συμμετρικό του Α και του Μ ως προς την (ε).»
- «Τα συμμετρικά σχήματα ως προς μια ευθεία είναι ίσα;»
- «Ποιο είναι το συμμετρικό ενός σχήματος που έχει άξονα συμμετρίας ως προς αυτόν τον άξονα; Να γράψετε ένα παράδειγμα.»

3 Περιγράφουν μετασχηματισμούς σχημάτων μέσω της ανάκλασης, της περιστροφής και της μεταφοράς σε δραστηριότητες, όπως: Γ5.21

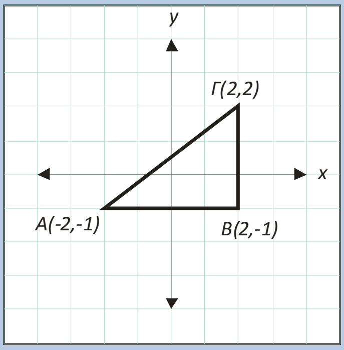
- «Δίνονται δύο ίσα ή όμοια σχήματα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Να περιγράψετε ένα συνδυασμό ανακλάσεων, περιστροφών και μεταφορών ώστε το ένα σχήμα να συμπέσει με το άλλο.»

Επεξηγούν και αναπαριστούν μετασχηματισμούς σχημάτων σε προβλήματα, όπως:

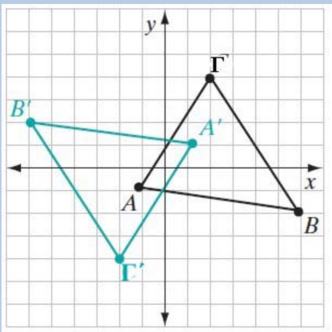
- «Οι κορυφές ενός τραπεζίου είναι (1, 2), (1, 6), (6, 4), και (6, 2). Το τραπέζιο ανακλάται με άξονα συμμετρίας τον άξονα των τετμημένων και στη συνέχεια μεταφέρεται κατά 4 μονάδες προς τα αριστερά. Να σχεδιάσετε τους πιο πάνω μετασχηματισμούς και να γράψετε τις νέες συντεταγμένες των κορυφών του τραπεζίου.

Εφαρμόζουν μετασχηματισμούς σχημάτων, όπως:

- «Αν το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ περιστραφεί κατά 90^0 δεξιόστροφα γύρω από το σημείο Β, να βρεθεί η νέα θέση του σημείου Α».



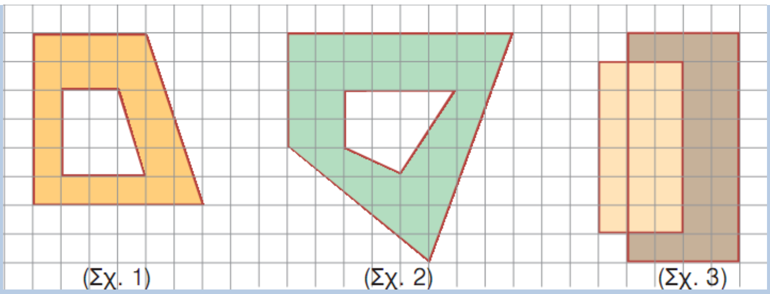
- «Στο πιο κάτω διάγραμμα, το $\Delta\ Α'Β'Γ'$ είναι η εικόνα του $\Delta\ ΑΒΓ$. Να προσδιορίσετε τρεις ειδικούς μετασχηματισμούς, ή συνδυασμό μετασχηματισμών, οι οποίοι μπορούν να μετασχηματίσουν το τρίγωνο $\Delta\ ΑΒΓ$ στο $\Delta\ Α'Β'Γ'$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας».



- «Αν (ε) $y = 3x - 2$, να βρεθεί η εξίσωση ευθείας συμμετρικής της (ε) ως προς την ευθεία $y = x$».

4 Χρησιμοποιούν την έννοια και τις ιδιότητες της ομοιοθεσίας στην επίλυση προβλημάτων, όπως: Γ5.22

- «Σε ποια από τα παρακάτω σχήματα τα πολύγωνα είναι ομοιόθετα;»


(Σχ. 1)
(Σχ. 2)
(Σχ. 3)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι μαθητές: — Δ.Ε.

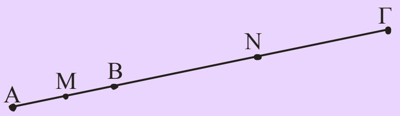
1 ▪ Θεωρούμε την πρόταση: «Εάν δύο πολύγωνα είναι ίσα, τότε έχουν ίσο αριθμών πλευρών.» Η πρόταση αυτή είναι αληθής; Να γράψετε την ‘αντίστροφη’ πρόταση. Είναι η ‘αντίστροφη’ πρόταση αληθής; Αν είναι αληθής, να εξηγήσετε γιατί. Αν δεν είναι, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα. — Γ5.1

2 ▪ Αποδεικνύουν γεωμετρικές παραστάσεις με παραγωγικό συλλογισμό: — Γ5.2

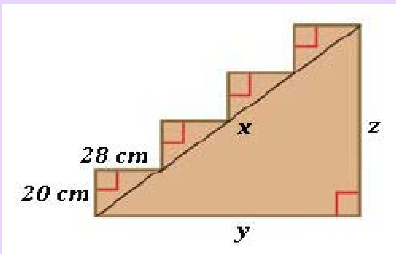
«Σε κύκλο (Ο,ρ) οι χορδές του ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΒΕΔ είναι ίση με το ημιάθροισμα των τόξων ΑΓ και ΒΔ».

3 ▪ Έστω η πρόταση p “Αν δύο γωνίες σχηματίζουν ευθεία γωνία, τότε είναι παραπληρωματικές”. Να διατυπώσετε και να διερευνήσετε (α) την αντίθετη πρότασή της p, (β) την αντίστροφη πρόταση της p και (γ) την αντιθετοαντίστροφή της p.(Να δώσετε κατάλληλα αντιπαραδείγματα εκεί που χρειάζονται) — Γ5.3

4 ▪ Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι για το μήκος του τμήματος ΜΝ ισχύει η ισότητα: $\mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}}{2}$. — Γ5.4

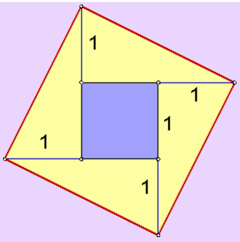


5 ▪ Στο πιο κάτω διάγραμμα φαίνεται η πλάγια όψη μιας σκάλας. Στο διάγραμμα, τα μικρά ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα. Να εξηγήσετε πως μπορείτε να βρείτε τα μήκη των x, y και z. — Γ5.6



6 ▪ Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΜ είναι 8cm και η πλευρά του ΒΓ είναι 16 cm. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Να διερευνήσετε, αν σε κάθε τρίγωνο στο οποίο μία διάμεσός του είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης πλευράς του είναι ορθογώνιο. — Γ5.8

7 ▪ Οι πλευρές του μικρού τετραγώνου διπλασιάζονται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου. — Γ5.9



8

- Να δειχθεί ότι το εμβαδόν κύκλου, που έχει διάμετρο την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο άλλων κύκλων, που έχουν διαμέτρους τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Γ5.11

9

- Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε κάθετη προς τη διχοτόμο της γωνίας Β και έστω Δ το σημείο τομής τους. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ , που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{AE = E\Gamma}$. Γ5.12

10

- Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ), το σημείο τομής Ο των διαγωνίων και η παράλληλη από το Ο προς τη ΓΔ που τέμνει τις ΑΔ, ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι : α)τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΔΓ είναι όμοια β)τα τρίγωνα ΒΟΖ και ΒΔΓ είναι όμοια γ) $\boldsymbol{\frac{EA}{A\Delta} = \frac{BZ}{\Gamma B}}$ δ)ΟΕ=ΟΖ. Γ5.13

11

- Αν τέσσερα διαφορετικά σημεία του επιπέδου Α, Β, Γ, Δ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, να βρείτε: Γ5.14

(α) τα επίπεδα τα οποία ορίζουν,

(β) την τομή των επιπέδων ΑΒΓ και ΑΒΔ,

(γ) την τομή των επιπέδων ΑΓΔ και ΒΓΔ,

(δ) τα ζεύγη ασύμβατων ευθειών.

12

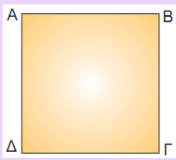
- Να διερευνήσετε κατά πόσο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κορυφές (0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2) είναι ίσο με το ορθογώνιο ΕΖΗΘ με κορυφές (-2, -1), (2, -1), (2, 1), (-2, 1). Γ5.15

13

Εφαρμόζουν τις πράξεις διανυσμάτων για την επίλυση προβλημάτων, όπως: Γ5.16

- Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Ποια από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}, \overrightarrow{\Delta A}, \overrightarrow{A\Delta}$,

(α) έχουν ίσα μέτρα; (β) είναι ίσα; (γ) είναι αντίθετα;



- Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.»

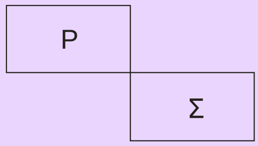
14

- Το σημείο Α(2, -3) μεταφέρεται στο σημείο Α’(-3,-5). Χρησιμοποιούμε τον ίδιο μετασχηματισμό, για να μεταφέρουμε το σημείο Β(1,4) στο Β’. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Β΄; Γ5.21

- Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Με ποιο μετασχηματισμό του Ρ δεν μπορούμε να πάρουμε το ορθογώνιο Σ;

1. Ανάκλαση
2. Περιστροφή
3. Μεταφορά
4. Περιστροφή και μετά μεταφορά



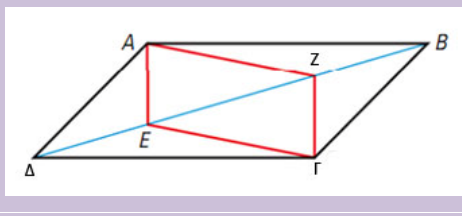
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

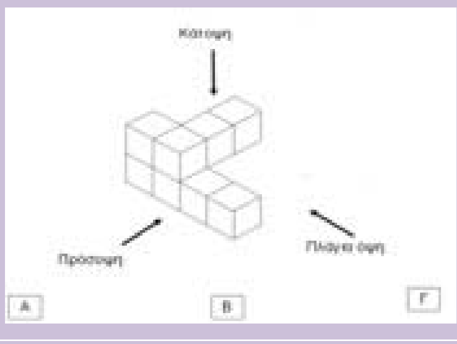
1 Διερευνούν διάφορες αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος με αναφορά στην ιστορία των μαθηματικών.

2 Πλακάκια σχήματος κανονικού πενταγώνου και τριγωνικά πλακάκια έχουν τοποθετηθεί, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα πενταγωνικά πλακάκια έχουν όλα το ίδιο μέγεθος και σχήμα, όπως και όλα τα τριγωνικά πλακάκια είναι ίσα σε μέγεθος και έχουν το ίδιο σχήμα μεταξύ τους. Να βρεθούν οι γωνίες σε κάθε τριγωνικό πλακάκι.

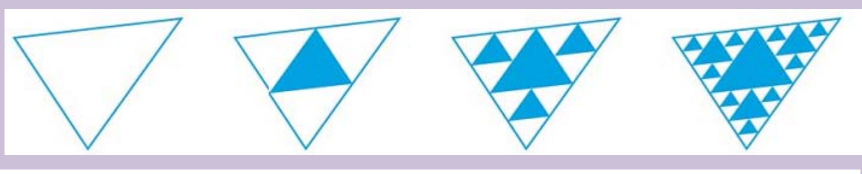
3 Στο πιο κάτω διάγραμμα, ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, ΒΖ=ΔΕ=12 και ΓΖ=8. Να βρείτε το ΑΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



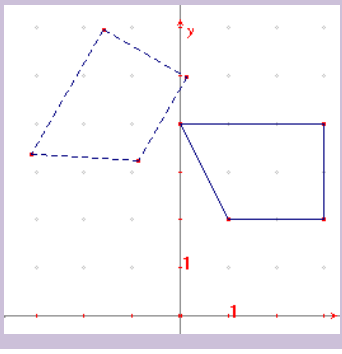
4 Στο σχήμα να σχεδιάσετε κάτω από τα Α, Β, Γ την πρόσοψη, την πλάγια όψη και την κάτω όψη αντίστοιχα.



5 Για να δημιουργήσετε το παρακάτω διάγραμμα, σκιάζουμε το τρίγωνο που δημιουργείται από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου. Μετά επαναλαμβάνεται η διαδικασία για κάθε μη σκιασμένο τρίγωνο. Έστω ότι η περίμετρος του αρχικού τριγώνου είναι 1.



Φάση 0 Φάση 1 Φάση 2 Φάση 3

	(α) Ποια είναι η περίμετρος του σκιασμένου τριγώνου στη Φαση 1; (β) Πόσο είναι το άθροισμα των περιμέτρων των σκιασμένκων τριγώνοων στη φάση 2; (γ) Να βρείτε το άθροισμα των περιμέτρων όλων των σκιασμένων τριγώνων στην φάση 3.
6	Δίνονται δύο ίσα σχήματα, όπως στο σχήμα. Οι μαθητές βρίσκουν το κέντρο και τη γωνία περιστροφής 

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κλίμακα 6

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ
1	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο (πλευρών και γωνιών).
2	Ορίζουν και εφαρμόζουν την ορθή προβολή σημείου σε ευθεία και την προβολή ευθύγραμμου τμήματος σε ευθεία.
3	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τα θεωρήματα μετρικών σχέσεων (σε ορθογώνιο τρίγωνο, σε τυχαίο τρίγωνο) και τα θεωρήματα διαμέσων.
4	Διερευνούν και κατασκευάζουν, με χάρακα και διαβήτη, το γεωμετρικό τόπο σημείου επιπέδου και τον επιβεβαιώνουν με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού προγράμματος. Διερευνούν βασικούς γεωμετρικούς τόπους (Ανάλυση- Σύνθεση- Κατασκευή- Απόδειξη- Διερεύνηση.)
5	Δημιουργούν γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια γεωμετρικών τόπων.
6	Διερευνούν, αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών προγραμμάτων γεωμετρίας.
7	Διερευνούν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν την εξίσωση ευθείας, τη θέση ευθειών, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, την απόσταση σημείου από ευθεία, τις συντεταγμένες του μέσου ευθύγραμμου τμήματος, τη γωνία ευθειών και το εμβαδόν τριγώνου σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων επιπέδου.
8	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις μετρικές σχέσεις σε κύκλο (τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο, την ιδιότητα της τέμνουσας ενός κύκλου, τη διαίρεση τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά με δεδομένο λόγο, το χρυσό λόγο, τα συζυγή αρμονικά σημεία και τα θεωρήματα διχοτόμων).
9	Βρίσκουν το λόγο των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και το λόγο δύο ομόλογων στοιχείων σε δύο όμοια τρίγωνα, αποδεικνύουν το λόγο των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων και κυρτών πολυγώνων και το θεώρημα Θαλή στο επίπεδο.
10	Ορίζουν ιδιότητες εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων τετραπλεύρων σε κύκλο και διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες και τα κριτήρια εγγράψιμων

	και περιγράψιμων τετραπλεύρων.
11	Ορίζουν, αναπαριστούν και εφαρμόζουν ιδιότητες των διανυσμάτων, βρίσκουν το μέτρο διανύσματος, κάνουν πράξεις με διανύσματα (άθροισμα, διαφορά διανυσμάτων, γινόμενο αριθμού επί διάνυσμα) και εξετάζουν τη συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων.

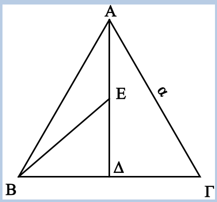
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ
12	Ανακαλύπτουν τις σχέσεις μεταξύ διακέντρου και ακτίνων μεταξύ δύο κύκλων.
13	Κατασκευάζουν και σχεδιάζουν στερεά από την πλήρη περιστροφή σχημάτων γύρω από άξονα (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος και σφαίρας).
14	Χρησιμοποιούν πίνακες 2χ2 στο μετασχηματισμό ευθειών ή επιπέδων και λύνουν προβλήματα μετασχηματισμών.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

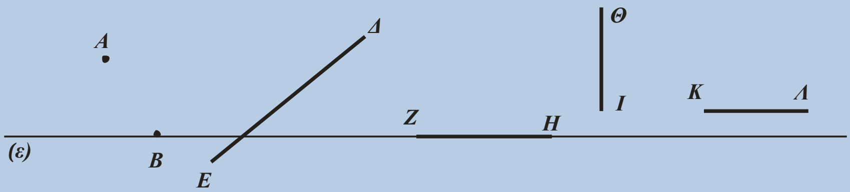
<table>
<tr><th></th><th>ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ</th><th>Δ.Ε.</th></tr>
<tr><th></th><th>Οι μαθητές:</th><th></th></tr>
<tr><td>1</td><td>Επιλύουν προβλήματα ανισοτικών σχέσεων όπως:

▪ «Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας Α και ΑΜ η διάμεσος, να δείξτε ότι:
(α) Η διάμεσος σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία (Δηλαδή $\angle ΒΑΜ > \angle ΜΑΓ$).
(β) Η διχοτόμος βρίσκεται πλησιέστερα προς τη μικρότερη πλευρά (Δηλαδή ΒΔ<ΔΓ).»

▪ «Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά α. Αν ΑΔ ύψος και Ε μέσον του ΑΔ, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα τμήματα: ΑΒ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ.»

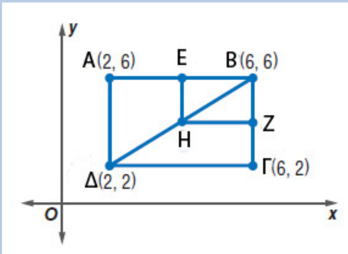

</td><td>Γ6.1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Κατασκευάζουν την προβολή σημείου και ευθύγραμμου τμήματος σε άξονα, όπως:

▪ «Να κατασκευάσετε τις προβολές πάνω στην ευθεία (ε) των σημείων και τμημάτων που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα:»


</td><td>Γ6.2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Χρησιμοποιούν τα θεωρήματα των μετρικών σχέσεων τριγώνων στη λύση προβλημάτων, όπως:

▪ «Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και ορθόκεντρο Η, να δείξετε ότι: $ΗΓ^2 - ΗΒ^2 = ΑΓ^2 - ΑΒ^2$.»

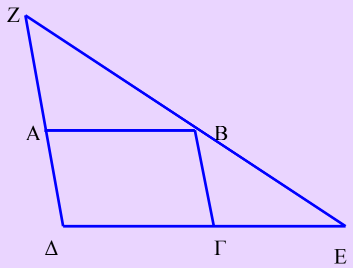
▪ «Να υπολογιστεί ο x έτσι ώστε οι παραστάσεις: $x^2 + x + 1, 2x + 1$ και $x^2 - 1$ να αποτελούν μήκη πλευρών τριγώνου. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τη γωνία, που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.»</td><td>Γ6.3</td></tr>
</table>

4	Κατασκευάζουν, με χάρακα και διαβήτη, το γεωμετρικό τόπο σημείου επιπέδου και τον επιβεβαιώνουν με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού προγράμματος, όπως: ▪ «Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κορυφών Α των τριγώνων ΑΒΓ, που έχουν σταθερή πλευρά ΒΓ= α και τη διάμεσο ΑΜ=3 cm. Να κατασκευάσετε τον πιο πάνω γεωμετρικό τόπο με χρήση λογισμικού.»	Γ6.4
5	Κατασκευάζουν γεωμετρικούς τόπους, όπως: ▪ «Με δοσμένα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, να κατασκευαστεί το τέταρτο ανάλογό τους.» ▪ «Αν δοθεί τετράγωνο πλευράς β, να κατασκευαστεί ισοδύναμο ορθογώνιο με δεδομένη τη μια πλευρά του α (απλή παραβολή).» ▪ «Αν δοθούν δύο τμήματα α, β να κατασκευαστεί ο αριθμητικός και ο αρμονικός τους μέσος.» ▪ «Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που έχουν την ιδιότητα $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 50\lambda^2$, όταν τα Α και Β είναι σταθερά σημεία, ώστε ΑΒ = 6λ, όπου λ δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα.»	Γ6.5
6	Εφαρμόζουν την εξίσωση ευθείας στην επίλυση προβλημάτων όπως: ▪ «Βρίσκουν το γ.τ. του σημείου (2,3) που απέχει από το σταθερό σημείο(-1,3) σταθερή απόσταση ίση με 3cm.» ▪ «Στο διπλανό σχήμα, το ΗΖ διχοτομεί το ΒΓ και το ΗΕ διχοτομεί το ΑΒ. Τα τμήματα ΗΕ και ΗΖ είναι παράλληλα με τις πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.  - Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Ζ. - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Η και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Να βρείτε και να περιγράψετε τη σχέση, αν υπάρχει, μεταξύ των τμημάτων ΔΗ και ΗΒ.»	Γ6.7
7	Εφαρμόζουν τις μετρικές σχέσεις στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων όπως: ▪ «Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται στο Η. α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. β) Να δείξετε ότι $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \cdot \mathrm{BE} + \mathrm{AH} \cdot \mathrm{A\Delta}$.» ▪ «Από ένα σημείο Α κύκλου (O, R) φέρνουμε τις χορδές $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{AB}$ και τη διάμετρο ΚΛ ⊥ ΒΓ. Αν Μ, Ν είναι αντιστοίχως οι τομές των ΑΓ και ΑΒ με την ΚΛ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ και Κ είναι συζυγή αρμονικά των Ν και Λ.»	Γ6.8
8	Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή στην επίλυση προβλημάτων όπως: ▪ «Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΒΓ και ΑΔ και έστω Ο το σημείο	Γ6.9

	τομής των διαγωνίων του. Να αποδείξετε ότι: (i) $(\mathrm{OAB}) = \mathrm{O\Gamma\Delta})$ (ii) $\frac{(\mathrm{AO\Delta})}{(\mathrm{OB\Gamma})} = \frac{\mathrm{A\Delta}^2}{\mathrm{B\Gamma}^2}$ και (iii) $\frac{(\mathrm{OAB})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{B\Gamma}}$.»	
9	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων τετραπλεύρων, για να επιλύουν προβλήματα, όπως: ▪ «Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.»	Γ6.10
10	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες διανυσμάτων στην απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων, όπως: ▪ «Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών τραπεζίου, τότε: α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του, (β) $\mathrm{MN} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \Delta\Gamma)$.» Μελετούν είδη τριγώνων με τη χρήση διανυσμάτων, όπως: ▪ «Δίνονται τα σημεία Α (5, - 1), Β (1, 1) και Γ (2, 3). Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.»	Γ6.11

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	**Δ.Ε.**
	Οι μαθητές:	
1	Κατασκευάζουν και σχεδιάζουν στερεά από την πλήρη περιστροφή σχημάτων γύρω από άξονα, όπως: ▪ «Με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας κατασκευάζουν και διερευνούν τα στοιχεία των στερεών που παράγονται.»	Γ6.13
2	Χρησιμοποιούν πίνακες 2×2 στο μετασχηματισμό ευθειών ή επιπέδων και λύνουν προβλήματα μετασχηματισμών, όπως: ▪ «(α) Να βρεθεί ο πίνακας μετασχηματισμού ο οποίος μετασχηματίζει το διάνυσμα $\binom{2}{0}$ στο $\binom{-2}{0}$. (β) Στη συνέχεια να βρείτε το μετασχηματισμό του διανύσματος $\binom{1}{-1}$ με βάση το μετασχηματισμό που βρήκατε. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα νέα σημεία.»	Γ6.14

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Αν ΑΒ είναι η μεγαλύτερη πλευρά ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και ΓΔ η μικρότερη πλευρά του, να δείξετε ότι.$\hat{\Gamma} > \hat{A}$.	Γ6.1
2	▪ Σε ένα διαγώνισμα στη Γεωμετρία δόθηκε η ακόλουθη άσκηση: «Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά.» Ένας μαθητής έδωσε την ακόλουθη απόδειξη  $\Gamma\hat{B}E + B\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{E}B = 180^o$ (γωνίες τριγώνου $\overset{\Delta}{BE\Gamma}$) $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}E$ (εντός εναλλάξ) $\Rightarrow$ $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{E}B$ (εντός εκτός και ’ επί τ’ αυτά μέρη) $\Rightarrow$ $\Gamma\hat{B}E + A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}Z = 180^o \Rightarrow$ Ζ, Β, Ε συνευθειακά. Να εξηγήσετε γιατί η απόδειξη του μαθητή είναι λανθασμένη.	Γ6.2
3	▪ Να δείξετε ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3$, τότε αυτό είναι οξυγώνιο. ▪ Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι μ_β και μ_γ τέμνονται κάθετα, να δείξετε ότι: $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$.	Γ6.3
4	▪ Να κατασκευαστεί ένας κύκλος που να διέρχεται από δύο σημεία Α και Β και να εφάπτεται σε ένα κύκλο (Ο,R).	Γ6.5
5	▪ Η πλευρά ΔΓ ενός τετραγώνου, μέσα στο οποίο βρίσκεται η αρχή Ο(0,0) των αξόνων, έχει εξίσωση $3x + 4y - 8 = 0$. Τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες είναι οι δύο κορυφές του. Αν Δ είναι η κορυφή που βρίσκεται στον άξονα y΄y, να βρείτε: α) το μήκος της ΔΓ. β) τις εξισώσεις των άλλων πλευρών του.	Γ6.7
6	▪ Σε κύκλο (Ο, ρ) είναι εγγεγραμμένο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Από το Α φέρνουμε τυχούσα ευθεία η οποία τέμνει την ΒΓ στο Δ και τον κύκλο στο Ε. Να δείξετε ότι: α) $AB^2 = A\Delta \cdot AE$ β) Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε εφάπτεται στην ΑΒ.	Γ6.8
7	▪ Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, ακτίνας ΟΑ και μια χορδή ΑΒ. Να δείξετε ότι αν γράψουμε κύκλο με διάμετρο την ΟΑ, αυτός θα διχοτομ εί την χορδή ΑΒ.	Γ6.9

8	▪ Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ. Να αποδείξετε ότι: α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι εγγράψιμο. β) η ΔΕ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου, στο σημείο Γ.	Γ6.10
9	▪ Δίνεται η σχέση **α**=λ**β,** λ∊R. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των διανυσμάτων **α,β;**	Γ6.11
10	▪ Δίνονται τα διανύσματα θέσης $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$. Αφού τα παραστήσετε γραφικά, να βρείτε το μέτρο τους και να αναφέρετε τρεις ιδιότητές τους. Να παρασταθεί γραφικά το άθροισμα τους.	Γ6.12

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές του γωνίες.

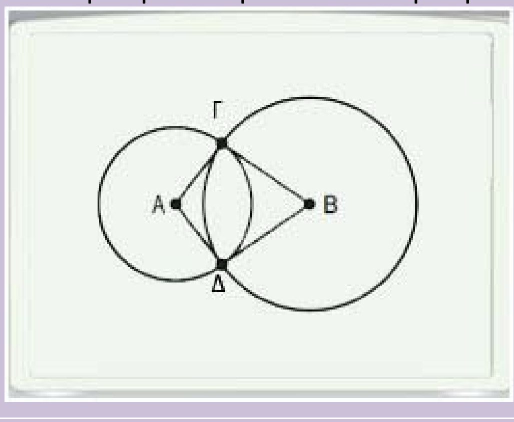
2 Σε ευθεία (ε) παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε ΑΒ=6cm, ΒΓ=12cm, ΓΔ=12cm και ΓΔ=2cm. Να βρεθεί σημείο Μ του ΒΓ, το οποίο διαιρεί εσωτερικά τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ με τον ίδιο λόγο

3
- Να αποδείξετε ότι, αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.
- Αν Ε, Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.

4 Με τη χρήση δυναμικού προγράμματος γεωμετρίας να σχεδιάστε σημεία Α, Β, Γ και τα τμήματα ΑΓ και ΒΓ. Να κατασκευάσετε τους κύκλους με κέντρο Α και ακτίνα ΑΓ και κέντρο το Β και ακτίνα ΒΓ. Να ονομάστε το άλλο σημείο τομής των κύκλων Δ. Να φέρετε τα τμήματα ΒΔ και ΑΔ.

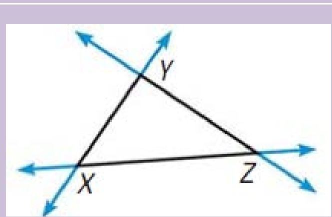
(α) Μετακινήστε τα σημεία Α, Β, Γ ή Δ, για να διαφοροποιήσετε το σχήμα ΑΒΓΔ. Τι είδη τετραπλεύρων μπορούν να σχηματιστούν;

(β) Υπάρχουν κάποια είδη τετραπλεύρων που δεν μπορούν να σχηματιστούν;



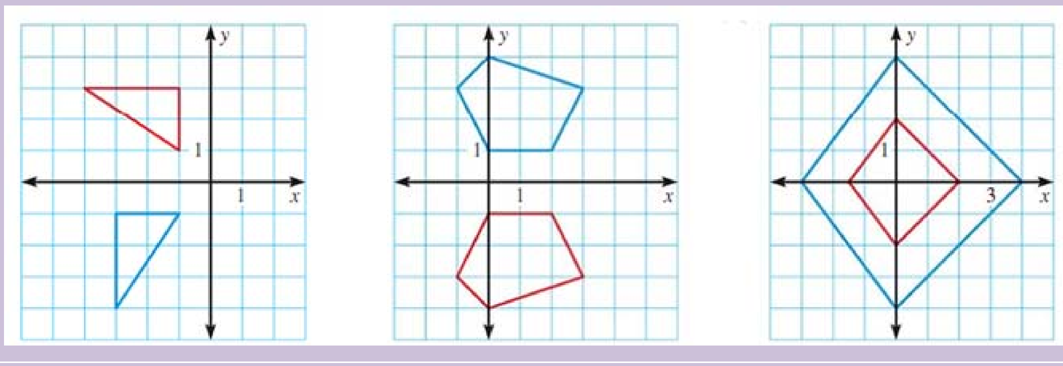
5 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο(Ο, ρ). Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

6 Έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα σημείο μέσα στο τρίγωνο που ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι εάν προεκταθούν οι πλευρές του τριγώνου και σχηματίσουν ευθείες, μπορείτε να βρείτε τρία σημεία έξω από το τρίγωνο καθένα από τα οποία ισαπέχει από αυτές τις ευθείες;

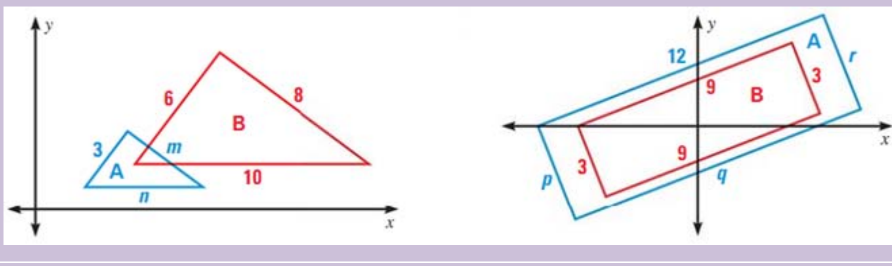


7

- Να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα (μεταφορά, ανάκλαση, στροφή ή ομοιοθεσία).



8 Να βρείτε το συντελεστή ομοιοθεσίας του σχήματος Α με το σχήμα Β. Ακολούθως να βρείτε τα μήκη των πλευρών του σχήματος Α.



9 Να περιγράψετε τους δύο μετασχηματισμούς, (ο ένας ακολουθεί τον άλλο) οι οποίοι μετασχηματίζουν το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ στο $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$.

(α) $A(-3,3)$, $B(-3,1)$, $\Gamma(0,1)$ $\Delta(6,6)$, $E(6,2)$, $Z(0,2)$

(β) $A(6,0)$, $B(9,6)$, $\Gamma(12,6)$ $\Delta(0,3)$, $E(1,5)$, $Z(2,5)$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κλίμακα 7

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ	
1	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων τις ιδιότητες κανονικών πολυγώνων.
2	Ορίζουν βασικές έννοιες της Γεωμετρίας στο χώρο (σημείο, ευθεία, επίπεδο) και διερευνούν τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο.
3	Ορίζουν τις έννοιες προβολή σημείου, ευθύγραμμου τμήματος και ευθείας σε επίπεδο.
4	Ορίζουν και εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων τη γωνία ευθείας και επιπέδου, τη γωνία δυο ευθειών στον χώρο, τις ορθογώνιες ευθείες, την απόσταση σημείου από επίπεδο, την απόσταση δυο παράλληλων επιπέδων, τη δίεδρη γωνία, την αντίστοιχη επίπεδη μιας δίεδρης και τα κάθετα επίπεδα.
5	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων τα θεωρήματα παραλληλίας και καθετότητας.
6	Αναφέρουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή στον χώρο.
7	Ορίζουν στερεά σχήματα και τα βασικά τους στοιχεία.
8	Διερευνούν και εφαρμόζουν τις θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα.
9	Ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο και αποδεικνύουν τις ιδιότητες διανυσμάτων στο επίπεδο, βρίσκουν την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, αναφέρουν και αποδεικνύουν τη συνθήκη καθετότητας και παραλληλίας τους, βρίσκουν τη γωνία δυο διανυσμάτων από τις συντεταγμένες τους και τα αναπαριστούν στο επίπεδο.
10	Διερευνούν και εφαρμόζουν το συντελεστή διεύθυνσης διανυσματικής ευθείας. Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις διάφορες μορφές εξίσωσης μιας ευθείας στο επίπεδο: διανυσματική, παραμετρικές εξισώσεις και αναλυτική εξίσωση και βρίσκουν τη θέση δύο ευθειών στο χώρο, όταν δίνονται οι εξισώσεις τους.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ
11	Εκφράζουν την ιδιότητα των σημείων του Γ.Τ. υπό μορφή σχέσης μεταξύ των συντεταγμένων τυχόντος σημείου του Γ.Τ, βρίσκουν την αναλυτική εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκονται τα σημεία του Γ.Τ. και βρίσκουν την καρτεσιανή εξίσωση του Γ.Τ., αν οι συντεταγμένες του τυχόντος σημείου του Γ.Τ. δίνονται στη μορφή $x = f(t),\ y = g(t)$ ή $x = f(t,\rho),\ y = g(t,\rho)$.
12	Χρησιμοποιούν πίνακες 2×2 στο μετασχηματισμό ευθειών ή επιπέδων και διερευνούν τη νέα εξίσωση.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Εφαρμόζουν τις ιδιότητες των όμοιων πολυγώνων στην επίλυση προβλημάτων όπως: ▪ «Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να φέρετε μια ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ ώστε το τρίγωνο να διαιρεθεί σε δύο μέρη που τα εμβαδά τους να έχουν λόγο ίσο με $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα ή αριθμοί.»	Γ7.1
2	Απαντούν ερωτήσεις σε βασικές έννοιες της γεωμετρίας του χώρου όπως: ▪ «Πόσα επίπεδα ορίζουν τρία σημεία που βρίσκονται στην ίδια ευθεία;» ▪ «Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών που ορίζονται από δύο διαφορετικά σημεία ενός κύκλου; Να κατασκευάσετε το γ.τ. με τη βοήθεια μαθηματικού λογισμικού.» ▪ «Τι συμβαίνει στις πιο κάτω περιπτώσεις, αν δύο επίπεδα έχουν: (α) τρία κοινά σημεία (β) δύο κοινά σημεία (γ) κανένα κοινό σημείο.» ▪ «Τι συμβαίνει στις πιο κάτω περιπτώσεις αν δύο ευθείες του χώρου έχουν:(α) ένα κοινό σημείο (β) δύο κοινά σημεία (γ) κανένα κοινό σημείο.» ▪ «Από δοσμένο σημείο να κατασκευάσετε ευθεία παράλληλη σε δύο τεμνόμενα επίπεδα.» ▪ «Τι επιφάνεια παράγει μια ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο Α και τέμνει ευθεία (ε), που δεν περιέχει το σημείο Α;» ▪ «Να κατασκευάσετε ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο Ο και τέμνει δύο σταθερές ασύμβατες ευθείες.» ▪ «Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ένα σημείο Μ που δεν ανήκει σε καμία απο αυτές. Να κατασκευάσετε ευθεία, η οποία να διέρχεται από	Γ7.4

	το Μ και να τέμνει τις ϵ_1, ϵ_2.»	
3	Εφαρμόζουν τα θεωρήματα καθετότητας στην επιλύση προβλημάτων, όπως: ▪ «Έστω (Κ,ρ) κύκλος, ΑΚ ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο επίπεδο π του κύκλου και Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ.»	Γ7.5
4	Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή στο χώρο σε προβλήματα όπως: ▪ «Τρεις ευθείες στο χώρο Οχ, Οψ, Οζ έχουν ένα κοινό σημείο Ο και τέμνονται από δύο παράλληλα επίπεδα (Π) και (Ρ) στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.»	Γ7.6
5	Επιλύουν προβλήματα με στερεά σχήματα, όπως: ▪ «Σε κάθε πολύεδρο με ε έδρες, κ κορυφές και α ακμές ισχύει: κ+ε=α+2»	Γ7.7
6	Εφαρμόζουν τις θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα σε προβλήματα όπως: ▪ «Θεωρούμε μια σφαίρα (Ο,R) και ένα μικρό κύκλο αυτής με εμβαδόν Ε. Αν $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ είναι τα εμβαδά των δύο σφαιρικών τμημάτων που σχηματίζονται, να αποδειχθεί ότι: $\frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{1}{\mathrm{E}_1} + \frac{1}{\mathrm{E}_2}$.»	Γ7.8
7	Εφαρμόζουν την πλήρη περιστροφή τριγώνου γύρω από άξονα και επιλύουν προβλήματα στερεών σχημάτων, όπως: ▪ «Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α κάνει πλήρη περιστροφή περί άξονα ευθεία (ε) του επιπέδου του κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Α. Να βρεθεί το εμβαδόν και ο όγκος του παραγόμενου στερεού σχήματος.»	
8	Επιλύουν προβλήματα όπως: ▪ «Αν $u = 3\vec{i} + 2\vec{j}, v = \vec{i} - 3\vec{j}, \vec{w} = 8\vec{i} + 10\vec{j}$ να βρεθεί τη τιμή του λ έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{u} + \lambda\vec{v}$ να είναι κάθετο στο $\vec{u}$.» ▪ «Να βρεθεί το χ αν γνωρίζουμε ότι η γωνιά των διανυσμάτων $\vec{a}(x,3)$ και $\vec{b}(1,\sqrt{3})$ είναι 30^0.» ▪ «Να δειχτεί ότι κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.» ▪ «Να γίνουν οι πράξεις $(\vec{i} - 4\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 4\vec{j})$. Τι συμπεραίνετε;» ▪ «Αν $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{\beta}\| = 1$ και τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα, να απλοποιηθούν οι εκφράσεις: (i) $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta}$, (ii) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$.»	Γ7.9
9	Εφαρμόζουν τις ιδιότητες διανυσμάτων και ευθειών για την επίλυση προβλημάτων όπως: ▪ «Να γράψετε το διάνυσμα που είναι παράλληλο προς τις πιο κάτω ευθείες: $\vec{r} = (i - j) + \lambda(i + 2j)$, $\frac{x-2}{3} = y$, $x = 1 + 2\lambda, y = -\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.	Γ7.10

- «Να διαπιστώσετε τη θέση των πιο κάτω ευθειών(αν είναι παράλληλες τεμνόμενες ή συμπίπτουν). Στην περίπτωση των τεμνόμενων ευθειών να βρείτε και το σημείο τομής τους.

  (α) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3}, \frac{x-6}{-6} = \frac{y+2}{9}$

  (β) $\frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{1} = \frac{z}{-1}, 1 - x = 3 - 4y$

  (γ) $\vec{r} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \lambda(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath})$, $\vec{r} = (2 - 3\mu)\vec{\imath} + 3\mu\vec{\jmath}$.»

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	**Δ.Ε.**
	Οι μαθητές:	
1	Εκφράζουν την ιδιότητα των σημείων του γεωμετρικού τόπου στην επίλυση προβλημάτων όπως: ▪ «Να βρείτε την εξίσωση του γ.τ. του σημείου Μ (χ,ψ) αν (ι) $\chi = \varepsilon\phi t, \psi = \sigma\upsilon\nu t - 1, \quad t \in \mathbb{R}$ (ιι)$\chi = 2\tau^2 + 2\rho^2, \psi = 4(\tau + \rho)$και $\tau \cdot \rho = 8, \tau, \rho \in \mathbb{R}$.»	Γ7.11
2	Χρησιμοποιούν πίνακες 2×2 στο μετασχηματισμό ευθειών ή επιπέδων στην επίλυση προβλημάτων όπως: ▪ « (α) Να βρείτε τα συμμετρικά των διανυσμάτων $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ως προς την ευθεία $\psi = \lambda\chi$ με $\lambda = \varepsilon\varphi\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι γενικά ο πίνακας $R = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu 2\theta & \eta\mu 2\theta \\ \eta\mu 2\theta & \sigma\upsilon\nu 2\theta \end{pmatrix}$ αναπαριστά τον πίνακα της συμμετρίας ως προς την ευθεία ψ=λχ με λ= εφθ και να γράψετε τους αντίστοιχους πίνακες συμμετρίας ως προς τις ευθείες: $3\psi = 4\chi$ και $\psi = -2\chi$. ▪ (β) Να βρείτε την εξίσωση των εικόνων των ευθειών: $(\varepsilon 1)$: $2\psi = \chi$, $(\varepsilon 2)$: $\chi = 2$ και $(\varepsilon 3)$: $\chi + \psi + 2 = 0$ ▪ (γ)Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που απεικονίζεται στο εαυτό της κάτω από τον πίνακα: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$	Γ7.12

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ		
	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Σε ένα κύκλο θεωρούμε εγγεγραμμένο κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Οι διαγώνιες του ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ν. Να αποδειχθεί ότι η ΔΝ είναι μέση ανάλογη των τμημάτων ΑΝ και ΑΔ. ▪ Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι κανονικό.	Γ7.1
2	▪ Τι επιφάνεια παράγει μια ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο Α και τέμνει ευθεία ε, που δεν περιέχει το σημείο Α;	Γ7.2
3	▪ Έστω ϵ_1, ϵ_2 δύο ασύμβατες ευθείες. Να αποδειχθεί ότι: (α) Υπάρχουν δύο επίπεδα, ένα που περιέχει την ϵ_1 και ένα που περιέχει την ϵ_2, τα οποία είναι παράλληλα. (β) Υπάρχει ακριβώς μία ευθεία που είναι κάθετη στις ϵ_1 και ϵ_2 (κοινή κάθετη) και το τμήμα της κοινής κάθετης μεταξύ των ϵ_1 και ϵ_2 είναι το μικρότερο από κάθε άλλο τμήμα με άκρα στις ευθείες αυτές.	Γ7.3
4	▪ Δίνονται τέσσερις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 από τις οποίες οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να κατασκευάσετε ευθεία που να τέμνει και τις τέσσερις.	Γ7.5
5	▪ Σε επίπεδο π φέρουμε κύκλο διαμέτρου ΑΒ και έστω Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Φέρουμε, επίσης, το τμήμα ΑΣ, κάθετο στο επίπεδο π στο Α, το τμήμα ΑΓ κάθετο στην ευθεία ΣΒ στο Γ και το τμήμα ΑΝ κάθετο στην ευθεία ΣΜ στο Ν. Να αποδείξετε ότι: (α) $\angle\Sigma\mathrm{MB} = 90^0$ (β) $\Sigma\mathrm{A}^2 = \Sigma\mathrm{M} \cdot \Sigma\mathrm{N} = \Sigma\mathrm{B} \cdot \Sigma\Gamma$ (γ) τα τρίγωνα $\Sigma\Gamma\mathrm{N}$ και $\Sigma\mathrm{MB}$ είναι όμοια.	Γ7.6
6	▪ Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Οxy. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα των τεταγμένων και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντιστοίχα, να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.	Γ7.9
7	▪ Να βρείτε την διανυσματική, παραμετρική και αναλυτική εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο Α(3,2) και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{a}(-2,1)$.	Γ7.10
8	▪ Να βρεθεί και να σχεδιαστεί ο γ.τ. του σημείου Μ για το οποίο ισχύει $\widehat{\mathrm{MAB}} = 90^0$, όπου Α(2,3) και Β(-4,7). ▪ Να βρείτε την εξίσωση του γ.τ. του σημείου Μ (χ,ψ), αν $\chi = t^2 - 2t + 1, \psi = t - 1, \quad t \in \mathbb{R}$.	Γ7.11

9	▪ Αν Μ(x,y) σημείο του επιπέδου, $\vec{u}(\alpha, \beta)$ δεδομένο διάνυσμα και Μ΄(x΄,y΄) η εικόνα του Μ στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$, να βρείτε τα x΄,y΄ συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ και του διανύσματος $\vec{u}$.	Γ7.12

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.

2 Δίνονται τα διανύσματα θέσης ΟΑ=4i + 8j – k, ΟΒ= 7i + 14j + 5k.

i. Να βρείτε το διάνυσμα ΑΒ.

ii. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας$\angle$ΟΑΒ.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε παράμετρο λ το σημείο Ρ με διάνυσμα θέσης λi + 2λj + (2λ – 9)k βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΑΒ.

iv. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ για την οποία ισχύει ΟΡ κάθετο στην ΑΒ.

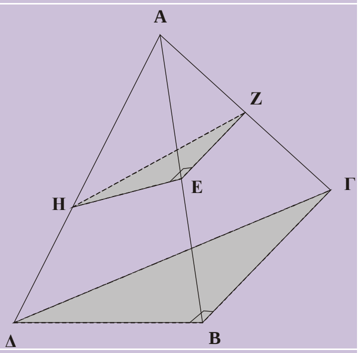
v. Να βρείτε τις συντεταγμένες του ίχνους της καθέτου από το Ο στην ΑΒ.

3 Σε ένα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του είναι η κοινή κάθετη αυτών.

4 Δίνεται κύκλος (Ο,R) πάνω σε ένα επίπεδο (Π). Στο σημείο Ο φέρνουμε κάθετη ευθεία (x) στο επίπεδο (Π). Έστω Μ το μέσο τυχαίας χορδής ΑΒ και Γ τυχαίο σημείο της (x). Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{M\Gamma} \perp \mathrm{AB}$.

5
- Αν τρεις ευθείες τέμνονται ανά δύο και δεν βρίσκονται και οι τρεις στο ίδιο επίπεδο, να αποδείξετε ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- Θεωρούμε δύο ασύμβατες ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και δύο άλλες ευθείες δ_1, δ_2 που τέμνουν τις ϵ_1, ϵ_2. Να αποδείξετε ότι και οι ευθείες δ_1, δ_2 είναι ασύμβατες.

6 Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι κορυφές του τετραέδρου. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, το ΗΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΔΒ και το ΗΖ τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ. Να δείξετε ότι: $(\overset{\Delta}{\mathrm{EZH}}) = \frac{1}{4}\cdot(\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma\Delta}})$.



7 Να επιλέξετε τη σχέση που συνδέει τα λ_ν, α_ν και R: $\lambda_\nu^{\,2}+\frac{\alpha_\nu^{\,2}}{4}=R^2$ $\lambda_\nu^{\,2}+\alpha_\nu^{\,2}=4R^2$

$\lambda_\nu^{\,2}=4(R^2-\alpha_\nu^{\,2})$ $\lambda_\nu^{\,2}+\alpha_\nu^{\,2}=\frac{R^2}{4}$

8 Δίνονται τα διανύσματα θέσης των σημείων Α,Β,Γ αντίστοιχα $(9\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + \mathrm{k}), (6\mathrm{i} + 2\mathrm{j} + 6\mathrm{k})$ και $(3\mathrm{i} + p\mathrm{j} + q\mathrm{k})$, όπου p και q σταθερές.

vi. Να υπολογίσετε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας που περνά από τα Α και Β.

vii. Να βρείτε την τιμή των p και q

viii. Να υπολογίσετε τη γωνία μεταξύ των OC και AB

Το σημείο Δ βρίσκεται πάνω στην AB έτσι ώστε ΟΔ κάθετο στην AB.

ix. Να υπολογίσετε το διάνυσμα θέσης του σημείου Δ.

9 Με τη βοήθεια του πιο κάτω πίνακα να αποδείξετε τον τύπο της ακτίνας της περιγεγραμμένης σφαίρα,ς όπως φαίνεται στον πίνακα.

Κανονικό Πολύεδρο	Ε	Κ	Α	Είδος εδρών
4εδρο	4	10	6	Τρίγωνα
Κύβος	6	8	12	Τετράγωνα
8εδρο	8	6	12	Τρίγωνα
12εδρο	12	20	30	Πεντάγωνα
20εδρο	20	12	30	Τρίγωνα
Κανονικό Πολύεδρο	Ακμές ανά κορυφή	Ακτίνα περιγεγραμμένης σφαίρας		
4εδρο	3	$\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$		
Κύβος	3	$\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$		
8εδρο	4	$\frac{\alpha\sqrt{2}}{4}$		
12εδρο	3	$\frac{\alpha\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$		
20εδρο	5	$\frac{\alpha\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$		

10 Έστω $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ και $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{4}, \mathbf{2})$ και $\vec{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\beta}} = (-\mathbf{7}, \mathbf{8})$

α) Να δείξετε ότι $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2})$ και $\vec{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{2}, -\mathbf{2})$

β) Να βρείτε το κ ώστε τα διανύσματα $\mathbf{k}\vec{\boldsymbol{\alpha}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}$ και $\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\beta}}$ να είναι κάθετα.

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\gamma}}=(\mathbf{3},\mathbf{1})$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κλίμακα 8

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

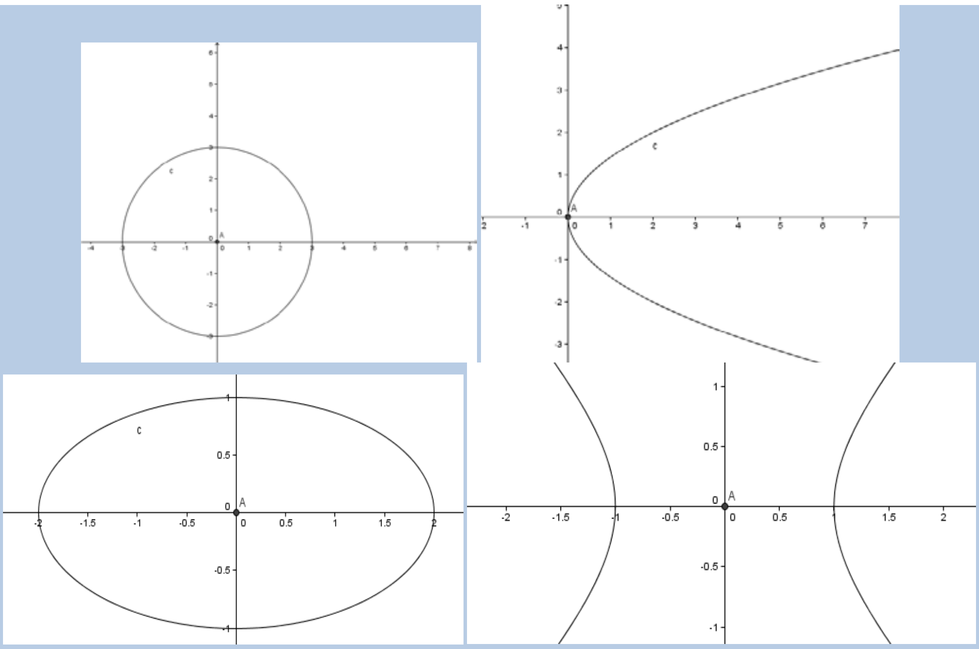
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ
1	Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό.
2	Ορίζουν και διερευνούν τις κωνικές τομές ως τομή επιπέδου με δύο ίσους κώνους με κοινό άξονα και κοινή κορυφή.
3	Ορίζουν, διερευνούν και αποδεικνύουν τις αναλυτικές εξισώσεις των κωνικών τομών ως το γεωμετρικό τόπο σημείων επιπέδου με κοινή ιδιότητα.
4	Αναπαριστούν τις κωνικές τομές σε γραφικές παραστάσεις .
5	Αναφέρουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες των κωνικών τομών.
6	Αναφέρουν και διερευνούν γεωμετρικά και αλγεβρικά τη θέση σημείου ή ευθείας με τις κωνικές τομές.
7	Βρίσκουν και εφαρμόζουν τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης των κωνικών τομών.
8	Βρίσκουν, αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν τις παραμετρικές εξισώσεις των κωνικών τομών.
9	Βρίσκουν και ερμηνεύουν το γεωμετρικό τόπο που δημιουργείται από τις κωνικές τομές.
10	Ορίζουν τις συντεταγμένες σημείου και διανυσματικής ακτίνας σημείου στο χώρο. Διερευνούν με τη βοήθεια λογισμικών το τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων.
11	Διερευνούν και επεξηγούν τη θέση δύο διανυσμάτων στο χώρο, συγκρίνουν και εκτελούν πράξεις μεταξύ δύο διανυσμάτων.
12	Διερευνούν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες του εσωτερικού, εξωτερικού και μικτού γινομένου διανυσμάτων.
13	Διερευνούν τη θέση ευθειών στο χώρο και υπολογίζουν τη γωνία μεταξύ ευθειών.

14	Διερευνούν εξισώσεις και θέσεις των ευθειών στο χώρο.
15	Διερευνούν εξισώσεις και θέσεις των επιπέδων στο χώρο.
16	Διερευνούν και χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πινάκων και μελετούν τις πράξεις μεταξύ πινάκων και επιλύουν γραμμικά συστήματα

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ
17	Διερευνούν και ανακαλύπτουν Γεωμετρικούς μετασχηματισμούς με την βοήθεια πινάκων και τη χρήση δυναμικών λογισμικών προγραμμάτων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΥ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό όπως: ▪ «Να χρησιμοποιήσετε παραγωγικό συλλογισμό, για να αποδείξετε γιατί (α) δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες (β) δύο εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες (γ) δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους ανά δύο παράλληλες είναι ίσες.»	Γ8.1
2	Ορίζουν τις κωνικές τομές και διακρίνουν προϋποθέσεις, όπως: ▪ «Να αναφέρετε το είδος της τομής που προκύπτει, αν κάποιο επίπεδο τμήσει ένα ορθό κυκλικό κώνο, έτσι ώστε: (α)το επίπεδο να είναι παράλληλο προς μια γενέτειρα του κώνου (β) το επίπεδο να είναι κάθετο στον άξονα του κώνου (γ) το επίπεδο δεν είναι παράλληλο προς καμιά γενέτειρα του κώνου. (δ) το επίπεδο να είναι παράλληλο προς τον άξονα συμμετρίας του κώνου (ε) το επίπεδο να περιέχει τον άξονα συμμετρίας του κώνου.»	Γ8.2
3	Διερευνούν και αποδεικνύουν τις αναλυτικές εξισώσεις των κωνικών τομών σε προβλήματα όπως: ▪ «Έστω $\mathrm{E}(2,0)$ σταθερό σημείο και $(\delta){:}\, \chi = -2$ σταθερή ευθεία. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου $\mathrm{T}(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $(\alpha)\ \frac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TN}} = 1, (\beta) \frac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TN}} = \frac{1}{2}$ και $(\gamma) \frac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TN}} = 2$, όπου ΤΝ η απόσταση του σημείου $\mathrm{T}(x, y)$ από την ευθεία (δ). Σε κάθε περίπτωση να σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα τον αντίστοιχο τόπο.»	Γ8.3
4	Γράφουν την εξίσωση από τις γραφικές παραστάσεις του κύκλου, της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής όπως: ▪ «Να αναφέρετε το είδος της κωνικής τομής και να γράψετε την αντίστοιχη εξίσωσή της στις πιο κάτω περιπτώσεις:»	Γ8.4



5	Χρησιμοποιούν βασικές ιδιότητες των κωνικών τομών για την επίλυση προβλημάτων, όπως: ▪ «Έστω τα σταθερά σημεία $\mathrm{A}(-4,0)$και $\mathrm{B}(4,0)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου $\mathrm{T}(x,y)$ για τα οποία ισχύει: $(\mathrm{TA})+(\mathrm{TB})=10$. Πως θα μπορούσατε να αναπαραστήσετε τον πιο πάνω τόπο;»	Γ8.5
6	Εφαρμόζουν τη θέση σημείου ή ευθείας ως προς κωνική τομή στην επίλυση προβλημάτων όπως: ▪ «Να βρείτε τη θέση του τυχαίου σημείου Α από την αντίστοιχη κωνική τομή (κ) στις πιο κάτω περιπτώσεις: (α) Α(3,4) και (κ): $x^2+y^2=36$. (β) Α(2,-1) και (κ): $y^2=\frac{x}{2}$. (γ) $\mathrm{A}(\sqrt{3},2)$ και (κ): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (δ) Α(3,4) και (κ): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ (ε) Α($ct,\frac{c}{t}$) και (κ): $xy=c^2$»	Γ8.6
7	Βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης ή της κάθετης σε κωνική τομή σε προβλήματα, όπως: ▪ «(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της παραβολής $y^2=4x$ στο σημείο της Α(9,6). (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ που είναι παράλληλη προς την ευθεία : $x+y=2$. (γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $xy=4$, που άγεται από το σημείο $\mathrm{A}(3,1)$.»	Γ8.7
8	Χρησιμοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις κωνικών τομών για την επίλυση προβλημάτων, όπως:	Γ8.8

	▪ «Να δείξετε ότι καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις: $x = 2συνθ - 1$, $y = 2ημθ + 3$, $θ \in [0,2π]$ είναι κύκλος και να αναφέρετε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του.»	
9	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες διανυσμάτων στο χώρο για την επίλυση προβλημάτων, όπως: ▪ «Έστω τα σημεία Α(1,2,3) και Β(2,-4,1). Να βρείτε τις διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α και Β, καθώς και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.» ▪ «Να βρείτε το μήκος του $\overrightarrow{AB}$ και το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$.»	Γ8.10
10	Εκτελούν πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων, όπως: ▪ «Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{i}+3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{v} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ και $\vec{w} = α\vec{i}+β\vec{j} - 4\vec{k}$ (α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{u} + \vec{v}$ και $2\vec{v} - 3\vec{u}$. (β) Να βρείτε τα α και β αν $\vec{u} // \vec{v}$. (γ) Να βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο $\vec{v}$.»	Γ8.11
11	Εφαρμόζουν τις ιδιότητες του εσωτερικού, εξωτερικού και μικτού γινομένου διανυσμάτων στη λύση προβλημάτων, όπως: ▪ «Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α} = -2\vec{i}+3\vec{j} + 2\vec{k}$,$\vec{β} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ και $\vec{γ} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ (α) Να υπολογίσετε $\vec{α} \cdot \vec{β}$, $\vec{α} \times \vec{β}$ και $\vec{α} \times \vec{β} \cdot \vec{γ}$ (β) Να βρείτε το μήκος της προβολής του διανύσματος $\vec{α}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{β}$. (γ) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{α}$ και $\vec{β}$. (δ) Να βρείτε διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ και την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν τα $\vec{α}$ και $\vec{β}$.»	Γ8.12
12	Διερευνούν εξισώσεις και θέσεις των ευθειών στο χώρο και υπολογίζουν τη γωνία μεταξύ ευθειών, όπως: ▪ «Δίνονται τα σημεία στον χώρο $Α(1, -2,3)$, $Β(0,4, -1)$και $Γ(6,3,1)$. (α)Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΑΓ (β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ΒΑΓ (γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και (δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ.»	Γ8.14

13	Διερευνούν εξισώσεις και θέσεις των ευθειών στο χώρο σε προβλήματα, όπως: ▪ «Να διαπιστώσετε τη θέση των πιο κάτω ευθειών (αν είναι παράλληλες ή τεμνόμενες ή συμπίπτουν). Στην περίπτωση των τεμνόμενων ευθειών να βρείτε το σημείο τομής τους. (α) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{4}, \frac{x-6}{-6}=\frac{y+2}{9}=\frac{z}{-12}$ (β) $\frac{x-1}{2}=\frac{2y-1}{1}=\frac{z}{-1}$, $1-x=3-4y=2z-1$ (γ) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{5-z}{6}$, x-1= $\frac{y+2}{3}=2-z$ (δ) $\vec{r}=-\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}+\lambda(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})$, $\vec{r}=(2-3\mu)\vec{i}+3\mu\vec{j}+(1+2\mu)\vec{k})$»	Γ8.14
14	Χρησιμοποιούν τις διανυσματικές, παραμετρικές και αναλυτικές εξισώσεις ευθειών και επιπέδων σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου: (α) όταν περιέχει τα σημεία $A(1,2,-2), B(2,3,1)$ και $\Gamma(4,2,0)$ (β) όταν περιέχει την ευθεία: $\vec{r}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}+\lambda(3\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k})$ και περνά από το σημείο $\Delta(-3,2,4)$. (γ) που ορίζουν οι ευθείες: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$ και $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{2}$.» ▪ «Να δείξετε ότι τα επίπεδα $(\Pi1)$: $3x+y-2z=10$ και $(\Pi2)$: $6x+2y-4z=25$ είναι παράλληλα και να υπολογίσετε την απόσταση τους.» ▪ «Να βρείτε την τομή των επιπέδων: $x+2y+3z=1$ και $x+y+2z=0$.»	Γ8.15
15	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πινάκων και τις πράξεις μεταξύ πινάκων για επιλύουν προβλήματα, όπως: ▪ «Δίνονται οι πίνακες: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι: (α) $A\cdot B\neq B\cdot A$, (β) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$ και (γ) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$. (δ) Με χρήση του πίνακα B^{-1}, να λύσετε το σύστημα: $-x+y=5,\ -2x+3y=12$.» • «Να δώσετε κατάλληλο παράδειγμα έτσι ώστε να ισχύει $A\cdot B=B\cdot A$» • «Να βρείτε πίνακα Α 2×2 που να μην έχει αντίστροφο A^{-1}.» • «Να βρείτε πίνακα 3×3 που να είναι συμμετρικός (δηλαδή να ισχύει $A=A^T$» • «Να βρείτε πίνακα 3×3 που να είναι αντισυμμετρικός (δηλαδή να ισχύει $A=-A^T$»	Γ8.16

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	**Δ.Ε.**
	Οι μαθητές:	
1	Εφαρμόζουν γεωμετρικούς μετασχηματισμούς για την επίλυση προβλημάτων, όπως: ▪ «Να βρείτε τους 2×2 πίνακες που αντιστοιχούν στους πιο κάτω γραμμικούς μετασχηματισμούς, επεξηγώντας τον τρόπο σκέψης σας και επαληθεύοντας με κατάλληλο παράδειγμα: (α) Συμμετρία ως προς Οχ, (β) Συμμετρία ως προς Οy, (γ) Συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$, (δ) Συμμετρία ως προς την ευθεία $y = -x$. (ε) Στροφή ως προς κέντρο το (0,0) και προσανατολισμένη γωνία $+90^0$ (στ) Στροφή ως προς κέντρο το (0,0) και προσανατολισμένη γωνία-90^0 (ζ) Στροφή ως προς κέντρο το $(0,0)$και προσανατολισμένη γωνία θ^0 (η) Ομοιοθεσία με κέντρο το(0,0) και λόγο $\lambda = 2$, $\lambda = -2$, $\lambda = \frac{1}{2}$.» ▪ «Γραμμικός μετασχηματισμός Μ δίνεται από τον πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε μέσω του μετασχηματισμού Μ (α) την εικόνα του σημείου Β(2,3), (β)τις συντεταγμένες του σημείου που έχει εικόνα το Γ(7,2) και (γ) την εικόνα της ευθείας $y = 2x + 1$.»	Γ8.17

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Με τη χρήση κατάλληλου δυναμικού λογισμού να κατασκευάσετε τις κωνικές τομές ως τομή επιπέδου με δύο ίσους κώνους, με κοινό άξονα και κοινή κορυφή.	Γ8.2
2	▪ Να βρείτε τα στοιχεία των κωνικών τομών και να τις σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (α) $x^2+y^2+2x+3=0$ (β) $(x-2)^2+4(y+3)^2=12$, (γ) $2x^2-2(y-2)^2=4$ (δ) $x\cdot y=18$	Γ8.4
3	▪ Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α(-1,0) και Ο(0,0) και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία: $y=x+1$ ▪ Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία: $3x+4y=12$ και τους θετικούς ημιάξονες.	Γ8.5
4	▪ Να βρείτε την τιμή του α, αν η ευθεία $y=ax+2$ εφάπτεται της παραβολής καθώς και το σημείο επαφής τους.	Γ8.7
5	▪ Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής που ενώνει τα σημεία $A(cp,\frac{c}{p})$ και $B(cq,\frac{c}{q})$ της ισοσκελούς υπερβολής $xy=c^2$, είναι $pqy+x=c(p+q)$. Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία από το σημείο της υπερβολής $\Gamma(cr,\frac{c}{r})$, να δείξετε ότι το ΑΒ είναι είναι παράλληλο προς την κάθετη της υπερβολής στο Γ.	Γ8.8
6	▪ Να βρείτε τη διανυσματική ακτίνα του σημείου τομής της ευθείας (ε): $\vec{r}=5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}+\lambda(\vec{i}-4\vec{j}+2\,\vec{k})$ με το επίπεδο (Π): $\vec{r}\cdot\left(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\right)=12$	Γ8.10
7	▪ Να βρείτε την οξεία γωνία μεταξύ της ευθείας: $\frac{x-6}{5}=1-y=z+1$ και του επιπέδου $7x-y+5z=-5$	Γ8.13
8	▪ Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που έχει διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\vec{r}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}+\lambda\left(\vec{i}+\vec{j}+2\,\vec{k}\right)+\mu\left(2\vec{j}-\,\vec{k}\right)$	Γ8.15
9	▪ Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ και στη συνέχεια να λύσετε το σύστημα των τριών εξισώσεων: $2x-y+3z=0$ $x+y-2z=-1$	Γ8.16

10	$3x + y + 2z = 5$ ▪ Να δείξετε ότι ο πίνακας M=$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ απεικονίζει τα σημεία της ευθείας : $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \lambda(\vec{i} + 2\vec{j})$ σε ένα μόνο σημείο και να το προσδιορίσετε. ▪ Να βρείτε τις πιθανές τιμές του χ, αν $A = \begin{pmatrix} χ^2 & 3 \\ 1 & 3χ \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & χ \end{pmatrix}$ και ισχύει $A \cdot B = B \cdot A$.	Γ8.17

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου Α(-1,2,4) από την ευθεία $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + \lambda(\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k})$
2	Να μελετήσετε από διάφορες πηγές και να παρουσιάσετε εφαρμογές που χρησιμοποιούν τις κωνικές τομές.
3	Να βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού της συμμετρίας ως προς την ευθεία $y = mx$, με $m = εφθ$.
4	Σημείο P κινείται πάνω στη έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 1$ και το N είναι το ίχνος της καθέτου από το P στην ευθεία χ=2. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του μέσου του PN , όταν το P κινείται πάνω στην έλλειψη.

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κλίμακα 1

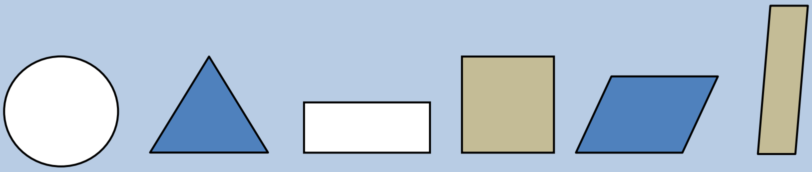
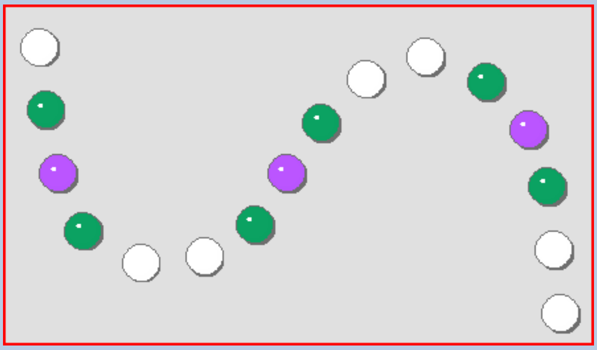
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

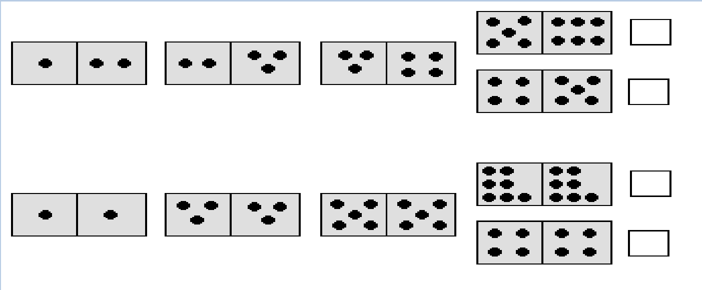
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ
1	Ταξινομούν, κατηγοριοποιούν, συγκρίνουν αντικείμενα σύμφωνα με κάποιο χαρακτηριστικό/κριτήριο/ιδιότητά τους και διακρίνουν αντικείμενα τα οποία δεν ανήκουν στη συγκεκριμένη ομάδα.
2	Αναγνωρίζουν και περιγράφουν μοτίβα που βασίζονται σε κοινά χαρακτηριστικά (εικονικά, λεκτικά, ρυθμικά, αριθμητικά).
3	Επεκτείνουν, συμπληρώνουν και κατασκευάζουν μοτίβα και περιγράφουν τον κανόνα τους.
4	Μεταφράζουν μοτίβα από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
5	Κατανοούν την έννοια της ισότητας και ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια και χρησιμοποιούν τα σύμβολα =, >, <..
6	Κατανοούν και χρησιμοποιούν την αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό.
7	Υπολογίζουν την τιμή της μεταβλητής σε εξισώσεις και προβλήματα.
8	Διερευνούν και αναπαριστούν αριθμητικές ιστορίες και καταστάσεις, χρησιμοποιώντας μεταβλητές, σχέδια, γραφικές παραστάσεις και εξισώσεις.

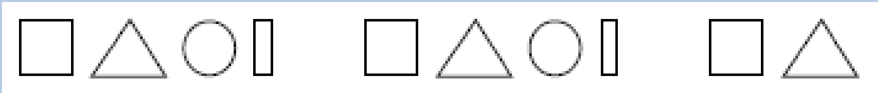
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Ταξινομούν, κατηγοριοποιούν, συγκρίνουν αντικείμενα σύμφωνα με κάποιο χαρακτηριστικό, όπως: • «Να ομαδοποιήσετε τα ακόλουθα γεωμετρικά σχήματα με κριτήριο το πλήθος των πλευρών τους. Στη συνέχεια, να επαναλάβετε τη δραστηριότητα χρησιμοποιώντας διαφορετικό κριτήριο.» 	Α1.1
2	Αναγνωρίζουν και περιγράφουν μοτίβα που βασίζονται σε κοινά χαρακτηριστικά, όπως: • «Να περιγράψετε το μοτίβο που επαναλαμβάνεται στο πιο κάτω περιδέραιο.»  • «Να εντοπίσετε και να περιγράψετε αριθμητικά μοτίβα στον Πυθαγόρειο Πίνακα.»	Α1.2
3	Επεκτείνουν, συμπληρώνουν και κατασκευάζουν μοτίβα και περιγράφουν τον κανόνα τους, όπως:	Α1.3

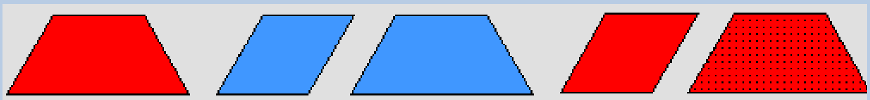
- «Να τοποθετήσετε ✓ στο κατάλληλο τετραγωνάκι, για να συνεχιστεί το μοτίβο.»



- «Να συνεχίσετε τα μοτίβα.»



…



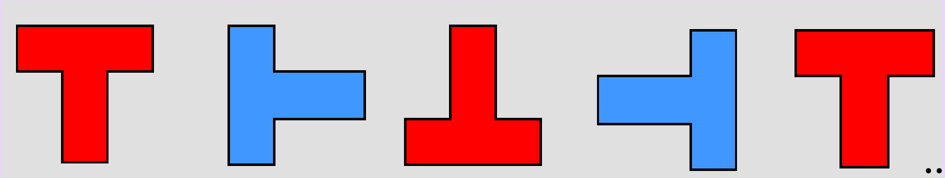
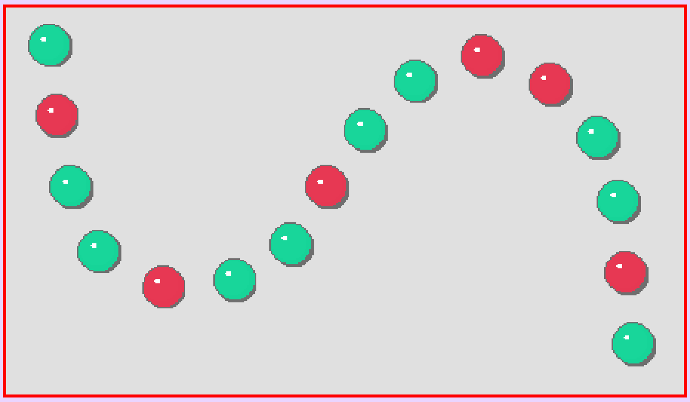
…

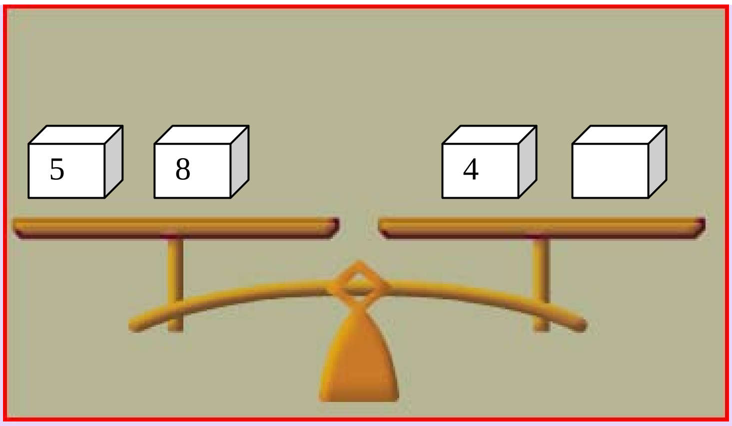
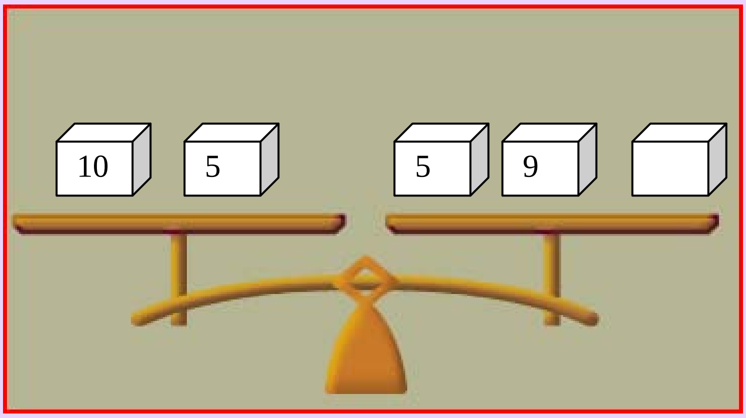
4	Μεταφράζουν μοτίβα από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, όπως: • «Θα ακούσετε μουσικά κομμάτια της μορφής ΑΒ. Όταν ακούσετε τη μορφή Α, να σηκώσετε το κόκκινο χαρτόνι και όταν ακούσετε τη μορφή Β, να σηκώσετε το πράσινο. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε ένα δικό σας μουσικό κομμάτι αυτής της μορφής.»	Α1.4

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	**Δ.Ε.**
	Οι μαθητές:	
1	Κατανοούν την έννοια της ισότητας και ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια , όπως: • «Να τοποθετήσετε κατάλληλα σταθμά στη ζυγαριά ώστε να ισορροπεί. Να καταγράψετε το άθροισμα των σταθμών κάθε πλευράς της ζυγαριάς και να χρησιμοποιήσετε το σύμβολο της ισότητας ή ανισότητας, για να δείξετε τη σχέση μεταξύ των δύο αθροισμάτων. • «Να συμπληρώσετε με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να	Α1.5

	ισχύουν οι ισότητες.» 3+5=4+☐ 10-2=☐-3	
2	Διερευνούν την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης μέσω προβλημάτων, όπως: • « Ο Γιάννης έχει δύο αδελφές και τρεις αδελφούς. Πόσα αδέλφια έχει ο Γιάννης;» • «Η Μαρία έχει τρεις αδελφούς και δύο αδελφές. Πόσα αδέλφια έχει η Μαρία;»	Α1.6
3	Υπολογίζουν την τιμή της μεταβλητής σε εξισώσεις και προβλήματα, επεξηγώντας λεκτικά και εκφράζοντας συμβολικά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, όπως: • «Η Ιωάννα παρακολούθησε για 20 λεπτά τα αγαπημένα της κινούμενα σχέδια. Η Ιωάννα παρακολουθεί τηλεόραση μόνο μισή ώρα την ημέρα. Πόσα ακόμα λεπτά θα παρακολουθήσει κινούμενα σχέδια;»	Α1.7
4	Διερευνούν και αναπαριστούν αριθμητικές ιστορίες και καταστάσεις, χρησιμοποιώντας μεταβλητές, σχέδια, γραφικές παραστάσεις και εξισώσεις, όπως: • «Να επιλέξετε ποια εξίσωση αντιστοιχεί στο πιο κάτω πρόβλημα: Ο Αντρέας έχει στη βιβλιοθήκη του 15 βιβλία. Η αδελφή του έχει 3 βιβλία λιγότερα. Πόσα βιβλία έχει στη βιβλιοθήκη της η αδελφή του Αντρέα;» (α) 15+3=ν (β) 15-3=ν (γ) 15-ν=3 (δ) 15+ν=18 • «Θα παίξετε το παιγνίδι ‘κρύψε τα κέρματα’. Ο πρώτος παίχτης θα τοποθετήσει στο θρανίο μερικά κέρματα (π.χ. 7) και θα αφήσει τον άλλο παίχτη να τα μετρήσει. Στη συνέχεια, θα καλύψει ένα μέρος από τα κέρματα και ο δεύτερος παίχτης θα πρέπει να μαντέψει πόσα κέρματα έχουν καλυφθεί. Να αναπαραστήσετε το πρόβλημα με αντικείμενα ή με εικόνες ή με εξίσωση.»	Α1.8

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	Περιγράφουν ένα αντικείμενο και το εντοπίζουν μέσα σε ένα σύνολο αντικειμένων με βάση τις ιδιότητές του.	Α1.1
2	Συνεχίζουν το πιο κάτω μοτίβο:  …	Α1.2
3	Διαγράφουν μια χάντρα ώστε να υπάρχει μοτίβο. 	Α1.3
4	Ομαδοποιούν με βάση κοινές ιδιότητες αντικείμενα που παρουσιάζονται σε εικόνες.	Α1.1
5	Καταγράφουν οδηγίες ώστε κάποιος που δεν βλέπει το πιο κάτω σχήμα να το κατασκευάσει: 	Α1.3
6	Βρίσκουν διαφορετικά ζεύγη αριθμών που δίνουν συγκεκριμένο άθροισμα ή γινόμενο.	Α1.5
7	Συμπληρώνουν τους αριθμούς στα κενά κουτιά στις ζυγαριές, για να ισορροπήσουν.	Α1.5 Α1.7

	 	
8	Επιλέγουν ποια από τις πιο κάτω προτάσεις αντιστοιχεί στην εξίσωση «☐-2=6». (α) Η Μαργαρίτα είχε 8 μολύβια και τις έδωσε μια φίλη της ακόμη δύο. Πόσα έχει τώρα; (β) Η Μαργαρίτα έχει 6 μολύβια. Τα δύο της τα έδωσε μια φίλη της. Πόσα μολύβια είχε η Μαργαρίτα; (γ) Η Μαργαρίτα δώρισε σε μια φίλη της δύο μολύβια και τώρα έχει έξι μολύβια. Πόσα μολύβια είχε πριν να δωρίσει τα δύο στη φίλη της;	Α1.7 Α1.8
9	Επιλύουν προβλήματα, όπως: «Η Μαρία χρησιμοποίησε την υπολογιστική της μηχανή και βρήκε ότι 313+597=910. Σε ένα άλλο πρόβλημα πρέπει να βρει την απάντηση στην εξίσωση 597+313=☐. Τι πρέπει να κάνει; Γιατί;»	Α1.6

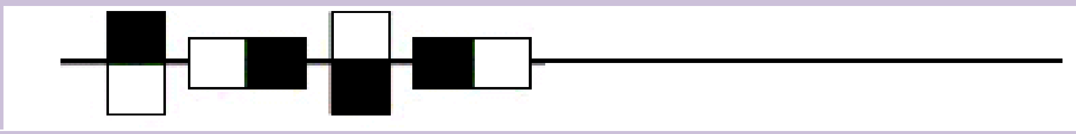
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Φτιάχνουν δικά τους ρυθμικά τραγούδια με στίχους που επαναλαμβάνονται.

2 Διακοσμούν αντικείμενα με μοτίβα της επιλογής τους.

3 Συνεχίζουν μοτίβα:

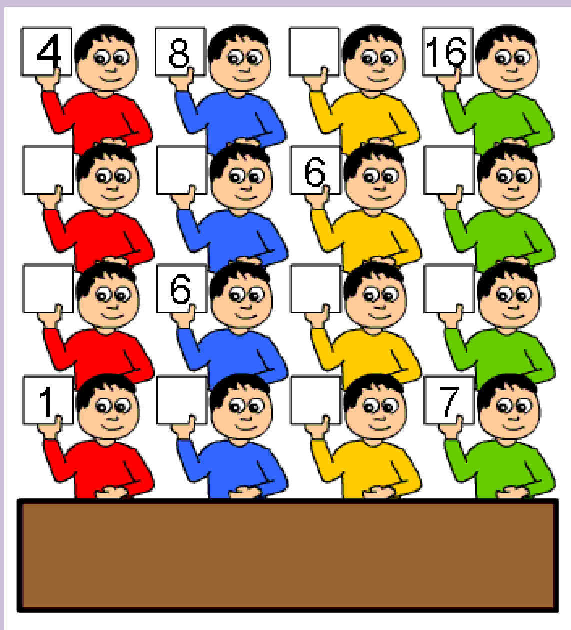


4 Κατασκευάζουν δικά τους μοτίβα χρησιμοποιώντας ψηφιακά εφαρμογίδια που παρουσιάζουν «Σχήματα Μοτίβου» και «Πεντόμινος».

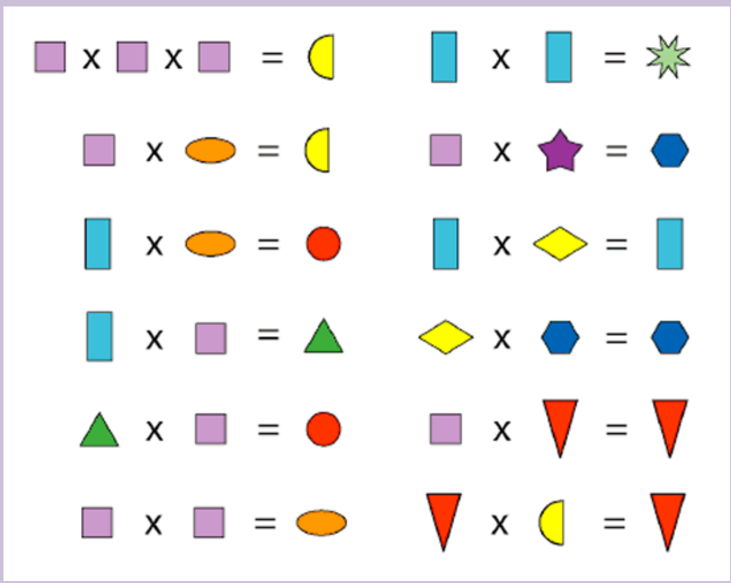
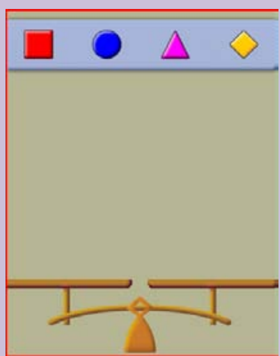
http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

5 Χρησιμοποιούν υπολογιστική μηχανή ή ηλεκτρονικό υπολογιστή, για να παίξουν το παιγνίδι «μάντεψε τον κανόνα». Ένας μαθητής γράφει στην υπολογιστική του π.χ. 6+3= και δείχνει στην ομάδα του την απάντηση. Συνεχίζει να πατά το πλήκτρο « =» και η ομάδα του προσπαθεί να μαντέψει τον κανόνα.

6 Επιλύουν προβλήματα, όπως:
«Στην εικόνα παρουσιάζονται 16 παιδιά που στέκονται σε τέσσερις γραμμές και τέσσερις στήλες. Το καθένα κρατά μία κάρτα στην οποία αναγράφεται ένας αριθμός.



Τα παιδιά με τα μπλε πουκάμισα κρατούν έναν αριθμό που είναι κατά τέσσερα μεγαλύτερος από το παιδί στην ίδια σειρά με κόκκινο πουκάμισο. Τα παιδιά με τα κίτρινα

	πουκάμισα κρατούν έναν αριθμό που είναι διπλάσιος από τον αριθμό που κρατά το παιδί στην ίδια σειρά με το κόκκινο πουκάμισο. Να βρείτε τους αριθμούς των παιδιών με πράσινα πουκάμισα. Αν υπήρχε ακόμη μια σειρά τεσσάρων παιδιών, ποιο αριθμό θα κρατούσε το κάθε παιδί;»
7	Βρίσκουν το γινόμενο των πιο κάτω πολλαπλασιασμών, αν τα χρωματισμένα σχήματα αναφέρονται σε έντεκα από τους αριθμούς από το 0 μέχρι το 12 και κάθε σχήμα είναι ένας διαφορετικός αριθμός. 
8	Επεξηγούν χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα μέσα γιατί ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.
9	Συμπληρώνουν ζυγαριές με αντικείμενα ώστε να ισορροπούν στο ψηφιακό εφαρμογίδιο. http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=33 

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κλίμακα 2

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ
1	Αναγνωρίζουν, περιγράφουν και επεκτείνουν μοτίβα.
2	Κατασκευάζουν μοτίβα χρησιμοποιώντας διαφορετικά μέσα αναπαράστασης.
3	Χρησιμοποιούν λεκτικές και αλγεβρικές εκφράσεις, για να αναπαραστήσουν αθροιστικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις.
4	Χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουν αριθμητικές σχέσεις.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
5	Χρησιμοποιούν κατάλληλα τα σύμβολα της ισότητας και ανισότητας, συμπληρώνουν, ερμηνεύουν και εκφράζουν ισότητες, για να δείξουν αριθμητικές σχέσεις.
6	Κατασκευάζουν εξισώσεις για την επίλυση προβλημάτων και επιλύουν απλές εξισώσεις στις οποίες η μεταβλητή αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους (π.χ. τετράγωνο, κενό).
7	Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική), για να απλοποιήσουν νοερούς υπολογισμούς και να ελέγχουν τα αποτελέσματά τους.
8	Επιλύουν προβλήματα ρουτίνας και διαδικασίας χρησιμοποιώντας ποικιλία στρατηγικών.
9	Επιλύουν προβλήματα λογικής σκέψης.
10	Κατασκευάζουν προβλήματα χρησιμοποιώντας δεδομένα από πίνακες, εικόνες και γραφικές παραστάσεις.

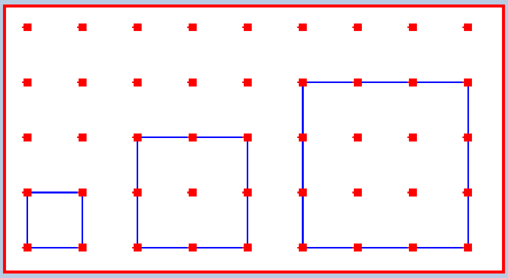
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Αναγνωρίζουν, περιγράφουν και επεκτείνουν μοτίβα, όπως: — Α2.1

- «Να σχεδιάσετε επόμενους δύο όρους του μοτίβου και να βρείτε ποιον αριθμό αναπαριστά το έβδομο στη σειρά σχήμα.»



- Να συμπληρώσετε τα κενά στον πιο κάτω πίνακα, ο οποίος παρουσιάζει τα αποτελέσματα που δίνει μια αριθμομηχανή. Στην πρώτη στήλη φαίνεται ο αριθμός που εισάγεται στην αριθμομηχανή και στη δεύτερη στήλη το αποτέλεσμα.

Εισαγωγή	Έξοδος
10	18
20	38
5	8
8	___
12	___
___	10

2 Κατασκευάζουν μοτίβα χρησιμοποιώντας διαφορετικά μέσα αναπαράστασης, όπως: — Α2.2

- «Να χρησιμοποιήσετε σχήματα ιδιοτήτων, για να κατασκευάσετε ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο χρησιμοποιώντας τρία χρώματα και δύο σχήματα.»

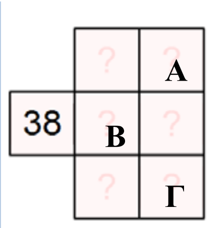
  (Τα σχήματα ιδιοτήτων περιλαμβάνουν τέσσερα διαφορετικά σχήματα, σε δύο μεγέθη και τέσσερα διαφορετικά χρώματα).

3 Χρησιμοποιούν λεκτικές και αλγεβρικές εκφράσεις, για να αναπαραστήσουν αθροιστικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις, όπως: — Α2.1, Α2.3

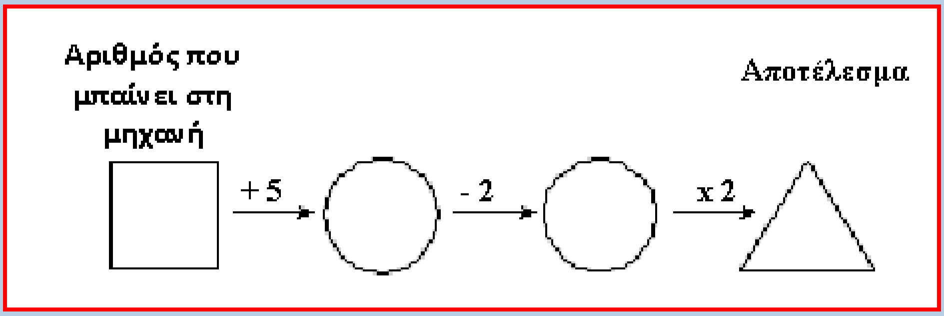
- «Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα τμήμα του Πυθαγόρειου πίνακα.

  (Α) Ποιος αριθμός υπάρχει στο τετράγωνο Α;

  (Β) Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των αριθμών που βρίσκονται στα τετράγωνα Β και Γ;»



- «(α) Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα που δίνει η πιο κάτω αριθμομηχανή, όταν εισάγεται ένας συγκεκριμένος αριθμός:



  (β) Να περιγράψετε λεκτικά και να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση μεταξύ του αποτελέσματος και του αριθμού που μπαίνει στη μηχανή.»
- «Ο Βασίλης θέλει να αγοράσει μια δωδεκάδα μολύβια. Το κατάστημα «Α» πωλεί προς ένα ευρώ μια εξάδα μολυβιών. Το κατάστημα «Β» πωλεί τα μολύβια προς 15 σεντ το ένα και το κατάστημα «Γ» πωλεί τα τέσσερα μολύβια προς 65 σεντ. Ποιο κατάστημα πρέπει να επιλέξει ο Βασίλης, ώστε να εξοικονομήσει τα περισσότερα λεφτά;»

4 Χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουν αριθμητικές σχέσεις, όπως: A2.4

- «Να αναπαραστήσετε σε τετραγωνισμένο χαρτί το ποσό που πρέπει να πληρώσει ένας μαθητής για την αγορά βιβλίων σε σχέση με τον αριθμό των βιβλίων που αγοράζει, αν η τιμή του κάθε βιβλίου είναι 5 ευρώ.»
- «Να μετρήσετε τη θερμοκρασία ενός ποτηριού με ζεστό νερό κάθε 15 λεπτά. Στη συνέχεια, να καταγράψετε τα αποτελέσματά σας σε πίνακα (χρόνος και θερμοκρασία) και τα τοποθετήσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, σχηματίζοντας μια γραμμική γραφική παράσταση. Να ακολουθήσετε την ίδια διαδικασία για ένα ποτήρι με παγωμένο νερό, κάνοντας πρόβλεψη για τη μορφή της γραφικής παράστασης.»

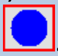
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ — Δ.Ε.

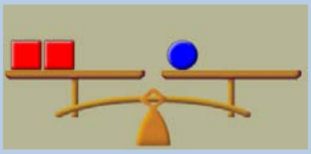
Οι μαθητές:

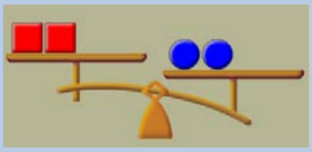
1 Χρησιμοποιούν κατάλληλα τα σύμβολα της ισότητας και ανισότητας, συμπληρώνουν, ερμηνεύουν και εκφράζουν ισότητες, για να δείξουν αριθμητικές σχέσεις, όπως: — A2.5

- «Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ισότητες με τους κατάλληλους αριθμούς ή σύμβολα.»

  (α) 3 x _____ = 210 (β) 3 ___ 5 = 20 – 5 (γ) 5 __4=17___3

- «(α) Διερευνούν και καταγράφουν σχέσεις ισότητας και ανισότητας, χρησιμοποιώντας τα αντικείμενα  και .

  (β) Υπολογίζουν πόσα ζυγίζει ένα τετράγωνο, αν γνωρίζουν ότι ένας κύκλος ζυγίζει 80g.»

2 Κατασκευάζουν εξισώσεις για την επίλυση προβλημάτων και επιλύουν απλές εξισώσεις ,όπως: — A2.6

- «Η Ειρήνη έχει 15 γραμματόσημα στη συλλογή της. Κάποιος της δώρισε γραμματόσημα και τώρα έχει 33. Ποια από τις πιο κάτω αριθμητικές προτάσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί, ώστε να υπολογιστεί ο αριθμός των γραμματοσήμων που της δώρισαν;»

  (α) 15 + __ = 33 (γ) __ - 33 = 15

  (β) 15 + 33 = (δ) __ - 15 = 33

- «Επιλύουν εξισώσεις, όπως:»

$$5 + \square = 10$$

$$2\nabla + 2 = 12$$

$$3 \diamond -9 = 0$$

- «Η Ειρήνη έχει στη συλλογή της 85 ηλεκτρονικά παιγνίδια. Ο Αντρέας έχει διπλάσια ηλεκτρονικά παιγνίδια στη συλλογή του. Η Νεφέλη έχει 5 ηλεκτρονικά παιγνίδια περισσότερα από τον Αντρέα. Πόσα ηλεκτρονικά παιγνίδια έχει η Νεφέλη;»

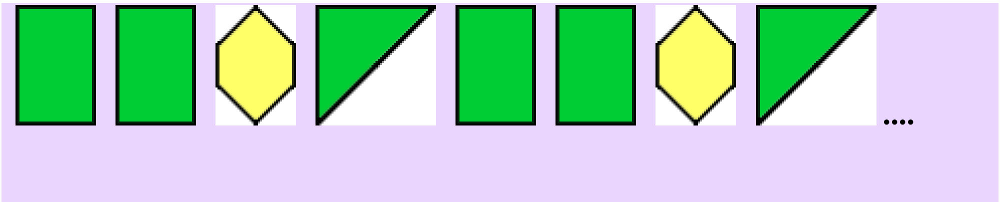
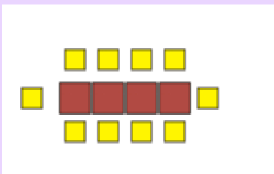
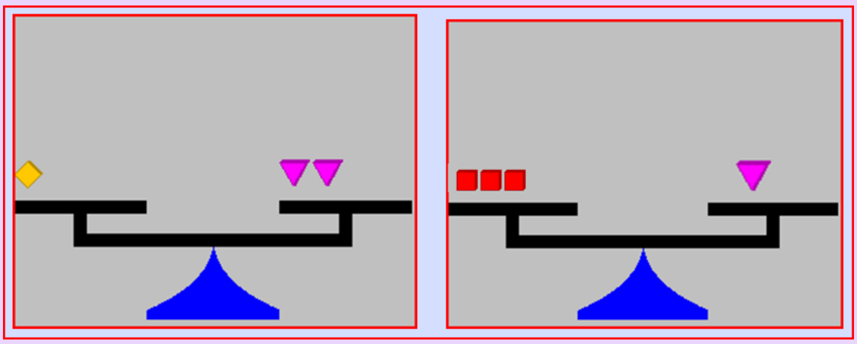
3 Επιλύουν προβλήματα νοερά, χρησιμοποιώντας κατάλληλες ιδιότητες των πράξεων, όπως: — A2.7

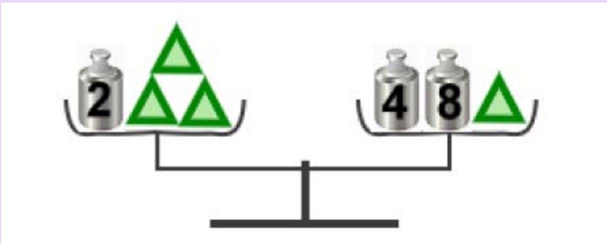
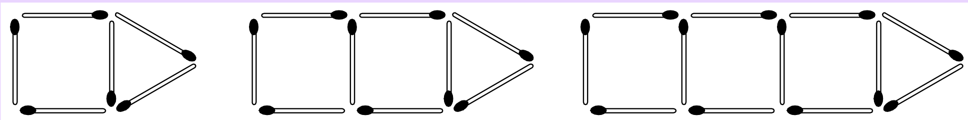
- «Ο Γιώργος έχει 13 κασόνια που περιέχουν 8 μολύβια το καθένα. Πόσα μολύβια έχει ο Γιώργος;»

	• «Η Ελεονώρα θέλει να διαβάσει όλα τα βιβλία που υπάρχουν στις τέσσερις βιβλιοθήκες του γραφείου της. Κάθε βιβλίο περιέχει 27 σελίδες και κάθε βιβλιοθήκη έχει 50 βιβλία. Πόσες σελίδες πρέπει να διαβάσει η Ελεονώρα;» • «Κάνουν κατάλληλα σχέδια, για να δείξουν τα πιο κάτω:» (α) Γιατί 6x7=7x6. (β) Γιατί 12x5=(10x5)+(2x5)	
8	Επιλύουν προβλήματα ρουτίνας και διαδικασίας, χρησιμοποιώντας ποικιλία στρατηγικών, όπως: • «Δύο αδέλφια, ο Πέτρος και η Νίκη πηγαίνουν καθημερινά στο σχολείο τους πεζοί. Ο Πέτρος φτάνει στο σχολείο σε 16 λεπτά ενώ η αδελφή του σε 13 λεπτά. Πόσα λεπτά πιο γρήγορα πρέπει να ξεκινήσει ο Πέτρος για να φτάσουν την ίδια ώρα;»	Α2.8
9	Επιλύουν προβλήματα λογικής σκέψης, όπως: • «Η Ειρήνη, ο Αλέξης και ο Οδυσσέας κατάγονται από τα πιο κάτω χωριά: Μύρτου, Γιαλούσα και Λύση. Ο καθένας ακούει διαφορετικού είδους μουσική: μοντέρνα, ροκ και τζαζ. Να βρείτε το χωριό καταγωγής και το είδος μουσικής που ακούει ο καθένας, αν: - Η γυναίκα ακούει ροκ μουσική. - Ο Αλέξης δεν κατάγεται από τη Λύση. - Αυτός που ακούει ροκ μουσική κατάγεται από τη Γιαλούσα. - Αυτός που ακούει τζαζ μουσική δεν κατάγεται από τη Λύση.»	Α2.9
10	Κατασκευάζουν προβλήματα, χρησιμοποιώντας δεδομένα από πίνακες, εικόνες και γραφικές παραστάσεις, όπως: • «Να κατασκευάσετε προβλήματα δύο πράξεων με βάση τον πιο κάτω πίνακα.»	Α2.10

Μαθητής	Αποταμιεύσεις
Χρήστος	150
Παναγιώτης	80
Νεφέλη	60
Ανδριανή	90

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	Συμπληρώνουν τα πιο κάτω μοτίβα. 1 , 9 , 17 , 25 , 33 , 41 , ……. , ………. 	Α2.1
2	Χρησιμοποιούν σπιρτόξυλα, για να συνεχίσουν το πιο κάτω μοτίβο και υπολογίζουν πόσα σπιρτόξυλα θα χρειαστούν για το δέκατο και το εκατοστό σχήμα. 	Α2.1
3	Επιλύουν προβλήματα, όπως: (α) Πόσα άτομα μπορούν να καθίσουν σε ένα τραπέζι όταν ενωθούν 5 τετράγωνα τραπέζια όπως πιο κάτω (σε κάθε πλευρά του τετράγωνου τραπεζιού μπορεί να καθίσει ένα άτομο).  (β) Να συμπληρώσεις την πιο κάτω πρόταση. Αριθμός ατόμων = ______ Αριθμός τραπεζιών + ______	Α2.1 Α2.3
4	Εξηγούν ποιο σχήμα ζυγίζει περισσότερο. 	Α2.5 Α2.6
5	Επιλύουν προβλήματα, όπως: Το Δ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των περιοδικών που διαβάζει η Λίνα κάθε εβδομάδα. Η Λίνα διαβάζει 6 περιοδικά περισσότερα από τον Αλέξη. Πόσα	Α2.3 Α2.6

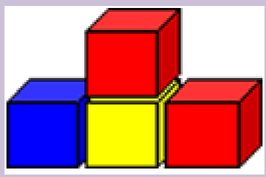
	περιοδικά διαβάζει ο Αλέξης κάθε εβδομάδα; (i) (6 + Δ) + 6 (ii) Δ - 6 (iii) Δ + 6 (iv) 6 - Δ	
6	Επιλύουν προβλήματα, όπως: Η Ελένη έχει πάρει 20 δώρα για τα γενέθλιά της. Τα διαχώρισε σε τέσσερις ομάδες. Η πρώτη ομάδα έχει 3 λιγότερα από τη δεύτερη. Η δεύτερη ομάδα έχει 2 περισσότερα από την τρίτη. Η τέταρτη ομάδα έχει τα διπλάσια της δεύτερης. Πόσα δώρα έχει η κάθε ομάδα;	Α2.3 Α2.8
7	Υπολογίζουν πόσα κιλά πρέπει να ζυγίζει το κάθε τρίγωνο, για να ισορροπεί η ζυγαριά: 	Α2.5 Α2.6
8	Συμπληρώνουν την ερώτηση στο πιο κάτω μοτίβο, ώστε η απάντηση να είναι «18 σπίρτα».  Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3	Α2.1 Α2.10

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Επιλύουν προβλήματα και περιγράφουν τον τρόπο εργασίας τους, όπως:

Για να κατασκευαστεί η σκάλα που έχει ύψος 2 μονάδες χρειάστηκαν 4 κύβοι.



Πόσοι κύβοι θα χρειαστούν, για να κατασκευαστεί μια σκάλα της ίδιας μορφής με ύψος 5 μονάδες.

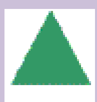
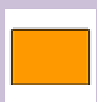
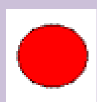
2 Επιλύουν προβλήματα με τη χρήση λογιστικών φύλλων, όπως:

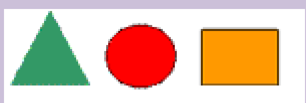
Ο κ. Αντρέας κατέθεσε στην τράπεζα το μηνιαίο μισθό του. Στη συνέχεια, απέσυρε τα μισά χρήματα που κατέθεσε στην τράπεζα, για να πληρώσει κάποια έξοδα. Τα μισά των χρημάτων που απέσυρε τα χρησιμοποίησε, για να αγοράσει τρόφιμα. Τα μισά των υπολοίπων τα έδωσε, για να πληρώσει το ενοίκιο. Πόσος ήταν ο αρχικός του μισθός, αν του έμειναν 150 ευρώ;

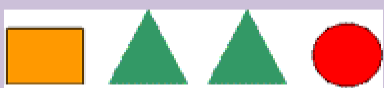
3 Μελετούν την πιο κάτω σειρά πράξεων, για να ανακαλύψουν τον κανόνα.

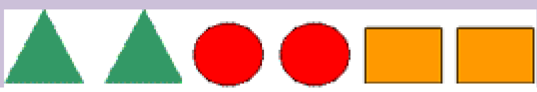
Βήμα	Ενέργεια
1	Σκέψου ένα αριθμό
2	Πρόσθεσε μία μονάδα
3	Διπλασίασε το αποτέλεσμα
4	Αφαίρεσε 3 μονάδες
5	Πρόσθεσε τον αριθμό που σκέφτηκες στην αρχή
6	Πρόσθεσε 7
7	Διαίρεσε με το 3
8	Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες στην αρχή
9	Μήπως έχεις καταλήξει στο αποτέλεσμα 2;

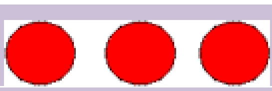
4 Υπολογίζουν την αξία του κύκλου σε κάθε περίπτωση, αν ισχύει ότι:

 =7  =17  =;

 =25

 =51

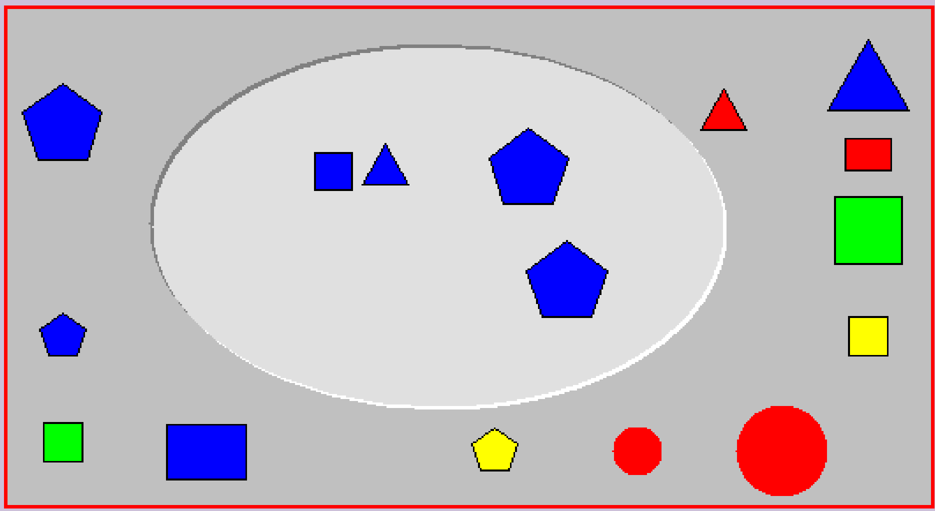
 =136



=48

5 Αναγνωρίζουν τα σχήματα ιδιοτήτων που έχουν τουλάχιστον τρεις κοινές ιδιότητες στο ψηφιακό εφαρμογίδιο, σύροντάς τα στο κέντρο:

http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_1_t_3.html



6 Επιλύουν προβλήματα, όπως:

Να συμπληρώσεις το ημερολόγιο χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω πληροφορίες.

Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ	Κ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

- Ο μήνας έχει λιγότερες από 31 μέρες.
- Ο μήνας έχει 5 Πέμπτες.
- Ο μήνας έχει 4 Τετάρτες.
- Ο μήνας έχει 4 Κυριακές.

7 Επιλύουν προβλήματα, όπως:

Η Ναταλία ήθελε να προσθέσει δύο αριθμούς Α και Β και κατά λάθος αφαίρεσε το Α από το Β και βρήκε 4. Το 4 διαφέρει από τη σωστή απάντηση κατά 12. Ποιοι αριθμοί είναι το Α και Β;

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κλίμακα 3

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ
1	Περιγράφουν, συμπληρώνουν, επεκτείνουν, κατασκευάζουν, επεξηγούν τον κανόνα και βρίσκουν με επαγωγικό τρόπο το γενικό όρο αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων.
2	Κατανοούν την έννοια της μεταβλητής και ερμηνεύουν και επεξηγούν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών.
3	Χρησιμοποιούν διατεταγμένα ζεύγη, για να αναπαραστήσουν πληροφορίες από την καθημερινή ζωή (π.χ. η επίδοση ενός μαθητή στα μαθηματικά και στη γλώσσα).
4	Σχεδιάζουν σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων διατεταγμένα ζεύγη ή δεδομένα που δίνονται σε πίνακα.
5	Αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης ως «ένα-προς-ένα αντιστοιχία» μέσω πινάκων, διαγραμμάτων και γραφικών παραστάσεων.
6	Περιγράφουν, αναπαριστούν, επεξηγούν και βρίσκουν το γενικό τύπο συναρτήσεων.
7	Αναπαριστούν γραφικά γενικούς τύπους συναρτήσεων.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
8	Απλοποιούν μαθηματικές εκφράσεις και υπολογίζουν την τιμή μαθηματικών προτάσεων για συγκεκριμένες τιμές μεταβλητών.
9	Επιλύουν και χειρίζονται εξισώσεις.
10	Γράφουν μαθηματικές εκφράσεις ή εξισώσεις με μεταβλητές, για να αναπαραστήσουν πληροφορίες και να επιλύσουν προβλήματα.
11	Επιλύουν και κατασκευάζουν προβλήματα ρουτίνας πολλαπλών βημάτων και προβλήματα διαδικασίας.

12	Χρησιμοποιούν την προτεραιότητα των πράξεων, για να απλοποιούν νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς και να ελέγχουν τα αποτελέσματά τους.

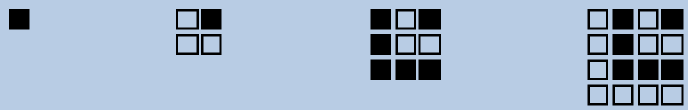
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ — Δ.Ε.

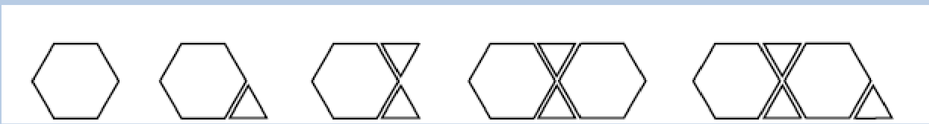
Οι μαθητές:

1 Περιγράφουν, συμπληρώνουν, επεκτείνουν και κατασκευάζουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα, όπως: — Α3.1

- «Να βρείτε τους επόμενους όρους στα πιο κάτω μοτίβα.»

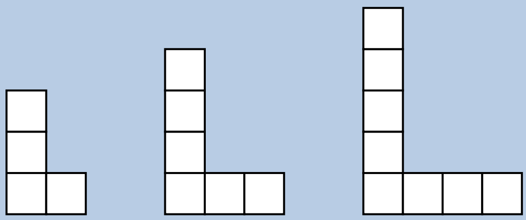


1   1 + 3   1 + 3 + 5   1 + 3 + 5 + 7



1ος   2ος   3ος   4ος   5ος

- «Να βρείτε το δέκατο και τον εκατοστό όρο του πιο κάτω μοτίβου.»



$1^{ος}$ $2^{ος}$ $3^{ος}$

- Να χρησιμοποιήσετε υλικά, για να αναπαραστήσετε το αριθμητικό μοτίβο που παρουσιάζεται στον πίνακα.»

Αριθμός στοιχείου	Στοιχεία
1°	**12**
2°	**17**
3°	**22**
4°	**27**
5°	**...**

2	Κατανοούν την έννοια της μεταβλητής και ερμηνεύουν και επεξηγούν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, όπως: • «Ο κ. Α. πληρώνει μηνιαία τηλεφωνική συνδρομή 5 ευρώ και επιπλέον 2 ευρώ για κάθε ώρα ομιλίας. Αν ***x*** είναι ο αριθμός που δείχνει τις ώρες ομιλίας και ***y*** ο αριθμός που δείχνει το συνολικό κόστος, να βρείτε τη σχέση που συνδέει το ***x*** με το ***y*** και να την αναπαραστήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.» • «Ο Ανδρέας και η Ειρήνη κέρδισαν συνολικά €300 στο ΛΟΤΤΟ. Ο Ανδρέας κέρδισε το τριπλάσιο ποσό από αυτό που είχε στοιχηματίσει ενώ η Ειρήνη το τετραπλάσιο. Να υπολογίσετε το ποσό που πλήρωσαν για το στοίχημα ο Ανδρέας και η Ειρήνη. Πόσες πιθανές λύσεις υπάρχουν;» • «Επεξηγούν τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών ***x*** και ***y*** στον πίνακα και γράφουν την εξίσωση που χρησιμοποιείται, για να κατασκευαστεί ο πίνακας. *x* | *y*: **4** | 6; **7** | 15; **9** | 21; **11** | 27 • «Εκφράζουν τις αριθμητικές πράξεις που παρουσιάζονται στον πίνακα αλγεβρικά, για να ανακαλύψουν ότι το αποτέλεσμα των ενεργειών του πίνακα είναι πάντοτε «4».» **Ενέργεια**: Σκέψου έναν αριθμό; Πρόσθεσε 10; Πολλαπλασίασε επί 3; Αφαίρεσε 3; Διαίρεσε διά 3; Αφαίρεσε 5; Αφαίρεσε τον αρχικό σου αριθμό	Α3.2 Α3.4 Α3.6
3	Χρησιμοποιούν διατεταγμένα ζεύγη, για να αναπαραστήσουν πληροφορίες από την καθημερινή ζωή, όπως: • «Η Α. και η αδελφή της κατασκευάζουν βραχιόλια, για να τα πωλήσουν στο φιλανθρωπικό παζαράκι του σχολείου τους. Κατασκευάζουν δύο βραχιόλια κάθε τριάντα λεπτά. Ξεκίνησαν την εργασία τους στις 10 το πρωί και θα εργαστούν συνεχόμενα για έξι ώρες. (α) Να γράψετε σε διατεταγμένο ζεύγος τον αριθμό των βραχιολιών που θα έχουν κατασκευάσει σε σχέση με το χρόνο, στις 12 το μεσημέρι και στις τρεις το απόγευμα (νοουμένου ότι εργάζονται με το ίδιο ρυθμό). (β) Να σχεδιάσετε μια γραφική παράσταση που να δείχνει τον αριθμό των βραχιολιών που θα έχουν κατασκευάσει τα κορίτσια συναρτήσει του χρόνου.»	Α3.3 Α3.4

4	Σχεδιάζουν σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων διατεταγμένα ζεύγη ή δεδομένα που δίνονται σε πίνακα, όπως: • «Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει το κόστος αγοράς διαφορετικών ποσοτήτων ψηφιακών παιγνιδιών ίδιας αξίας. (πίνακας 1) Να σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα διατεταγμένα ζεύγη (0,0), (2,10) και (5,25) και την ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά. Να χρησιμοποιήσετε την ευθεία, για να καθορίσετε το συνολικό κόστος αγοράς τριών ψηφιακών παιγνιδιών.»	Α3.4
5	Αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης ως «ένα-προς-ένα αντιστοιχία» και βρίσκουν το γενικό τύπο συναρτήσεων, όπως: • «(α) Ο Πίνακας Α παρουσιάζει τον αριθμό ηλεκτρονικών υπολογιστών που πρέπει να παραδώσει μια εταιρεία πώλησης ηλεκτρονικών ειδών σε πελάτες της σύμφωνα με τα δελτία παραγγελιών. Ο Πίνακας Β δείχνει το ποσό που θα εισπράξει η εταιρεία από τους πελάτες της. Αν γνωρίζουμε ότι η αξία κάθε ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι €600, να αντιστοιχίσετε τα ποσά των δύο πινάκων. (πίνακες 2 και 3) (β) Να γράψετε και να επεξηγήσετε τον τύπο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να υπολογιστεί το ποσό είσπραξης σε σχέση με τον αριθμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών που πωλεί η εταιρεία.»	Α3.5 Α3.6
6	Αναπαριστούν γραφικά γενικούς τύπους συναρτήσεων, όπως: • «Να κατασκευάσετε γραφική παράσταση με βάση τα δεδομένα του πίνακα και να διερευνήσετε τη σχέση ανάμεσα στην ανάπτυξη του φυτού και του χρόνου, με τη χρήση λογισμικών.» (πίνακας 4)	Α3.6 Α3.7

Πίνακας 1:

Ποσότητα	**0**	**2**	**5**
Συνολικό Κόστος (€)	0	10	25

Πίνακας 2:

Όνομα αγοραστή	**Αριθμός Η.Υ.**
ΑΝΔΡΕΟΥ	7
ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ	5
ΓΕΩΡΓΙΟΥ	6
ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ	3
ΠΕΤΡΟΥ	2
ΣΑΒΒΑ	10
ΙΩΑΝΝΟΥ	7
ΧΡΙΣΤΟΥ	6

Πίνακας 3:

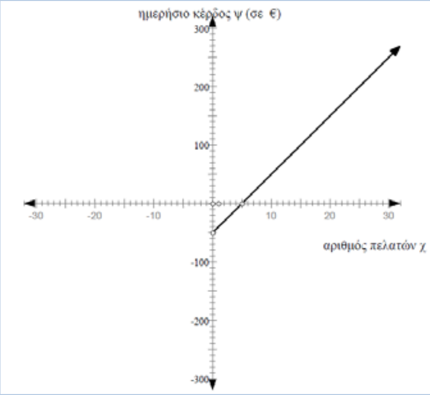
Ποσό Είσπραξης
6000
4200
1800
3600
1200
3000

Πίνακας 4:

Χρόνος (μέρες)	**Ύψος (cm)**	**Αλλαγή (cm)**

0	0	
2	0	0
4	0	0
6	1	1
8	2	1
10	4	2
12	6	2
14	7,5	1,5
16	8,5	1
18	8,5	0
20	9	0.5

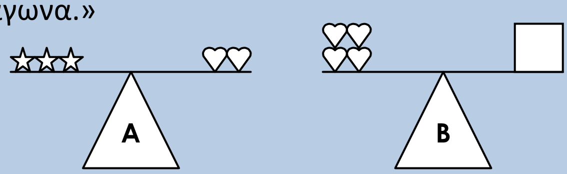
- «Το διάγραμμα αναπαριστά το ημερήσιο κέρδος ενός μικρού ξενοδοχείου δυναμικότητας 30 κλινών, συναρτήσει του αριθμού των πελατών.



(α) Για ποιο αριθμό πελατών το ξενοδοχείο δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά;
(β) Πόσους πελάτες πρέπει να έχει το ξενοδοχείο ώστε να έχει κέρδος;

(γ) Πόσους πελάτες πρέπει να έχει το ξενοδοχείο, για να έχει κέρδος €150;»

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Απλοποιούν μαθηματικές εκφράσεις και υπολογίζουν την τιμή μαθηματικών προτάσεων για συγκεκριμένες τιμές μεταβλητών, όπως: • «Να χρησιμοποιήσετε τις πιο κάτω εικόνες, για να βρείτε πόσα αστέρια ζυγίζουν όσο δύο τετράγωνα.»	Α3.8



	• «Ποιο είναι το άθροισμα τριών διαδοχικών, ακέραιων αριθμών, αν ο μεσαίος όρος είναι ο αριθμός 2***ν;»*** • «Τα γράμματα ***Σ*** και ***Τ*** αναπαριστούν αριθμούς. Αν ***Σ–Τ***=***Τ***+100, ποιες από τις πιο κάτω δηλώσεις είναι ορθές;» (α) ***Σ***=***Τ*** (β) ***Σ***>***Τ*** (γ) ***Σ***=***Τ***+100 (δ) ***Σ***>***Τ*** +100	
2	Επιλύουν εξισώσεις, όπως: • $102 - ν = 85$ • $2μ + 2 = 12 + μ$ • $4τ - 88 = 2τ + 12$ • «Να επιλέξετε την εξίσωση που είναι ισοδύναμη με την εξίσωση 5τ-15=65-3τ.» (α) 5τ-15+65=65-3τ (β) 2τ=80 (γ) 8τ=80 (δ) 8τ=50	Α3.9
3	Γράφουν μαθηματικές εκφράσεις ή εξισώσεις με μεταβλητές, για να αναπαραστήσουν πληροφορίες και να επιλύσουν προβλήματα, όπως: • «Η Ζήνα και οι φίλες της ταξιδεύουν με μέση ταχύτητα 55 km/h. Να γράψετε αλγεβρικές εκφράσεις, για να υπολογίσετε την απόσταση που θα έχουν διανύσει σε 12 ώρες, σε 18 ώρες και σε ***ν*** ώρες. Σε πόσο χρόνο θα έχουν διανύσει 1439 χιλιόμετρα;» • Η Α. έχει διαβάσει τις πρώτες 78 σελίδες από ένα βιβλίο 130 σελίδων. Ποια από τις πιο κάτω εξισώσεις εκφράζει τον αριθμό των σελίδων που πρέπει να διαβάσει η Α., για να τελειώσει το βιβλίο; (α) 130+78=___ (β) ___ - 78=130 (γ) 130 – 78=___ (δ) 130 - ___=178	Α3.10
4	Επιλύουν και κατασκευάζουν προβλήματα ρουτίνας πολλαπλών βημάτων και προβλήματα διαδικασίας, όπως: • «Να κατασκευάσετε προβλήματα με βάση τις πιο κάτω εξισώσεις.» (α) ***ν*** + 33 = 80 (β) 15+(100-35) = ***ν*** (γ) (99÷ ***ν***) + 7=40 • «Να επιλύσετε το πιο κάτω πρόβλημα διαδικασίας: Σε ένα τραπέζι υπάρχουν τρεις μπουκάλες νερού. Η πρώτη έχει χωρητικότητα τρία λίτρα, η δεύτερη πέντε λίτρα και η τρίτη οκτώ λίτρα. Η πρώτη και η δεύτερη είναι άδειες ενώ η τρίτη είναι γεμάτη. Να περιγράψετε τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε, ώστε σε ένα μπουκάλι να υπάρχει ακριβώς ένα λίτρο νερό.»	Α3.11
5	Χρησιμοποιούν την προτεραιότητα των πράξεων, για να απλοποιούν νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς και να ελέγχουν τα αποτελέσματά τους, όπως: • «Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων.»	Α3.12

(α) 13+4-7×2× +31-17=

(β) 5×8-2+4×20-2÷0,1=

- «Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε η πιο κάτω ισότητα να είναι αληθής.»

  α × βγ=(α × β0)+(__ × ___)

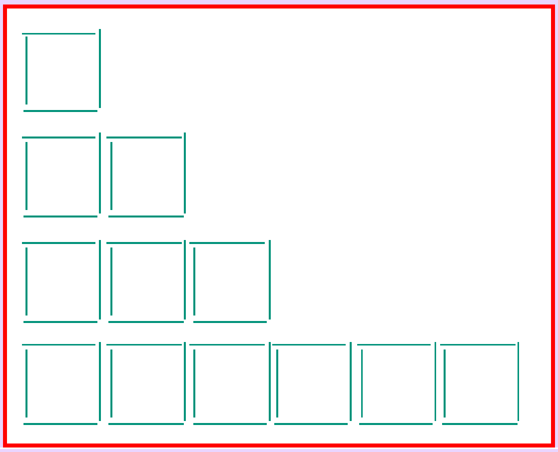
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι μαθητές: **Δ.Ε.**

1 Επεκτείνουν τα πιο κάτω μοτίβα και επεξηγούν λεκτικά τον κανόνα τους: Α3.1

- 6, 9, 12, 15, 18, ...
- 5, 7, 9, 11, 13, ...
- 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...
- 2, 4, 8, 16, 32, ...
- 1, 5, 25, 125, 625, ...
- 96, 94, 90, 84, 76, 66, 54, ...

2 Επεξηγούν γιατί η σχέση ***y***=3***ν*** + 1 είναι ορθή, όταν το ***y*** αναπαριστά τον αριθμό των οδοντογλυφίδων που χρειάζονται, για να κατασκευαστεί μια σειρά από ***ν*** τετράγωνα, όπως πιο κάτω: Α3.2 Α3.6



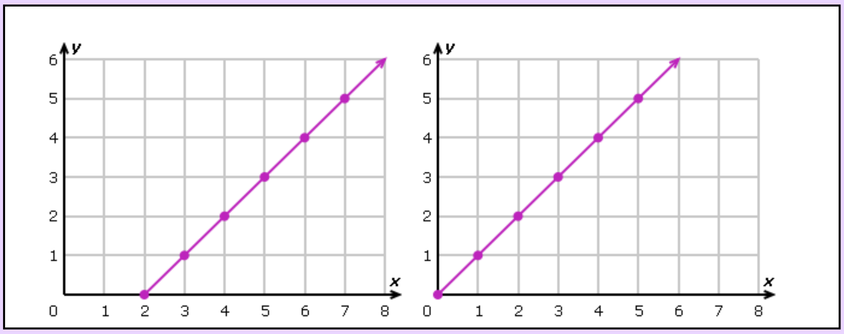
3 Γράφουν τη θέση των πιονιών στη σκακιέρα, χρησιμοποιώντας διατεταγμένα ζεύγη Α3.3

4 Εντοπίζουν σε ποια περίπτωση η αριθμομηχανή έδωσε λανθασμένο αποτέλεσμα. Α3.6

Είσοδος	Έξοδος
1	7
3	13
4	16

5	**19**
7	**24**
8	**28**

5 Αποφασίζουν ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις αναπαριστά τη συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο ***y***=***x***-2: Α3.7



6 Επιλύουν προβλήματα, όπως: Α3.7

(α) Τα έξοδα μεταφοράς για την αποστολή ενός αντικειμένου υπολογίζονται από την εξίσωση ***y***=3***x*** + 1, όπου ***x*** είναι η μάζα σε γραμμάρια και ***y*** το κόστος σε ευρώ. Αν έχετε στη διάθεσή σας €150, πόσα γραμμάρια μπορείτε να αποστείλετε; Α3.8

(β) Η θερμοκρασία μπορεί να μετρηθεί σε βαθμούς Κελσίου (**C**elsius) και σε βαθμούς Φάρεναϊτ (**F**ahrenheit). Αν η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη είναι 9 × C = (F − 32) × 5, πόσοι βαθμοί Κελσίου αντιστοιχούν σε 50 βαθμούς Φάρεναϊτ;

7 Επιλύουν προβλήματα, όπως: Α3.9

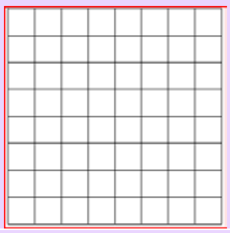
Πόσα στοιχίζει ένα ψυγείο, αν γνωρίζεις ότι (α) 7 τηλεοράσεις στοιχίζουν όσο δύο ψυγεία και τέσσερις τηλεοράσεις και (β) ότι μια τηλεόραση στοιχίζει €300; Α3.10

8 Επιλύουν προβλήματα, όπως: Α3.10

Ο Μάριος έχει διπλάσια βιβλία από τον Αντρέα. Η Χαρά έχει έξι βιβλία περισσότερα από τον Αντρέα. Αν ο Αντρέας έχει ***ν*** βιβλία, ποιος είναι ο συνολικός αριθμός των βιβλίων που έχουν και τα τρία παιδιά;

9 Επιλύουν προβλήματα, όπως: Α3.11

Πόσα διαφορετικά τετράγωνα υπάρχουν στο πιο κάτω σχήμα;



10 Υπολογίζουν την τιμή της παράστασης: Α3.12

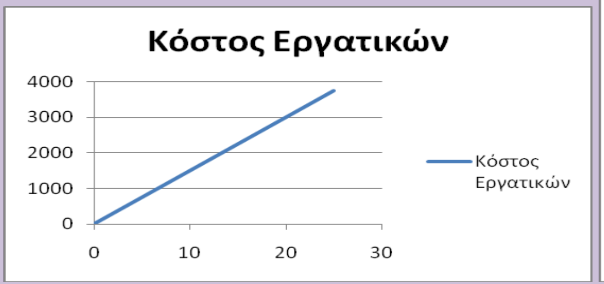
$$6\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times 8-2=$$

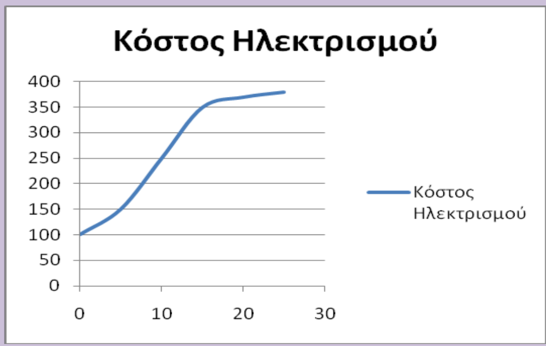
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Επιλύουν προβλήματα, όπως:

Οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν το κόστος ενός εργοστασίου σε εργατικά και σε ηλεκτρισμό καθώς αυξάνονται οι ώρες λειτουργίας του εργοστασίου.





Με βάση τις γραφικές παραστάσεις, να εξηγήσετε τη διαφορά στη μεταβολή του κόστους των εργατικών και του ηλεκτρισμού καθώς αυξάνονται οι ώρες λειτουργίας του εργοστασίου.

2 Κατασκευάζουν πρόβλημα το οποίο θα μπορούσε να λυθεί με την ακόλουθη εξίσωση: $6x-3y=18$

3 Επεξηγούν αριθμητικά και αλγεβρικά γιατί δεν ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα στη διαίρεση.

4 Κατασκευάζουν γραφική παράσταση, για να δείξουν τη συνολική χρέωση ενός ταξί για διάφορες αποστάσεις, όταν κάθε πρώτο χιλιόμετρο της διαδρομής χρεώνεται με €1,75 και κάθε επιπλέον χιλιόμετρο με €0,75.

5 Χρησιμοποιούν λογισμικά γεωμετρίας της χελώνας, για να σχεδιάσουν ορθογώνια χρησιμοποιώντας μεταβλητές για το μήκος και πλάτος.

6 Επιλύουν προβλήματα, όπως πιο κάτω με τη χρήση ανισότητας:

Ένα πλοίο έχει διαθέσιμο χώρο, για να μεταφέρει 20 αυτοκίνητα. Αν ένα λεωφορείο καταλαμβάνει τόσο χώρο όσο τρία αυτοκίνητα, να δημιουργήσετε μια γραφική παράσταση που να αναπαριστά τον αριθμό των αυτοκινήτων και λεωφορείων που μπορεί να μεταφέρει το συγκεκριμένο πλοίο.

7 Δείχνουν αλγεβρικά γιατί η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών τετράγωνων αριθμών μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα διαδοχικών ακέραιων αριθμών.

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κλίμακα 4

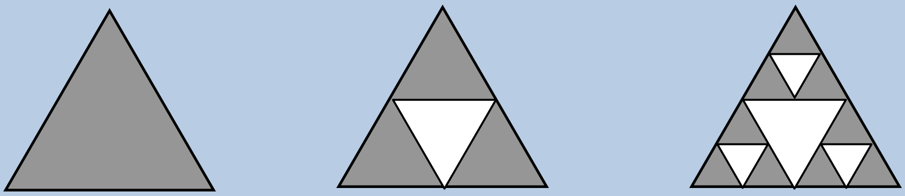
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ
1	Επιλύουν προβλήματα βρίσκοντας τον επόμενο όρο ή τον όρο που λείπει σε μοτίβα, περιγράφουν λεκτικά τον κανόνα του μοτίβου και εκφράζουν το νιοστό όρο σε λεκτική ή συμβολική μορφή.
2	Κατασκευάζουν μοτίβα χρησιμοποιώντας ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα.
3	Κατανοούν τις ιδιότητες αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων και διερευνούν τον τρόπο υπολογισμού του γενικού όρου.
4	Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης και επεξηγούν τη διαδικασία απεικόνισης ενός στοιχείου του πεδίου ορισμού στο σύνολο άφιξης και διακρίνουν την έννοια της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
5	Δημιουργούν και συμπληρώνουν πίνακα τιμών, χρησιμοποιώντας το γενικό τύπο μιας συνάρτησης.
6	Κατασκευάζουν διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουν τύπους συναρτήσεων, με ή χωρίς τεχνολογία, σχεδιάζοντας σημεία σε σύστημα αξόνων.
7	Κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση ευθείας, υπολογίζοντας τις συντεταγμένες δύο σημείων της και επεξηγούν αλγεβρικά και γραφικά κατά πόσο ένα σημείο ανήκει στην ευθεία.
8	Κατανοούν την έννοια της κλίση ευθείας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών και την εφαρμόζουν σε προβλήματα.
9	Μοντελοποιούν και περιγράφουν μεγέθη που μεταβάλλονται σε πραγματικές καταστάσεις και τα αναπαριστούν σε πίνακα ή γραφική παράσταση.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ
10	Κατανοούν και εφαρμόζουν αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουν αναγωγή ομοίων όρων, απλοποιούν ή αναλύουν αλγεβρικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν αλγεβρικά κλάσματα και διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ των εννοιών «εξίσωση», «τύπος», «ταυτότητα» και «παράσταση».
11	Υπολογίζουν αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, χρησιμοποιώντας αντικατάσταση.
12	Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά, χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων, με ή χωρίς τεχνολογία και χρησιμοποιούν τις εξισώσεις και ανισώσεις στην επίλυση προβλημάτων.
13	Μεταφράζουν αλγεβρικά σύμβολα σε λεκτική μορφή και αντίστροφα.
14	Επιλύουν και κατασκευάζουν αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα ρουτίνας και διαδικασίας.
15	Επεξηγούν την προτεραιότητα και τις ιδιότητες των πράξεων αλγεβρικά και γεωμετρικά και τις χρησιμοποιούν, για να απλοποιούν νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς παραστάσεων με ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Επιλύουν προβλήματα βρίσκοντας τον επόμενο όρο ή τον όρο που λείπει σε μοτίβα, όπως: • «Τα ακόλουθα σχήματα παρουσιάζουν μια ακολουθία ισόπλευρων τριγώνων εμβαδού 1 τετραγωνικής μονάδας (τρίγωνο του Sierpinski). Το μη σκιασμένο τρίγωνο του σχήματος 2. έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του μεγάλου τριγώνου. Αν το μοτίβο συνεχίζεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, ποιο είναι το εμβαδόν των σκιασμένων τριγώνων του Σχήματος 5;»  Σχ.1 Σχ.2 Σχ. 3	Α4.1
2	Κατασκευάζουν μοτίβα χρησιμοποιώντας ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα, όπως: • «Να κατασκευάσετε αριθμητική πρόοδο, ακολουθώντας τον πιο κάτω κανόνα: Ξεκίνα από τον αριθμό 1 και να προσθέτεις 3, για να δημιουργήσεις τον επόμενο όρο».	Α4.2 Α4.3
3	Κατανοούν τις ιδιότητες αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων και διερευνούν τον τρόπο υπολογισμού του γενικού όρου, όπως: • «Να επεξηγήσετε και να συγκρίνετε τον κανόνα υπολογισμού του επόμενου όρου από τον κανόνα υπολογισμού του γενικού όρου στην ακόλουθη αριθμητική πρόοδο.» 35, 29, 23, 17, …	Α4.3
4	Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης και διακρίνουν την έννοια της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, όπως: • «Να επεξηγήσετε κατά πόσο οι πιο κάτω καταστάσεις είναι συναρτήσεις: (α) Η ηλικία σε χρόνια κάθε μαθητή σε μια τάξη και το μέγεθος των παπουτσιών κάθε μαθητή. (β) Το μέγεθος της γωνίας περιστροφής μιας κάνουλας νερού και ο όγκος του νερού που εκτοξεύεται από την κάνουλα.» • «Η Μ. θα εργαστεί το μήνα Ιούλιο προσέχοντας τα κατοικίδια του κ. Γ. Ο	Α4.4

κ. Γ. πρότεινε στη Μ. δύο εναλλακτικά σχέδια πληρωμής:

- Σχέδιο Α: €100 την ημέρα για τις 31 ημέρες του μήνα.
- Σχέδιο Β: €1 για την 1η Ιουλίου, €2 για τις 2 Ιουλίου, €4 για τις 3 Ιουλίου, κ.ο.κ. (ο μισθός θα διπλασιάζεται κάθε επόμενη μέρα).

(α) Να γράψετε συναρτήσεις που να εκφράζουν το μισθό της Μ.κάθε μέρα με βάση τα δύο σχέδια. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(β) Να ορίσετε κατάλληλο πεδίο ορισμού για την κάθε συνάρτηση.

(γ) Ποιο από τα δύο σχέδια πρέπει να επιλέξει η Μιράντα, για να μεγιστοποιήσει τα έσοδά της;

(δ) Να γράψετε μια συνάρτηση που να εκφράζει το συνολικό μισθό της Μ., συναρτήσει του αριθμού των ημερών που δουλεύει.»

5 Δημιουργούν και συμπληρώνουν πίνακα τιμών, χρησιμοποιώντας το γενικό τύπο μιας συνάρτησης, όπως:

- «Για την παρασκευή μιας μηλόπιτας χρειάζονται 1,5 kg μήλα. Να κατασκευάσετε κατάλληλο διάγραμμα και πίνακα τιμών, για να δείξετε πόσα kg μήλα χρειάζονται για την παρασκευή 5, 10, 20 και 40 μηλόπιτων. Να αιτιολογήσετε γιατί η πιο πάνω κατάσταση αναπαριστά συνάρτηση και να αναφέρετε τα στοιχεία του πεδίου ορισμού και του πεδίο τιμών της.»

Α4.4 Α4.5 Α4.6

6 Κατασκευάζουν διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουν τύπους συναρτήσεων, όπως:

- «Τα μηνιαία σταθερά έξοδα λειτουργίας ενός εργοστασίου παρασκευής συμπυκνωμένου ντοματοπολτού είναι €7500. Το κόστος παρασκευής κάθε επιπλέον τόνου ντοματοπολτού είναι €1500. Να κατασκευάσετε με τη χρήση δυναμικού λογισμικού γραφική παράσταση που να δείχνει το συνολικό μηνιαίο κόστος λειτουργίας συναρτήσει των τόνων ντοματοπολτού που παράγει το εργοστάσιο. Να περιγράψετε πώς αλλάζει η γραφική παράσταση, αν μειωθεί ή αυξηθεί το κόστος παρασκευής κάθε επιπλέον τόνου ντοματοπολτού.»

Α4.4 Α4.6 Α4.7 Α4.8

7 Κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση ευθείας, υπολογίζοντας τις συντεταγμένες δύο σημείων της και επεξηγούν αλγεβρικά και γραφικά κατά πόσο ένα σημείο ανήκει στην ευθεία, όπως:

- «Να αποφασίσετε κατά πόσο τα δεδομένα του πίνακα αναπαριστούν γραμμική συνάρτηση.»

x	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y	0	-1	0	3	8	15	24

Α4.7

8 Κατανοούν την έννοια της κλίση ευθείας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών και την εφαρμόζουν σε προβλήματα, όπως:

- «Ένα αυτοκίνητο κατεβαίνει ένα απότομο λόφο. Το υψόμετρο (σε μέτρα) του αυτοκινήτου όταν απέχει δ χιλιόμετρα από την κορυφή του λόφου

Α4.7 Α4.8

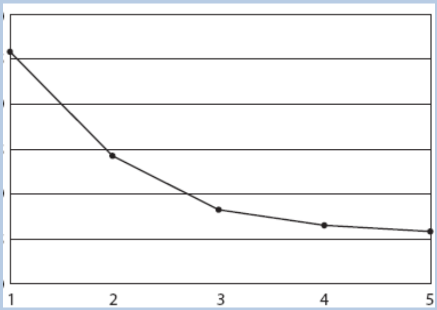
δίνεται από τον τύπο Υ=7500-250δ (0<δ<6). Να αναπαραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση του υψομέτρου συναρτήσει του δ και να επεξηγήσετε πώς επηρεάζει η κλίση και το σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης το υψόμετρο του αυτοκινήτου.»

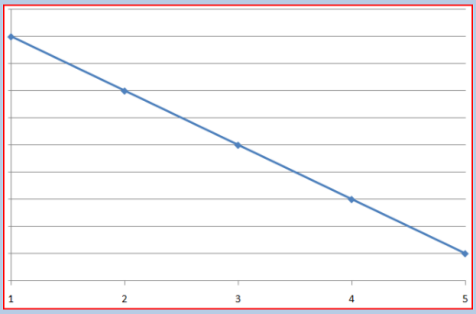
- «Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει μια γραμμική συνάρτηση. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να δείξετε γραφικά πώς υπολογίζεται η κλίση της γραφικής παράστασης.»

x	2	3	5	8	12
y	5	8	14	23	35

9 Μοντελοποιούν και περιγράφουν μεγέθη που μεταβάλλονται σε πραγματικές καταστάσεις και τα αναπαριστούν σε πίνακα ή γραφική παράσταση, όπως: A4.9

- «Να αιτιολογήσετε ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις αναπαριστά την πορεία της θερμοκρασίας ενός συσκευασμένου χυμού που τοποθετήθηκε στην κατάψυξη για πέντε ώρες και να περιγράψετε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας.»





ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Κατανοούν και εφαρμόζουν αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουν αναγωγή ομοίων όρων, απλοποιούν ή αναλύουν αλγεβρικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν αλγεβρικά κλάσματα, όπως: A4.10

- «Να απλοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση.»

$$a-\frac{\beta}{2}-\frac{5a+4}{\beta}=$$

2 Υπολογίζουν αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, χρησιμοποιώντας αντικατάσταση, όπως: A4.11

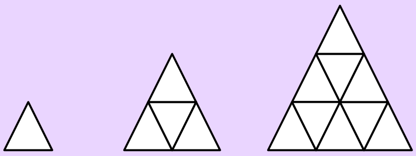
- «Αν ν+1=15 και ν+1+σ=19, να βρείτε την τιμή που αντιπροσωπεύει το σ.»
- «Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης g(3x)+h(-4), αν g(x)=-9x+11 και $h(x)=7x^2+4x+7$.»

3	Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά, όπως: • $3x-\frac{5}{2}=x-\frac{5x+4}{5}$ • $\frac{2}{3x+1}+2=\frac{2}{3}$ • «Να αναπαραστήσετε σε αριθμητική γραμμή τη λύση της ανίσωσης 4x-21>57.»	Α4.12
4	Μεταφράζουν αλγεβρικά σύμβολα σε λεκτική μορφή και αντίστροφα, όπως: • «Μια πισίνα έχει χωρητικότητα 375000 λίτρα νερό. Δύο αντλίες χρησιμοποιούνται, για να γεμίσει με νερό. Η πρώτη αντλία διοχετεύει νερό στην πισίνα με ρυθμό 1500 λίτρα την ώρα και η δεύτερη αντλία γεμίζει την πισίνα με ρυθμό 2000 λίτρα την ώρα. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει εντελώς η πισίνα, αν εργάζονται και οι δύο αντλίες ταυτόχρονα;» • «Η εταιρεία συντήρησης μηχανογραφικού εξοπλισμού Α χρεώνει €25 αρχική εγκατάσταση και €6,50 μηνιαίο τέλος. Η εταιρεία Β δεν χρεώνει αρχική εγκατάσταση και έχει μηνιαίο τέλος €8. Να κατασκευάσετε μια ανίσωση, για να βρείτε για πόσο καιρό θα πρέπει μια εταιρεία να συνεργάζεται με την εταιρεία Α μέχρι να γίνει η πιο φτηνή;»	Α4.12 Α4.13
5	Επιλύουν και κατασκευάζουν αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα ρουτίνας και διαδικασίας, όπως: • «Να κατασκευάσετε πρόβλημα που λύνεται με την εξίσωση 15=2x-7.» • «Ένας συλλέκτης γραμματοσήμων θέλει να τοποθετήσει 500 γραμματόσημα σε δύο ίδια άλμπουμ. Στο πρώτο άλμπουμ τοποθετεί 21 γραμματόσημα σε κάθε σελίδα. Αν σε κάθε σελίδα του δεύτερου άλμπουμ τοποθετήσει 20 γραμματόσημα, δεν του φτάνουν οι σελίδες, ενώ αν τοποθετήσει 23 γραμματόσημα, του περισσεύουν οι σελίδες. Πόσες σελίδες έχει κάθε άλμπουμ.»	Α4.14
6	Επεξηγούν την προτεραιότητα και τις ιδιότητες των πράξεων και τις χρησιμοποιούν, για να απλοποιούν νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς παραστάσεων, όπως: • «Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης.» $\frac{1}{1+2}\times\frac{3}{2+3}\times\frac{5}{3+4}\times\ldots\times\frac{20}{11+12}=$	Α4.15

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι μαθητές: — **Δ.Ε.**

1 Υπολογίζουν πόσα τρίγωνα θα χρειαστούν για να κατασκευαστεί το 10ο και το 100ό έλατο και επεξηγούν την απάντησή τους. A4.1



2 Βρίσκουν τον 75ο όρο στην αριθμητική πρόοδο και επεξηγούν τον τρόπο σκέψης τους: A4.3

5000, 4750, 4500, 4250, 4000, …

3 Επιλύουν προβλήματα, όπως: A4.4

«Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει το ύψος ενός φυτού σε μια περίοδο τριών εβδομάδων. Στην αρχή το ύψος του φυτού ήταν 5 εκατοστόμετρα.

Εβδομάδα	0	1	2	3
Ύψος (σε cm)	5	8	11	14

(α) Να γράψετε μια εξίσωση που να εκφράζει το ύψος (Υ) του φυτού συναρτήσει του αριθμού των εβδομάδων (Ε).

(β) Να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση ή τον πίνακα, για να προβλέψετε το ύψος του φυτού μετά από δέκα εβδομάδες.»

4 Τα πιο κάτω διατεταγμένα ζεύγη αναπαριστούν τη σχέση μεταξύ του χρόνου μελέτης του Α. για τα μαθήματα των Μαθηματικών, Επιστήμης και Ελληνικών με τα αποτελέσματα του στις εξετάσεις των τριών μαθημάτων. Να αποφασίσετε κατά πόσο η σχέση αυτή είναι συνάρτηση. A4.4 A4.6

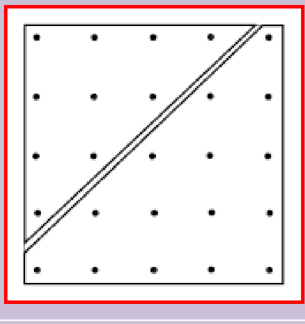
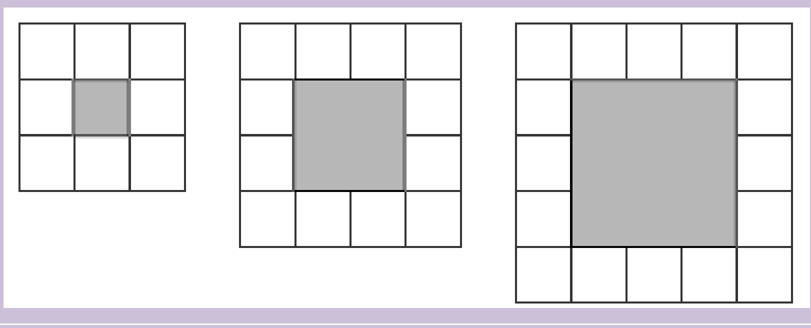
{(6, 68), (7, 90), (5,48)}

5 Κατασκευάζουν τη γενική εξίσωση συνάρτησης, για να υπολογιστεί ο αριθμό των γλυκών που θα έχουν ετοιμαστεί σε δύο ή περισσότερες ώρες: A4.4 A4.12

«Ο βοηθός ζαχαροπλάστης ετοιμάζει 6 γλυκά την ώρα. Ο αρχιζαχαροπλάστης ετοιμάζει 10 γλυκά την ώρα, αλλά ξεκινά να εργάζεται δύο ώρες μετά το βοηθό ζαχαροπλάστη. Οι δύο ζαχαροπλάστες πρέπει να ετοιμάσουν συνολικά 92 γλυκά. Σε πόσες ώρες, από τη στιγμή που θα ξεκινήσει να εργάζεται ο βοηθός ζαχαροπλάστης, θα έχουν τελειώσει;»

6	Η εταιρεία που ανέλαβε τη φωτογράφηση της τελετής αποφοίτησης του σχολείου Α. χρεώνει €65 για το βασικό πακέτο και €1 για κάθε επιπλέον φωτογραφία. Να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση K=65+v, όπου K είναι το συνολικό κόστος και v ο αριθμός των επιπρόσθετων φωτογραφικών, για να κατασκευάσετε έναν πίνακα που να παρουσιάζει το συνολικό κόστος παραγγελίας 0 ως 6 επιπρόσθετων φωτογραφιών.	A4.5
7	Επιλύουν προβλήματα, όπως: «Ο Μιχάλης και ο Αντώνης αναχωρούν από το σπίτι τους για το σχολείο την ίδια ώρα. Οι αποστάσεις του Μιχάλη και του Αντώνη από το σχολείο συναρτήσει του χρόνου δίνονται από τους τύπους δ_1=4000-400t και δ_2=3400-250t. Με τη βοήθεια κατάλληλης γραφικής παράστασης να βρείτε ποιος από τους δύο θα φτάσει πρώτος στο σχολείο και κατά πόσο υπάρχει κάποια χρονική στιγμή που τα δύο αγόρια θα ισαπέχουν από το σχολείο.»	A4.7 A4.12
8	Επιλύουν προβλήματα, όπως: «Ο Λεωνίδας θέλει να αγοράσει ζαχαρωτά και περιοδικά για ένα ταξίδι. Αποφάσισε να αγοράσει τριπλάσια αριθμό ζαχαρωτών από τα περιοδικά. Κάθε ζαχαρωτό κοστίζει €0,70 και κάθε περιοδικό €2,50. Ο Λεωνίδας δικαιούται έκπτωση 6% και στα δύο προϊόντα. Πόσα περιοδικά και ζαχαρωτά μπορεί να αγοράσει, αν έχει στη διάθεσή του €20;»	A4.12 A4.13

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

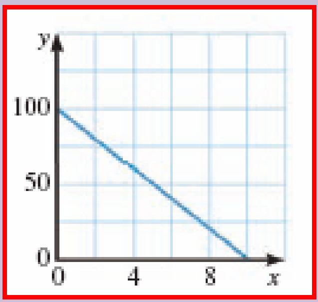
	Οι μαθητές:
1	Αποδεικνύουν αλγεβρικά ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών τρίγωνων αριθμών είναι ένας τετράγωνος αριθμός. 
2	Επιλύουν προβλήματα με τη χρήση ανισώσεων, όπως: «Το εισιτήριο εισόδου σε ένα χιονοδρομικό κέντρο στοιχίζει €7 και συμπεριλαμβάνει την ενοικίαση του εξοπλισμού. Στην περίπτωση που ο επισκέπτης χρησιμοποιήσει δικό του εξοπλισμό, τότε το εισιτήριο εισόδου είναι €4. Αν το κόστος αγοράς του εξοπλισμού είναι €75, πόσες φορές θα πρέπει να επισκεφθεί το ίδιο άτομο το χιονοδρομικό κέντρο, ώστε να είναι συμφέρουσα η αγορά του εξοπλισμού;»
3	Επιλύουν προβλήματα, όπως: «Μια εταιρεία διακόσμησης κήπων κατασκευάζει τετράγωνους κήπους που περιτριγυρίζονται από τετράγωνες πλάκες. Με βάση τα πιο κάτω παραδείγματα, να βρείτε ποια είναι η σχέση μεταξύ της πλευράς του κήπου και του αριθμών των τετράγωνων πλακών.» 
4	Κατασκευάζουν αλγεβρικά μοντέλα, για να λύσουν προβλήματα, όπως: «Δύτες διεξάγουν έρευνα σε ένα ναυάγιο για χρυσά και αργυρά νομίσματα και έχουν τοποθετήσει τα νομίσματα που μάζεψαν σε ένα κουβά. Τα νομίσματα που τοποθέτησαν στον κουβά δεν ζυγίζουν περισσότερο από 23kg. Κάθε χρυσό νόμισμα ζυγίζει 14,18g και κάθε αργυρό νόμισμα ζυγίζει 7,09g. Να βρείτε τον αριθμό των αργυρών και χρυσών νομισμάτων που υπάρχουν στον κουβά.
5	Σχεδιάζουν γραφικά τη λύση της ανίσωσης $2x+y<4$.

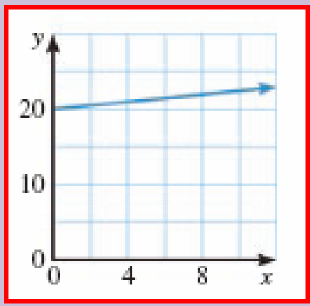
6 Αντιστοιχούν τις πιο κάτω περιγραφές με τις γραφικές παραστάσεις και επεξηγούν σε κάθε περίπτωση τι αναπαριστά η κλίση της γραφικής παράστασης.

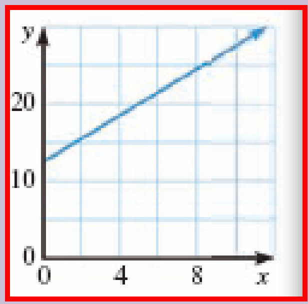
(α) Ένας υπάλληλος πληρώνεται €12,50 την ώρα και επιπλέον €1,50 για κάθε προϊόν που κατασκευάζει κάθε ώρα.

(β) Ένα άτομο πληρώνει €10 την εβδομάδα σε ένα φίλο του, για να αποπληρώσει ένα δάνειο αξίας €100.

(γ) Ένας επαγγελματίας οδηγός εισπράττει καθημερινά €20 για φαγητό και επιπλέον €0,32 για κάθε χιλιόμετρο που καλύπτει.







ΑΛΓΕΒΡΑ

Κλίμακα 5

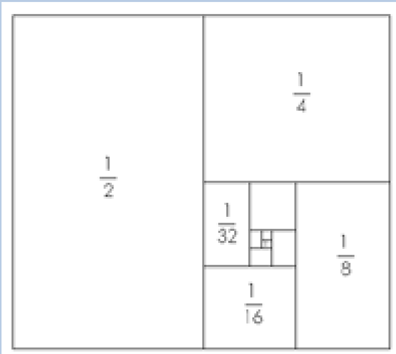
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ	
1	Βρίσκουν το γενικό όρο μοτίβων και σχέσεων και τον εκφράζουν λεκτικά και συμβολικά. Διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους υπολογίζοντας το ν-οστό όρο τους και το άθροισμα των ν πρώτων όρων τους.
2	Ορίζουν την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους, του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων, και της συνάρτησης, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών, και την διαφοροποιούν από σχέσεις και γραφήματα που δεν είναι συναρτήσεις. Ορίζουν τις συναρτήσεις που είναι 1-1 ή και επί και προσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.
3	Αναγνωρίζουν και επεξηγούν πότε μια λεκτική έκφραση, ένας πίνακας τιμών ή μια γραφική παράσταση αναπαριστούν γραμμική σχέση.
4	Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων και αναγνωρίζουν τη σημασία των παραμέτρων α και β της συνάρτησης $f(x)=ax+\beta$. (χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας).
5	Μελετούν και εφαρμόζουν γραφικές παραστάσεις τμηματικών συναρτήσεων.
6	Βρίσκουν την εξίσωση της ευθείας και την αναπαριστούν γραφικά, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.
7	Διερευνούν τη θέση δύο ευθειών στο επίπεδο και δίδονται κριτήρια καθετότητας και παραλληλίας
8	Επιλύουν γραφικά ή άλλως πως προβλήματα με γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις.
9	Αναπαριστούν γραφικά τη συνάρτηση $y=ax^2+\beta x+\gamma$ και αναγνωρίζουν πώς προκύπτει από την παραβολή $y=ax^2$ με μετατόπιση.

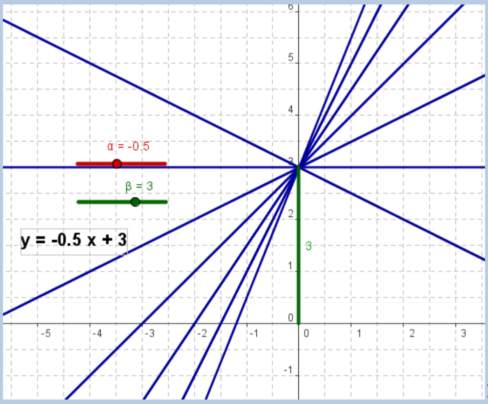
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ
10	Επιλύουν και διερευνούν γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις μιας μεταβλητής, αναπαριστούν γραφικά τις λύσεις τους και αναγνωρίζουν τις ιδιότητές τους.
11	Επιλύουν και διερευνούν προβλήματα γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων μιας μεταβλητής και αναπαριστούν γραφικά τις λύσεις τους.
12	Μετασχηματίζουν αλγεβρικές παραστάσεις ως προς μια μεταβλητή.
13	Εκτελούν πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων και αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά βασικές αλγεβρικές ταυτότητες.
14	Παραγοντοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις και επιλύουν εξισώσεις με παραγοντοποίηση.
15	Επιλύουν και διερευνούν γραμμικά συστήματα εξισώσεων και ανισώσεων δύο μεταβλητών (αλγεβρικά ή με τη χρήση δυναμικών λογισμικών) και τα εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων καθημερινής ζωής.
16	Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Διερευνούν γεωμετρικά μοτίβα, όπως:  ½+1/4+1/8+…=1	Α5.1
2	Αναγνωρίζουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών συναρτήσεων, όπως: Η συνάρτηση $f(n) = 60n$ μοντελοποιεί την απόσταση σε km που διανύει ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 60 km/ώρα. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών και της συνάρτησης; Ποιους περιορισμούς πρέπει να θέσουμε στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ώστε να έχει νόημα;	Α5.2
3	Επεξηγούν κατά πόσο τα δεδομένα που φαίνονται σε πίνακα τιμών, όπως τον πιο κάτω, μπορούν να αναπαριστούν μια γραμμική συνάρτηση.	Α5.3
4	Επιλύουν προβλήματα, όπως: ▪ Η θερμοκρασία στο έδαφος είναι 20^oC, ενώ σε ύψος 1Km είναι 10^oC. (α) να εκφράσετε τη θερμοκρασία T(σε ^oC) ως γραμμική συνάρτηση του ύψους h (σε Km) (β) να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του $T = f(h)$ (γ) να υπολογίσετε τη θερμοκρασία σε ύψος 2,5 Km. ▪ (α) Διερευνούν κατά πόσο το σημείο (1,2) βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της ευθείας $3x - 5y = 8$. ▪ (β) Γράφουν την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο $-\frac{2}{3}$ και τον άξονα των τεταγμένων στο 5.	Α5.4

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	-1	0	3	8	15	24

- Με την βοήθεια της τεχνολογίας διερευνούν τις παραμέτρους α και β της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$.

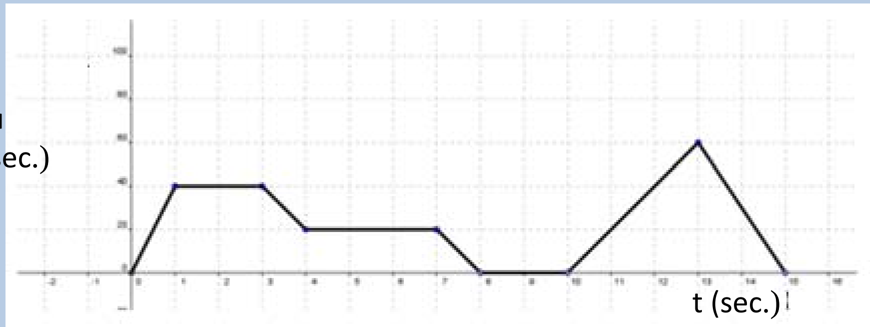


»

5 Μελετούν γραφικές παραστάσεις τμηματικών συναρτήσεων και απαντούν σε ερωτήσεις, όπως: A.5.5

- Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται το διάστημα (S) που διανύει ένα αυτοκίνητο συναρτήσει του χρόνου (t).

u
(m/sec.)



i. Ποια χρονική στιγμή το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα $\mathbf{60\ m/sec}$;

ii. Ποια χρονικά διαστήματα το αυτοκίνητο έμεινε ακίνητο;

iii. Ποιο είναι το συνολικό διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο;

6 Χρησιμοποιούν λεκτική περιγραφή, πίνακα τιμών και τύπο, για να περιγράψουν σχέσεις-αντιστοιχίες σε πραγματικά προβλήματα, όπως: A5.8

- Σε ένα ξενοδοχείο υπάρχουν $\mathbf{x}$ τρίκλινα και $\mathbf{y}$ τετράκλινα δωμάτια. Αν στο ξενοδοχείο υπάρχουν συνολικά $\mathbf{46}$ κρεβάτια, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Να βρείτε πόσα τρίκλινα και πόσα τετράκλινα δωμάτια έχει το ξενοδοχείο με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών.»

Μελετούν ανάλογα ποσά σε προβλήματα, όπως:

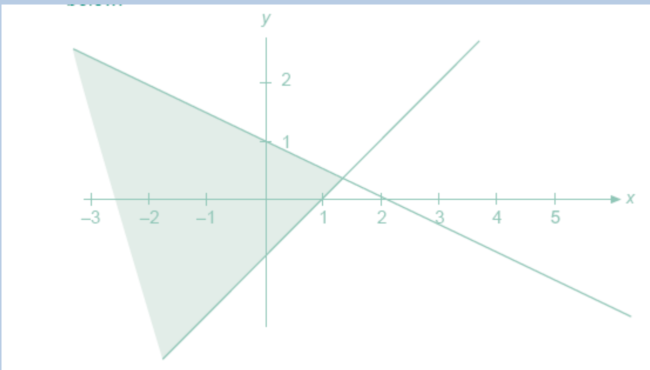
- Το $\mathbf{70}\%$ της μάζας ενός ανθρώπου αποτελείται από νερό.
  α) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τη μάζα ενός ανθρώπου $(\mathbf{x})$ με τη μάζα του νερού $(\mathbf{y})$ που περιέχει.
  β) Να βρείτε πόσα kg νερό υπάρχουν σε ένα άνθρωπο που ζυγίζει 60kg, 110kg, κτλ.

- Υπολογίζουν την κλίση και την τομή ευθείας με τον άξονα των τεταγμένων με δεδομένα που φαίνονται σε πίνακα, όπως ο πιο κάτω:

X	2	3	5	8	12
y	5	8	14	23	35

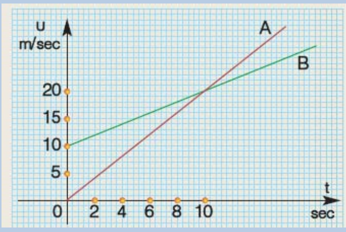
7 Επιλύουν γραμμικά συστήματα ανισώσεων, όπως: A.5.8

- (α) Γραμμοσκιάζουν την περιοχή που ορίζεται από την ανίσωση $2x + 6y < 4$.
- (β) Βρίσκουν ανισώσεις των οποίων η λύση ορίζει την περιοχή που φαίνεται πιο κάτω:



8 Αναγνωρίζουν μια γραμμική σχέση, όταν οι πληροφορίες που δίνονται είναι σε λεκτική μορφή ή πίνακα ή γράφημα μέσα από προβλήματα καθημερινής ζωής (π.χ. σχέση κέρδους – κόστους, σχέση απόστασης – χρόνου), όπως: A5.9

- Στο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου δύο αυτοκινήτων Α και Β. Να βρείτε (με τη χρήση πίνακα τιμών) τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με το χρόνο και να αναφέρετε κατά πόσο αυτή είναι γραμμική.»



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ — Δ.Ε.

Οι μαθητές

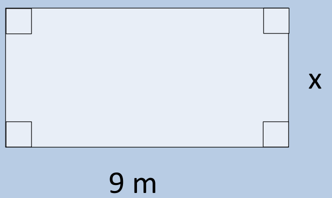
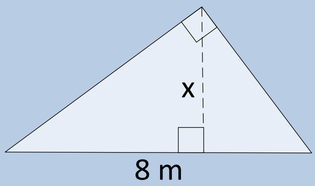
1

- Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις, όπως: A5.10

$3(y+2)-(y-2) = -4(y+1)$, $\frac{3(8y+5)}{14}-\frac{2(6y-5)}{7}=\frac{3y+2}{2}$,

$3(x-1)-5(x+3) \geq 4(x-3)$, $\frac{y+3}{2}-\frac{2(y+1)}{3} \geq y-5$

- Παριστούν γραφικά τη λύση ανίσωσης μιας μεταβλητής, χρησιμοποιώντας λογισμικά ή εφαρμογίδια ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπως:

	Να λύσετε και να παραστήσετε γραφικά τη λύση των ανισώσεων: (α) $x \leq 3$ (β) $x > -2$ (γ) $x \geq \frac{4}{5}$» (δ) $9 < -3(x-2)$ (ε) $-\frac{1}{2}y \leq 5$ (στ) $9 - 3x > 5(-x+2)$ ▪ Διερευνούν τις ιδιότητες των ανισοτήτων όπως: Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$, τότε: (α) $\boldsymbol{\alpha + \kappa > \beta + \kappa}$ και $\boldsymbol{\alpha - \kappa > \beta - \kappa}$, (β) $\boldsymbol{\alpha \cdot \kappa > \beta \cdot \kappa}$ και $\boldsymbol{\alpha : \kappa > \beta : \kappa}$, αν $\boldsymbol{\kappa} > 0$ και (γ) $\boldsymbol{\alpha \cdot \kappa < \beta . \kappa}$ και $\boldsymbol{\alpha : \kappa < \beta : \kappa}$, αν $\boldsymbol{\kappa} < 0$.	
2	▪ Μεταφράζουν λεκτικές προτάσεις σε ανισώσεις με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων, όπως: «Αριστείο παίρνει ένας μαθητής, αν έχει γενικό βαθμό τουλάχιστον 18,5.» ▪ Επιλύουν ανισώσεις και ελέγχουν τις απαντήσεις τους, όπως: «Να γράψετε και να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις.» Περίμετρος $\geq$ 26 m  Εμβαδόν < 12 cm^2  »	A5.11
3	Μετασχηματίζουν αλγεβρικές παραστάσεις συναρτήσεων ως προς μια μεταβλητή, όπως: «Να επιλύσετε τον τύπο $S = ut + \frac{1}{2}gt^2$ ως προς την ταχύτητα u.»	A5.12
4	▪ Διερευνούν τις λύσεις δυο ή περισσότερων ανισώσεων όπως: «Να λύσετε τα συστήματα των παρακάτω ανισώσεων: (α) $x \leq 3$ και $x > -5$ (β) $x > -2$ ή $x < -1$ (γ) $x \geq \frac{4}{5}$ και $x \geq -\frac{2}{3}$» ▪ Να λύσετε την ανίσωση $-2 < x + 2 \leq 4$. Στη συνέχεια να παραστήσετε τη λύση γραφικά.	A5.15
5	▪ Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) |2χ-1|=3, (β) |1-2χ|=5 ▪ Να λυθούν οι ανισώσεις: (α) |χ-1|>6, (β) |1-χ|<5	A5.16

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τιμών των συναρτήσεων (α) $y = 3x - 2$ και (β) $y = 3x - 2, x \in [-1,3]$ ▪ Να εκφράσετε την περίμετρο ενός τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της πλευράς του. Να κάνετε τη γραφική παράσταση, αναφέροντας το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών.	Α5.2
2	Σε ποια συνάρτηση αντιστοιχεί ο πιο κάτω πίνακας τιμών; x: -2, - 1, 2, 3 ψ: 1, - 2, 1, 6 Α. y = 2x Β. y = x + 3 Γ. $y = x^2 - 3$ Δ. y = x – 1 Ε. y = - x - 3	Α5.3
3	Δίνεται η εξίσωση 6x + 2y = 3 (1) α) Να γραφεί μια άλλη εξίσωση που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την εξίσωση (1). β) Να γραφεί μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).	Α5.4
4	▪ Το κόστος ταχυδρόμησης φακέλων $K(\beta)$ (σε ευρώ), εξαρτάται από τη μάζα β (σε g) του συγκεκριμένου φακέλου. Το ταχυδρομείο δεν έχει απλή εξίσωση που να δίνει το κόστος του φακέλου συναρτήσει της μάζας του, αλλά χρησιμοποιεί την τμηματική συνάρτηση: $K(\beta) = \begin{cases} 0{,}39, \alpha\nu\ 0 < \beta \leq 1 \\ 0{,}63, \alpha\nu\ 1 < \beta \leq 2 \\ 0{,}87, \alpha\nu\ 2 < \beta \leq 3 \\ 1{,}11, \alpha\nu\ 3 < \beta \leq 4 \\ \vdots \end{cases}$ (α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση που να δείχνει το Κόστος K συναρτήσει της μάζας των φακέλων β. (β) Να υπολογίσετε το κόστος για ένα φάκελο μάζας $1{,}8\ g$. ▪ Να ορίσετε τμηματικά τη συνάρτηση $y=\|\chi - 3\| + 2\chi$ και να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση.	Α5.5
5	▪ Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(-2,1)$ και $B(1,-5)$ και να βρείτε τις τομές της με τους άξονες των x και y. ▪ Να γράψετε την οικογένεια των γραμμικών συναρτήσεων που έχουν κλίση 2.	Α5.6

6 (α) Να μελετήσετε την οικογένεια των πιο κάτω συναρτήσεων: A5.7

(i) $y = \beta - 2x$ και
(ii) $y = 2 + \alpha(x + 1)$

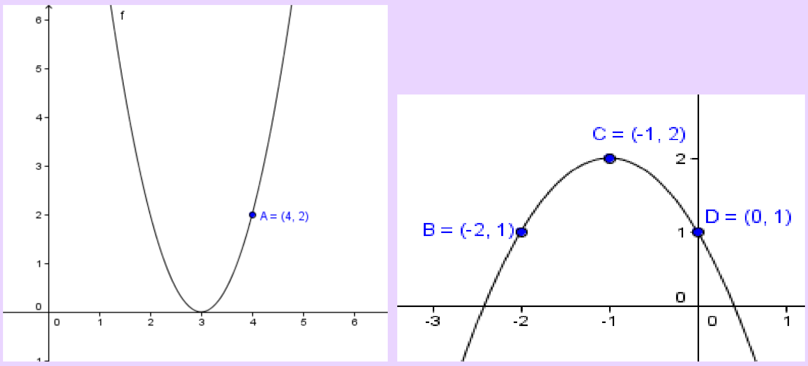
(β) Να βρείτε τα κοινά χαρακτηριστικά της κάθε οικογένειας καμπυλών.

7 Κατασκευάζουν και επιλύουν προβλήματα με εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού, όπως: A5.8

- Ποιος είναι ο μέγιστος χρόνος ομιλίας, αν ο λογαριασμός του τηλεφώνου δεν πρέπει να ξεπερνά τα €12. Ο κάθε συνδρομητής χρεώνεται με €2 πάγιο και 25 σεντς ανά λεπτό ομιλίας;.
- Η σχέση που συνδέει την κλίμακα της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρεναϊτ- Κελσίου δίνεται από τη σχέση: F=$\frac{9}{5}C + 32$.

(α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να εξηγήσετε τι αντιπροσωπεύει η κλίση της καμπύλης καθώς και η τομή με τον F-άξονα.
(β) Να κατασκευάσετε πίνακα τιμών δίνοντας ακέραιες τιμές στο C από το -3 μέχρι το +6.

8 Να βρείτε τον τύπο των δευτεροβάθμιων συναρτήσεων που αναπαρίστανται στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις. A5.9



(α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, όταν $f(-2) = f(4) = 0$ και $f(1) = 1$.
(β) Να περιγράψετε τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν, για να μετασχηματιστεί η y =αχ^2 στην $y = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.

9 Να επιλυθεί και διερευνηθεί το παρακάτω σύστημα: A5.10

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

10 Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι υποβάλλονται σε κάθε παίκτη 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση προσθέτονται βαθμοί ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ο Γιώργος απάντησε σωστά σε 7 ερωτήσεις και συγκέντρωσε 160 βαθμούς, ενώ ο Σάββας έδωσε 5 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 80 βαθμούς. Πόσοι βαθμοί δίνονται για κάθε σωστή απάντηση και A5.11

	πόσοι αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;	
11	Να μετασχηματίσετε τον τύπο: $\alpha = \frac{2\alpha+\beta}{\beta}$	Α5.12
12	▪ Να συμπληρωθούν οι ισότητες α. (3χ - .....)(3χ +......) = ...-16$ψ^2$ β. (2χ +.....)(.....- 3) = ... – 9 ▪ Να γίνουν οι πράξεις α. $(κ-2)^3$ β. $(μ+4)^3$ γ. $(3χ-2)^3$ δ. $(α-3β)^3$ $(2α+3β)^3$	Α5.13
13	Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα: α) $3χψ^2+6χ^2ψ+12χ^2ψ^2$, β)$16χ^2ψω-24χψ^2ω^2+32χψω$. γ) αχ+βψ+α-βχ-αψ-β , δ) $1-χ+χ^2-χ^3+χ^4-χ^5+χ^6-χ^7$.	Α5.14
14	Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις (α) $χ^2 - 6χ + 9 = 0$ (β) $χ^2 - 6χ + 10 = 0$ (γ) $(χ^2 - 4)(χ^2 - 1) = 0$ (δ) $χ(χ - 3) - 4(χ - 3) = 0$ (ε) $(χ - 2)^2 - χ(χ + 1) + 6 = 0$ (στ) $χ(χ+2)-(χ+2)^2+3χ(χ-1)+6χ = 0$	Α5.14
15	▪ Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) |χ-8|=10, (β) |2χ|=3|χ+1| ▪ Να λυθεί η ανίσωση $\frac{4\|x\|+1}{5} + \|x\| < \frac{3\|x\|-2}{2}$	Α5.16

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές
1	Επιλύουν προβλήματα που μπορούν να αναπαρασταθούν με γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις. «Ο διευθυντής ενός εργοστασίου γνωρίζει ότι για την παραγωγή 100 καρεκλών σε μια μέρα κοστίζει στο εργοστάσιο 2200 ευρώ, ενώ για την κατασκευή 300 καρεκλών το κόστος είναι 4800 ευρώ τη μέρα. (α) Να εκφράσετε το κόστος ως συνάρτηση του αριθμού των καρεκλών, αν θεωρήσουμε ότι είναι γραμμικό. (β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση και να ερμηνεύσετε τι αντιπροσωπεύει η κλίση καθώς και η τομή με τον άξονα των y».
2	Επιλύουν προβλήματα που μπορούν να αναπαρασταθούν με γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις. «Το 2000 ο πληθυσμός της Κύπρου ήταν 635 χιλιάδες. Κατά την διάρκεια των ετών 2000 και 2008 ο πληθυσμός αυξανόταν κατά 35 χιλιάδες κατοίκους κάθε χρόνο. (α) Να γράψετε μια εξίσωση η οποία να παρουσιάζει τον πληθυσμό (P) συναρτήσει του χρόνου t, όπου $t = 0$ θεωρείται το έτος 2000. (β) Να χρησιμοποιήσετε αυτό το μοντέλο για να εκτιμήσετε τον πληθυσμό της Κύπρου για το έτος 2032.»
3	Συσχετίζουν την παράσταση $(a + b)^n$ με τη *n-στη* σειρά στο τρίγωνο του Πασκάλ (μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατάλληλο λογισμικό).
4	Διερευνούν διοφαντικές εξισώσεις (με ή χωρίς τη χρήση λογισμικού).

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κλίμακα 6

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

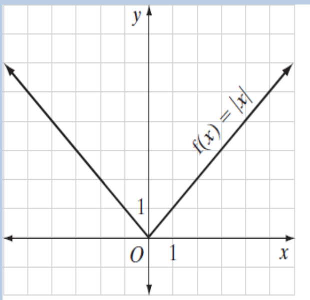
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ
1	Ορίζουν την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους, του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών συνάρτησης και αναγνωρίζουν πότε ορίζεται ή όχι συνάρτηση. Ορίζουν τις συναρτήσεις που είναι 1-1 ή/ και επί, και προσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.
2	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της ισότητας δύο συναρτήσεων και τις πράξεις συναρτήσεων.
3	Μελετούν ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων (άρτια, περιττή, περιοδική, κτλπ.) και εντοπίζουν τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.
4	Ορίζουν και εφαρμόζουν τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα, το ολικό μέγιστο ή το ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης και εξετάζουν τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της.
5	Κατασκευάζουν συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $f(x+h), f(x)+k, cf(x), f(cx)$.
6	Κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων, τις γραφικές παραστάσεις συνάρτησης των μορφών $xy=a$, και $x^2+y^2=r^2$.
7	Μελετούν συναρτήσεις με απόλυτες τιμές, τις μετασχηματίζουν σε τμηματικές συναρτήσεις και κατασκευάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.
8	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της σύνθεσης συναρτήσεων.
9	Εξετάζουν τις συνθήκες ύπαρξης της αντίστροφης μιας δεδομένης συνάρτησης, βρίσκουν την αντίστροφη συνάρτηση και μελετούν τη σχέση των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων.
10	Ορίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο, τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, και κατασκευάζουν τη γραφική τους παράσταση (εξετάζουν αν είναι άρτιες ή περιττές ή/και περιοδικές).

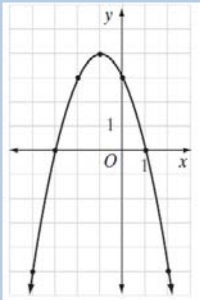
11	Επιλύουν προβλήματα αριθμών και γεωμετρικών προόδων.

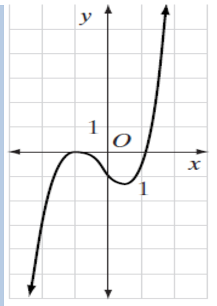
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ
12	Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις α΄ και β΄ βαθμού καθώς και συστήματα δυο και τριών εξισώσεων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.
13	Διερευνούν το είδος και το πλήθος των ριζών τριωνύμου δεύτερου βαθμού και τις μεταξύ τους σχέσεις (τύποι Vietta) και τις εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων.
14	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τον τύπο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$.
15	Επιλύουν και διερευνούν ανισώσεις ανωτέρου του β΄ βαθμού.
16	Ορίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε σχέση με τον τριγωνομετρικό κύκλο και επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις.
17	Αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.
18	Εφαρμόζουν τις έννοιες και τις μεθόδους της τριγωνομετρίας στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Ορίζουν και εξετάζουν πότε μια συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, επί και 1-1, όπως: ▪ Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2,0] \\ 3x+2, & x \in (0,4] \end{cases}$ είναι 1-1.	Α6.1
2	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της ισότητας δύο συναρτήσεων σε προβλήματα, όπως: ▪ Δίνονται οι συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2\lambda x+1-\lambda}{x+\lambda+2}$ και $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{(\lambda^2-3)x-2\lambda+4}{x+2\lambda-1}$. Να βρείτε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f = g$.	Α6.2
3	Μελετούν ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων (άρτια, περιττή, περιοδική, μονότονη, κτλ.) και εντοπίζουν τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες όπως: ▪ (α) Αν η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο T, τότε θα έχει περίοδο $kT,\ k \in \mathbb{R}$. ▪ (β) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} -2x+7, & x \in (-\infty,-1] \\ -2x-7, & x \in (-1,+\infty) \end{cases}$ να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.	Α6.3
4	Ορίζουν και βρίσκουν τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης και τα χρησιμοποιούν στην κατασκευή της γραφικής της παράστασης, όπως: (α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, να βρείτε τα ακρότατα και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \begin{cases} 8 & \text{αν} \quad x \in (-\infty,2) \\ 3x+2 & \text{αν} \quad [2,+\infty) \end{cases}$ (β) Να κατασκευάσετε με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού τη συνάρτηση f. (γ) Να αναγνωρίζουν τα διαστήματα μονοτονίας όταν δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης και να βρίσκουν τα ακρότατα της συνάρτησης αν υπάρχουν.	Α6.4

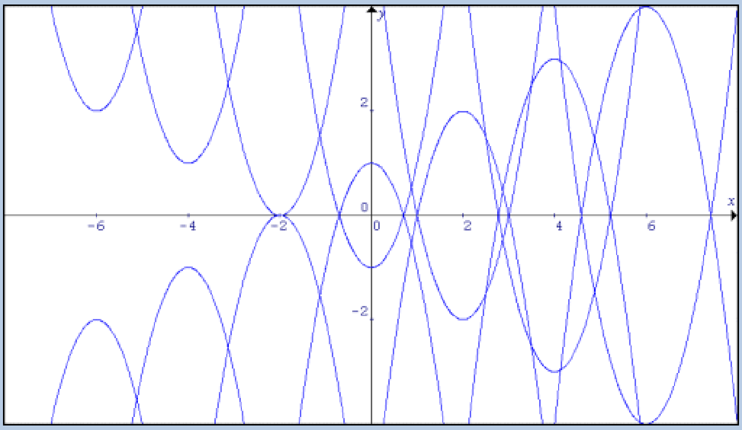






5 Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις με τη χρήση της τεχνολογίας, όπως: A6.5

Να κατασκευάσετε με τη χρήση λογισμικού τις γραφικές παραστάσεις των 14 παραβολών που φαίνονται στο σχήμα. Αν οι εξισώσεις τριών συναρτήσεων είναι οι: $y = 2(x-6)^2 - 4$, $y = 2x^2 - 1$, και $y = -2(x-4)^2 + 3$, να γράψετε τις εξισώσεις και των υπόλοιπων.



6 Κατασκευάζουν και ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων, όπως: A6.5

I. (α) Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της ομάδας (1) με τη χρήση δυναμικού λογισμικού προγράμματος.

(β) Να περιγράψετε τις διαφορές και τις ομοιότητες των τεσσάρων γραφικών παραστάσεων της ομάδας (1).

(γ) Να γράψετε τις εξισώσεις δύο ή περισσότερων συναρτήσεων της ομάδας (1) που ανήκουν στην ίδια κατηγορία.

II. (α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κατασκευάσετε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της ομάδας (2).

(β) Να περιγράψετε τις διαφορές και τις ομοιότητες των τεσσάρων γραφικών παραστάσεων της ομάδας (2).

III. Να συγκρίνετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ομάδων και να περιγράψετε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.

IV. Σε ποια από τις γραφικές παραστάσεις ανήκει το σημείο $(4,9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Ομάδα (1)	Ομάδα (2)
$f_1(x) = x^2$	$g_1(x) = \frac{1}{x}$
$f_2(x) = (x+1)^2$	$g_2(x) = \frac{1}{x+1}$
$f_3(x) = (x-1)^2$	$g_3(x) = \frac{1}{x-1}$
$f_4(x) = (x-2)^2$	$g_4(x) = \frac{1}{x-2}$

Κατασκευάζουν συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $f(x-h), f(x)+k, cf(x)$, όπως:

- Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

(α) $f(x) = 2συνx$ (β) $g(x) = συν(x - \frac{π}{3})$ (γ) $h(x) = 2συν\left(x - \frac{π}{3}\right)$

7 Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών προγραμμάτων, όπως: A6.6

Να διερευνήσετε τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της γραφικής παράσταση των:

(α) $y = ax^2 + βx + γ, \quad x \in \mathbb{R}, \quad α, β, γ \in \mathbb{R}$
(β) $y = \frac{a}{x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad a \in \mathbb{R}$
(γ) $x^2 + y^2 = r^2$

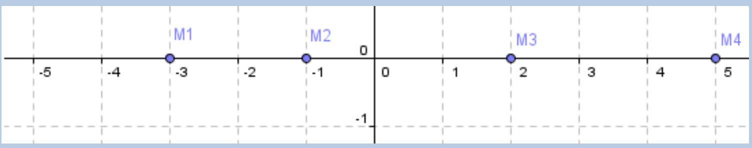
8 Μελετούν και κατασκευάζουν συναρτήσεις με απόλυτες τιμές, όπως: A6.7

- Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5|$$

Αντιλαμβάνονται την έννοια της απόλυτης τιμής σε καταστάσεις προβλημάτων, όπως:

- Σε μια βιομηχανία είναι τοποθετημένες κατά μήκος ενός διαδρόμου (ο άξονας των x) 4 μηχανές M1, M2, M3, M4, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μια νέα μηχανή (M5) πρέπει να τοποθετηθεί κατά μήκος του διαδρόμου, η οποία θα δέχεται τα προϊόντα των τεσσάρων μηχανών για περαιτέρω επεξεργασία. Η μηχανή M5 θα δέχεται την ίδια ποσότητα προϊόντων από καθεμιά παό τις άλλες μηχανές. Για τη μετακίνηση ενός προϊόντος προς τη μηχανή M5 υπάρχει ένα σταθερό κόστος ανάλογα με την απόσταση. Πού πρέπει να τοποθετηθεί η μηχανή M5 ώστε το ολικό κόστος αυτής της διαδικασίας να είναι ελάχιστο;



Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της σύνθεσης συναρτήσεων σε προβλήματα, όπως: — Α6.8

- Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x^2 + 2x$ και $g(x) = \sqrt{x-5}$. Να βρεθεί η $g \circ f$.

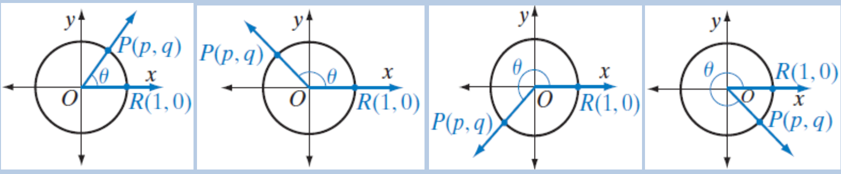
9 Εξετάζουν τις συνθήκες ύπαρξης της αντίστροφης μιας συνάρτησης και βρίσκουν την αντίστροφη συνάρτηση, όπως: — Α6.9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}$

(α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών.
(β) Να δειχθεί ότι είναι 1-1.
(γ) Να βρεθεί η $f^{-1}(x)$.

10 Ορίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο, τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, και κατασκευάζουν τη γραφική τους παράσταση (εξετάζουν αν είναι άρτιες ή περιττές ή/και περιοδικές) σε δραστηριότητες, όπως: — Α6.10

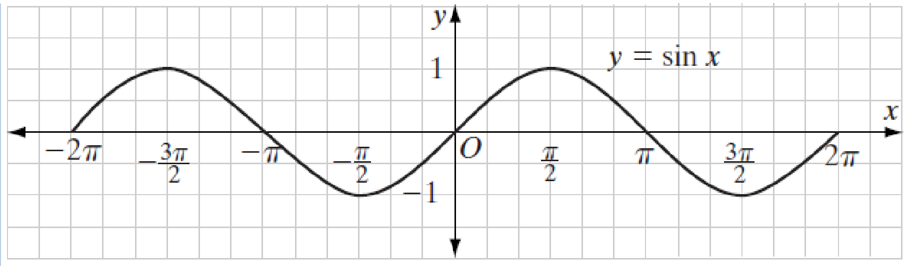
- Να εκφράσετε τα p και q συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ και να βρείτε το πρόσημο τους στα συγκεκριμένα τεταρτημόρια στις πιο κάτω περιπτώσεις



- Σχεδιάζουν γωνίες σε κανονική μορφή και βρίσκουν το πρόσημο των τριγωνομετρικών τους αριθμών, όπως:
  (α) Η γωνία, σε κανονική μορφή, έχει μέτρο 500° σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική της πλευρά και ποιο είναι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της;
  (β) Να βρείτε τα μέτρα πέντε γωνιών που έχουν την ίδια τελική πλευρά με γωνία 120°. Να βρείτε τις γωνίες θ με $\theta \in [0^0, 360^0]$ όπου ισχύει (ι) $ημθ = ημ120°$ (ιι) $συνθ = συν120°$ και (ιιι) $εφθ = εφ120°$.
- Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης $y = ημx$ και να εξηγήσετε τη σημασία της, παρατηρώντας τους πιο κάτω πίνακες και τη γραφική της παράσταση

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin x	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0

x	-2π	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
sin x	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0



- Η συνάρτηση $y = ημx, x \in \mathbb{R}$, έχει περίοδο $2π$. Να βρείτε την περίοδο των συναρτήσεων:

$y = ημ2x, y = ημ3x, y = ημ(x + π), y = ημ\left(\frac{x}{2}\right), y = συνx.$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις α΄ και β΄ βαθμού, όπως: — Α6.11

- Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 2(μ + 1)x + ν$.

Να ορίσετε τα $μ, ν$ ώστε να έχει ρίζα τον αριθμό 1 και να δέχεται ελάχιστη τιμή για $x = -1$.

- Να λύσετε το σύστημα: $\begin{matrix} (λ^2 + 1)x = 5 \\ x - y = 3 \end{matrix}$

2 Διερευνούν το είδος και το πλήθος των ριζών τριώνυμου δεύτερου βαθμού καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις, όπως: — Α6.12

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + λx - 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $λ \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες αυτές:

i) $x_1 + x_2$ ii) $x_1 \cdot x_2$ iii) $x_1^2 + x_2^2$ iv) $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$

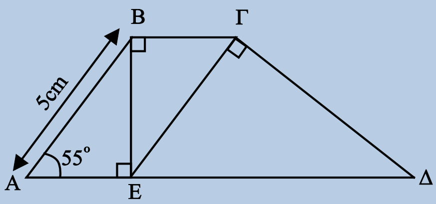
3 Εφαρμόζουν τον τύπο $f(x) = ax^2 + βx + γ = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$, όπως: — Α6.13

- Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις:

α) $\frac{x^2-6x+9}{x+3}, x \neq -3$ β) $\frac{2x^2-2x-12}{x^2+x-12}, x \neq -4, x \neq 3$

4 Επιλύουν και διερευνούν ανισώσεις ανωτέρου του β΄ βαθμού, όπως: — Α6.14

- Να επιλύσετε τις ανισώσεις:

	α) $(x - 1)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1) < 0$ β) $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2x + 6)^{3}\ 0$ γ) $x^2(3 - x^2) < 0$	
5	Ορίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε σχέση με τον τριγωνομετρικό κύκλο και επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις, όπως: ▪ Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή των παραστάσεων: α) $y = 2 + 3\,συνx$, β) $y = 5 + ημ^2x$ ▪ Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (β) $συνx = -\frac{1}{2}$.	Α6.15
6	Αποδεικνύουν βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, όπως: (α) $\frac{συν^2θ}{1 - ημθ} = 1 + ημθ$, (β) $\frac{σφ^2θ}{1 + στεμθ} + 1 = στεμθ$	Α6.16
7	Επιλύουν προβλήματα με τη χρήση τριγωνομετρίας, όπως: ▪ Με βάση το πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε: i) την ΑΕ, ii) τη γωνία Δ, iii) τη ΓΔ.  	Α6.17

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	▪ Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: α) $f(x)=\sqrt{1-3x}$, β) $f(x)=\sqrt{x^2}$ γ) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$, δ) $f(x)=3x+\dfrac{2}{x^2-9}$.	Α6.1
2	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2x^3+2x}{x^2+1}$, $g(x)=2x$, $h(x)=\frac{2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$ α) Ποιες από τις πιο πάνω συναρτήσεις είναι ίσες μεταξύ τους ; β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι συναρτήσεις είναι ίσες.	Α6.2
3	▪ Να δείξετε ότι: (α) Η σύνθεση δύο άρτιων συναρτήσεων f και g είναι άρτια συνάρτηση. (β) Η σύνθεση δύο περιττών συναρτήσεων h και g είναι περιττή συνάρτηση. (γ) Η σύνθεση μιας άρτιας συνάρτησης f και μιας περιττής συνάρτησης h είναι άρτια συνάρτηση. ▪ Να αναφέρετε ποια από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι άρτια και ποια περιττή: $y=ημx$, $y=συνx$ και $y=εφx$. Να επεξηγήσετε τη συμμετρία που εμφανίζει η καθεμιά σε σχέση με το αν είναι άρτιες ή περιττές.	Α6.3
4	▪ Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια. Στο διάστημα $[α,β]$ με $0<α<β$ είναι γνησίως αύξουσα. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης στο διάστημα $[-β,-α]$. ▪ Η συνάρτηση $f(x)=-3x+4$ έχει πεδίο ορισμού το $Α=[-1,2]$. Να βρείτε τα ακρότατα της f.	Α6.4
5	Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $y=\|x\|$ και $y=\|x-2\|+1$. Να περιγράψετε τις μεταβολές που γίνονται στην $y=\|x\|$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β της $y=\|x-α\|+β$.	Α6.5
6	▪ Να βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση του αριθμού των διαγωνίων (δ) σε σχέση με τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου (ν).	Α6.6

Αριθμός πλευρών πολυγώνου (ν)	3	4	5	6	7	8
Αριθμός διαγωνίων (δ)	0	2	5	9	14	20

▪ Να βρείτε την κατάλληλη πολυωνυμική συνάρτηση με βάση τα δεδομένα των τεσσάρων πιο κάτω πινάκων. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τεχνολογία ή και τη μέθοδο των διαφορών).

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	−3	−8	−15	−24	−35

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	11	14	9	−4	−25	−54

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	−12	−14	−10	6	40	98

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	14	27	41	53	60

7 Ένας πεζοπόρος περπατά προς τα πάνω και ακολούθως προς τα κάτω σε ένα λόφο. Ο λόφος περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = -\frac{4}{3}|x - 300| + 400$ όπου x, y είναι σε μέτρα και $0 \le x \le 600$. Να βρείτε το μήκος της απόστασης που διάνυσε ο πεζοπόρος. Α6.7

8 Α6.8

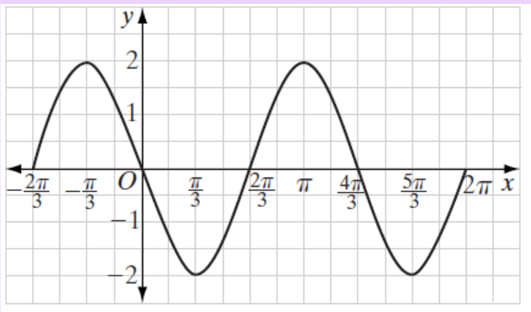
- Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 25x^2 + 20x + 2$ και $g(x) = \sqrt{x+2}$. Να βρείτε τη gof.
- Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 2\chi + 3$ και $g(x) = 4\chi + 9$. Να δείξετε ότι $fog = gof$.

9 Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Α6.9

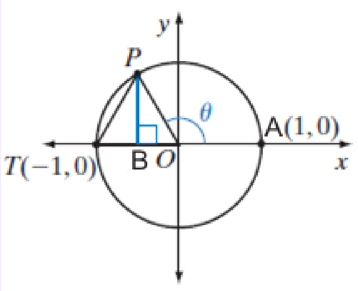
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση.
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και να βρείτε την f^{-1}

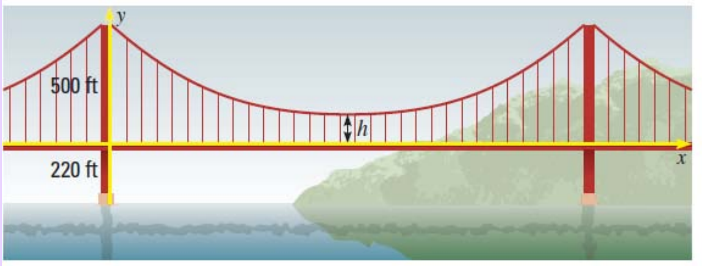
10 Α6.10

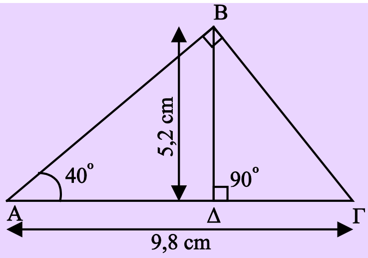
- Να χρησιμοποιήσετε τον τριγωνομετρικό κύκλο για να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:
  $\eta\mu 90^0, \eta\mu(-180^0), \sigma\upsilon\nu 270^0, \varepsilon\varphi 360^0$ $\kappa\alpha\iota$ $\varepsilon\varphi(270^0)$
- Η πιο κάτω συνάρτηση μπορεί να γραφεί στη μορφή $y = \alpha\sigma\upsilon\nu(\beta\chi + \gamma)$. Να μελετήσετε τη γραφική της παράσταση και να βρείτε τις τιμές των α, β και γ.



- Στο πιο κάτω διάγραμμα το $\overset{\Delta}{OPT}$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο με Ο την αρχή των αξόνων. Το σημείο Ρ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο και $T(-1,0)$, $P(1,0)$. Αν $\theta = \widehat{AOP}$, να βρείτε: (α) θ (β) $\sigma\upsilon\nu\,\theta$ (γ) $\eta\mu\,\theta$



11	Το κάθε σχοινί που ενώνει δύο στύλους στο πιο κάτω γεφύρι περιγράφεται από την εξίσωση: $y = \frac{1}{9000}x^2 - \frac{7}{15}x + 500$, όπου τα x και y μετρούνται σε πόδια (ft). Να υπολογίσετε το ύψος h του σχοινιού από το δρόμο στο χαμηλότερο του σημείο. 	A6.11
12	▪ Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2(\mu+3)x + \mu^2 + 6\mu - 5 = 0$ με ρίζες ρ_1και ρ_2. Να αποδείξετε ότι η διαφορά $\rho_1 - \rho_2$ δεν εξαρτάται από το μ. ▪ Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + (2\lambda+1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ χ^2 + (2λ+1)χ + λ^2 - 3 = 0 α) έχει ρίζες πραγματικές και ίσες; β) έχει ρίζες αντίστροφες; γ) έχει ρίζες αντίθετες; δ) έχει ρίζα τον αριθμό -1; ε) έχει γινόμενο ριζών ίσο με 6 ; στ) έχει ρίζες x_1 και x_2 που ικανοποιούν την σχέση $3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2 < 0$	A6.12
13	Να απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις: α) $\frac{x^2+3x-18}{x^2+4x-12}$ β) $\frac{x^2-\alpha x-6\alpha^2}{x^2-7\alpha x+12\alpha^2}$	A6.13
14	Να επιλύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις: α) $2x^2(x+2)\,(x^2 - 5x + 6) \leq 0$ β) $(2-x)^2(x^2 - 8x + 15)(-x^2 + 2x - 9) \rangle 0$	A6.14
15	Να σχεδιάσετε τα πέρατα των τόξων $x_\kappa = \frac{\kappa\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ στον τριγωνομετρικό κύκλο. Πόσες διαφορετικές τιμές θα έχουν οι συναρτήσεις $\eta\mu x_\kappa$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma\upsilon\nu x_\kappa$;	16.15
16	Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: α) $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ β) $\eta\mu x.\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^3 x$ γ) $\sqrt{1-\eta\mu x} \cdot \sqrt{1+\eta\mu x}$	A6.16
17	Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να υπολογίσετε:	A6.17



i) την ΑΔ, ii) την ΑΒ, iii) τη ΒΓ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Θεωρούμε ότι σας δίνονται δύο επιλογές για την εκτέλεση μιας εργασίας.

- Μπορείτε να κερδίσετε €10 για κάθε ώρα που εργάζεστε.
- Μπορείτε να κερδίσετε €2 αν εργαστείτε 1 ώρα, €4 αν εργαστείτε 2 ώρες, €8 αν εργαστείτε 3 ώρες, κτλ. Το ποσό που θα παίρνετε είναι διπλάσιο για κάθε πρόσθετη ώρα που εργάζεστε.

Υπάρχει κάποιος αριθμός ωρών για τον οποίο θα κερδίζατε το ίδιο ποσό χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω σχέδια πληρωμής;

1. Να γράψτε μια συνάρτηση f που να περιγράφει πως μπορείτε να κερδίσετε €10 ανά ώρα. Να χρησιμοποιήσετε τη μεταβλητή x ως τη μεταβλητή εισαγωγής.
2. Να γράψετε μια συνάρτηση g που να περιγράφει το διπλασιασμό του ποσού που κερδίζετε για κάθε ώρα εργασίας. Να χρησιμοποιήστε τη μεταβλητή x ως τη μεταβλητή εισαγωγής.
3. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων.
4. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $\mathrm{f(x) = g(x)}$; Να προσεγγίσετε τις λύσεις με τη χρήση λογισμικού.

Να επεξηγήσετε πιο σχέδιο πληρωμής αποδίδει το μεγαλύτερο κέρδος.

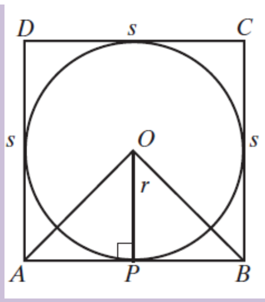
2 Να μεγιστοποιήσετε την παράσταση $\mathrm{Z = 6x_1 + 11x_2}$, όταν

$$\mathrm{2x_1 + x_2 < 104, \quad x_1 + 2x_2 < 76, \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.}$$

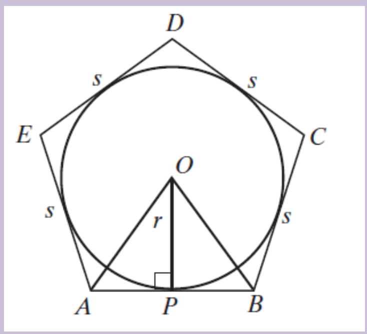
3 Κεφάλαιο 10000 ευρώ ανατοκίζεται για 5 χρόνια. Να βρείτε την τελική αξία του κεφαλαίου, αν (α) ανατοκίζεται ετησίως προς 6% (β) ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο προς 3% (γ) ανατοκίζεται κάθε τετράμηνο προς 2%.

Με ποιο επιτόκιο θα πρέπει να ανατοκίζεται κάθε μήνα το ίδιο ποσό και ποια θα είναι η τελική του αξία; Τι θα συμβαίνει αν το ίδιο ποσό συνεχίσει να ανατοκίζεται σε ποιο μικρά χρονικά διαστήματα (π.χ. κάθε μέρα ή κάθε ώρα); Ποιο θα είναι το τελικό ποσό, όταν ο ανατοκισμός γίνεται συνεχόμενα;

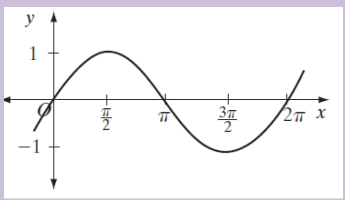
4 Με βάση το πιο κάτω σχήμα (α) να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΟΒ και θ=ΑΟΡ σε ακτίνια, (β)να εκφράσετε το ΑΡ και ΑΒ συναρτήσει της εφθ και της ακτίνας του κύκλου r, (γ) να βρείτε την περίμετρο του τετραγώνου συναρτήσει του r και του θ.

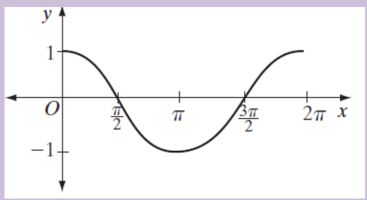


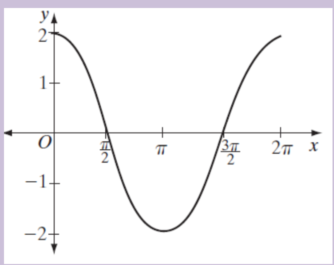
(δ) Να επαναλάβετε τα πιο πάνω ερωτήματα, όταν το περιγεγραμμένο πολύγωνο είναι κανονικό πεντάγωνο και να κάνετε μια υπόθεση – γενίκευση, όταν το κανονικό πολύγωνο έχει ν-πλευρές.

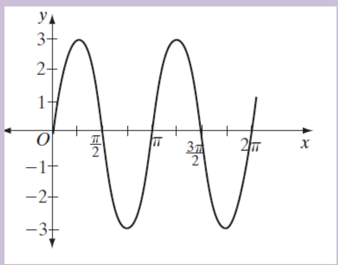


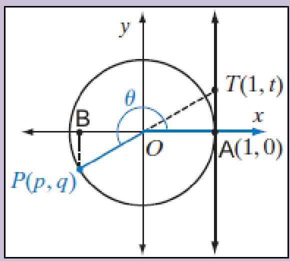
5 Να εκφράσετε τις συναρτήσεις που αναπαρίστανται από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις με δύο διαφορετικούς τρόπους (με τύπο που να περιέχει μόνο ημίτονο και μόνο συνημίτονο).









6	Στο πιο κάτω διάγραμμα η ΑΤ είναι εφαπτομένη στο μοναδιαίο κύκλο στο σημείο Α(1,0). Η τελική πλευρά της γωνίας $\angle \mathrm{AOP}$ τέμνει το μοναδιαίο κύκλο στο σημείο $\mathrm{P(p,q)}$ και η ευθεία η οποία περιέχει την τελική πλευρά της γωνίας τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων στο σημείο $\mathrm{T(1.t)}$. Η κάθετη ευθεία από το σημείο P στον άξονα των τετμημένων τέμνει τον κύκλο στο σημείο $\mathrm{B(p,0)}$.  (α) Να αποδείξετε ότι αν $\angle \mathrm{AOP} = θ$, τότε $εφθ = \frac{ημθ}{συνθ}$. (β) Αν οι συντεταγμένες του σημείου P είναι $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, να βρείτε τα ημθ, συνθ και εφθ.
7	(α)Να χρησιμοποιήσετε το πιο κάτω διάγραμμα για να εκφράσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημθ, συνθ και εφθ ως προς τις συντεταγμένες των σημείων R ή P ή T. (β) Με χρήση ομοίων τριγώνων, να δείξετε ότι : $εφθ = \frac{ημθ}{συνθ}$
8	Να ελέγξετε και να επαληθεύσετε με βάση τον τριγωνομετρικό κύκλο ότι $ημθ = -ημ(-θ)$ κατασκευάζοντας κατάλληλες γραφικές παραστάσεις.

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κλίμακα 7

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

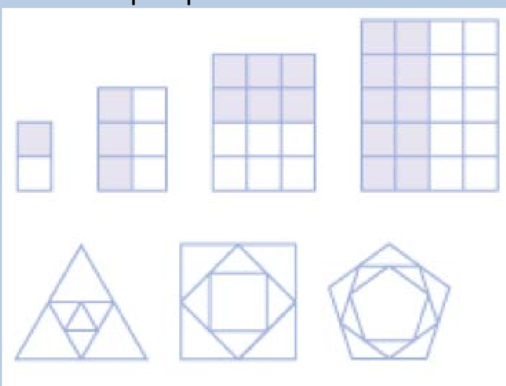
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ
1	Αναφέρουν τον ορισμό της ακολουθία και βρίσκουν του όρους της, όταν δίνεται ο γενικός όρος ή ο αναδρομικός τύπος.
2	Ορίζουν και εφαρμόζουν τις έννοιες της μονοτονίας ακολουθίας, τη φραγμένη ακολουθία και το όριο ακολουθίας. (Αλγεβρικοί κανόνες ορίων ακολουθιών, έννοια υπακολουθίας, η ιδιότητα supremum των πραγματικών αριθμών, πρόταση Bolzano-Weierstrass).
3	Αναφέρουν και εφαρμόζουν τον ορισμό των προόδων (ως ειδική περίπτωση ακολουθιών) βρίσκουν το γενικό όρο και το άθροισμα των ν πρώτων όρων.
4	Μοντελοποιούν και ερμηνεύουν λύσεις προβλημάτων, χρησιμοποιώντας ακολουθίες.
5	Περιγράφουν και εφαρμόζουν τη σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων που ανήκουν στην ίδια κατηγορία (με αναφορά σε μετασχηματισμούς).
6	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια του σημείου συσσώρευσης ενός συνόλου, του μεμονωμένου σημείου ενός συνόλου του ορίου συνάρτησης και τους αλγεβρικούς κανόνες ορίων συναρτήσεων ($\lim_{x\to a} f(x)$=L, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού Α της f, $\lim_{x\to\infty} f(x)$).
7	Ορίζουν και εφαρμόζουν τη συνέχεια συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και εξετάζουν τη συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα (a,β) ή $[a,\beta]$. (Συνέχεια και ακολουθίες, αλγεβρικοί κανόνες συνεχών συναρτήσεων, συνέχεια της σύνθεσης δύο συνεχών συναρτήσεων, θεμελιώδη θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων, θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, συνέχεια σε κλειστό διάστημα).
8	Ορίζουν και εφαρμόζουν την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, για κάθε ρητό $a > 1$ ή $0 < a < 1$. Κατασκευάζουν γραμμικά και μη γραμμικά μοτίβα και αιτιολογούν τον κανόνα εκθετικών συναρτήσεων.
9	Ορίζουν και εφαρμόζουν τη λογαριθμική συνάρτηση στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών με βάση ρητό $a > 1$ ή $0 < a < 1$.

10	Χρησιμοποιούν την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση στη μελέτη προβλημάτων.
11	Διερευνούν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα λογισμικά προγράμματα ή μαθηματικά εφαρμογίδια.
12	Ορίζουν και υπολογίζουν την παράγωγο συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τον ορισμό: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ή $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ή $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
13	Ορίζουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά την εφαπτομένη καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = α$ ως οριακή θέση χορδής ΑΒ όταν το σημείο Β τείνει στο σημείο Α.
14	Διακρίνουν τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα συνάρτησης σε ένα σημείο της και προσδιορίζουν πότε μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.
15	Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τους αλγεβρικούς κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων καθώς και τις σύνθετης συνάρτησης $y = f\big(g(x)\big)$ (κανόνας αλυσίδας).
16	Υπολογίζουν την παράγωγο συναρτήσεων που ορίζονται παραμετρικά ή σε πεπλεγμένη μορφή.
17	Εφαρμόζουν την έννοια της παραγώγου, για να προσδιορίζουν την κλίση και την εξίσωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε σημείο της και επιλύουν προβλήματα ρυθμού μεταβολής.

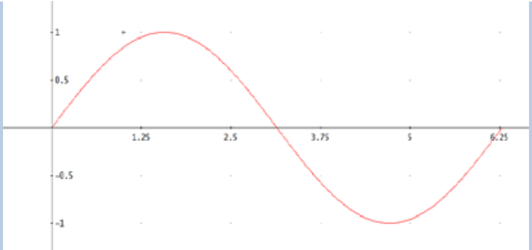
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ	
18	Αναφέρουν και εφαρμόζουν το θεώρημα Bolzano για να επιλύουν προσεγγιστικά εξισώσεις.
19	Αναφέρουν, ερμηνεύουν γεωμετρικά και εφαρμόζουν το «θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών».
20	Αναφέρουν, ερμηνεύουν γεωμετρικά και εφαρμόζουν το θεώρημα της «μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνάρτησης».
21	Επιλέγουν κατάλληλες στρατηγικές (γραφικές, αλγεβρικές και τριγωνομετρικές), για να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματά τους.
22	Επιλύουν εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις.
23	Υπολογίζουν το όριο μιας συνάρτησης αναλυτικά, γραφικά και αριθμητικά.
24	Δεδομένης της συνάρτησης κίνησης $s = s(t)$ υπολογίζουν τη μέση ταχύτητα σε δεδομένο διάστημα, και τη στιγμιαία ταχύτητα σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

25	Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της σειράς και χρησιμοποιούν τον συμβολισμό $\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_0+k} a_\nu$, ν_0, κ $\in \mathbb{N}$.
26	Αναφέρουν τον ορισμό των προόδων (ειδική περίπτωση ακολουθιών) βρίσκουν το γενικό όρο και το άθροισμα των ν πρώτων όρων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Διερευνούν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα, χρησιμοποιώντας πολιτισμικά μνημεία και έργα τέχνης από διάφορους πολιτισμούς και τα μοντελοποιούν με τη χρήση λογισμικών προγραμμάτων, όπως: ▪ Να μελετήσετε τα πιο κάτω σχήματα που έχουν κατασκευαστεί μόνο με χάρακα(ρίγα) και να τα ανακατασκευάσετε στο τετράδιο σας.  ▪ Να συνεχίσετε τα πιο κάτω μοτίβα:  Ορίζουν μια ακολουθία και βρίσκουν του όρους της, όταν δίνεται ο γενικός όρος ή ο αναδρομικός τύπος, όπως: ▪ Τι είναι εκείνο που διαφοροποιεί μια ακολουθία από οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση; ▪ Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας $\alpha_\nu = \nu^2(\nu+1)$. Να κάνετε το ίδιο και για την ακολουθία που ορίζεται με τον αναγωγικό	Α7.1

	τύπο: $\alpha_{\nu+1} = 2 \cdot \alpha_\nu + 3,\ \ \alpha_1 = 4.$	
2	Ορίζουν τη μονοτονία ακολουθίας, την φραγμένη ακολουθία και το όριο ακολουθίας, όπως: ▪ Να δείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = 2\nu + 3$ είναι γνήσια αύξουσα. Είναι φραγμένη; Συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό;» ▪ Να βρείτε το όριο των ακολουθιών $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \beta_\nu = 3 - \frac{2}{(\nu+1)^2}$. ▪ Να δείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu}{3^\nu}$ είναι φραγμένη και γνήσια φθίνουσα.	Α7.2
3	Χρησιμοποιούν αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους στη λύση προβλημάτων, όπως: ▪ Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το α και σταθερό λόγο λ δίνεται από τον τύπο:$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(1-\lambda^\nu)}{1-\lambda}$. ▪ Την $1^η$ Ιανουαρίου του 2009 ο Κώστας κατέθεσε €3000 σε λογαριασμό με τη συμφωνία στο τέλος του χρόνου να του εξασφαλίζεται ένα επιτόκιο 5%, και επιπλέον συμφωνήθηκε να καταθέτει κάθε αρχή του νέου χρόνο €3000. (α)Να υπολογίσετε πόσα χρήματα θα έχει στον λογαριασμό του στην αρχή του 2010 και του 2011. (β) Αν αυτό το σχέδιο συνεχίσει μέχρι και το 2017, πόσα χρήματα θα έχει στο λογαριασμό του;	Α7.3
4	Χρησιμοποιούν ακολουθίες και σειρές, για να μοντελοποιούν και να ερμηνεύουν λύσεις προβλημάτων, όπως: ▪ Ο αριθμός των ψαριών σε μια λίμνη είναι 500 000. Το πλήθος των ψαριών στη λίμνη εκφράζεται από την αναγωγική σχέση $\alpha_{\nu+1} = 1{,}05 \cdot \alpha_\nu - \delta$ όπου το α_ν είναι ο αριθμός των ψαριών στη λίμνη μετά από ν χρόνια και δ είναι ο αριθμός των ψαριών που αλιεύονται κάθε χρόνο. Αν το 2008 το δ ήταν 15000, (α) να υπολογίσετε τα α_1, α_2 και α_3 αιτιολογόντας τα αποτελέσματα σας. (β)Τι θα μπορούσε να συμβεί το 2014, αν το 2008 το δ ήταν 100000; (γ) Ποιον αριθμό δ θα προτείνατε, ώστε το πλήθος των ψαριών κάθε χρόνο να είναι το ίδιο;	Α7.4
5	Περιγράφουν τη σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων που ανήκουν στην ίδια κατηγορία (με αναφορά σε μετασχηματισμούς), όπως: ▪ Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ημx$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.	Α7.5



Να σχεδιάσετε τις καμπύλες

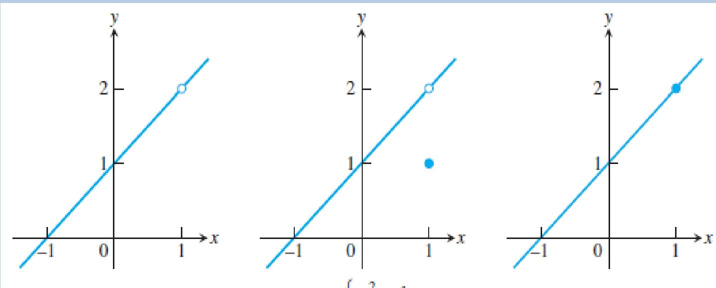
$y = 2\eta\mu x,\ \ y = \eta\mu x + 1,\ \ y = \eta\mu 2x,\ \ y = \eta\mu(x - 60),$

$y = \eta\mu(x + 90),\ \ y = -\eta\mu x, y = \eta\mu(-x)$

αναφέροντας σε κάθε περίπτωση το είδος του μετασχηματισμού.

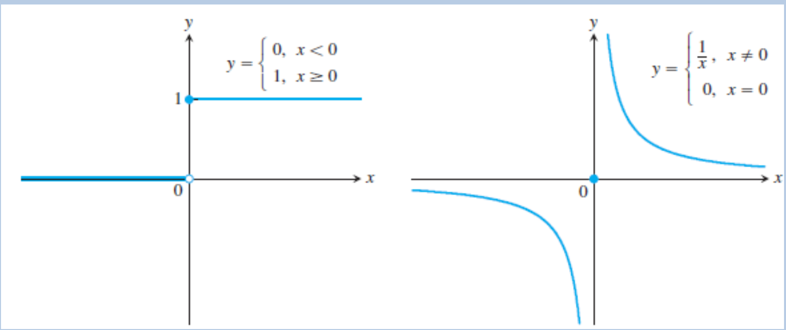
6 Διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ του ορίου μιας συνάρτησης καθώς το x τείνει σε πραγματικό αριθμό α, και της αριθμητικής τιμής της συνάρτησης για $x = \alpha$, όπως: A7.6

- Στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις να βρείτε σε κάθε περίπτωση το $lim_{x\to 1} f(x)$, $και\ το\ f(1)$



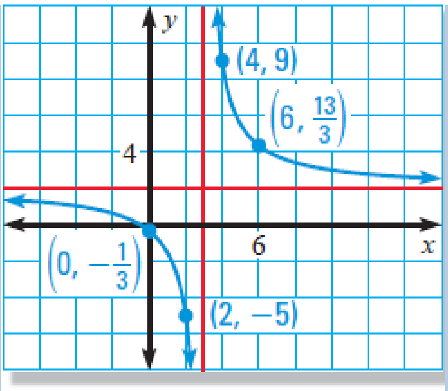
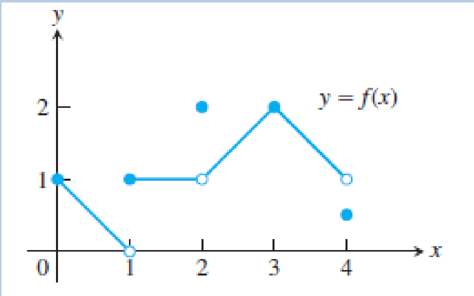
(a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = x + 1$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το $lim_{x\to 0} f(x)$, και το $f(0)$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

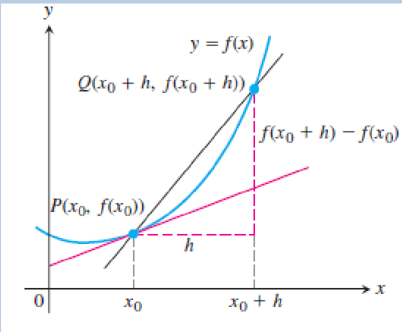


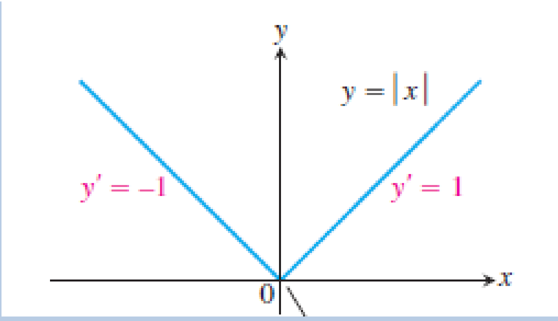
Κατανοούν την έννοια του ορίου συνάρτησης και του συμβολισμού $lim_{x\to a} f(x)$ και $lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, όπως:

- Χρησιμοποιώντας την πιο κάτω γραφική παράσταση να βρείτε τα όρια:

	 (α) $lim_{x\to 6} f(x)$, (β) $lim_{x\to 3^+} f(x)$, (γ) $lim_{x\to 3^-} f(x)$, (δ) $lim_{x\to +\infty} f(x)$	
7	Ορίζουν και εφαρμόζουν τη συνέχεια συνάρτησης σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της και εξετάζουν την συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα (α,β) ή $[\alpha,\beta]$ όπως: Να εξετάσετε κατά πόσο η πιο κάτω συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε $x \in [0,4]$ δικαιολογώντας την απάντησή σας. 	Α7.7
8	Ορίζουν και εφαρμόζουν την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ στο σύνολο $\mathbb{R}$, όπως: ▪ Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x$. (α). Να γράψετε τις εξισώσεις για τρεις συναρτήσεις g, h και j, ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους να έχουν την ίδια μορφή με τη γραφική παράσταση της f , αλλά i. Η συνάρτηση g να είναι μετατοπισμένη κατά 2 μονάδες δεξιά της γραφικής παράστασης της f. ii. Η συνάρτηση h να είναι μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες δεξιά της γραφικής παράστασης της f III. Η συνάρτηση h να είναι μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες αριστερά της γραφικής παράστασης της f (β). Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των τεσσάρων συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων με την χρήση λογισμικού προγράμματος.	Α7.8
9	Εφαρμόζουν την έννοια του λογαρίθμου θετικού αριθμού $\theta, (\theta > 0)$ με βάση $\alpha, 0 < \alpha \neq 1$, όπως:	Α7.9

	▪ Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες: (α) $log_a 1 = \cdots$ (β) $log_{\dots} \sqrt{a} = \frac{1}{2}$ (γ) $log_a a = \cdots$ (δ) $log_a 1 = \cdots$ (ε) $log_a \sqrt{a} = \cdots$ (στ) $log_a \dots = \frac{1}{3}$ (ζ) $log_{\dots} a^2 = 1$ (η) $log_{\dots} a^3 = 3$ (θ) $log_a \frac{1}{a} = \cdots$ (ι) $log_a \dots = 0$ ▪ (α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$. (β) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση. ▪ Οι μαθητές επεξηγούν με πολλούς τρόπους πώς διακρίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = 2^x$ από τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ και τη γραμμική συνάρτηση $f(x) = 2x$. Να περιγράψετε ένα επενδυτικό σχέδιο που να μπορεί να αναπαρασταθεί με τη συνάρτηση $f(x) = 500(1.01)^x$.	
10	Απλοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων, όπως: ▪ Αν $\lambda o\gamma_2 A = x$ $και$ $\lambda o\gamma_2 B = y$, να εκφράσετε τις πιο κάτω παραστάσεις συναρτήσει των x και y, $(i) \lambda o\gamma_2(A^3B)$, (ii) $\lambda o\gamma_2(\frac{\sqrt{A}}{4B})$ (iii) $\lambda o\gamma_4(\frac{A^4}{B^2})$	Α7.9
11	Χρησιμοποιούν την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση στη μελέτη προβλημάτων, όπως: ▪ Ι. Αν ένα ποσό χρημάτων επενδύεται με επιτόκιο 5% με σύνθετο τόκο ετησία, τότε για κάθε ευρώ που έχει επενδυθεί το συνολικό ποσό είναι $g(x) = 1{,}05^x$ ύστερα από x χρόνια. (α) Να γράψετε διατεταγμένα ζεύγη σημείων της συνάρτησης g για $0 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Z}^+$ και να σημειώσετε τα σημεία σε σύστημα αξόνων. (β) Να γράψετε τα διατεταγμένα ζεύγη σημείων της συνάρτησης $g^{-1}(x)$ και να τα σημειώσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων. ▪ ΙΙ. Ο κ. Α. επενδύει €1000 σε ένα επενδυτικό σχέδιο μιας εταιρείας που πληρώνει σύνθετο τόκο 4% το χρόνο. Να παρουσιάσετε σε έναν πίνακα την απόδοση του επενδυτικού σχεδίου του κ. Α. στο τέλος του 1ου, 3ου και 5ου χρόνου. Να επεξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζετε την απόδοση του σχεδίου.	Α7.10
12	Διερευνούν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα λογισμικά προγράμματα ή μαθηματικά εφαρμογίδια, όπως: ▪ Σε λογισμικό γραφικών παραστάσεων να ορίσετε διάστημα στον άξονα των τετμημένων $-2 \leq x \leq 2$ και στον άξονα των τεταγμένων $-2 \leq y \leq 2$). Στη συνέχεια να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + 3$. Να εξηγήσετε γιατί δεν φαίνεται καθόλου στην	Α7.11

	οθόνη σας το διάγραμμα της συνάρτησης. Ακολούθως να διαφοροποιήσετε τους άξονες στα διαστήματα, (α) $-4 \leq x \leq 4,\ -4 \leq y \leq 4$ (β) $-10 \leq x \leq 10,\ -5 \leq y \leq 30$ (γ) $-50 \leq x \leq 50,\ -100 \leq y \leq 1000.$ Τι παρατηρείτε για το διάγραμμα της συνάρτησης στη κάθε περίπτωση; ▪ Να μελετήσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^3 + \lambda x$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^3 + \lambda x = 0$ έχει 3 πραγματικές ρίζες (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό, για να κατασκευάσετε μετρητή λ) .	
13	Ορίζουν και υπολογίζουν τον παράγωγο αριθμό συνάρτησης $y = f(x)$ στο $x = \alpha$ με: $f'(\alpha) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ή με $f'(\alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, όπως: ▪ Να εξετάσετε κατά πόσον η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $f'(4)$.	Α7.12
14	Ορίζουν και υπολογίζουν την παράγωγο συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, όπως: ▪ Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό, για να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των συναρτήσεων: (α)$f(x) = x^2 + 2$, (β) $g(x) = \frac{2}{x^2}$, (γ) $f(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1.$	Α7.12
15	Ορίζουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά την εφαπτομένη καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = \alpha$ ως οριακή θέση χορδής ΑΒ, όταν το σημείο Β τείνει στο σημείο Α, όπως: ▪ Να εξηγήσετε και να δώσετε κατάλληλο συμβολισμό, πώς από την κλίση της χορδή PQ θα μπορέσετε να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης στο πιο κάτω σχήμα». 	Α7.13
16	Διακρίνουν τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα συνάρτησης σε ένα σημείο της και προσδιορίζουν πότε μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη, όπως: ▪ Να εξηγήσετε κατά πόσο η πιο κάτω συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = 0$.	Α7.14



17 Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τους κανόνες παραγώγισης, όπως: A7.15

- Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό για να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των συναρτήσεων, για να δείξετε ότι:

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{dx}=\frac{d(f(x))}{dx}+\frac{d(g(x))}{dx}$$

$$\frac{d(f(x)\cdot g(x))}{dx}=\frac{d(f(x))}{dx}\cdot g(x)+\frac{d(g(x))}{dx}\cdot f(x)$$

- Να υπολογίσετε τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων με χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$(a) y=(2x+3)^4$ (β) $y=\eta\mu 4x$, (γ) $y=e^{2x-1}$(δ) $y=ln\,(x^2+2)$

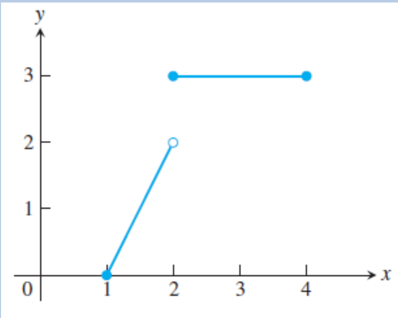
18 Υπολογίζουν την παράγωγο σε σχέσεις που ορίζονται παραμετρικά ή σε πεπλεγμένη μορφή, όπως: A7.16

- Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ όταν

(α) $x^2+y^2-3xy=11,$ (β) $x=2t+3, y=\eta\mu t-2\,, t\in R.$

19 Εφαρμόζουν την έννοια της παραγώγου, για να προσδιορίζουν την κλίση και την εξίσωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε σημείο της και επιλύουν προβλήματα ρυθμού μεταβολής, όπως: A7.17

- Μπαλόνι φουσκώνεται έτσι ώστε η ακτίνα του R να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $\frac{dR}{dt}=3cm/s$. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του όγκου και της ολικής του επιφάνειας τη στιγμή που η ακτίνα του είναι ίση με 10 cm.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x)=x^3-7x$ στο σημείο της με $x=-2$. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση που να παρουσιάζει την καμπύλη και την εφαπτομένη στο συγκεκριμένο σημείο.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Εφαρμόζουν το θεώρημα του Bolzano για να επιλύουν προσεγγιστικά εξισώσεις, όπως: (α) Να δείξετε κατασκευάζοντας την κατάλληλη γραφική παράσταση ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x - 6x$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. (β) Να δείξετε αλγεβρικά ότι η μία ρίζα είναι στο διάστημα (0,1) και η άλλη στο (2,3). (γ)Να βρείτε τη μεγαλύτερη από τις δύο ρίζες προσεγγιστικά.	Α7.18
2	Διατυπώνουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, όπως: Να βρείτε τον τύπο της πιο κάτω συνάρτησης και να επεξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να ισχύσει το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών. 	Α7.19
3	Αναφέρουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά το θεώρημα της μεγίστης και της ελαχίστης τιμής, όπως: ▪ Να βρείτε τους αριθμούς μ και Μ έτσι ώστε να ισχύει για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x + 2, x \in [-1,2]$ $\mu \leq f(x) \leq M$.Να παραστήσετε γραφικά τη λύση.	Α7.20
4	Επιλύουν, με χρήση κατάλληλων γραφικών παραστάσεων, τριγωνομετρικές, εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις, όπως: ▪ Να κατασκευάσετε εκείνες τις γραφικές παραστάσεις που θα σας βοηθήσουν να επιλύσετε τις εξισώσεις: (α) $\eta\mu 2x = 0{,}5$, (β) $\sigma\upsilon\nu(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (γ) $2^x = 7$, (δ) $e^{-2x} = -\frac{1}{4}$, (ε) $ln(x + 2) = 6$.	Α7.21
5	Επιλύουν εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις (δίνοντας το αποτέλεσμα και σε ακριβή αλλά και σε προσεγγιστική μορφή), όπως: $(\alpha) 2^{x+1} = 4\sqrt{2}$, (β) $e^{2x+1} = 4$, (γ) $ln(x + 3) = 2$, $(\delta) 200e^{-2x} = 400$	Α7.22
6	Υπολογίζουν το όριο συνάρτησης αφού το προσεγγίσουν «διαισθητικά» με	Α7.23

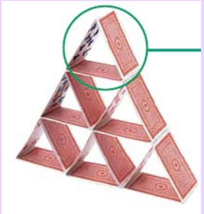
	γραφική παράσταση και με πίνακα τιμών, όπως: ▪ Να κατασκευάσετε πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, για να δικαιολογήσετε γιατί το όριο $lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$; ▪ Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$, για να υπολογίσετε την παράγωγο των συναρτήσεων: $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $f(x) = 2 + \sqrt{x}$.	
7	Υπολογίζουν τη μέση και τη στιγμιαία ταχύτητα, όταν δίνεται η συνάρτηση μετατόπισης, όπως: ▪ Ένα βλήμα εκτοξεύεται, ώστε να διανύει απόσταση y μέτρα ανά δευτερόλεπτο, σύμφωνα με τον τύπο $y = 5t^2\ m/sec$. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του στο διάστημα [2,3] και τη στιγμιαία ταχύτητα του στο $t = 2$.	Α7.24
8	Ορίζουν την έννοια της σειράς σε μια ακολουθία και χρησιμοποιούν τον συμβολισμό $\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_0+k} a_\nu$, ν_0, $\kappa \in \mathbb{N}$, όπως: ▪ Να υπολογίσετε: (α) $\sum_{\kappa=1}^{\nu}(3\kappa + 2)$ και (β) 3+6+12+. . . $3 \cdot 2^\nu$.	Α7.25

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

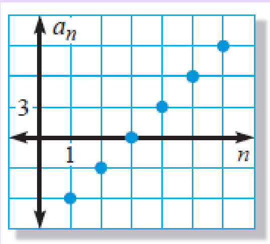
	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**

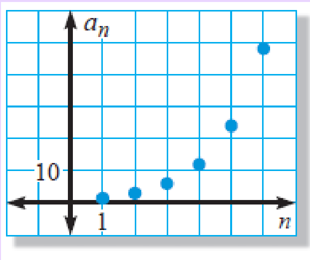
1

- Στην 1η γραμμή του πιο κάτω σχήματος (φαίνεται σε κύκλο) έχουν τοποθετηθεί 3 λωρίδες χαρτιού. Να βρείτε τον τύπο που εκφράζει τον αριθμό των λωρίδων στη ν-γραμμή και τον τύπο που δίνει το συνολικό άθροισμα των λωρίδων χαρτιού μέχρι και τη ν-γραμμή. Α7.1

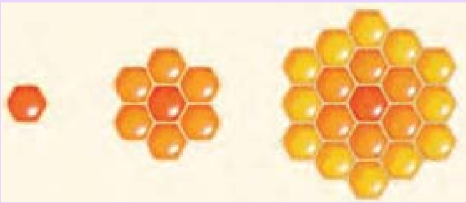


- Να χρησιμοποιήσετε τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις για να γράψετε τον τύπο της καθεμιάς ακολουθίας. Στη συνέχεια να υπολογίσετε 50ο όρο της καθεμιάς ακολουθίας.





- Να παραστήσετε γραφικά την ακολουθία που προκύπτει από το πιο κάτω μοτίβο, αφού την ορίσετε



- Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους των πιο κάτω ακολουθιών και να τις ονομάσετε.

(α) τα πολλαπλάσια του 6 ………. (β) οι τετράγωνοι αριθμοί , ……………

(γ) οι πρώτοι αριθμοί ………………. (δ) οι τρίγωνοι αριθμοί …………….

- Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των πιο κάτω ακολουθιών:

(α) $\alpha_\nu = 2\nu^2 + \frac{1}{\nu}$ (β) $\beta_{\nu+1} = 2 \cdot \beta_\nu + 3, \quad \beta_1 = 2.$

- Να βρείτε το γενικό όρο των ακολουθιών (Να χρησιμοποιήσετε κλειστό τύπο ή αναγωγική σχέση)

(α) 2,5,8,11,. . . (β) 2,5,26,677, . . . (γ) 2, 3,7,13,27,53,. . .

2

- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις ακολουθίες Α7.2

α) $a_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$, β) $a_\nu = \frac{2^\nu}{\nu!}$, $\nu \in \mathbb{N}$

γ) $a_\nu = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ δ) $a_1 = a \in \mathbb{R}^+$ και $a_{\nu+1} = a + a_\nu^2$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

- Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $a_\nu = \frac{\nu\,\eta\mu\nu + \nu^2}{\nu^2+5\nu+6}$ είναι φραγμένη.
- Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών

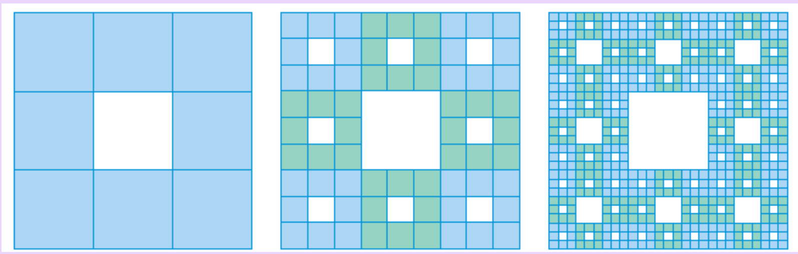
α) $a_\nu = \left(1 + \frac{2}{\nu^2} - \frac{5}{\nu^3}\right)^4$, $\nu \in \mathbb{N}$ β) $a_\nu = \frac{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu+2}}{\sqrt{\nu+3}}$, $\nu \in \mathbb{N}$

3

- Αν ο λόγος των αθροισμάτων των ν πρώτων όρων δύο αριθμητικών προόδων είναι $\frac{7\nu+9}{\nu+2}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, να βρείτε το λόγο των έκτων όρων των δύο προόδων. A7.3
- Δίνεται η πεπερασμένη αριθμητική πρόοδος $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Να δείξετε ότι το άθροισμα δύο όρων που ισαπέχουν από τα άκρα είναι σταθερό.

4

- Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται το γνωστό «φράκταλ» «το χαλί του Sierpensky». Κάθε τετράγωνο χωρίζεται σε 9 ίσα πιο μικρά τετράγωνα (3×3) και στη συνέχεια αφαιρείται το κεντρικό τετράγωνο, όπως φαίνεται στο σχήμα (Στάδιο 1). Στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία σε κάθε τετράγωνο που δεν έχει αφαιρεθεί, όπως φαίνεται στο δεύτερο και τρίτο στάδιο. A7.4



Στάδιο 1 Στάδιο 2 Στάδιο 3

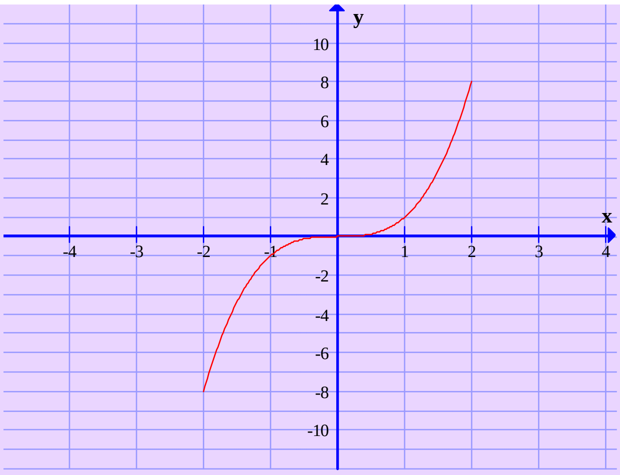
(α) Αν α_ν είναι ο αριθμός των τετραγώνων που αφαιρείται στο ν-οστό στάδιο, να βρείτε τον τύπο που εκφράζει το α_ν. Στη συνέχεια να υπολογίσετε πόσα τετράγωνα θα αφαιρεθούν στο στάδιο 8.

(β) Αν για μια ακολουθία β_ν το β_1 είναι το εμβαδόν του μέρους που απομένει μετά την αφαίρεση του τετραγώνου, να εκφράσετε λεκτικά τι σημαίνει το β_ν και να βρείτε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται. Ποια είναι η τιμή του β_{12};

(γ) Να σχολιάσετε τι θα συμβεί, αν αυτή η διαδικασία συνεχιστεί για πολύ μεγάλες τιμές του ν.

5

- Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ στο διάστημα $[0,2\pi]$. A7.5



Να κατασκευάσετε τις συναρτήσεις:

a) $f(x)+1$ β) $-2f(x)$ γ) $f(x-3)$ δ) $-2f(x-3)+1$.

6

- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x^2-4}$. A7.6

Να εξετάσετε κατά πόσο έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων:

α) $lim_{x\to -1} f(x)$ β) $lim_{x\to 2} f(x)$ γ) $lim_{x\to 3} f(x)$ δ) $lim_{x\to 0} f(x)$

- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\le -1 \\ -x^2+2, & x>-1 \end{cases}$$

Να βρείτε κατά πόσο υπάρχει, το $lim_{x\to -1} f(x)$.

7

- Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση: A7.7

$$f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}+1, \quad x\in\mathbb{R}-\{3\}$$

- Δίνεται η συνάρτηση

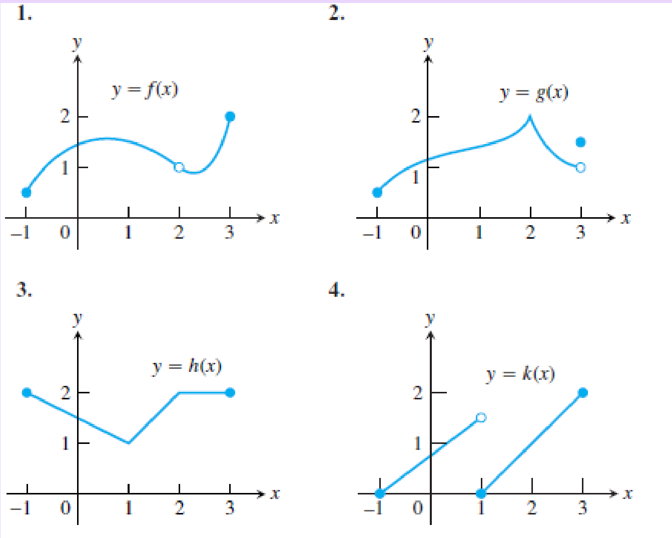
$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-1)x+\beta & , \quad x<-1 \\ \beta x-a & , \quad x\ge -1 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο (1,0) .

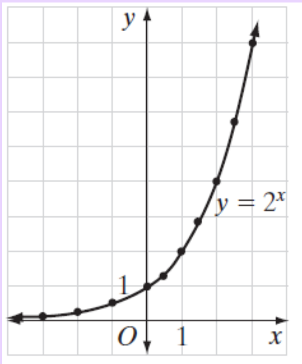
- Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η πιο κάτω συνάρτηση να είναι παντού συνεχής. Να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \chi<2 \\ \alpha x^2-\beta x+3 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ 2<\chi<3 \\ 2x-\alpha+\beta & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ x\ge 3 \end{cases}$$

- Να διερευνήσετε ως προς τη συνέχεια στα αντίστοιχα πεδία ορισμού τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:



8 (α) Από τα σημεία που φαίνονται στη γραφική παράσταση της $y = 2^x$, να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών της. A7.8



(β) Σε διαφορετικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις συμμετρικές καμπύλες της $y = 2^x$ ως προς τις ευθείες: $x = 0$, $y = 0$ και $y = x$ και να αναφέρετε τον τύπο της καθεμιάς.

9 Να δείξετε ότι αν είναι γνωστοί οι δεκαδικοί λογάριθμοι των αριθμών του διαστήματος $[1,10]$, τότε είναι γνωστοί και οι δεκαδικοί λογάριθμοι όλων των θετικών αριθμών. A7.9

10 A7.10

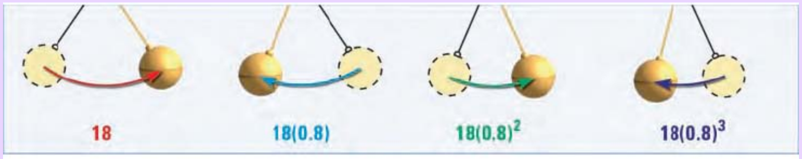
- Μια μουσική ιστοσελίδα είχε αρχικά 40000 μέλη. Έχει διαπιστωθεί ότι κάθε χρόνο 20% των μελών εγκαταλείπει την ιστοσελίδα, αλλά ταυτόχρονα εγγράφονται κάθε χρόνο 3000 νέα μέλη.

(α) Να γράψετε την αναγωγική σχέση που εκφράζει τον αριθμό των μελών α_ν στην αρχή κάθε ν- χρόνου.

(β) Πόσα μέλη θα είναι εγγεγραμμένα στην ιστοσελίδα στην αρχή του 6ου χρόνου;

(γ) Τι θα συμβεί αν συνεχίζεται το ίδιο μοτίβο;

- Εκκρεμές αφήνεται από την ηρεμία. Στην 1η του ταλάντευση διανύει 18 cm, ενώ σε κάθε επόμενη ταλάντευση διανύει μόνο το 80% της προηγούμενης απόστασης. Ποια θα είναι η συνολική απόσταση που θα καλύψει το εκκρεμές;»



11 Με χρήση λογισμικού να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^4 \; και \; y = 4^x$. Να αναφέρετε κατά πόσο οι δύο καμπύλες τέμνονται καθώς και ποια αυξάνει με μεγαλύτερο ρυθμό. Α7.11

12 Α7.12

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x & , \quad x < 0 \\ συν^2(\pi x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x} & , \quad x > 1 \end{cases}$

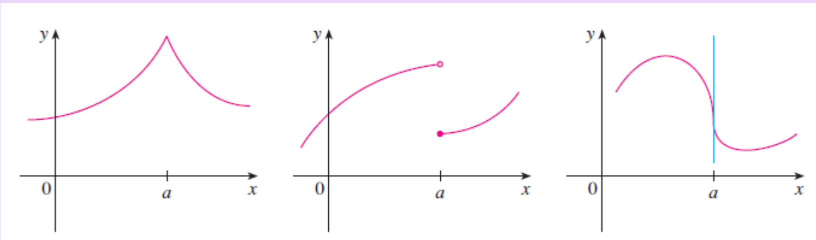
Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

13 Α7.13

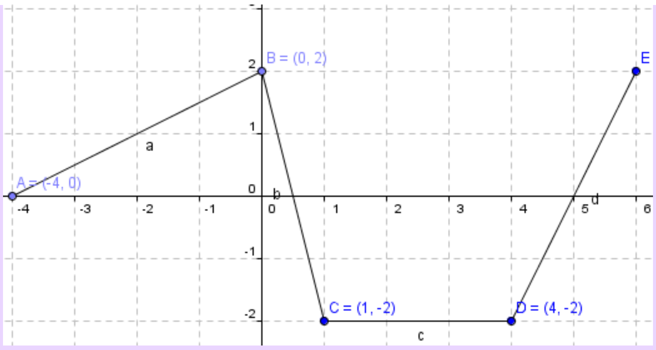
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{2}{x}$ στο σημείο που έχει τετμημένη 2.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x \,, \alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε στα σημεία της γραφικής παράστασης της f, που έχουν τετμημένες $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$, οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

14 Α7.14

- Να σχολιάσετε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα των πιο κάτω συναρτήσεων:



- Στην πιο κάτω γραφική παράσταση, η συνάρτηση αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα στο διάστημα [-4,6]. Να αναφέρετε κατά πόσο υπάρχουν σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη και στη συνέχεια να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της παραγώγου της.



15 ▪ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. Να βρείτε: A7.15

α) Το πεδίο ορισμού της, f β) την $f'(x)$.

▪ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, f, β) την $f'(x)$.

16 ▪ Να δείξετε ότι η συνάρτηση που ορίζεται με την παραμετρική μορφή : A7.16

$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $36\,\frac{d^2y}{dx^2}\left(y - \sqrt{3x}\right) = x + 3$

▪ Αν $\eta\mu y = 2\eta\mu x$ να δείξετε ότι : $\frac{d^2y}{dx^2}\sigma\phi y - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

17 Η θερμοκρασία T ενός υγρού, όταν αρχίζει να ψύχεται (σε C^o) δίνεται από τη σχέση $T = 25 + 60e^{-0,1t}, t \geq 0$. (το T είναι σε λεπτά). A7.17

(α)Να βρείτε τη θερμοκρασία του υγρού, όταν αρχίζει να ψύχεται.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η θερμοκρασία του υγρού δεν θα πέσει ποτέ κάτω από τους 25 C^o.

(γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$.

(δ) Να βρείτε σε ποια χρονική στιγμή ο ρυθμός μείωσης της θερμοκρασίας φθάνει στο $1{,}8^o\ C/sec$.

18 Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,1) και να την υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού. A7.18

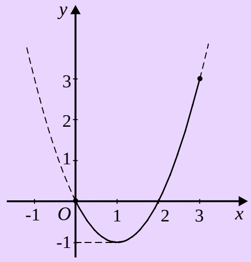
19 ▪ Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και να το αποδείξετε. A7.19

▪ Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^5 + \alpha x^4 + x^3 + \beta x^2 + 2x + \alpha + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-\beta, -\alpha)$.

▪ Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2010]$ και $1 \leq f(x) \leq 2010$ για κάθε $x \in [1, 2010]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

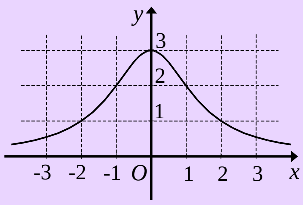
$x_0 \in [1, 2010]$ ώστε $x_0 f(x_0) = 2010$.

20 Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$ / $A = [0, 3]$ να γράψετε τα ακρότατα της συνάρτησης f. A7.20

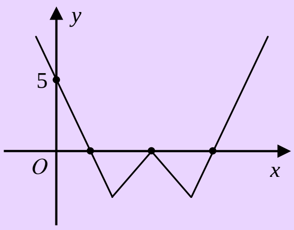


21 A7.21

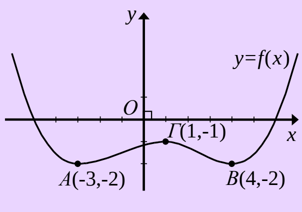
- Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{6}{2+x^2}$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\dfrac{6}{2+x^2} > 2$.



- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το πλήθος των διακεκριμένων λύσεων της εξίσωσης $(f(x))^2 = f(x)$



- Η ευθεία $y = \kappa$ θέλουμε να τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε 4 διαφορετικά σημεία. Να βρείτε τις τιμές τους κ.



22 A7.22

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x + 2^x + lnx - 5$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. γ) Να δείξετε ότι $f(1) = 0$. δ) Να λύσετε την εξίσωση $2^x + \ln x = 5 - 3x$. ε) Να λύσετε την ανίσωση $2^x + \ln x > 5 - 3x$.

23 Να βρείτε τον αναγωγικό τύπο για τις ακολουθίες: A7.26

(α) $2, 5, 7, 12, 19, \ldots$ (β) $1, 1, 2, 6, 24, \ldots$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

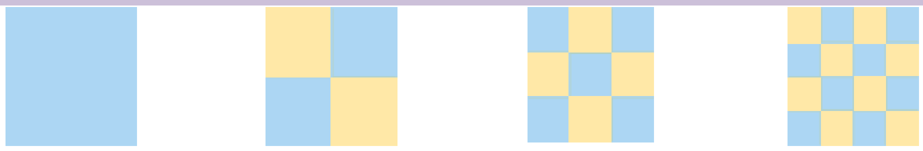
1 Να βρείτε αριθμητική και γεωμετρική πρόοδο που να έχουν κοινούς τους πρώτους πέντε όρους τους.

2 Να χρησιμοποιήσετε το πιο κάτω γεωμετρικό μοτίβο:

(α) Να εξηγήσετε τι αντιπροσωπεύει το n και τι το a_n

(β) Να δημιουργήσετε πίνακα τιμών για τα ζεύγη (n, a_n) για $n = 1,2,3, \ldots 10$

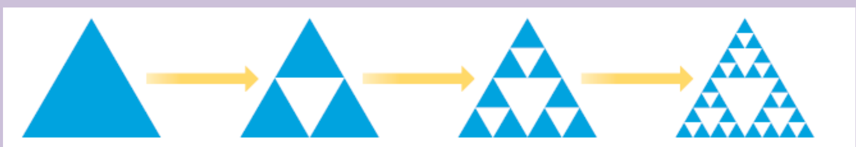
(γ) Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $\alpha_n = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{4}[1-(-1)^n]$, για να υπολογίσετε τα α_n για $n = 1,2,3, \ldots 10$ και να συγκρίνετε τις τιμές με αυτές που βρήκατε στον πίνακα τιμών.



$n = 1, a_n = 1$ $n = 2, a_n = 2$ $n = 3, a_n = 5$ $n = 4, a_n = 8$

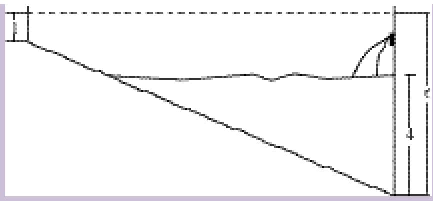
3 Το κάθε σχήμα εκφράζει εκείνο το βήμα που δείχνει να αφαιρείται από κάθε μεγαλύτερο ισόπλευρο τρίγωνο το ισόπλευρο τρίγωνο που ενώνει τα μέσα των πλευρών του. Αν το αρχικό τρίγωνο έχει εμβαδόν 1m^2 και το α_ν εκφράζει το συνολικό εμβαδόν των τριγώνων που αφαιρούνται στο ν-οστό βήμα, να γράψετε τον τύπο που δίνει το α_ν και στη συνέχεια να υπολογίσετε και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα της σειράς

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$$



4 Να διερευνήσετε τη γνωστή ακολουθία Fibonacci και να την παρουσιάσετε σε συμμαθητές σας. Κατά την παρουσίαση να δώσετε έμφαση στον αναγωγικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας και να γράψετε σχέσεις που συνδέουν τους όρους της. Πώς εμφανίζεται ο αριθμός φ στους όρους αυτής της ακολουθίας;

5 Μια πισίνα έχει διαστάσεις $25\text{m} \times 25\text{m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το πιο βαθύ της σημείο είναι 6m από την επιφάνεια της και το πιο ρηχό είναι 1m. Ο πυθμένας της πισίνας κλίνει με σταθερή γωνία. Η πισίνα γεμίζει με σταθερό ρυθμό $1\text{m}^3/$ λεπτό. Με ποιο ρυθμό ανεβαίνει η στάθμη στην πισίνα, όταν το νερό βρίσκεται στα 4 μέτρα;

	
6	Η τιμή T ενός αυτοκινήτου σε ευρώ, δίνεται από τον τύπο $T = 20000e^{-\frac{t}{8}}$, όπου t η ηλικία του αυτοκινήτου σε χρόνια. (α) Να αναφέρετε την αρχική του τιμή. (β) Να υπολογίσετε την τιμή του σε 6 χρόνια. (γ) Πότε η τιμή του αυτοκινήτου θα είναι μικρότερη των 5000 ευρώ; (δ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση που να δείχνει πως η τιμή του αυτοκινήτου μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου.
7	Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $(x + 2)\text{cm}$, $x \text{ cm}$ και $(2x - 3)\text{cm}$. Αν ο όγκος του είναι 1040cm^3, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του, κατασκευάζοντας την κατάλληλη γραφική παράσταση.

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κλίμακα 8

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ
1	Επιλέγουν κατάλληλα μοντέλα με πραγματικά δεδομένα, για να αναλύουν και να ερμηνεύουν αποτελέσματα (π.χ. τεχνικές με λογαριθμικά μοντέλα).
2	Αναφέρουν, ερμηνεύουν γεωμετρικά και εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων το «θεώρημα του Rolle» και το «θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού».
3	Αναφέρουν αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τα θεωρήματα μονοτονίας σε διάστημα, τα κριτήρια εύρεσης τοπικών ακροτάτων, ολικών άκρων τιμών, κυρτότητας και σημείων καμπής μιας πραγματικής συνάρτησης και τα εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.
4	Αναφέρουν και εφαρμόζουν τον «κανόνα του D’ Hospital» για τον υπολογισμό ορίων.
5	Ορίζουν τις κατακόρυφες, οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες καμπύλης και κατασκευάζουν τη γραφική παράστασή τους.
6	Διερευνούν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ως διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.
7	Αναφέρουν και αποδεικνύουν τις συνθήκες για την ολοκληρωσιμότητα ή όχι μιας συνάρτησης (κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, η συνάρτηση Dirichlet δεν είναι ολοκληρώσιμη, κάθε μονότονη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κτλ).
8	Αναφέρουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και υπολογίζουν το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από μια καμπύλη και μια ευθεία ή από δύο καμπύλες καθώς και τον όγκο στερεού από περιστροφή χωρίου γύρω από ευθεία $x = a$ ή $y = \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.
9	Ορίζουν και διερευνούν την έννοια της αντιπαραγώγου μιας συνάρτησης. Αποδεικνύουν, με το θεώρημα μέσης τιμής, ότι κάθε δύο αντιπαράγωγοι της ίδιας συνάρτησης διαφέρουν κατά μία σταθερά.

10	Ορίζουν το αόριστο ολοκλήρωμα F μιας συνεχούς συνάρτησης f ως συνάρτηση με μεταβλητή το άνω άκρο του ολοκληρώματος, αναφέρουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος και εφαρμόζουν το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.
11	Εφαρμόζουν τεχνικές ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων συνεχών συναρτήσεων, με βάση το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.
12	Επιλύουν προβλήματα αρχικών τιμών για την εύρεση της σταθεράς ολοκλήρωσης (αλγεβρικά προβλήματα, προβλήματα κίνησης και γεωμετρίας).
13	Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα εκθετικής μεταβολής, χρησιμοποιώντας διαφορική εξίσωση της μορφής $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{Ky},\ \mathrm{K} \in \mathbb{R}$.
14	Ορίζουν τις αντίστροφες κυκλικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κατασκευάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις και τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων. Υπολογίζουν και εφαρμόζουν την παράγωγο αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
15	Εφαρμόζουν τις έννοιες του αόριστου, του ορισμένου ολοκληρώματος και τους κανόνες ολοκλήρωσης στην επίλυση προβλημάτων.
16	Χρησιμοποιούν την έννοια της αναδρομικής ακολουθίας για τον υπολογισμό αναγωγικών τύπων ολοκληρωμάτων.
17	Αναφέρουν και εφαρμόζουν το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

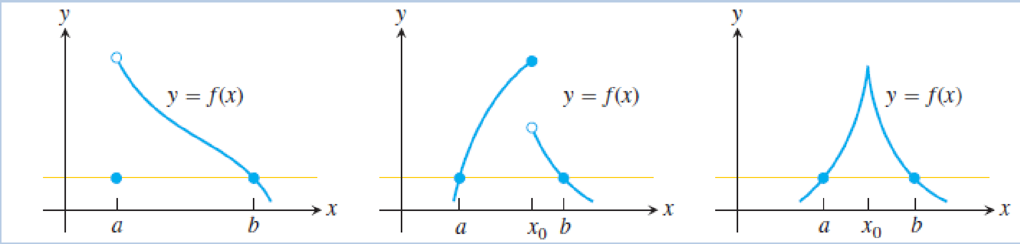
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ
18	Χρησιμοποιούν συστήματα εξισώσεων, για να μοντελοποιήσουν πραγματικές καταστάσεις και ερμηνεύουν τα αποτελέσματα τους.
19	Επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις καθώς και εξισώσεις ή ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.
20	Επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις και αντίστροφες τριγωνομετρικές εξισώσεις.
21	Επιλύουν διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης.
22	Εφαρμόζουν το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στην επίλυση προβλημάτων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	

1 Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Rolle και της μέσης τιμής σε προβλήματα όπως: **(Δ.Ε.: Α8.2)**

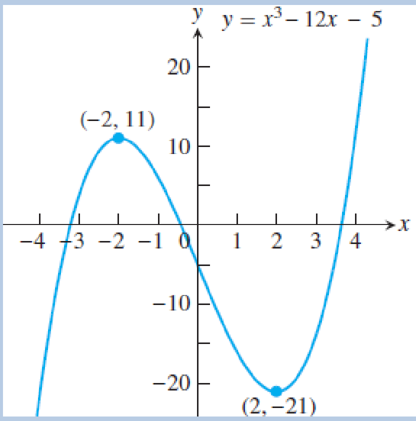
- (α) Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x$, $x \in [0,1]$.
- (β) Να εξετάσετε κατά πόσο εφαρμόζετε το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1,1]$.
- (γ) Να εξηγήσετε γιατί στις πιο κάτω περιπτώσεις δεν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα [a,b] για τη συνάρτηση $y = f(x)$.



- (δ) Να εφαρμόσετε το θεώρημα της μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x \in [1, e]$.

2 Χρησιμοποιούν τα κριτήρια μονοτονίας παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε διάστημα, όπως: **(Δ.Ε.: Α8.3)**

- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $y = x^4 - 8x^2 + 16$, $x \in \mathbb{R}$
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x - συνx + 2, x \in [0, π]$είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να κάνετε τον πίνακα προσήμου για την παράγωγο της πιο κάτω συνάρτησης και να επεξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.



Επιλύουν προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων, όπως:

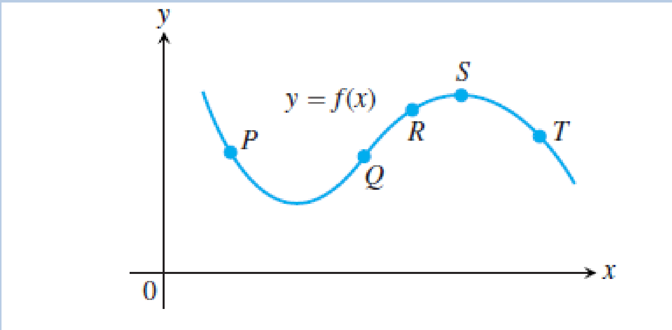
- Δίνονται τα σημεία Α(0,3) και Β(0,4). Να βρείτε σημείο Μ της ημιευθείας $y = 1, \; x > 0$, ώστε η γωνία ΑΜΒ να είναι μέγιστη.

Εφαρμόζουν το θεώρημα Fermat για να βρίσκουν ακρότατα, όπως:

- Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων
(α) $y = x^3 - 3x + 7, x \in [0,2]$, (β) $y = x \cdot ln\, x, \in [1, e]$
- Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat και να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος δίνοντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Αναφέρουν τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης όπως:

- Να βρείτε το πρόσημο της y'' στα πέντε σημεία της πιο κάτω συνάρτησης



- Να βρείτε τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x, x \in R$.

Κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση συνάρτησης με τη χρήση θεωρημάτων του διαφορικού λογισμού, όπως:

- Να μελετήσετε και να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
(α) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, x \in R$, (β) $g(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-x}, x \in R$
(γ) $h(x) = x \cdot ln\, x\,, x > 0$.

3 Εφαρμόζουν τους “κανόνες του De L Hospital” για τον υπολογισμό ορίων, όπως: A8.4

(α) $lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{συνx+3x}$ (β) $lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^4}$ (γ) $lim_{x \to 0}(x^3 \cdot lnx)$

4 Βρίσκουν τις ασύμπτωτες γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων με τη χρήση του ορισμού, όπως: A8.5

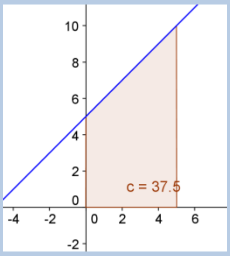
- Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες για τις πιο κάτω συναρτήσεις και να τις βρείτε με τη χρήση του ορισμού.

(α) $y = \frac{x^2+3}{x^2-4}$, (β) $y = e^{\frac{1}{x}}$ (γ) $y = \frac{x^2+9}{x}$ (δ) $y = 2x + e^x$

5 Διερευνούν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ως διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, όπως: A8.6

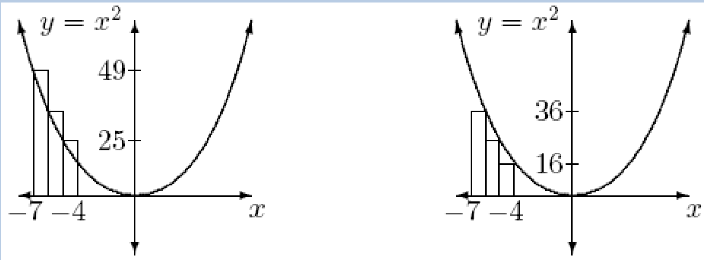
- Να δείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την ευθεία $y = x + 5$, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 5$ είναι:

$E = F(5) - F(0)$ όπου $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x$.»



Ορίζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως προσέγγιση αθροισμάτων και το εφαρμόζουν στην εύρεση ορισμένων ολοκληρωμάτων, όπως:

- Να δώσετε μια εκτίμηση για το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = x^2$ από $x = -7$ μέχρι $x = -4$, χρησιμοποιώντας διαμέριση του διαστήματος $[-7, -4]$ σε τρία ίσα υποδιαστήματα.

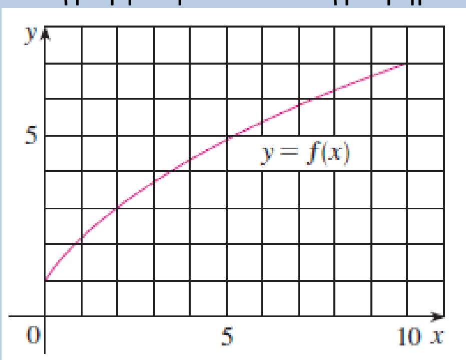


- (α) Με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού προγράμματος να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$, $-2 \le x \le 2$.

  (β) Να εκτιμήσετε το εμβαδόν που περικλείεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f με τη χρήση τεσσάρων ορθογωνίων παίρνοντας το κάτω άθροισμα και μετά το άνω άθροισμα.

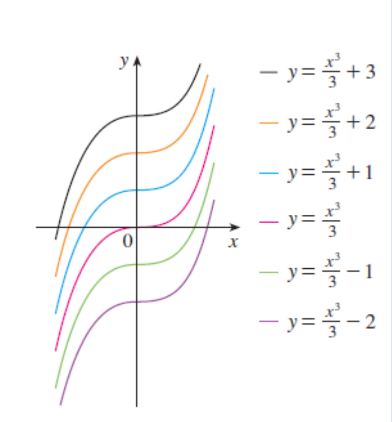
  (γ) Να χρησιμοποιήσετε μεγαλύτερο αριθμό ορθογωνίων και να προσεγγίσετε το εμβαδόν με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

- (α) Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται το γράφημα της συνάρτησης f.



  Χρησιμοποιώντας πέντε ορθογώνια να βρείτε το κάτω άθροισμα και το άνω άθροισμα και να εκτιμήσετε το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της f από $x = 0$ μέχρι $x = 10$. Σε κάθε περίπτωση να κατασκευάσετε τα ορθογώνια τα οποία χρησιμοποιήσατε.

  (β) Να βρείτε νέα εκτίμηση του εμβαδού, χρησιμοποιώντας δέκα

	ορθογώνια σε κάθε περίπτωση.	
6	Εφαρμόζουν τις συνθήκες για την ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης, όπως: Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 1$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $$g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} - e^x & , \quad x \neq 1 \\ e & , \quad x = 1 \end{cases}$$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[\alpha, \beta]$.	A8.7
7	Υπολογίζουν εμβαδά περιοχών, όπως: Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $y = \frac{1}{x}$ και πάνω από τον άξονα των x ενώ φράσσεται δεξιά και αριστερά από τις ευθείες $x = a$ και $x = 2a,\ a > 0$.	A8.8
8	Αντιλαμβάνονται την έννοια της αντιπαραγώγου και βρίσκουν την οικογένεια των αντιπαραγώγων μιας συνάρτησης, όπως: ▪ Να βρείτε το κοινό χαρακτηριστικό των πιο κάτω συναρτήσεων μιας οικογένειας καμπυλών και να σχολιάσετε. Να γράψετε σε συμβολική μορφή την παρατήρησή σας.»  Ελέγχουν το αόριστο ολοκλήρωμα ως την αντιπαράγωγο μιας συνάρτησης, όπως: ▪ Με τη βοήθεια του ορισμού να αποδείξετε ότι: (α) $\int 3\, \varepsilon\varphi^2 x \cdot \tau\varepsilon\mu^2 x\, dx = \varepsilon\varphi^3 x + 2010$ (β) $\int [2f(x) \cdot f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot f^2(x)]\, dx = f^2(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + c$.» Υπολογίζουν την αντιπαράγωγο γραμμικών συνδυασμών συναρτήσεων, όπως: ▪ Δίνεται η $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 4e^x + \frac{7}{x} + \pi^e$, $\quad x \in (0, +\infty)$. Να υπολογίσετε την αντιπαράγωγο συνάρτηση της $f(x)$. Εφαρμόζουν τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος σε δραστηριότητες, όπως: ▪ Αν F είναι μια αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση	A8.9

	$G\,(x) = \frac{1}{\alpha}\, F(\alpha x + \beta)$ είναι μια αντιπαράγωγος της $h\,(x) = f(\alpha x + \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.	
9	Εφαρμόζουν τις ιδιότητες ολοκληρωμάτων για την εύρεση ολοκληρώματος συνάρτησης, όπως: ▪ (α) $\int 8x^7 dx$ (β) $\int \left(2\sigma\upsilon\nu x + 4e^x + \frac{7}{x} + \pi^e\right) dx$. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, όπως: ▪ α) Να δείξετε ότι $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$. β) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της πιο πάνω ισότητας. γ) Που βρίσκεται το λάθος στον πιο κάτω συλλογισμό; «Προφανώς $\int_{-2}^{1} 2x^2\, dx > 0$. Αλλά I = $\int_{-2}^{1} 2x^2\, dx = \int_{-2}^{1} x \cdot 2x\, dx$ και θέτουμε u = x^2, οπότε du = 2x dx, ενώ για x = 1 είναι u = 1 και για x = - 2 είναι u = 4. Άρα I = $\int_{4}^{1} \sqrt{u}\, du = -\int_{1}^{4} \sqrt{u}\, du < 0$.	Α8.10
10	Υπολογίζουν ορισμένα ολοκληρώματα, όπως: ▪ Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: α) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+2}\, dx$ β) $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ γ) $\int_1^2 x\ln x\, dx$ Υπολογίζουν αόριστα ολοκληρώματα, όπως: ▪ (α) $\int (1+3x)^5 dx$, (β) $\int e^{\frac{x}{2}}\, dx$, (γ) $\int \frac{5\, dx}{(1+4x)^2}$ (δ) $\int \varepsilon\varphi^2 \chi dx$. (ε) $\int \eta\mu^2 \chi dx$	Α8.11
11	Επιλύουν προβλήματα αρχικών τιμών, όπως: ▪ Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται σε ευθεία κατά τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $v(t) = 5 + t - \frac{t^2}{4}$ μέτρα ανά δευτερόλεπτο. (α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό κατά τη χρονική στιγμή t (β) Να βρείτε την απόσταση που κάλυψε το κινητό σε χρόνο $t = 6$. ▪ Ο πληθυσμός $\Pi(t)$σε εκατομμύρια μιας κοινωνίας βακτηριδίων αυξάνεται με ρυθμό $\Pi'(t) = \frac{1}{10} e^{\frac{t}{20}}$ ανά λεπτό. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού την πρώτη ώρα.	Α8.12
12	Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα εκθετικής μεταβολής, όπως: Το μήκος ενός ψαριού την χρονική στιγμή t αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο του $M - y$ όπου M είναι το μέγιστο δυνατό μήκος του είδους και y το μήκος του ψαριού τη στιγμή της μέτρησης, δηλαδή το y ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, $\frac{dy}{dt} = K(M-y)$. Αν $M = 60cm$ και $K = 0{,}05$ για ένα ψάρι που τη χρονική στιγμή	Α8.13

	t έχει μήκος $10cm$, να υπολογίσετε το χρόνο στον οποίο το ψάρι θα έχει μήκος $20cm$.	
13	Ορίζουν τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις παριστάνουν γραφικά, όπως: ▪ (α) Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση $f(x) = ημx, x \in R$, δεν έχει αντίστροφη ▪ (β) Να ορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = ημx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων με την $f(x)$. ▪ (γ) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $τοξημ(συν(\frac{2\pi}{5}))$και $εφ(2τοξημ(\frac{1}{3}))$ Υπολογίζουν την παράγωγο αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όπως: ▪ (α)Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων $f(x) = τοξημ(3x), g(x) = τοξσυν(x^2)$ και $h(x) = τοξεφ(\sqrt{x})$ ▪ (β)Να δικαιολογήσετε γιατί η συνάρτηση $f(x) = τοξσυνx, x \in [-1,1]$ είναι γνήσια φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση $g(x) = τοξεφx, x \in R$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση. ▪ (γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = τοξημx + τοξσυνx$ και να αποδείξετε ότι είναι σταθερή συνάρτηση.	Α8.14
14	Εφαρμόζουν ιδιότητες συναρτήσεων σε ολοκληρώματα, όπως: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{ημx}{x^{2008}+x^{2010}+1}$ είναι περιττή και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{1} f(x)dx$»	Α8.15
15	Χρησιμοποιούν την έννοια της αναδρομικής ακολουθίας για τον υπολογισμό ολοκληρώματος, όπως: ▪ (α) Να δείξετε ότι για το ολοκλήρωμα $I_ν = \int_1^e x^2(lnx)^ν dx, ν \geq 0$, ισχύει $I_ν = \frac{1}{3}e^3 - \frac{ν}{3}I_{ν-1}$. ▪ (β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^e x^2(lnx)^4 dx$.»	Α8.16
16	Εφαρμόζουν το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού για την επίλυση προβλημάτων, όπως: Έστω ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της f στο διάστημα $[-α, α]$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.	Α8.17

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ	**Δ.Ε.**
	Οι μαθητές:	
1	Χρησιμοποιούν συστήματα εξισώσεων, για να μοντελοποιήσουν πραγματικές καταστάσεις και ερμηνεύουν τα αποτελέσματα, όπως:	Α8.18

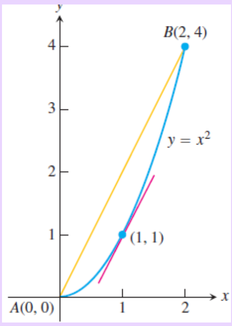
	▪ Μια εταιρεία Α χρεώνει 0,42 ευρώ για κάθε τραγούδι που κατεβάζεις από το διαδίκτυο και μια άλλη εταιρεία Β 0,67 ευρώ για κάθε τραγούδι. Να γράψετε την εξίσωση που μοντελοποιεί την πιο πάνω κατάσταση και να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση. ▪ Για την αγορά κάρτας λεωφορείου δίνονται δύο επιλογές: Για την επιλογή Α μπορούμε να αγοράσουμε μηνιαία κάρτα αξίας 30 ευρώ και χρέωση 1 ευρώ την ημέρα, ενώ για την επιλογή Β η χρέωση είναι 2,50 ευρώ την ημέρα. Σε ποιες περιπτώσεις συμφέρει η επιλογή Α και σε ποιες η Β;	
2	Κατανοούν την έννοια της ρίζας πολυωνύμου και εφαρμόζουν βασικά θεωρήματα, όπως: ▪ Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + (a-1)\cdot x + 2a$ έχει ρίζα το - 1 να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για το $Q(x) = x^3 + 4x^2 + (a^2-1)\cdot x$. Ισχύει το αντίστροφο; ▪ Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$ ▪ Αν κ ακέραιος αριθμός να δείξετε ότι η εξίσωση: $5x^{2\nu} + 9\kappa x - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες. ▪ Να λύσετε την εξίσωση: $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$.	Α8.19
3	Επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις, όπως: ▪ Να επιλύσετε τις εξισώσεις: (α) $\eta\mu x = -\eta\mu 25^o$ (β) $\eta\mu x = \eta\mu(2x + 20^o)$ (γ) $\sigma\upsilon\nu(x + 50^o) = \eta\mu(x + 20^o)$ (δ) $\sigma\varphi^2 x - 1 = 0$ (ε) $2\eta\mu^2\theta = 3\left(1 - \sigma\upsilon\nu\theta\right)$ (στ) $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x$ (ζ) $\eta\mu 2x = 2\varepsilon\varphi x$ Επιλύουν αντίστροφες τριγωνομετρικές εξισώσεις, όπως: ▪ Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $\tau o\xi\varepsilon\varphi 2x + \tau o\xi\varepsilon\varphi 3x = \frac{\pi}{4}$. (β) $2\tau o\xi\eta\mu x = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$.	Α8.20
4	Επιλύουν διαφορικές εξισώσεις, όπως: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$.	Α821
5	Εφαρμόζουν το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στην επίλυση προβλημάτων, όπως: Ένα αυτοκίνητο διάνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Να αποδείξετε ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν 80 χιλιόμετρα την ώρα.	Α8.22

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι μαθητές: | **Δ.Ε.**

1 (A8.2)

- Αν $f(x) = (x+5)(4x-3)(x-1)(x-4)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες.
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,5)$, με $f(2) = 6$, $f(5) = 27$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.
- Έστω g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g(\alpha) = g(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $g'(\xi) + 3g(\xi) = 0$
- Να αποδείξετε ότι αν $x > 0$ είναι $x + 1 < e^x < xe^x + 1$
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,12]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,12)$ και $f(2) + 5 = f(12)$.
- Να αναφέρετε ποιο γνωστό θεώρημα αντιπροσωπεύει το πιο κάτω σχήμα και να το εκφράσετε συμβολικά.



2 (A8.3)

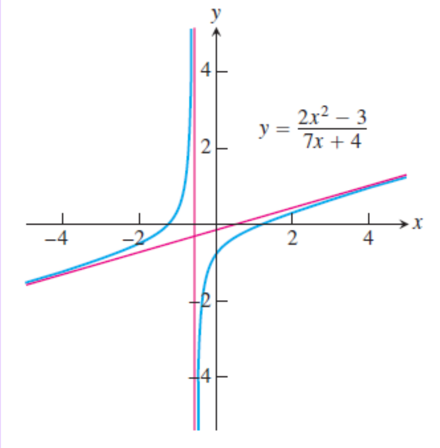
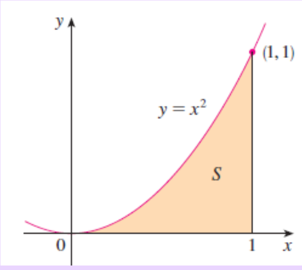
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + a^2 - 4a$, $a \in \mathbb{R}$.

  α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

  β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό ελάχιστό της.
- Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}a^2 \cdot x^3 + \frac{1}{2}a \cdot x^2 - 3x + 1$ να έχει σημείο καμπής στο $x = 1$
- Αν $f''(t) = 3t^2$ και $f(2) - 2$, $f'(1) = 5$, να βρείτε τον τύπο της $f(t)$.
- Από την πώληση ενός προϊόντος μιας εταιρείας, διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(t)$ του προϊόντος είναι $(1200 - 0{,}8t)$ ευρώ την ημέρα, ενώ ο ρυθμός είσπραξης $E(t)$ στο τέλος των t ημερών δίνεται από τον τύπο $\frac{dE}{dt} = 1600 + 0{,}4t$, ευρώ την ημέρα. Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη ως την όγδοη μέρα.

3 (A8.4)

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x}{x^3}$.

4	▪ Η συνάρτηση $f(x)=\frac{ax+2}{x+\beta}$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x=3$ και $y=-1$. Να βρείτε τις τιμές των α και β. ▪ Να βρείτε τις ασύμπτωτες στην πιο κάτω συνάρτηση 	Α8.5
5	▪ Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2,\ x\in[0,1]$.  (α) Να διαμερίσετε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ίσες διαμερίσεις και να υπολογίσετε το άθροισμα E_ν των άνω εμβαδών των ορθογωνίων. (β) Να βρείτε το $lim_{\nu\to\infty} E_\nu$. (γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_o^1 x^2dx$. (δ) Να συγκρίνετε και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα που βρήκατε στα ερωτήματα (β) και (γ). ▪ Να σχεδιάσετε το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων΄ $f(x)=\lvert x\rvert$ και $g(x)=\lvert x-1\rvert$ με $a\le x\le\beta$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του, για$a=-1,\ \beta=2$. Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμά σας με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού προγράμμματος και με τον υπολογισμό του ζητούμενου εμβαδού με στοιχειώδη γεωμετρία, απ’ευθείας από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.	Α8.6
6	▪ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{ln\,x}{x^2}$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x=\lambda$, με $0<\lambda\neq 1$. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω.	Α8.8

Να υπολογίσετε τα όρια: (α) $lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$ (β) $lim_{\lambda \to 0} E(\lambda)$.

7 — A8.10

- Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα: $\int_1^6 (6x+3)\, dx$, $\int_{20}^{75} (-t+100)\, dt$, $\int_0^1 (1-y^2)\, dy$.
- Αν $\int_{-1}^{a} x\, dx = 0$, να υπολογίσετε την τιμή του α.
- Αν $\beta \int_{-2}^{2} (x-5)\ dx = 1$, να υπολογίσετε την τιμή του β.

8 — A8.11

- Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

(i) $\int x^9\, dx$ (ii) $\int \frac{1}{x^5} dx$ (iii) $\int (e^p - 3p) dp$

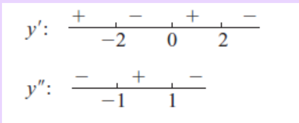
(iv) $\int \frac{1}{(2x+4)^2}\, dx$ (v) $\int \sqrt{4x-1}\, dx$ (vi) $\int x e^{-x^2}\, dx$

(vii) $\int \eta\mu 3x\, dx$ (viii) $\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx$ (ix) $\int \sigma\upsilon\nu^3 x\ dx$

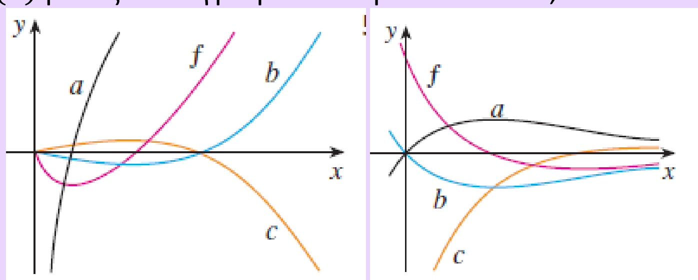
(x) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ (xi) $\int \varepsilon\varphi^5 x\, dx$ (xii) $\int \eta\mu^4 x\, dx$

9 — A8.12

- Να σχεδιάσετε πολυωνυμική συνάρτηση αν γνωρίζετε ότι περνά από τα σημεία $(-2,2)$, $(0,0)$,$(-1,1)$ και $(1,1)$ και ισχύουν οι πιο κάτω πίνακες όσο αφορά το πρόσημο της1ης και 2ης παραγώγου (y', y'')



- Στα πιο κάτω διαγράμματα να βρείτε την πιθανή αντιπαράγωγο της $y = f(x)$ μεταξύ των γραφικών παραστάσεων α, b και c.



10 — A8.14

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = (1+x^2) \cdot \tau o\xi\varepsilon\varphi x$, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης: $(1+x^2) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 2x = 2y$.

11 — A8.15

- Δίνεται η συνάρτηση $f\ (x) = \int_1^x (t^{1997} + t^{1999} + t^{2001} + t^{2003} + t)\, dt$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.
- Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4} dx$, χρησιμοποιόντας κατάλληλο μετασχηματισμό. Να ερμηνεύσετε το αριθμητικό αποτέλεσμα με εμβαδόν.
- Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου κατά τη χρονική στιγμή t καθώς ανεβαίνει ένα λόφο δίνεται από την συνάρτηση $v(t) = 20 - 3t$, όπου t είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και v είναι η ταχύτητα σε m/sec. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της μεταβολής της ταχύτητας σε

	συνάρτηση με το χρόνο στο διάστημα μεταξύ $t = 0$ και $t = 5$. Να βρείτε την απόσταση που θα διανύσει το αυτοκίνητο τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα.	
12	▪ Το κέρδος που αποφέρει σε έναν επιχειρηματία η πώληση μιας επιπλέον μονάδας του προϊόντος που πωλεί (περιθωριακό κέρδος) δίνεται από τη διαφορική εξίσωση $\frac{dK}{dx} = 100 - 0{,}03x$, όπου K το κέρδος και x οι μονάδες προϊόντος. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό κέρδος. ▪ Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού μιας πόλης δίνεται από τον τύπο: $R = 1000 + 700t$, όπου R είναι ο ετήσιος ρυθμός αύξησης του πληθυσμού και t είναι το πλήθος των ετών από την 1η Ιανουαρίου του 2009. Ποιος αναμένεται να είναι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της πόλης την 1η του Γενάρη του 2012; Πόσος αναμένεται να είναι ο πληθυσμός της πόλης το 2050; ▪ Να δείξετε ότι το εμβαδόν μιας τετραγωνικής μονάδας: (α) Διχοτομείται από την $y = x$. (β) Τριχοτομείται από τις $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$.	Α8.15
13	▪ Να αποδείξετε ότι αν $\mathrm{I}_\nu = \int \chi^\nu \, \eta\mu\chi \, dx$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε : α) $\mathrm{I}_\nu = -x^\nu \sigma\upsilon\nu x + \nu x^{\nu-1}\eta\mu x - \nu(\nu-1)\mathrm{I}_{\nu-2}$ για κάθε $\nu > 2$. β) Να υπολογίσετε το $\int x^4 \eta\mu x \, dx$	Α8.16
14	▪ Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{f}$ της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[0,1]$, αν δίνεται ότι $\int_0^1 (f(x)-1)dx = 0$. ▪ Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, κ σταθερά και $\int_\alpha^\beta (f(x)-\kappa)\,dx = 0$, να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι κ.	Α8.17
15	▪ Να επιλύσετε τις εξισώσεις: α) $\frac{x^2+2x-4}{x-2} = x^2$, β) $\sqrt{x} + \sqrt{x+32} = 16$ γ) $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu\, x - 1)^2 = 0$	Α8.19
16	▪ Να επιλύσετε τις εξισώσεις: α) $\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu\frac{x}{2} + 1$ β) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2\sqrt{3}$.	Α8.20
17	Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση: $x(1+y^2) + y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 0$	Α8.21
18	▪ Αν $\alpha > \beta > 0$, να δείξετε ότι: (α) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha} < ln\alpha - ln\beta < \frac{\alpha-\beta}{\beta}$ και (β) $\frac{1}{3} < ln(1{,}5) < \frac{1}{2}$	Α8.22

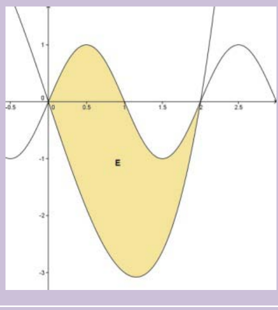
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Η περιοχή Ε βρίσκεται μεταξύ των καμπυλών $y = \eta\mu(\pi x)$ και $y = x^3 - 4x$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

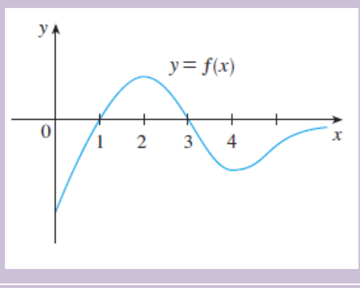
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής Ε.

Η περιοχή Ε είναι το περίγραμμα μιας μικρής λίμνης. Το βάθος κάθε σημείου της λίμνης δίνεται από τη συνάρτηση $h(x) = 3 - x$, όπου x είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα των y. Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού της λίμνης.

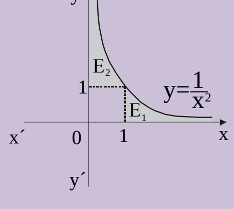


2 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:
$\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

3 Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$. Να σχεδιάσετε την αντιπαράγωγο $F(x)$ της $y = f(x)$, αν είναι γνωστό ότι $F(0) = 2$.



4 α) Στο πιο κάτω σχήμα να εκτιμήσετε τη σχέση που φαίνεται να έχουν τα εμβαδά E_1, E_2.



β) Να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο (π.χ.:

για το E_1: Να θεωρήσετε ότι $\lambda > 1$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2}dx$ και για το E_2: ότι $0 < \lambda < 1$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \int_{\lambda}^{1} \frac{1}{x^2}dx$).

5 Έστω ότι η συνάρτησηf: $(1,3) \to \mathrm{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι
$f^2(x) + x \cdot f(x) + x^2 - 3x + 1 = 0$.Να δείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής.

6 Είναι συμβατά τα όσα είχατε υποθέσει στο ερώτημα (α) με τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β); Μπορείτε να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματά σας γεωμετρικά;

7 εται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

α) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

δ) Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα των x που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

8 Εάν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, να δείξετε ότι:

$$\left|\int_a^\beta f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\beta |f(x)|\,dx$$

Υπόδειξη: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω να δείξετε ότι:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\,\eta\mu 2x\,dx\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

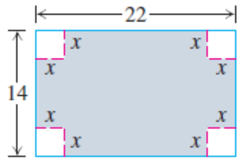
9 : δείξετε ότι : $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

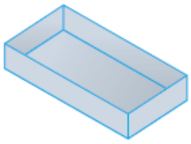
10 Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{2009} + x^{1001} + x + 1$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

11 Να διερευνήσετε για ποιες τιμές των α, β, γ και δ η συνάρτηση
$y = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ έχει δύο, ένα ή καθόλου τοπικά ακρότατα και να δώσετε τοπικό παράδειγμα σε κάθε περίπτωση.

12 Να βρείτε σε ποιο σημείο η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$ δεν είναι παραγωγίσιμη.

13 Κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου θα κατασκευαστεί από ορθογώνιο χαρτόνι διαστάσεων 22×14, κόβοντας στις τέσσερεις γωνίες του τετράγωνο πλευράς x cm. Να εκφράσετε τον όγκο V του κουτιού που δημιουργείται συναρτήσει του x και να κατασκευάσετε με χρήση λογισμικού τη γραφική παράσταση $V = V(x)$. Να εκτιμήσετε από τη γραφική παράσταση την τιμή του x που δίνει μέγιστο όγκο.


22
14
x
x
x
x
x
x
x
x



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλίμακα 1

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
1	Συλλέγουν πληροφορίες και δεδομένα του περιβάλλοντός τους και τα παρουσιάζουν με οργανωμένο τρόπο.
2	Ερμηνεύουν δεδομένα που παρουσιάζονται με εικονογράμματα και ραβδογράμματα.
3	Κατασκευάζουν εικονογράμματα και ραβδογράμματα, ονομάζοντας τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα.
4	Συγκρίνουν δεδομένα με βάση τις πληροφορίες που δίνονται σε εικονογράμματα και σε ραβδογράμματα.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
5	Ταξινομούν ένα γεγονός ως βέβαιο, πιθανόν, ή αδύνατο να συμβεί.

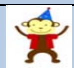
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Συλλέγουν πληροφορίες για τους ιδίους ή για αντικείμενα του περιβάλλοντος τους, όπως: ΣΠ1.1

- «Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα με βάση τις πληροφορίες που βλέπετε στην εικόνα. Για κάθε αντικείμενο της εικόνας να γράφετε ένα I στην κατάλληλη θέση στον πίνακα.»

(α) Πόσα είναι τα  ; _____

(β) Πόσοι είναι οι  ; _____

(γ) Πόσοι είναι οι  ; _____

(δ) Πόσες είναι οι  ; _____

- «Να συλλέξετε πληροφορίες από τους συμμαθητές σας, ζητώντας τους να δηλώσουν ποιες διακοπές προτιμούν, αυτές των Χριστουγέννων, του Πάσχα, ή του καλοκαιριού. Για κάθε μαθητή να σημειώνετε I ( =5).»

Οι διακοπές που προτιμούν οι συμμαθητές μου

2	Ερμηνεύουν το πιο κάτω εικονόγραμμα και απαντούν σε ερωτήσεις όπως:	ΣΠ1.2

- «Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τα μεταφορικά μέσα τα οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές μιας τάξης, για να πάνε στο σχολείο. Να μελετήσετε τη γραφική παράσταση και να απαντήσετε τις ερωτήσεις:

  (α) Ποια μεταφορικά μέσα χρησιμοποιούν οι μαθητές αυτής της τάξης;

  (β) Πόσα παιδιά πηγαίνουν στο σχολείο με το αυτοκίνητο;

  (γ) Πόσα παιδιά πηγαίνουν στο σχολείο με τα πόδια;

10			
9			
8			
7			
6			
5			
4			
3			
2			
1			
	Αυτοκίνητο	Λεωφορείο	Πόδια

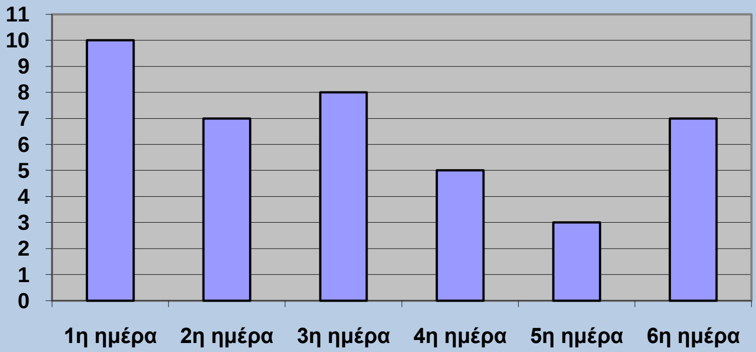
Ερμηνεύουν το ραβδόγραμμα και απαντούν σε ερωτήσεις, όπως:

- Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τον αριθμό χριστουγεννιάτικων καρτών που πώλησαν οι μαθητές της έκτης τάξης στο πανηγύρι του σχολείου, για να μαζέψουν χρήματα για φιλανθρωπικό σκοπό.

  (α) Ποια μέρα πώλησαν τις περισσότερες κάρτες;

  (β) Να συγκρίνετε τον αριθμό καρτών που πωλήθηκαν την $1^{η}$ και την $5^{η}$ ημέρα.

(γ) Πόσες κάρτες πώλησαν συνολικά στο πανηγύρι οι μαθητές;



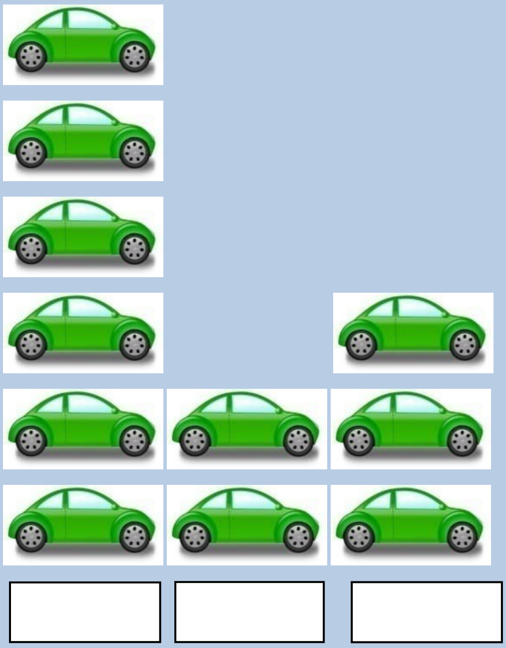
3 Ονομάζουν τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα σε εικονογράμματα, όπως: ΣΠ1.3

- «Να γράψετε τα ονόματα των παιδιών κάτω από τα αυτοκινητάκια τους, αν γνωρίζετε ότι:

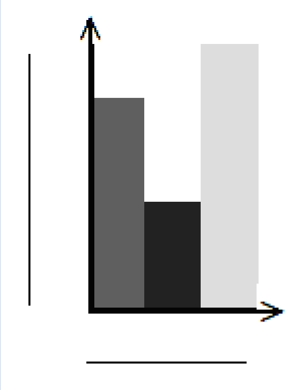
  Ο Μάριος έχει τα περισσότερα αυτοκινητάκια.

  Ο Στέλιος έχει τρία αυτοκινητάκια λιγότερα από το Μάριο.

  Ο Μιχάλης έχει δύο αυτοκινητάκια.



- «Η Μαρίνα συγύριζε το γραφείο της και βρήκε 5 τετράδια, 4 μολύβια και 2 υπολογιστικές. Έφτιαξε μια γραφική παράσταση για τα αντικείμενα που βρήκε. Να ονομάσετε τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα στη γραφική παράσταση που κατασκεύασε η Μαρίνα.»

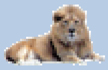
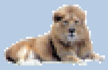
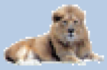


4 Συγκρίνουν δεδομένα με βάση τις πληροφορίες που δίνονται σε εικονογράμματα και ραβδογράμματα, όπως: ΣΠ1.4

- «Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τα αγαπημένα ζώα μιας ομάδας παιδιών. Να μελετήσετε τη γραφική παράσταση και να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις.»

  (α) Ποιο είναι το ζώο που αρέσει στους περισσότερους μαθητές;

  (β) Πόσοι περισσότεροι μαθητές προτιμούν τη ζέβρα από το χιμπαντζή;

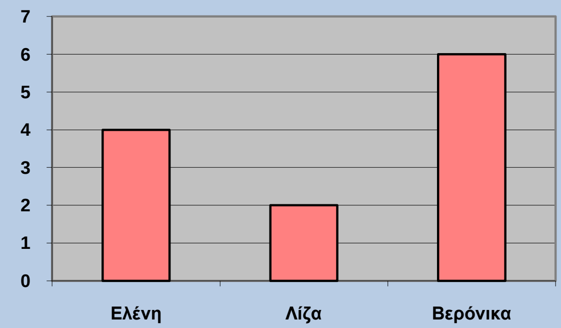
Λιοντάρι					
Χιμπαντζής					
Ζέβρα					

- Στη γραφική παράσταση παρουσιάζονται τα βιβλία που διάβασαν τρία κορίτσια στις καλοκαιρινές διακοπές που πέρασαν.

(α) Ποια διάβασε τα περισσότερα βιβλία·

(β) Πόσα βιβλία διάβασε η Βερόνικα;

(γ) Πόσα περισσότερα βιβλία διάβασε η Λίζα από την Ελένη;



	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Ταξινομούν ένα γεγονός ως βέβαιο, πιθανόν, ή αδύνατο να συμβεί, σε δραστηριότητες, όπως:	ΣΠ1.5

- «Ο Αλέξανδρος θέλει να αγοράσει παγωτό. Οι γεύσεις που υπάρχουν στην παγωταρία της γειτονιάς του φαίνονται πιο κάτω.

Να γράψετε 4 γεύσεις παγωτού που είναι πιθανόν να υπάρχουν στο χωνάκι του Αλέξανδρου και 4 γεύσεις που είναι αδύνατο να υπάρχουν στο χωνάκι του Αλέξανδρου.»

Γεύσεις παγωτού που είναι πιθανόν να υπάρχουν στο χωνάκι του Αλέξανδρου	Γεύσεις παγωτού που είναι αδύνατο να υπάρχουν στο χωνάκι του Αλέξανδρου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι μαθητές: — **Δ.Ε.**

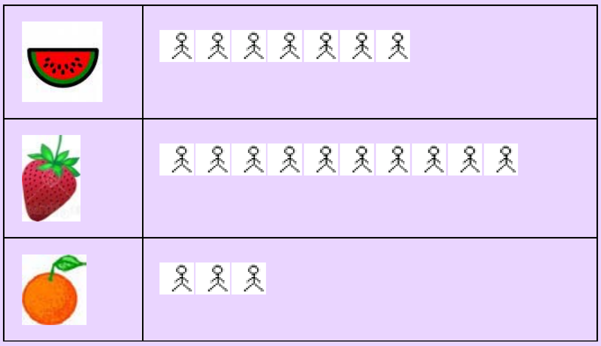
1 Να κατασκευάσετε μια γραφική παράσταση που να παρουσιάζει τον αριθμό των λουλουδιών της ανθοδέσμης της Νικολέτας. Η ανθοδέσμη της είχε 4 τριαντάφυλλα, 5 τουλίπες και 6 μαργαρίτες. Να ονομάσετε τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα της γραφικής παράστασης. — ΣΠ1.1, ΣΠ1.3

2 Το εικονόγραμμα παρουσιάζει το αγαπημένο φρούτο μιας ομάδας μαθητών. Να απαντήσετε τις πιο κάτω ερωτήσεις: — ΣΠ1.2

(α) Ποιο φρούτο αρέσει στους περισσότερους μαθητές;

(β) Ποιο φρούτο προτιμούν τα περισσότερα παιδιά, το καρπούζι ή το πορτοκάλι;

Το αγαπημένο μου φρούτο



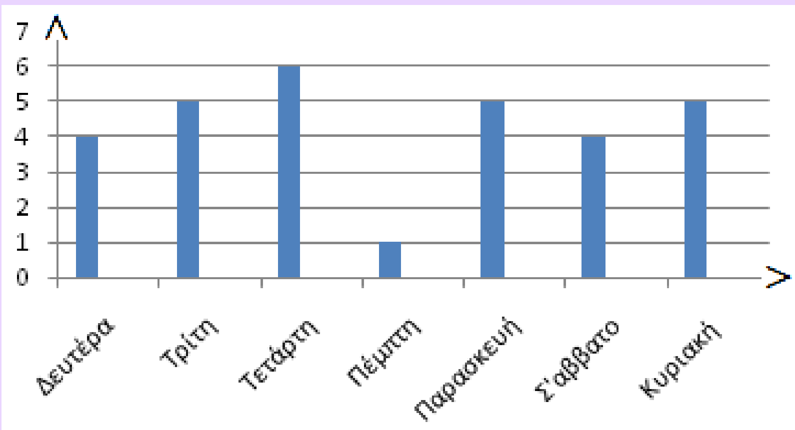
Κάθε  αντιστοιχεί σε ένα παιδί

3 Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τον αριθμό των λεμονάδων που πώλησε μια καφετερία την περασμένη εβδομάδα. — ΣΠ1.4

(α) Ποια μέρα η καφετερία πώλησε τις περισσότερες λεμονάδες;

(β) Να συγκρίνετε τον αριθμό των λεμονάδων που πωλήθηκαν την Τετάρτη και την Πέμπτη.

(γ) Πόσες λεμονάδες πώλησε η καφετερία την περασμένη εβδομάδα;



4	Να χρησιμοποιήσετε τις λέξεις ΄βέβαιο΄, ΄πιθανόν΄ και ΄αδύνατο΄ ώστε να περιγράψετε την πιθανότητα να συμβούν τα πιο κάτω: (α) Σε τρεις ώρες από τώρα θα είμαι στην Αμερική. (β) Η ημέρα που θα γιορτάσουμε τα Χριστούγεννα είναι η 25η Δεκεμβρίου. (γ) Σήμερα στο σχολείο θα χρησιμοποιήσεις το χάρακα σου. (στ) Μια ημέρα αυτή τη βδομάδα, θα βρέξει. (ζ) Σήμερα θα πάς να παρακολουθήσεις μια θεατρική παράσταση.	ΣΠ1.5

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Κατασκευάζουν μια γραφική παράσταση στην οποία σημειώνουν για ένα μήνα τη θερμοκρασία της τάξης τους και απαντούν σε σχετικές ερωτήσεις.
2	Αναζητούν πληροφορίες ώστε να εντοπίσουν ζώα που έχουν ουρά και ζώα που δεν έχουν ουρά. Στη συνέχεια κατασκευάζουν μια γραφική παράσταση και κάνουν συγκρίσεις μεταξύ των δύο ομάδων ζώων.
3	Οι μαθητές καταγράφουν προτάσεις τις οποίες ταξινομούν με βάση την πιθανότητα να συμβούν (πιθανόν, βέβαιο, πάντα, αδύνατο, ποτέ)..

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλίμακα 2

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
1	Καταγράφουν, οργανώνουν και παρουσιάζουν δεδομένα σε πίνακες και γραφικές παραστάσεις (ραβδόγραμμα, εικονόγραμμα).
2	Αναπαριστούν τα ίδια δεδομένα με περισσότερους από έναν τρόπο (ραβδόγραμμα, εικονόγραμμα, πίνακες).
3	Περιγράφουν και συγκρίνουν σύνολα δεδομένων, χρησιμοποιώντας το εύρος και την επικρατούσα τιμή των δεδομένων.
4	Απαντούν και θέτουν ερωτήματα σχετικά με ένα σύνολο δεδομένων.
5	Ερμηνεύουν δεδομένα που παρουσιάζονται σε κυκλική γραφική παράσταση.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
6	Κατανοούν και χρησιμοποιούν τις έννοιες ‘λιγότερο πιθανόν’- ‘αδύνατο να συμβεί», ‘πολύ πιθανόν’ – «βέβαιο να συμβεί».
7	Προβλέπουν και καταγράφουν με συστηματικό τρόπο τα δυνατά ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης που επαναλαμβάνεται πολλές φορές.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις, όπως:	ΣΠ2.1

- «Σε ένα φυτώριο υπάρχουν φυτεμένες 400 τριανταφυλλιές, 200 τουλίπες και 300 μαργαρίτες. Να παρουσιάσετε σε γραφική παράσταση τον αριθμό των λουλουδιών του φυτωρίου. Στη γραφική παράσταση να γράψετε τον τίτλο και να ονομάσετε τους άξονες.

  Κάθε  αντιστοιχεί με 10 τριαντάφυλλα.

  Κάθε  αντιστοιχεί με 10 μαργαρίτες.

  Κάθε  αντιστοιχεί με 10 τουλίπες.»

- «Οι καιρικές συνθήκες τον Ιανουάριο εμφανίζονται στον πιο κάτω πίνακα. Να κατασκευάσετε μια γραφική παράσταση που να παρουσιάζει αυτά τα δεδομένα. Στη γραφική παράσταση να γράψετε τον τίτλο και να ονομάσετε τους άξονες.»

Καιρικές Συνθήκες				
Αριθμός Ημερών				

2	Αναπαριστούν τα δεδομένα με περισσότερους από έναν τρόπο:	ΣΠ2.2

- «Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τα παιχνίδια που αρέσουν στα παιδιά μιας τάξης.

  Να αναπαραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα σε ένα ραβδόγραμμα.»

<table>
<tr><th colspan="4">Είδη παιχνιδιών</th></tr>
<tr><th>Κρυφτό</th><th>Αγάλματα</th><th>Μουσικές καρέκλες</th><th>Μαντήλι</th></tr>
<tr><td>||||</td><td>𝍸 |||</td><td>𝍸 |</td><td>𝍸 𝍸 |</td></tr>
</table>

3

- Ο πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των ωρών που κοιμάται κάθε ζώο σε μια μέρα. Να μελετήσετε τον πίνακα και να απαντήσετε στις ερωτήσεις: ΣΠ2.3

  (α) Ποιο ζώο κοιμάται τις λιγότερες ώρες κάθε μέρα;

  (β) Ποιο ζώο κοιμάται τις περισσότερες ώρες κάθε μέρα;

  (γ) Ποιος είναι ο πιο συνηθισμένος αριθμός ωρών (επικρατούσα τιμή) που κοιμούνται τα ζώα;

Ζώο	Ώρες που κοιμάται κάθε ζώο κάθε μέρα
Ελέφαντας	4
Καμηλοπάρδαλη	4
Ύαινα	18
Ιαγουάρος	11
Λιοντάρι	20 *
Ποντίκι	13
Όκαπι	5
Κουνέλι	10
Ρακούν	10
Σκίουρος	14

*Περιλαμβάνει και τις ώρες ξεκούρασης

4 Απαντούν και θέτουν ερωτήματα που αναφέρονται σε γραφικές παραστάσεις, όπως: ΣΠ2.4

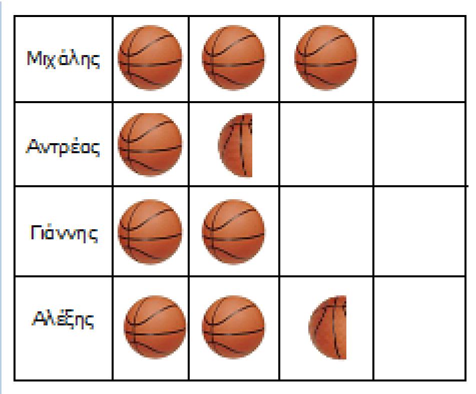
«Το εικονόγραμμα παρουσιάζει τους βαθμούς που πέτυχαν τέσσερις καλαθοσφαιριστές, σε ένα αγώνα καλαθόσφαιρας.

(α) Πόσους βαθμούς πέτυχε ο κάθε παίκτης;

(β) Ποιος παίκτης πέτυχε τους περισσότερους βαθμούς;

(γ) Πόσους βαθμούς πέτυχαν ο Αντρέας και ο Αλέξης μαζί;

(δ) Να γράψετε δύο ερωτήσεις που να αναφέρονται στις πληροφορίες που παρουσιάζονται σ το εικονόγραμμα.»

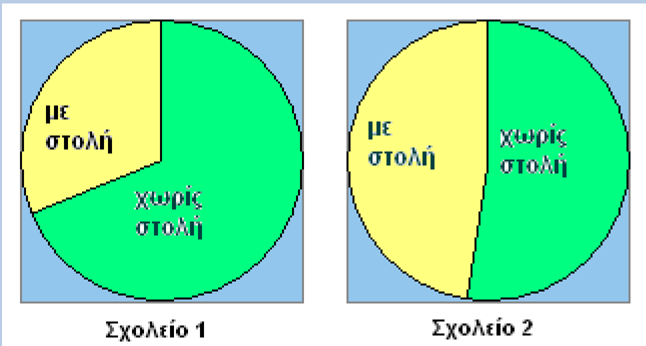


Κάθε  αντιστοιχεί σε 10 βαθμούς.

Κάθε  αντιστοιχεί σε 5 βαθμούς.

5 Ερμηνεύουν δεδομένα που παρουσιάζονται σε κυκλική γραφική παράσταση, σε δραστηριότητες όπως: ΣΠ2.5

«Σε μια έρευνα ρωτήθηκαν οι μαθητές δύο σχολείων κατά πόσο προτιμούν να έρχονται στο σχολείο φορώντας στολή ή ρούχα της επιλογής τους. Τα αποτελέσματα για το κάθε σχολείο φαίνονται στα πιο κάτω κυκλικά διαγράμματα.



Να μελετήσετε τα κυκλικά διαγράμματα και να γράψετε ένα συμπέρασμα.»

____

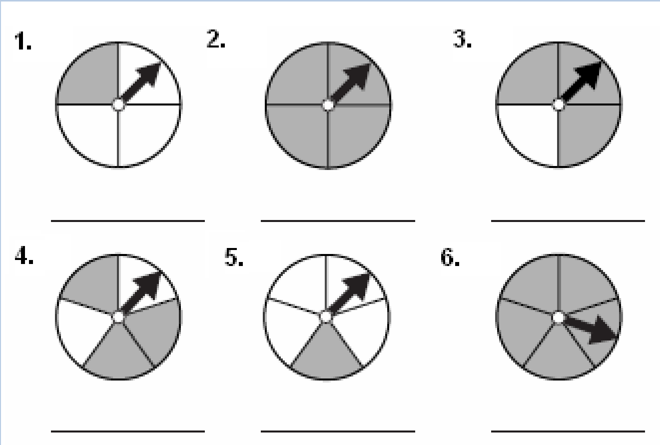
____

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Δηλώνουν κατά πόσο ένα γεγονός είναι 'αδύνατο', 'λιγότερο πιθανόν', 'πολύ πιθανόν' ή 'βέβαιο' να συμβεί και εξηγούν τις απαντήσεις τους σε δραστηριότητες, όπως: — ΣΠ2.6

- «Να περιγράψετε. χρησιμοποιώντας τις λέξεις αδύνατο', 'λιγότερο πιθανόν', 'πολύ πιθανόν' ή 'βέβαιο' το ενδεχόμενο να σταματήσουν στην γκρίζα περιοχή οι τροχοί της τύχης.»



- «Να ζωγραφίσετε στο ορθογώνιο πλαίσιο ένα σύνολο με γεωμετρικά σχήματα για το οποίο να ισχύουν οι δηλώσεις:

  (α) Είναι αδύνατο να επιλέξεις κύκλο.

  (β) Είναι πολύ πιθανόν να επιλέξεις τετράγωνο.»

2 Καταγράφουν με συστηματικό τρόπο τα δυνατά ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης που επαναλαμβάνεται πολλές φορές, όπως: — ΣΠ2.7

«Να χρησιμοποιήσετε ένα κατάλληλο λογισμικό που να παρουσιάζει τις ρίψεις ενός νομίσματος και να καταγράψετε τα αποτελέσματα για 10 δοκιμές, 20 δοκιμές, 100 δοκιμές και 2000 δοκιμές. Τι παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό;»

Αριθμός ρίψεων	Πόσες φορές έφερες κορώνα;	Πόσες φορές έφερες γράμματα;
10		
20		
100		
2000		

Να παρατηρήσετε τον πίνακα και να γράψετε τα συμπεράσματά σας;

____

____

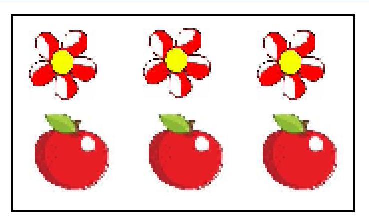
Γιατί νομίζετε συμβαίνει αυτό;

____

____

3 Προβλέπουν την πιθανότητα πραγματοποίησης ενδεχομένων απλών πειραμάτων τύχης και ελέγχουν τις προβλέψεις τους σε δραστηριότητες, όπως: ΣΠ2.8

- «Η Μαρίνα έβαλε σε μια τσάντα 6 πορτοκάλια και 2 μήλα. Ποιο φρούτο είναι λιγότερο πιθανόν να επιλέξει, αν πάρει ένα φρούτο τυχαία; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.»
- «Με βάση την εικόνα να απαντήσετε τις ερωτήσεις:
  (α) Τι είναι πιο πιθανόν, να επιλέξουμε τυχαία ένα λουλούδι ή ένα μήλο;
  (β) Τι θα αλλάζατε στο κουτάκι της εικόνας ώστε να είναι πιο πιθανόν να επιλέξετε μήλο;»



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1	Πιο κάτω παρουσιάζονται τα χρυσά μετάλλια που κέρδισαν 8 χώρες στους Ολυμπιακούς αγώνες του 2004. Με βάση τις πληροφορίες να κατασκευάσετε μια γραφική παράσταση (να βάλετε τίτλο και υπόμνημα). Κάθε κουτάκι ή εικόνα της γραφικής παράστασης να αντιστοιχεί με 2 μετάλλια.	ΣΠ2.1 ΣΠ2.3

-Η Ελλάδα κέρδισε 6 χρυσά μετάλλια.
-Η Ουκρανία κέρδισε 9 χρυσά μετάλλια.
-Η Τουρκία κέρδισε τα μισά χρυσά μετάλλια από αυτά που κέρδισε η Ελλάδα.
-Ο Καναδάς κέρδισε 3 χρυσά μετάλλια.
-Η Αυστρία κέρδισε 2 χρυσά μετάλλια.
-Η Ισπανία κέρδισε 3 χρυσά μετάλλια.

(α) Ποια χώρα πήρε τα λιγότερα μετάλλια;

(β) Ποια χώρα πήρε τα πιο πολλά μετάλλια;

(γ) Ποιος αριθμός μεταλλίων εμφανίζεται πιο συχνά στη γραφική παράσταση;

2	Ο πίνακας παρουσιάζει τις πτήσεις που έγιναν από το αεροδρόμιο της Λάρνακας σε μια μέρα.	ΣΠ2.2 ΣΠ2.4

	Πτήσεις από το αεροδρόμιο Λάρνακας			
Ώρα αναχώρησης	**Προς Αθήνα**	**Προς Λονδίνο**	**Προς Ρώμη**	**Προς Βρυξέλες**
05:00		•		
08:00	•			
09:15			•	•
10:00		•		
10:15	•			
11:10		•		
12:20			•	
16:15	•			
17:35		•		
20:15	•			

(α) Να κατασκευάσετε μια γραφική παράσταση που να παρουσιάζει τα δεδομένα του πίνακα. Στην γραφική παράσταση να δώσετε τίτλο και να ονομάσετε τους άξονες.

(β) Πόσες πτήσεις αναχώρησαν για την Αθήνα;

(γ) Πόσες ήταν συνολικά οι αναχωρήσεις από το αεροδρόμιο Λάρνακας αυτή τη μέρα;

(δ) Πόσες πτήσεις αναχώρησαν μετά το μεσημέρι;

(ε) Προς ποιον προορισμό έγιναν οι περισσότερες πτήσεις;

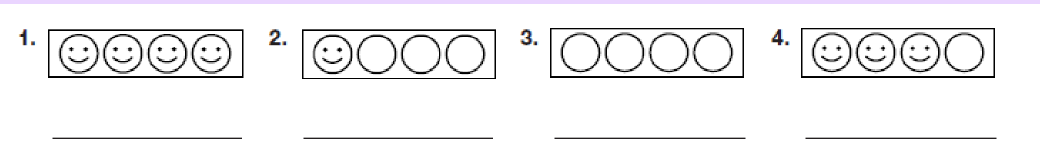
(στ) Να διατυπώσετε δύο ερωτήσεις με βάση τα δεδομένα του πίνακα.

3 Μία ομάδα παιδιών δήλωσαν ποιο είναι το αγαπημένο τους ομαδικό άθλημα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην γραφική παράσταση. ΣΠ2.5

(α) Ποιο ομαδικό άθλημα προτιμούν οι περισσότεροι μαθητές;

(β) Να βάλετε σε σειρά τα αθλήματα, ξεκινώντας από αυτό που προτιμούν οι περισσότεροι μαθητές.

4 Να αντιστοιχίσετε τις λέξεις ‘βέβαιο’, ‘πολύ πιθανόν’, ‘λιγότερο πιθανόν’ και ‘αδύνατο’, ώστε να περιγράψετε την πιθανότητα να επιλέξετε χαμογελαστό ανθρωπάκι στις πιο κάτω περιπτώσεις: ΣΠ2.6



5 Να χρησιμοποιήσετε τον τροχό της τύχης και να απαντήσετε στις ερωτήσεις: ΣΠ2.6 ΣΠ2.8

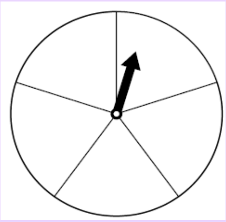
(α) Σε ποια χρώματα είναι πιθανόν να σταματήσει ο τροχός;

(β) Σε ποιο χρώμα είναι περισσότερο πιθανόν να σταματήσει ο τροχός και γιατί;

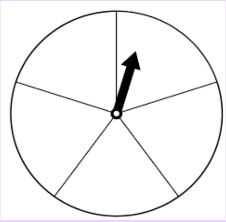
(γ) Γιατί είναι λιγότερο πιθανόν ο τροχός να σταματήσει στο πράσινο;

(δ) Τι αλλαγή πρέπει να κάνεις στον τροχό ώστε να είναι αδύνατο να σταματήσει στο κίτρινο;

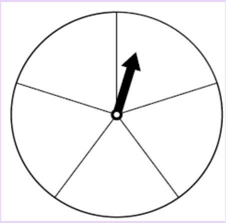
6 (α) Να γράψετε έναν αριθμό σε κάθε τμήμα του τροχού της τύχης ώστε να είναι βέβαιο ότι το τόξο θα σταματήσει σε ζυγό αριθμό. ΣΠ2.6



(β) Να γράψετε ένα αριθμό σε κάθε τμήμα του τροχού της τύχης ώστε να είναι βέβαιο ότι το τόξο θα σταματήσει σε αριθμό μικρότερο του 20.



(γ) Να γράψετε έναν αριθμό σε κάθε μέρος του τροχού της τύχης ώστε να είναι αδύνατο το τόξο να σταματήσει σε διψήφιο αριθμό.



7 Σε ένα κουτί έχουμε 20 μαύρες μπάλες και 20 άσπρες. Πώς μπορούμε να αυξήσουμε την πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία μια μπάλα που είναι μαύρη; ΣΠ2.7

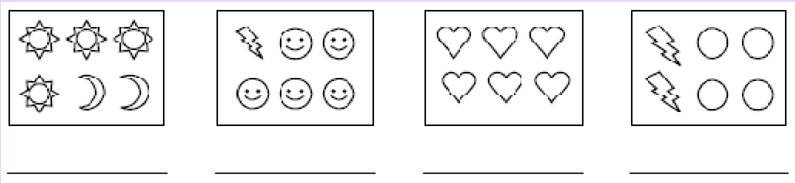
α. Να βάλουμε όλες τις μπαλίτσες σε ένα πιο μεγάλο κουτί.

β. Να προσθέσουμε στο κουτί 3 μαύρες και 3 άσπρες μπαλίτσες.

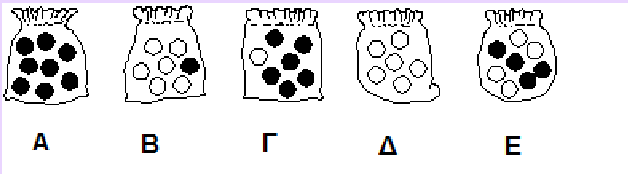
γ. Να αλλάξουμε τις άσπρες μπαλίτσες με μπλε.

δ. Να προσθέσουμε στο κουτί μερικές μαύρες μπαλίτσες.

8 Κάποιος επιλέγει τυχαία ένα αντικείμενο από το κάθε κουτί. Να σημειώσετε ποιο αντικείμενο είναι πιο πιθανόν να επιλέξει από το κάθε κουτί. ΣΠ2.8



9 Ο Νεόφυτος έχει μερικά σακουλάκια με άσπρες και μαύρες χάντρες. Καλείται να επιλέξει τυχαία μια χάντρα από το κάθε σακουλάκι. Να βρείτε ποια εικόνα αντιστοιχεί στην καθεμιά από τις παρακάτω δηλώσεις: ΣΠ2.6 ΣΠ2.8



(α) Είναι αδύνατο να πάρει μαύρη χάντρα: ……

(β) Είναι λιγότερο πιθανόν να πάρει μαύρη χάντρα: ……

(γ) Είναι εξίσου πιθανόν να πάρει άσπρη ή μαύρη χάντρα: ……

(δ) Είναι πιθανόν να πάρει μαύρη χάντρα: ……

(ε) Είναι βέβαιο ότι θα πάρει μαύρη χάντρα: ……

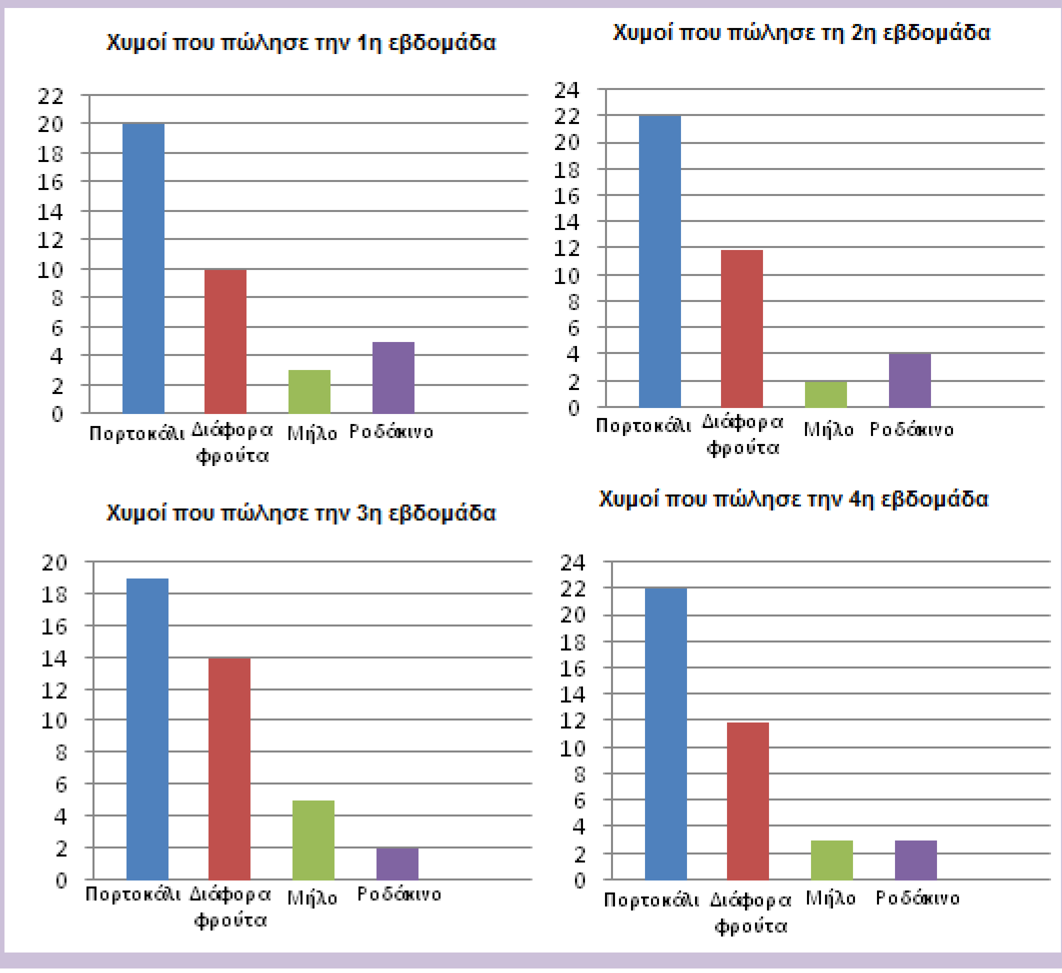
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Οργανώνουν μια έρευνα στο σχολείο για να διερευνήσουν ποια προϊόντα αγοράζουν οι μαθητές από το κυλικείο του σχολείου και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα τους σε γραφική παράσταση. Επαναλαμβάνουν την έρευνα αυτή ακόμη δύο φορές (π.χ. μετά από δύο εβδομάδες) και γράφουν μια επιστολή προς τον ιδιοκτήτη του κυλικείου συμβουλεύοντάς τον για πιθανές αλλαγές που πρέπει να γίνουν στις παραγγελίες διαφόρων προϊόντων.

2 Συλλέγουν πληροφορίες και κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις που αναφέρονται στο ύψος βουνών.

3 Ο κύριος Θωμάς άνοιξε ένα παντοπωλείο σε μια μικρή γειτονιά. Οι γραφικές παραστάσεις δείχνουν τις πωλήσεις χυμών για τις 4 πρώτες εβδομάδες λειτουργίας του παντοπωλείου. Μέχρι τώρα παράγγελλε όλες τις γεύσεις στην ίδια ποσότητα. Τι θα τον συμβουλεύατε να αλλάξει στις παραγγελίες που θα κάνει για την $5^{η}$ εβδομάδα;



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλίμακα 3

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
1	Διαβάζουν και κατασκευάζουν ραβδογράμματα, εικονογράμματα, κυκλικές και γραμμικές γραφικές παραστάσεις.
2	Οργανώνουν δεδομένα σε πίνακες και εισάγονται στην έννοια του διατεταγμένου ζεύγους.
3	Καταγράφουν τα αποτελέσματα ερευνητικών δραστηριοτήτων και κάνουν προβλέψεις.
4	Περιγράφουν και συγκρίνουν σύνολα δεδομένων, χρησιμοποιώντας τις έννοιες του μέσου όρου, της διαμέσου, της επικρατούσας τιμής, της μέγιστης και ελάχιστης τιμής.
5	Κάνουν μετρήσεις που επαναλαμβάνονται σε διάφορες χρονικές στιγμές, ερμηνεύουν τις διαφοροποιήσεις που παρουσιάζονται και καταλήγουν σε συμπεράσματα με βάση τις παρατηρήσεις τους.
6	Οργανώνουν και κατασκευάζουν πίνακες συχνοτήτων.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
7	Καταγράφουν τα αποτελέσματα πειραμάτων τύχης με συστηματικό τρόπο.
8	Προβλέπουν και υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, χρησιμοποιώντας την έννοια του λόγου.
9	Καταγράφουν και καταμετρούν τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών ενδεχομένων δύο ή περισσότερων συνόλων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Διαβάζουν και κατασκευάζουν κυκλικές και γραμμικές γραφικές παραστάσεις σε δραστηριότητες, όπως: ΣΠ3.1

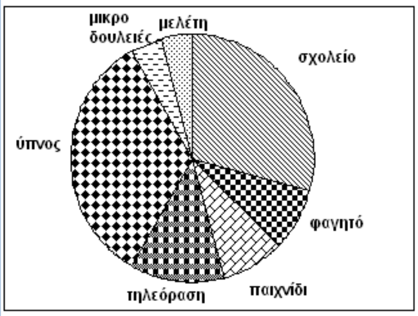
- «Οι εγγραφές των παιδιών σε ένα σχολείο εμφανίζονται στην πιο κάτω γραμμική γραφική παράσταση. Να την μελετήσετε και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.»

(α) Σε ποια χρονιά το σχολείο είχε τις λιγότερες εγγραφές;

(β) Σε ποια χρονιά το σχολείο είχε τις περισσότερες εγγραφές;

(γ) Πώς φαίνεται να αλλάζει ο αριθμός εγγραφών από το 2002 μέχρι το 2010; Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό;

- «Ο Πασχάλης κατασκεύασε μια κυκλική γραφική παράσταση, για να παρουσιάσει τις διάφορες ασχολίες του κατά τη διάρκεια μίας μέρας. Να μελετήσετε τη γραφική παράσταση και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.»



		%
σχολείο	7.00	29.17
φαγητό	2.00	8.33
παιχνίδι	2.00	8.33
τηλεόραση	3.00	12.50
ύπνος	8.00	33.33
μικροδουλειές	1.00	4.17
μελέτη	1.00	4.17
	24.00	**100.00**

ΤΟ ΕΙΚΟΣΙΤΕΤΡΑΩΡΟ ΜΟΥ

(α) Πόσες ώρες βλέπει τηλεόραση;

(β) Πόσες ώρες μελετά;

(γ) Πόσες ώρες κοιμάται;

(δ) Να κατασκευάσετε μια κυκλική γραφική παράσταση που να παρουσιάζει τις δικές σας ασχολίες κατά τη διάρκεια μιας μέρας.

2 Οργανώνουν δεδομένα σε πίνακες και εισάγονται στην έννοια του διατεταγμένου ζεύγους σε δραστηριότητες, όπως: ΣΠ3.2

- «Ο πίνακας παρουσιάζει τις επιδόσεις των νικητών του δρόμου 100 m στους Ολυμπιακούς Αγώνες από το 1896 μέχρι το 2008.»

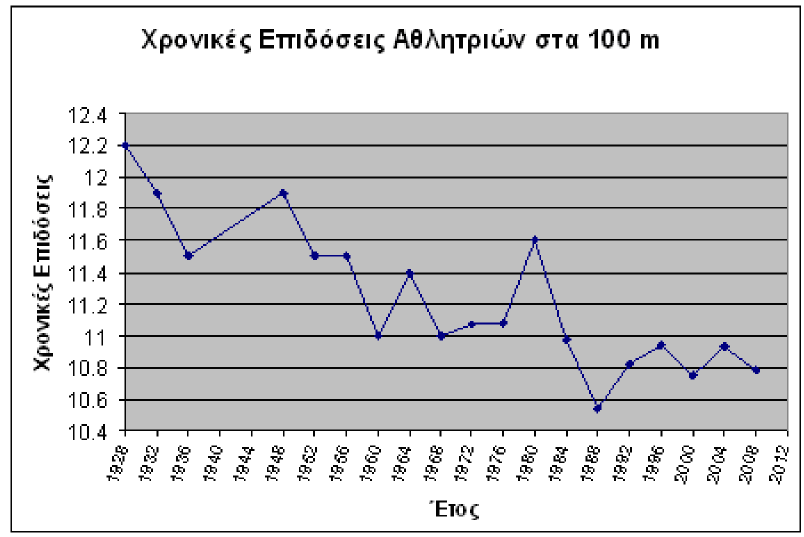
Έτος	**Χρόνος (σε δευτερόλεπτα)**	**Έτος**	**Χρόνος (σε δευτερόλεπτα)**
1896	12.0	1960	10.2
1900	10.8	1964	10.0
1904	11.0	1968	9.95
1908	10.8	1972	10.14
1912	10.8	1976	10.06
1920	10.8	1980	10.25
1924	10.6	1984	9.99
1928	10.8	1988	9.92
1932	10.3	1992	9.96
1936	10.3	1996	9.84
1948	10.3	2000	9.87
1952	10.4	2004	9.85
1956	10.5	2008	9.69

(α) Τι παρατηρείτε στον πίνακα σχετικά με τις επιδόσεις των αθλητών;

(β) Ποια νομίζετε ότι θα είναι η επίδοση του νικητή του δρόμου 100 m στους Ολυμπιακούς Αγώνες του 2012 στο Λονδίνο;

(γ) Να κατασκευάσετε μια γραμμική γραφική παράσταση, με βάση τα δεδομένα του πίνακα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα φύλλα επεξεργασίας δεδομένων για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση.

- «Η ακόλουθη γραμμική γραφική παράσταση δείχνει τις επιδόσεις των νικητριών στο δρόμο 100 m στους Ολυμπιακούς Αγώνες από το 1928 μέχρι το 2008. Να την μελετήσετε και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.»



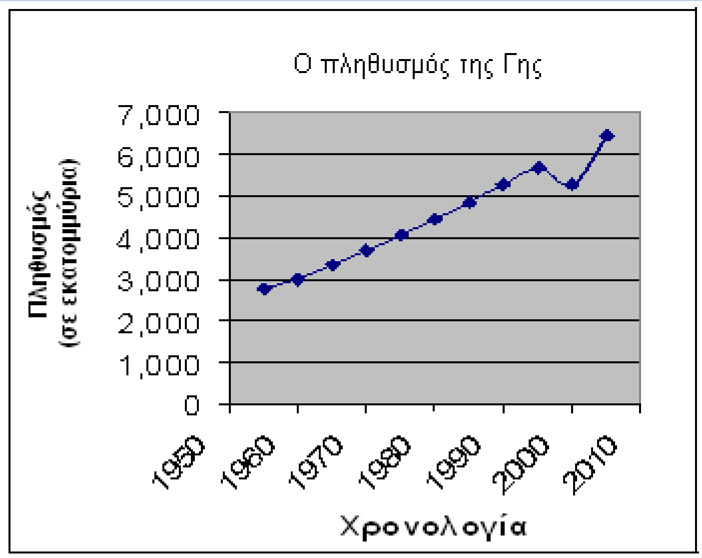
(α) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις σας όσον αφορά τις επιδόσεις των νικητριών του δρόμου 100 μ από το 1928 μέχρι το 2008;

(β) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα, με βάση τα δεδομένα της γραφικής παράστασης.

(γ) Να συγκρίνετε τα δεδομένα του πίνακα των αποτελεσμάτων των αθλητριών με αυτά των αθλητών. Να εντοπίσετε ομοιότητες και διαφορές που υπάρχουν.

3 Καταγράφουν τα αποτελέσματα μιας διερεύνησης και κάνουν προβλέψεις, όπως: ΣΠ3.3

«Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει τις αλλαγές στον παγκόσμιο πληθυσμό από το 1950 μέχρι το 2000. Να την μελετήσετε και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.»



(α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα που να παρουσιάζει τα δεδομένα της γραφικής παράστασης.

(β) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις σας σχετικά με τον πληθυσμό της Γης;

(γ) Πόσος πιστεύετε ότι θα είναι ο πληθυσμός της Γης το 2020;

4 Περιγράφουν και συγκρίνουν σύνολα δεδομένων, χρησιμοποιώντας τις έννοιες του μέσου όρου, της διαμέσου, της επικρατούσας τιμής, της μέγιστης και ελάχιστης τιμής σε δραστηριότητες, όπως: ΣΠ3.4

«Ένας φούρνος έκανε την περασμένη εβδομάδα τις πιο κάτω πωλήσεις ψωμιών. Να μελετήσετε τα δεδομένα και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.»

ΗΜΕΡΑ	ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΨΩΜΙΩΝ
Δευτέρα	112
Τρίτη	87
Τετάρτη	121
Πέμπτη	70
Παρασκευή	150
Σάββατο	198

(α) Να βρείτε το μέσο όρο των πωλήσεων των ψωμιών την περασμένη εβδομάδα.

(β) Να βρείτε πόσες ήταν οι πωλήσεις ψωμιών την Κυριακή, αν ο μέσος όρος των πωλήσεων από τη Δευτέρα μέχρι την Κυριακή ήταν 115.

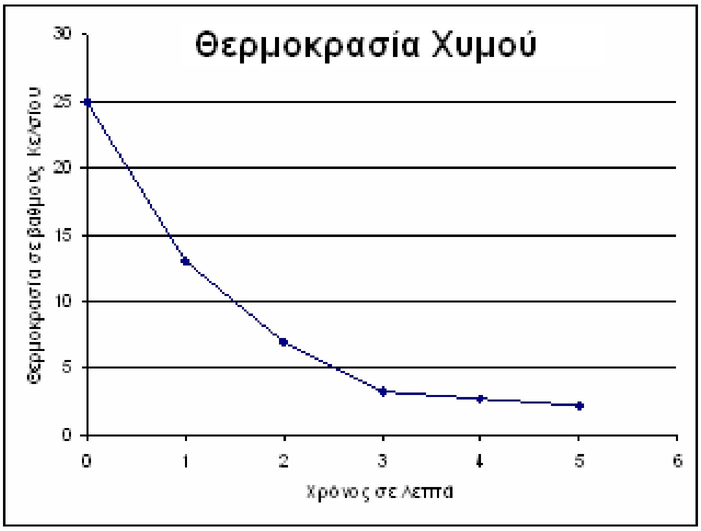
5 Ερμηνεύουν τις διαφοροποιήσεις που παρουσιάζονται και καταλήγουν σε συμπεράσματα με βάση τις παρατηρήσεις τους σε μετρήσεις που επαναλαμβάνονται σε διάφορες χρονικές στιγμές, όπως: ΣΠ3.5

«Στη γραφική παράσταση παρουσιάζεται η θερμοκρασία ενός δοχείου με χυμό, από τη στιγμή που τοποθετήθηκε σε πάγο και για διάστημα 5 λεπτών. Να την μελετήσετε και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.»

(α) Σε ποιο λεπτό είχαμε τη μικρότερη μείωση στη θερμοκρασία και σε ποιο τη μεγαλύτερη;

(β) Να περιγράψετε τις αλλαγές στη θερμοκρασία του χυμού μεταξύ του τρίτου και του πέμπτου λεπτού;

(γ) Ποια προβλέπετε ότι θα είναι η θερμοκρασία του χυμού στο δέκατο λεπτό;



6 Οργανώνουν και κατασκευάζουν πίνακες συχνοτήτων σε δραστηριότητες, όπως: ΣΠ3.6

«Οι αριθμοί στον πίνακα παρουσιάζουν τα χρήματα (σε ευρώ) που ξοδεύουν στο σχολείο οι μαθητές ενός τμήματος σε μια εβδομάδα.»

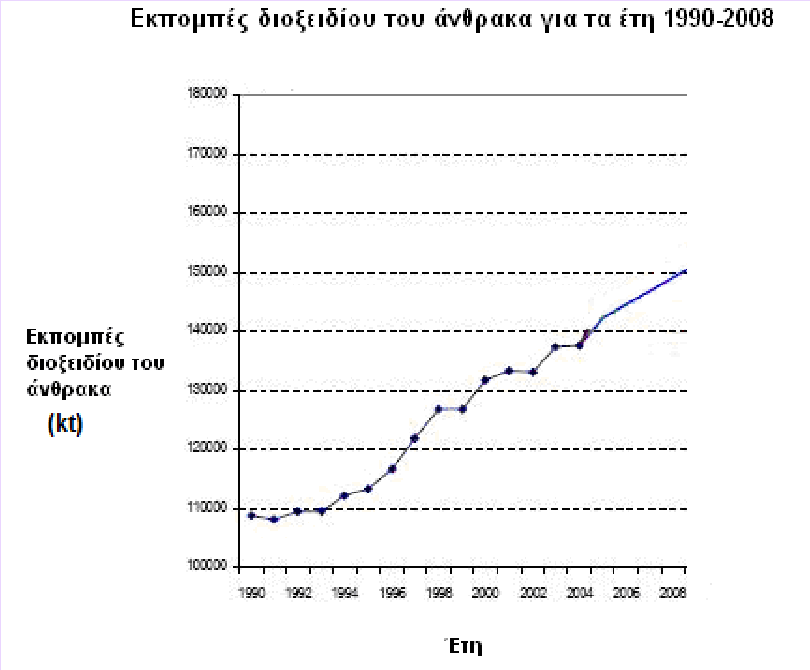
5	25	50	0	30	15	27	17	25	37
15	10	20	25	35	45	22	12	35	28
45	8	18	0	5	12	13	30	28	40

Να συμπληρώσετε τον πίνακα συχνοτήτων που ακολουθεί

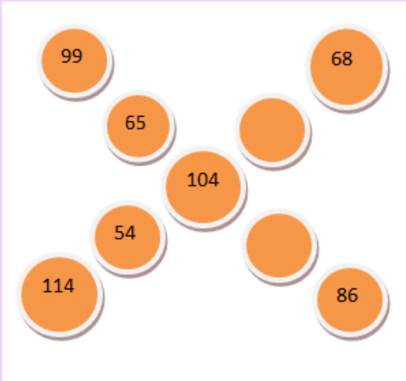
Χρήματα (σε ευρώ)	Συχνότητα
0-10	
11-20	
21-30	
31-40	
41-50	

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	**Δ.Ε.**
	Οι μαθητές:	
1	Καταγράφουν τα αποτελέσματα πειραμάτων τύχης με συστηματικό τρόπο, όπως: «Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό, για να ρίξετε ένα νόμισμα είκοσι φορές. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα συχνοτήτων για να καταγράψετε την ένδειξη που παρουσιάζεται κάθε φορά και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.» (α) Τι μέρος των ρίψεων ήταν κορώνα; (β) Τι μέρος των ρίψεων ήταν γράμματα; (γ) Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με αυτές του διπλανού σας. (δ) Αν ξαναρίξετε το νόμισμα άλλες είκοσι φορές τι αναμένετε να συμβεί και γιατί; (ε) Να κάνετε 100 ρίψεις με το λογισμό και να γράψετε σε μορφή ποσοστού και δεκαδικού τι μέρος αυτών των 100 ρίψεων είναι γράμματα και τι μέρος κορώνα. Πώς συγκρίνονται τα αποτελέσματά σας των 20 ρίψεων με αυτά των 100; (στ) Τι νομίζετε ότι θα συμβεί, αν κάνετε 1000 ρίψεις με το λογισμικό;	ΣΠ3.7
2	Προβλέπουν και υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, χρησιμοποιώντας την έννοια του λόγου σε δραστηριότητες, όπως: ▪ «Ποια είναι η πιθανότητα, όταν ρίξετε ένα ζάρι, να έχετε ένδειξη: (α) 6; (β) μονό αριθμό; (γ) ζυγό αριθμό;» ▪ «Ένα βάζο έχει μέσα 6 κόκκινους, 5 πράσινους, 8 μπλε και 3 κίτρινους βόλους. (α) Αν ένα βόλος επιλεγεί τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να είναι κόκκινος, πράσινος, μπλε ή κίτρινος; (β) Πόσους βόλους, τουλάχιστον, πρέπει να πάρω για να είμαι σίγουρος ότι ένας από αυτούς θα είναι κόκκινος;»	ΣΠ3.8
3	Καταγράφουν και καταμετρούν τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών ενδεχομένων δύο ή περισσότερων συνόλων σε δραστηριότητες, όπως: «Στο παγκύπριο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου Α’ κατηγορίας, λαμβάνουν μέρος 14 ομάδες. (α) Αν η κάθε ομάδα παίξει μέχρι το τέλος Δεκεμβρίου έναν αγώνα με την καθεμιά από τις υπόλοιπες ομάδες, πόσοι αγώνες ποδοσφαίρου θα γίνουν; (β) Πόσοι αγώνες ποδοσφαίρου θα γίνουν μέχρι το τέλος του χρόνου;»	ΣΠ3.9

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	Η γραμμική γραφική παράσταση δείχνει τις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα για τα έτη 1990 – 2008. Να την μελετήσετε και να απαντήσετε στις ερωτήσεις.  (α) Ποια χρονολογία καταγράφηκαν οι χαμηλότερες εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα; (β) Ποια χρονολογία καταγράφηκαν οι υψηλότερες εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα; (γ) Τι αλλαγές παρατηρείτε στις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα; (δ) Τι αλλαγές αναμένετε να υπάρξουν στις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα ύστερα από 20 χρόνια;	ΣΠ3.1
2	Οι βαθμοί της Ανδριάνας στα διαγωνίσματα των μαθηματικών ήταν 87, 86, 96 και 87. Ποιος είναι ο χαμηλότερος βαθμός που μπορεί να πάρει στο επόμενο διαγώνισμα, ώστε ο μέσος όρος των βαθμών της να είναι 90;	ΣΠ3.2
3	Ο Μιχάλης και ο Αλέξανδρος συζητούν για το ποιος έχει καλύτερες επιδόσεις στο δρόμο των 100 m. Πιο κάτω παρουσιάζονται οι επιδόσεις που είχαν οι δυο τους στους τελευταίους δεκαεπτά αγώνες δρόμου. **Μιχάλης**: 12.5, 12.3, 11.3, 11.2, 12.9, 12.7, 12.4, 11.9, 12.0, 11.6, 11.5,10.7, 10.9, 11.0, 11.2, 12.4, 13.1 **Αλέξανδρος**: 10.1, 11.9, 13.1, 12.0, 12.2, 12.3, 12.6, 11.9, 12.9, 13.0,13.5, 13.4, 13.9, 12.6, 12.5, 13.4, 12.2 Ποιος έχει καλύτερες επιδόσεις; Να επεξηγήσετε την απάντηση σας.	ΣΠ3.3

4 Να συμπληρώσετε τους αριθμούς που λείπουν έτσι ώστε ο μέσος όρος κάθε διαγωνίου να είναι 93. ΣΠ3.4



5 Στη γραφική παράσταση παρουσιάζεται ο αριθμός των δέντρων που έχουν στην αυλή του σπιτιού τους τα παιδιά της Δ' τάξης του σχολείου σας. Να την μελετήσετε και να απαντήσετε στις ερωτήσεις. ΣΠ3.4

(α) Ποια είναι η διάμεσος και ποια η επικρατούσα τιμή των δεδομένων;

(β) Ποιο είναι το εύρος του αριθμού των δέντρων;

6 Η Α. ρίχνει 2 ζάρια και αθροίζει τους αριθμούς των ενδείξεών τους. Ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι: ΣΠ3.8

(α) 12;

(β) 11;

(γ) 11 ή 12;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

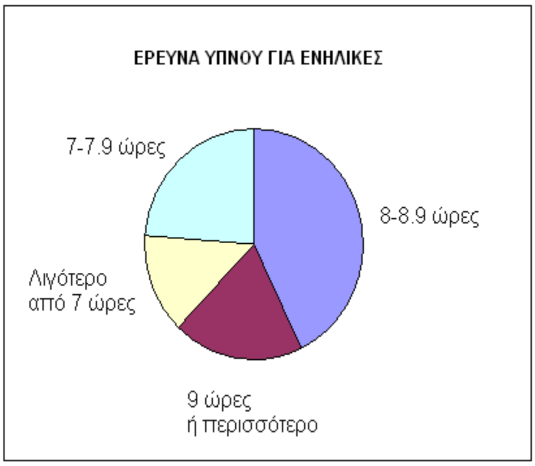
Οι μαθητές:

1 Να μελετήσετε τις διαφορές της θερμοκρασίας για ένα τρίμηνο (π.χ. Ιανουάριος-Μάρτιος) μεταξύ της περιοχής του σχολείου σας και ενός σχολείου σε άλλη χώρα (π.χ. σχολείου που συνεργάζονται με εκπαιδευτικά προγράμματα όπως Comenius).

(α) Να οργανώσετε τις πληροφορίες αυτές σε κατάλληλους πίνακες ή διαγράμματα.

(β) Να γράψετε πώς η θερμοκρασία επηρεάζει τον τρόπο ζωής των ανθρώπων στις δύο χώρες.

2 Η κυκλική γραφική παράσταση παρουσιάζει τα δεδομένα μιας έρευνας για τις συνήθειες ύπνου ενηλίκων. Να την μελετήσετε και να απαντήσετε τις ερωτήσεις.



(α) Να εκτιμήσετε το ποσοστό των ενηλίκων που κοιμάται 7-7.9 ώρες κάθε βράδυ.

(β) Να χρησιμοποιήσετε το μοιρογνωμόνιο σας, για να βρείτε πόσες μοίρες αναπαριστούν την κατηγορία ύπνου 7-7.9 ώρες; Τι μέρος των 360^o είναι αυτό;

(γ) Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας στις ερωτήσεις (α) και (β).

(δ) Να κάνετε μια παρόμοια έρευνα στην τάξη σας, για να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα και να κατασκευάσετε μια κυκλική γραφική παράσταση.

ΣΥΝΗΘΕΙΕΣ ΥΠΝΟΥ ΜΑΘΗΤΩΝ		
Κατηγορία Ύπνου	**Αριθμός Μαθητών**	**Ποσοστό Τάξης**
Λιγότερο από 7 ώρες		
7 - 7.9 ώρες		
8 - 8.9 ώρες		
9 ώρες ή περισσότερο		

(ε) Πώς οι συνήθειες ύπνου των συμμαθητών σας συγκρίνονται με αυτές των ενηλίκων;

(στ) Με ποιο άλλο τρόπο μπορείτε να αναπαραστήσετε τα αποτελέσματα της έρευνας σας για τις συνήθειες ύπνου των συμμαθητών σας;

(ζ) Από επιστημονικές έρευνες φαίνεται ότι οι έφηβοι χρειάζονται περισσότερο ύπνο από τα παιδιά ή τους ενήλικες. Γιατί οι έφηβοι χρειάζονται περισσότερο ύπνο;

3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα με πληροφορίες που θα βρείτε στο διαδίκτυο (http://www.astro.gr/astrology/Sun.htm) και να απαντήσετε στις πιο κάτω ερωτήσεις.

Μήνας	**Ώρα**
Ιανουάριος	
Φεβρουάριος	
Μάρτιος	
Απρίλιος	
Μάιος	
Ιούνιος	

(α) Να κατασκευάσετε μια γραφική παράσταση με τα δεδομένα του πίνακα.

(β) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις σας;

(γ) Τι πιστεύετε ότι συμβαίνει τους μήνες από τον Ιούλιο μέχρι το Δεκέμβριο;

(δ) Με ποιο τρόπο μπορείτε να ελέγξετε τις προβλέψεις σας;

4 Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 χρώματα βόλων, κόκκινοι, κίτρινοι, πράσινοι και μαύροι. Οι αναλογίες των χρωματιστών βόλων είναι κόκκινοι προς κίτρινοι 1:1, πράσινοι προς μαύροι 5:1, πράσινοι προς κίτρινοι 5:3. Ο ελάχιστος αριθμός βόλων στο κουτί είναι 20.

(α) Να σχεδιάσετε τους βόλους που υπάρχουν στο κουτί και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξετε τυχαία ένα κόκκινο βόλο;

(γ) Να κατασκευάσετε ένα τροχό της τύχης που να αναπαριστά την πιθανότητα του κάθε χρώματος.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλίμακα 4

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
1	Συγκρίνουν σύνολα δεδομένων χρησιμοποιώντας μέτρα θέσης (π.χ. διάμεσος, μέσος όρος, επικρατούσα τιμή) και διασποράς (π.χ. μέγιστο, ελάχιστο εύρος) και αξιολογούν την καταλληλότητα και τους περιορισμούς της χρήσης των πιο πάνω μέτρων.
2	Διαβάζουν και κατασκευάζουν ραβδογράμματα, εικονογράμματα, κυκλικές και γραμμικές γραφικές παραστάσεις, φυλλογραφήματα και διαφοροποιούν τον τρόπο παρουσίασης συνεχών και κατηγορικών δεδομένων.
3	Αξιολογούν διάφορους τρόπους παρουσίασης δεδομένων σε σχέση με την αποτελεσματικότητα και τη συνέπειά τους.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
4	Αναπαριστούν το δειγματικό χώρο πειραμάτων με πολλαπλούς τρόπους συμπεριλαμβανομένων δενδροδιαγραμμάτων.
5	Υπολογίζουν τη θεωρητική πιθανότητα ενός ενδεχομένου, τη χρησιμοποιούν στην πρόβλεψη αποτελεσμάτων σε πειράματα τύχης και κατανοούν τη διαφορά μεταξύ ανεξάρτητων και εξαρτημένων ενδεχομένων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Χρησιμοποιούν μέτρα θέσης και διασποράς, για να συγκρίνουν σύνολα δεδομένων, όπως:	ΣΠ4.1

- «Η Ειρήνη καταγράφει τα λεφτά που ξοδεύει κάθε βδομάδα για περίοδο δύο μηνών στον πιο κάτω πίνακα.

Εβδομάδα	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η
Ποσό	€6,30	€2,25	€22	€2,25	€11,75	€5,25	€4	€5

Ποιο μέτρο θέσης είναι πιο αντιπροσωπευτικό των εβδομαδιαίων εξόδων της Ειρήνης; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.»

- «Να κατασκευάσετε ένα σύνολο δεδομένων που να αποτελείται από πέντε στοιχεία, να έχει μέσο όρο 24 και εύρος τιμών 10».

2	Διαβάζουν και κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις και διαφοροποιούν τον τρόπο παρουσίασης συνεχών και κατηγορικών δεδομένων, όπως:	ΣΠ4.2

- «Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τη μέση θερμοκρασία ανά μήνα στη Λευκωσία για ένα ημερολογιακό έτος και τον αριθμό των βροχερών ημερών ανά μήνα. Να παραστήσετε τα δεδομένα χρησιμοποιώντας κατάλληλες γραφικές παραστάσεις.»

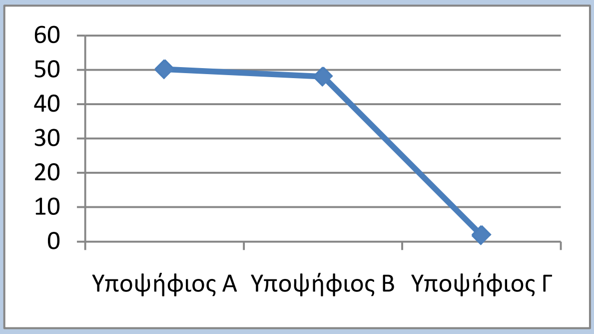
Μήνας	Μέση Θερμοκρασία	Αριθμός βροχερών ημερών
Ιανουάριος	13,3	16
Φεβρουάριος	14,7	13
Μάρτης	18,5	14
Απρίλης	23,3	6
Μάης	30,4	4
Ιούνης	36,4	2
Ιούλης	37,8	1
Αύγουστος	38,2	0
Σεπτέμβριος	31,2	3
Οκτώβριος	27,6	8
Νοέμβριος	24,3	10
Δεκέμβριος	17,9	17

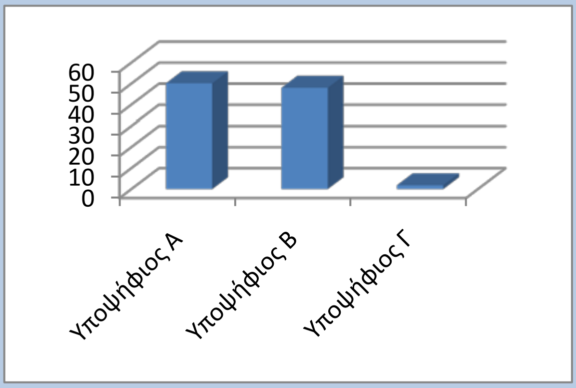
- «Το πιο κάτω φυλλόγραμμα παρουσιάζει την επίδοση των μαθητών μιας τάξης στη μαθηματική ολυμπιάδα του σχολείου τους. Με βάση το φυλλόγραμμα να υπολογίσετε τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή της επίδοσης των μαθητών της τάξης.»

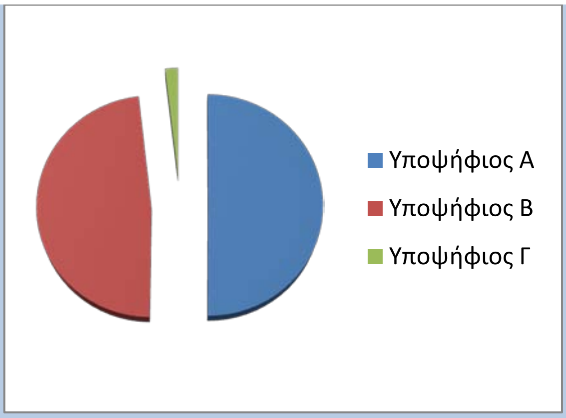
Επίδοση μαθητών στην ολυμπιάδα μαθηματικών	
Κλαδί	Φύλλο
4	0 0 1 1 7
5	0 0 1 1 2 4 5 6 6 7 7 9
6	2 2 3 5 5 6 6 7 7 7 8 9
7	1 2 3 4 4 7 8
8	2 2 5
9	0

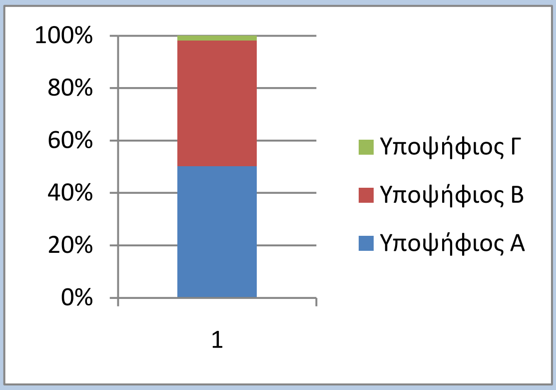
3 Αξιολογούν τρόπους παρουσίασης δεδομένων, όπως: ΣΠ4.3

«Οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των προεδρικών εκλογών. Ποια είναι τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε γραφικής παράστασης;»





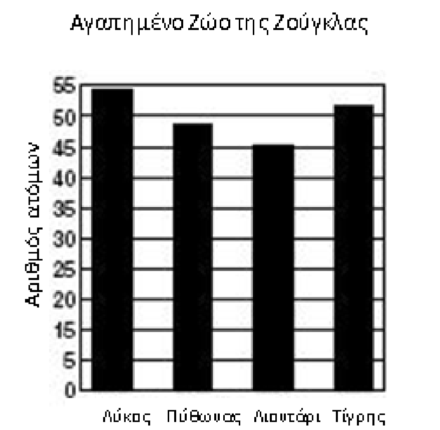




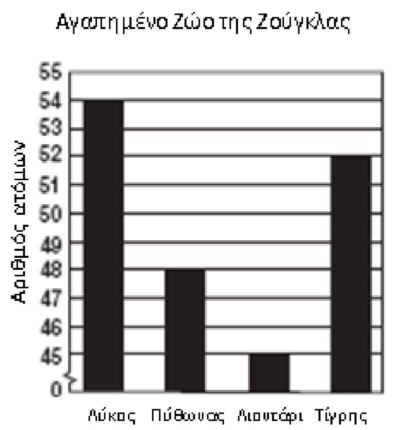
	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Αναπαριστούν το δειγματικό χώρο πειραμάτων, όπως: «Η Νεφέλη, ο Ιάσονας και η Πηνελόπη ρίχνουν ταυτόχρονα στον αέρα ένα κέρμα των 5σ, ένα κέρμα των 20σ και ένα κέρμα του 1 ευρώ, αντίστοιχα. Να καταγράψετε τα πιθανά αποτελέσματα, όταν τα τρία παιδιά ρίξουν ταυτόχρονα τα κέρματά τους, χρησιμοποιώντας δενδροδιάγραμμα».	Σ4.4
2	Υπολογίζουν τη θεωρητική πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε πειράματα τύχης, όπως: «Μέσα σε μια χάρτινη σακούλα υπάρχουν 5 μπλε, 4 πράσινες, 8 κόκκινες και 3 κίτρινες μπάλες. Η Ιωάννα επιλέγει τυχαία μια μπάλα από τη σακούλα, καταγράφει το χρώμα της μπάλας και την επανατοποθετεί στη σακούλα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται 200 φορές. Πόσες φορές αναμένετε ότι η Ιωάννα θα επιλέξει κόκκινη μπάλα;»	Σ4.5

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	**Δ.Ε.**
1	Οι βαθμοί του Ορέστη στα πέντε διαγωνίσματα των μαθηματικών του εξαμήνου ήταν 100, 95, 95, 90 και 50. Αν ο Ορέστης είχε το δικαίωμα να επιλέξει μεταξύ του μέσου όρου και της διάμεσου των βαθμών του στα πέντε διαγωνίσματα, ποια από τις δύο τιμές θα ήταν πιο συμφέρουσα για αυτόν να συμπεριληφθεί στο δελτίο προόδου του. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.	ΣΠ4.1
2	Οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν τις ίδιες πληροφορίες. Να επεξηγήσετε ποια από τις δύο γραφικές παραστάσεις φαίνεται να είναι παραπλανητική.	ΣΠ4.2

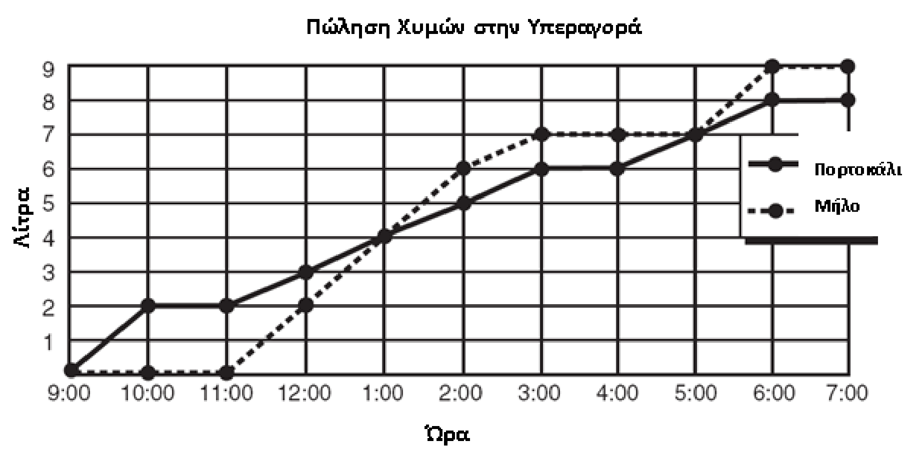


Γραφική Παράσταση 1

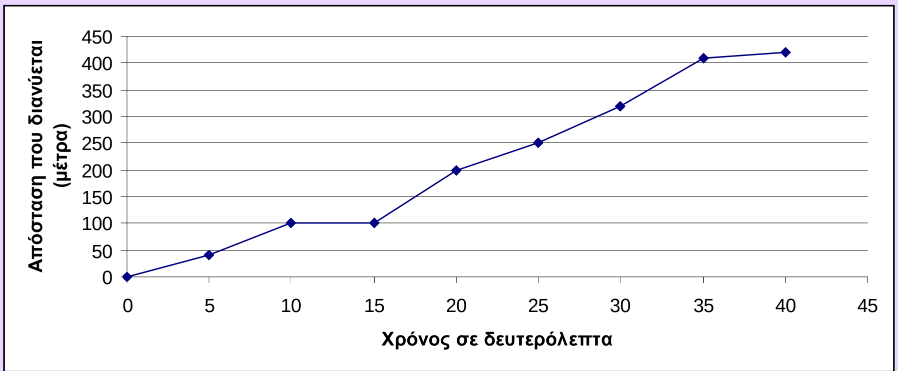


Γραφική Παράσταση 2

3	Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει τον αριθμό των λίτρων χυμού πορτοκαλιού και μήλου που πωλήθηκαν σε μια υπεραγορά κατά τη διάρκεια μιας μέρας. Να βρείτε: (α) Ποιο είδος χυμού είχε τις περισσότερες πωλήσεις μεταξύ των ωρών 12 και 2:00 μ.μ.; (β) Ποιο είδος χυμού ήταν πρώτο στις πωλήσεις για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα;	ΣΠ4.2



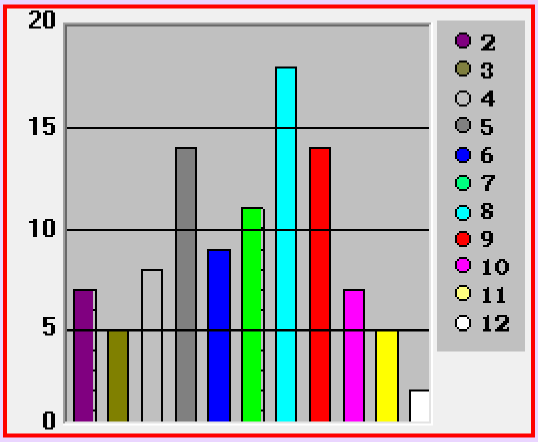
4 Η γραφική παράσταση παρουσιάζει την απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο σε 40 δευτερόλεπτα. Σε ποιο από τα πιο κάτω διαστήματα το αυτοκίνητο παραμένει ακίνητο; ΣΠ4.2



5 Το κεντρικό μαθητικό συμβούλιο ενός σχολείου αποφάσισε ότι η επιτροπή αξιολόγησης στο διαγωνισμό καθαριότητας του σχολείου θα αποτελείται από δύο άτομα από την επιτροπή περιβάλλοντος και ένα άτομο από την επιτροπή εκδηλώσεων. ΣΠ4.4 ΣΠ4.5

Επιτροπή Περιβάλλοντος	Επιτροπή Εκδηλώσεων
Άννα	Γιώργος
Μάριος	Ειρήνη
Αντρέας	
Παναγιώτης	

Να βρείτε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς σύνθεσης της επιτροπής;

6	Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τη συχνότητα του αθροίσματος των ενδείξεων δύο ζαριών, όταν ρίχνονται ταυτόχρονα για 100 φορές. Να εξηγήσετε γιατί το άθροισμα με τη μεγαλύτερη συχνότητα ήταν το 7. 	ΣΠ4.4 ΣΠ4.5
7	Η Στέλλα έχει ένα κιβώτιο στο οποίο υπάρχουν 3 μαύροι βόλοι, 6 πράσινοι, 2 κίτρινοι και 6 κόκκινοι βόλοι. Στη συνέχεια, έβαλε μερικούς άσπρους βόλους, ώστε η πιθανότητα να πάρουμε στην τύχη ένα μαύρο βόλο να είναι $\frac{1}{7}$. Πόσους άσπρους βόλους έβαλε στο κιβώτιο;	ΣΠ4.5

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Ο πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών μιας τάξης στο διαγώνισμα των μαθηματικών και της επιστήμης. Να επεξηγήσετε ποιο μέτρο θέσης περιγράφει καλύτερα τα αποτελέσματα των μαθητών σε κάθε περίπτωση.

Μάθημα	**Βαθμοί**
Μαθηματικά	17, 18, 18, 16, 1, 15, 15, 17, 18, 15, 20, 14, 17, 2, 17
Επιστήμη	17, 18, 17, 17, 15, 17, 17, 17, 20, 17, 17, 20, 17, 17, 17

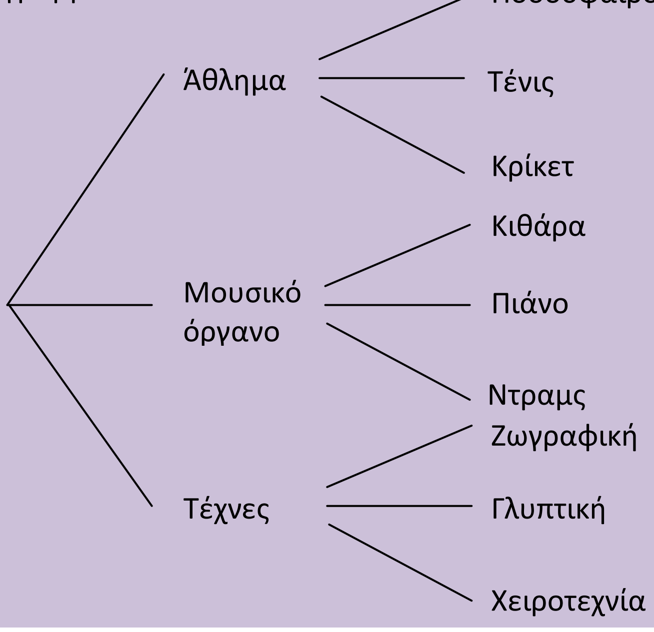
2 Να κάνετε μια έρευνα στο σχολείο σας, για να διερευνήσετε τις απόψεις των μαθητών για το ποια είναι τα σημαντικότερα προβλήματα που αντιμετωπίζει το σχολείο σας. Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματά σας χρησιμοποιώντας κατάλληλες γραφικές παραστάσεις.

3 Να χρησιμοποιήσετε τα στοιχεία της Μετεωρολογικής Υπηρεσίας Κύπρου, για να παρουσιάσετε γραφικά τη διακύμανση της ανώτατης μέσης τιμής της θερμοκρασίας και το μέσο όρο της βροχόπτωσης στην Κύπρο τα τελευταία 30 χρόνια. Με βάση τα δεδομένα σας, μπορείτε να προβλέψετε την ανώτατη μέση τιμή της θερμοκρασίας και το μέσο όρο της βροχόπτωσης στην Κύπρο τα επόμενα 20 χρόνια.

Πηγή: http://www.moa.gov.cy

4 Κατασκευάζουν προβλήματα, όπως;

« Να κατασκευάσετε ένα πρόβλημα πιθανοτήτων που η λύση του να βασίζεται στο πιο κάτω δεντροδιάγραμμα».



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλίμακα 5

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
1	Διακρίνουν τα διάφορα είδη μεταβλητών (Ποιοτικές, Ποσοτικές, Διακριτές, Συνεχείς).
2	Μελετούν τις χρήσεις της Στατιστικής ως εργαλείου διερεύνησης υποθέσεων των χαρακτηριστικών ενός πληθυσμού και παρουσιάζουν τα δεδομένα σε διάφορες μορφές (πίνακες, διαγράμματα συχνοτήτων ραβδογράμματα, ιστογράμματα, κυκλικά διαγράμματα, φυλλογραφήματα - stem and leaf plots), με ή χωρίς τη χρήση λογισμικού.
3	Αναλύουν τα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού και συζητούν για τη καταλληλότητα του τρόπου συλλογής των δεδομένων (Εγκυρότητα, Αξιοπιστία, Αμεροληψία) και παρουσίασής τους.
4	Περιγράφουν στατιστικά δεδομένα (για διακριτές μη ομαδοποιημένες μεταβλητές), υπολογίζοντας μέτρα θέσης και διασποράς (Μέση τιμή, Διάμεσος, Επικρατούσα τιμή, Εύρος, Τυπική Απόκλιση) και συζητούν για την καταλληλότητα χρήσης του κάθε μέτρου (Με ή και χωρίς τη χρήση λογισμικού).
5	Συγκρίνουν χαρακτηριστικά δυο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς δεδομένων.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
6	Κατανοούν μέσα από πραγματικές καταστάσεις και χρησιμοποιούν τις έννοιες Πείραμα τύχης, Ενδεχόμενο, Δειγματικός χώρος.
7	Υπολογίζουν τη πιθανότητα απλού ενδεχομένου (κλασσικός ορισμός πιθανότητας, Laplace) δειγματικού χώρου ισοπίθανων στοιχειωδών ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης.
8	Διακρίνουν τα ενδεχόμενα σε Τυχαία, Απλά, Βέβαια, Αδύνατα.
9	Αντιλαμβάνονται την έννοια της Πιθανότητας ως σχετικής συχνότητας (Von Mises) και την εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων.

10	Εκτιμούν πόσες φορές θα πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο, σε ένα πείραμα τύχης που επαναλαμβάνεται πολλές φορές, με δεδομένο τη θεωρητική πιθανότητα του ενδεχομένου.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Διακρίνουν και χρησιμοποιούν τα διάφορα είδη μεταβλητών σε δραστηριότητες, όπως: ΣΠ5.1

Για τη μελέτη της τροχαίας κίνησης συγκεντρώθηκαν διάφορα στοιχεία από διερχόμενα αυτοκίνητα σε κάποιο κομβικό σημείο της πόλης. Μερικά από τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

Αρχικό Γράμμα Πινακίδας Εγγραφής	Χρώμα	Ταχύτητα Km/h	Αριθμός Επιβατών	Φορτηγό / Ημιφορτηγό
ΚΚΕ	Κόκκινο	43	1	ΟΧΙ
WS	Άσπρο	37	0	ΟΧΙ
ΕΑΑ	Γκρίζο	42	4	ΟΧΙ
DHG	Ασημί	48	3	ΟΧΙ
ΚΒΕ	Κόκκινο	35	2	ΝΑΙ
HKF	Ασημί	39	0	ΟΧΙ
KFC	Άσπρο	40	1	ΝΑΙ
YW	Πράσινο	27	3	ΟΧΙ
ST	Μαύρο	36	2	ΟΧΙ
HTP	Γκρίζο	47	2	ΟΧΙ

(α) Να εξηγήσετε γιατί ο «*Αριθμός Επιβατών*» είναι διακριτή μεταβλητή.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η «*Ταχύτητα*» είναι συνεχής μεταβλητή.

(γ) Ποιες στήλες περιέχουν ποιοτικές μεταβλητές;

(δ) Ποια ήταν η ταχύτητα του μαύρου αυτοκινήτου;

(ε) Πόσα ήταν τα φορτηγά και ημιφορτηγά αυτοκίνητα;

(στ) Τι χρώμα είχε το γρηγορότερο αυτοκίνητο;

(ζ) Ποια ήταν η ταχύτητα με τους περισσότερους επιβάτες;

2 Παρουσιάζουν τα στατιστικά δεδομένα σε διάφορες μορφές και χρησιμοποιούν τις πληροφορίες που λαμβάνουν από τους πίνακες ή τα διαγράμματα για εξαγωγή συμπερασμάτων, όπως: ΣΠ5.2

Τριάντα παιδιά σε ένα σχολείο ρωτήθηκαν για τον τρόπο μετάβασής τους στο σχολείο. Οι απαντήσεις τους συγκεντρώνονται στον πίνακα:

Μεταφορικό Μέσο	**Διαλογή**	**Συχνότητα**
Πεζή	~~IIII~~ IIII	9
Ποδήλατο	III	3
Αυτοκίνητο	~~IIII~~ I	6
Λεωφορείο	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12

Να παρουσιάστε τα δεδομένα του πίνακα κατασκευάζοντας:

(α) Ραβδόγραμμα (β) Κυκλικό διάγραμμα

Σε ποια συμπεράσματα μπορείτε να καταλήξετε από τη μελέτη των διαγραμμάτων;

3 Συζητούν την καταλληλότητα του τρόπου συλλογής και παρουσίασης δεδομένων, όπως: ΣΠ5.3

Ο Δημήτρης , ο Γιώργος και η Ελένη θα διενεργήσουν μια έρευνα με σκοπό να εξαγάγουν συμπεράσματα για τη δημοφιλέστερη ομάδα της πόλης τους ανάμεσα στους μαθητές του σχολείου τους. Ο Δημήτρης επιλέγει το δείγμα του μέσα στο σχολικό λεωφορείο κατά τη διάρκεια της διαδρομής του προς το σχολείο, ενώ η Ελένη συλλέγει το δείγμα της στην είσοδο του σχολείου ρωτώντας κάθε 15^{ον} μαθητή που μπαίνει στο σχολείο. Ο Γιώργος επιλέγει τυχαία 30 αριθμούς από το 1 μέχρι το 600 και μετά αντιστοιχεί τους αριθμούς με μαθητές του σχολείου του από αλφαβητικό ονομαστικό κατάλογο. Να αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου.

4 Περιγράφουν στατιστικά δεδομένα υπολογίζοντας μέτρα θέσης και διασποράς και συζητούν για την καταλληλότητα χρήσης του κάθε μέτρου σε δραστηριότητες, όπως: ΣΠ5.4

Ο Κώστας καταγράφει τον αριθμό των πλαστικών σακουλιών που παίρνει από την υπεραγορά κατά το εβδομαδιαίο του ψώνισμα. Τα στοιχεία από το ψώνισμα 10 συνεχών εβδομάδων είναι τα επόμενα.

9, 8, 5, 9, 12, 8, 7, 6, 5, 9

(α) Να υπολογίσετε:

i) Τη Μέση Τιμή,

ii) Τη Διάμεσο,

iii) Την Επικρατούσα Τιμή.

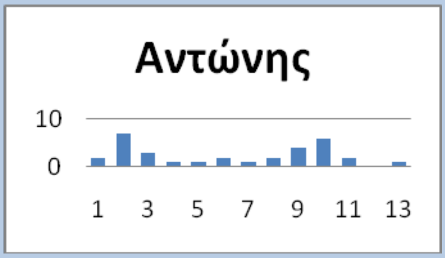
(β) Να εξηγήσετε γιατί η Μέση Τιμή δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τα δεδομένα στην έρευνα του Κώστα.

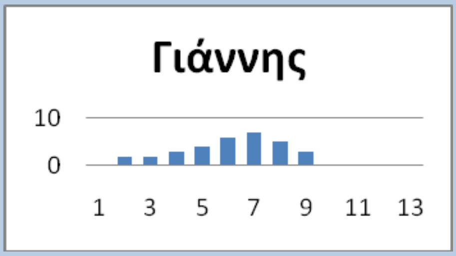
(γ) Ποια από τις τρείς τιμές θα ήταν περισσότερο χρήσιμη για μια ομάδα περιβαλλοντιστών που θεωρεί ότι οι υπεραγορές δίνουν πάρα πολλές πλαστικές σακούλες.

(δ) Ποια τιμή θα χρησιμοποιούσε ένας καταναλωτής που πιστεύει ότι οι υπεραγορές δεν του δίνουν αρκετές σακούλες για τα ψώνια του;

5 Συγκρίνουν χαρακτηριστικά δυο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς δεδομένων σε δραστηριότητες, όπως: ΣΠ5.5

Ο Αντώνης και ο Γιάννης είναι πωλητές μεταχειρισμένων αυτοκινήτων. Τα επόμενα ραβδογράμματα δείχνουν τον αριθμό των εβδομαδιαίων πωλήσεων που έκαναν για ένα χρονικό διάστημα.





(α) Να υπολογίσετε:

i) τη μέση τιμή

ii) την επικρατούσα τιμή

iii) το εύρος των πωλήσεων για τους δυο πωλητές.

(β) Ποιος πώλησε περισσότερα αυτοκίνητα;

(γ) Ποιόν θεωρείτε ως τον καλύτερο πωλητή και γιατί;

6 Συγκρίνουν χαρακτηριστικά δυο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα διαγράμματα παρουσίασης τους, όπως: ΣΠ5.2 ΣΠ5.4 ΣΠ5.5

Το επόμενο φυλλογράφημα διπλής όψης δείχνει τα παραπτώματα που χρεώθηκε κάθε ομάδα του Ευρωπαϊκού πρωταθλήματος για τα έτη 2008 και 2009. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές εντοπίζετε ανάμεσα στις δυο χρονιές; (Σημ. 1|2=12, 0|6=6, 4|1=41 κ.ο.κ.).

2008		2009
11	4	
	3	7
332	3	233
8865	2	889
44331110	2	001112223
987776665	1	56888899
321	1	22444
7	0	69

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Υπολογίζουν τη πιθανότητα απλού ενδεχομένου. Διακρίνουν τα ενδεχόμενα σε Τυχαία, Απλά, Βέβαια, Αδύνατα σε δραστηριότητες, όπως: Ρίχνουμε τρία δίκαια νομίσματα 1 φορά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των πιο κάτω γεγονότων, με την προϋπόθεση ότι όλα τα σημεία του δειγματοχώρου έχουν την ίδια πιθανότητα. I. Α={ το πρώτο νόμισμα είναι Κ} , Κ = Κορώνα, II. Β={ εμφανίζονται ακριβώς δύο Κ} III. Γ={δεν εμφανίζονται παραπάνω από 2 Κ}	ΣΠ5.7 ΣΠ5.8
2	Αντιλαμβάνονται την έννοια της Πιθανότητας ως σχετικής συχνότητας, όπως: Η Μαρία ρίχνει ένα νόμισμα 200 φορές. Τα αποτελέσματα είναι 108 Κορώνες και 92 γράμματα. Με βάση τα δεδομένα αυτά, να υπολογίσετε τη πιθανότητα των ενδεχομένων: (α) Κ: Εμφάνιση κορώνας με τη ρίψη του νομίσματος (β) Γ: Εμφάνιση γραμμάτων με τη ρίψη του νομίσματος Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το νόμισμα είναι αμερόληπτο;	ΣΠ5.9
3	Προβαίνουν σε εκτιμήσεις και προβλέψεις με βάση τη θεωρητική πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε δραστηριότητες, όπως: Μια συγκεκριμένη μάρκα σοκολάτας περιέχει δώρο μέσα στο περιτύλιγμα. Η πιθανότητα να βρεθεί δώρο στο περιτύλιγμα είναι 1/25. Πόσα δώρα αναμένεται να υπάρχουν σε (α) 50 σοκολάτες, (β) 200 σοκολάτες , (γ) 1000 σοκολάτες;	ΣΠ5.10

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1	Ο δήμαρχος της πόλης διοργανώνει κάθε χρόνο αγώνα δρόμου 5 km για φιλανθρωπικούς σκοπούς. Στο φετινό αγώνα έλαβαν μέρος 1000 συμπολίτες μας. Ο χρόνος των αθλητών φαίνεται στο πιο κάτω πίνακα:	ΣΠ5.2

Αγώνας δρόμου 5 km

Χρόνος (min:s)	Αριθμός αθλητών
15:00 – 24:59	168
25:00 - 34:59	462
35:00 – 44:59	218
45:00 – 54:59	121
55:00 – 64:59	21

Με τη βοήθεια του κατάλληλου λογισμικού να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των παρατηρήσεων και να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:

i. Τι χρόνο είχε κάνει η πλειοψηφία των αθλητών;

ii. Ποιος ήταν ο χρόνος του νικητή;

iii. Να εξηγήσετε γιατί το ιστόγραμμα σας ξεκινά από το 15 και όχι από το μηδέν.

iv. Υπήρχαν αθλητές που δεν ολοκλήρωσαν τον αγώνα;

v. Τι ποσοστό αθλητών τερμάτισε σε χρόνο κάτω των 25 min;

2	Μια τσάντα περιέχει 100 μπάλες, αριθμημένες από το 1 μέχρι το 100. Μια μπάλα επιλέγεται τυχαία. (α) Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός της μπάλας να είναι πολλαπλάσιο του 3; (β) Ποια είναι η πιθανότητα η μπάλα να είναι πολλαπλάσιο του 9; (γ) Ποια είναι η πιθανότητα η μπάλα να μην είναι πολλαπλάσιο του 3;	ΣΠ5.7
3	Ένας επιθεωρητής οχημάτων επισκέπτεται μια μεγάλη εταιρεία με σκοπό να ελέγξει τη κατάσταση των οχημάτων της. Η εταιρεία έχει 4 μεγάλα φορτηγά, 136 ελαφρά μικρά φορτηγά (βαν) και 21 οχήματα τύπου σαλούν. Ο επιθεωρητής αποφασίζει να ελέγξει δείγμα 10% των οχημάτων. Όλα τα είδη των οχημάτων θα αντιπροσωπευθούν στο δείγμα.	ΣΠ5.3

i. Πόσα αυτοκίνητα από κάθε είδος θα ελεγχθούν;

ii. Πως κρίνετε τη δειγματοληπτική μέθοδο που ακολούθησε ο επιθεωρητής;

4 Η εταιρεία λεωφορείων της πόλης μας καταγράφει κάθε μέρα τον αριθμό των καθυστερημένων δρομολογίων. Ο πίνακας παρουσιάζει τα στοιχεία για τους μήνες Φεβρουάριο και Μάιο του ίδιου έτους. ΣΠ5.4 ΣΠ5.5

Φεβρουάριος:

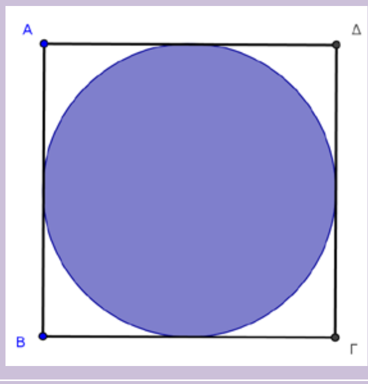
6	7	5	4	3	0	0	1	2	5
9	10	5	4	3	6	7	1	0	0
0	0	1	2	1	0	4	1		

Μάιος:

3	0	1	0	3	1	2	3	4	9
2	0	4	1	1	2	3	4	1	5
7	2	1	2	3	0	4	1	0	2
1									

i. Να υπολογίσετε τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος του αριθμού των καθυστερημένων δρομολογίων για κάθε μήνα.

ii. Πιστεύετε ότι η εταιρεία έχει βελτιώσει το επίπεδο των υπηρεσιών της μεταξύ Φεβρουαρίου – Μαΐου; Να εξηγήσετε γιατί.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Να κατασκευάσετε κύκλο ακτίνας 5 cm και να περιγράψετε τετράγωνο πλευράς 10 cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση INT(RAND()*10) στο Microsoft Excel, να πάρετε τετράδες τυχαίων αριθμών και να τους ερμηνεύσετε ως συντεταγμένες σημείων στο επίπεδο. Να θεωρήσετε ως αρχή των αξόνων την αριστερή κάτω κορυφή του τετραγώνου. (Για παράδειγμα, η τετράδα 2 4 5 0, δίνει το σημείο (2.4 , 5.0) σε εκατοστόμετρα). (α) Να πάρετε ένα μεγάλο αριθμό σημείων και να εξετάστε πόσα από αυτά τα σημεία βρίσκονται μέσα στον κύκλο. (β) Να υπολογίσετε τη θεωρητική πιθανότητα ώστε ένα τυχαίο σημείο να βρίσκεται μέσα στον κύκλο. (γ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα δυο προηγούμενα ερωτήματα, να δώσετε μια προσέγγιση του αριθμού π. 
2	Να αναλύσετε τα δεδομένα μια έρευνας, χρησιμοποιώντας λογιστικά φύλλα (excel).

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλίμακα 6

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
1	Κατασκευάζουν ερωτηματολόγια ακολουθώντας βασικές αρχές ανάπτυξης ερωτηματολογίων και υλοποιούν απλές στατιστικές έρευνες.
2	Εφαρμόζουν διάφορες μορφές δειγματοληψίας (Απλή-τυχαία, Στρωματοποιημένη, Κατά Συστάδες, Συστηματική) και συζητούν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των μορφών δειγματοληψίας.
3	Υπολογίζουν το Ενδοτεταρτημοριακό Έυρος (IQR), τη Διασπορά (S^2), την Τυπική Απόκλιση (S) και το Συντελεστή Μεταβολής (CV) διακριτών μεταβλητών (μη ομαδοποιημένων) και συγκρίνουν δυο ή περισσότερα δείγματα (με ή χωρίς τη χρήση λογισμικού).
4	Κάνουν προβλέψεις στη συμπεριφορά στατιστικών δεδομένων ενός πληθυσμού εξετάζοντας τη μεταβολή των μέτρων θέσης και διασποράς μιας μεταβλητής σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα (χρονογράμματα).
5	Διερευνούν το είδος της συσχέτισης δυο μεταβλητών μέσα από διαγράμματα διασποράς (scatter plots) και υπολογίζουν το συντελεστή συσχέτισης δυο μεταβλητών (χρήση λογισμικού).
6	Μελετούν και ερμηνεύουν γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης και τα χρησιμοποιούν για να κάνουν προβλέψεις ή να ελέγξουν τη συμπεριφορά μεταβλητών ενός πληθυσμού.

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
7	Εκφράζουν και απεικονίζουν με διαγράμματα Venn σύνθετα ενδεχόμενα ως αποτέλεσμα πράξεων απλών ενδεχομένων (συμπλήρωμα, ένωση, τομή, διαφορά).
8	Διατυπώνουν και εφαρμόζουν τα αξιώματα του Kolmogorov, τα αιτιολογούν διαισθητικά με κατάλληλα παραδείγματα και διαγράμματα Venn. Διακρίνουν τα ενδεχόμενα σε Συμπληρωματικά και Ασυμβίβαστα και εφαρμόζουν τις συνέπειες των αξιωμάτων του Kolmogorov ($P(A')$, $P(A\cup B)$, $P(A-B)$) σε προβλήματα.

9	Μελετούν πειράματα τύχης που εκτελούνται σε δύο ή περισσότερα στάδια και αποτυπώνουν το δειγματικό χώρο σε πίνακες και δενδροδιαγράμματα
10	Κατανοούν και εφαρμόζουν την *Αρχή της Απαρίθμησης* (Πολλαπλασιαστική Αρχή) σε πειράματα τύχης.
11	Μετατρέπουν δενδροδιαγράμματα σε διαγράμματα πιθανοτήτων και υπολογίζουν τις πιθανότητες συνδυασμένων ανεξάρτητων ενδεχομένων.
12	Υπολογίζουν *Μεταθέσεις*, *Διατάξεις* και *Συνδυασμούς* και τους εφαρμόζουν στον υπολογισμό πιθανοτήτων.

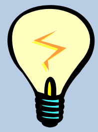
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Κατασκευάζουν ερωτηματολόγια και υλοποιούν απλές στατιστικές έρευνες, όπως: ▪ Να κατασκευάσετε ένα ερωτηματολόγιο, για να διερευνήσετε πώς οι μαθητές αξιολογούν την ποιότητα των προσφερόμενων από το σχολικό κυλικείο φαγητών. ▪ Να σχολιάσετε κριτικά τις επόμενες ερωτήσεις. Σε κάθε περίπτωση να αναδιατυπώσετε τις ερωτήσεις, για να δείξετε τις βελτιώσεις που πρέπει να γίνουν. i. Είστε νέος, μεσήλικας, ή γέρος; ii. Πόσων ετών είστε; $0 \rightarrow 5$ ☐ $7 \rightarrow 10$ ☐ 12+ ☐ iii. Έχετε αδέλφια; Έχετε ένα αδελφό; Έχετε τουλάχιστον δυο αδέλφια;	ΣΠ6.1
2	Μελετούν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των μορφών δειγματοληψίας καθώς και τα δειγματοληπτικά λάθη, όπως: ▪ Να αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της χρήσης δεδομένων για μια στατιστική έρευνα που προέρχονται: i. Από απογραφή ii. Από δείγμα ▪ Σε ένα φυτώριο υπάρχουν 400 δένδρα. Όλα τα δένδρα είναι φυτεμένα σε σειρές. Να περιγράψετε πώς θα πάρετε ένα συστηματικό δείγμα από 25 δένδρα.	ΣΠ6.2

3 Υπολογίζουν μέτρα θέσης και διασποράς και συγκρίνουν δυο ή περισσότερα δείγματα, όπως: ΣΠ6.3

Το δημαρχείο της πόλης μας εξετάζει δυο είδη λαμπτήρων για τη φωταγώγηση της πόλης. Παίρνει τυχαία 9 λάμπες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους πριν «καούν». Οι ώρες φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Α (ώρες)	140	150	160	130	150	170	150	140	160
Β (ώρες)	170	180	190	110	200	100	80	120	200



I. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ωρών λειτουργίας του κάθε είδους.

II. Ποιο είδος θα πρέπει να προτιμήσει το δημαρχείο;

4 Κάνουν προβλέψεις στη συμπεριφορά στατιστικών δεδομένων ενός πληθυσμού, εξετάζοντας τη μεταβολή στο χρόνο των μέτρων θέσης και διασποράς (χρονογράμματα), όπως: ΣΠ6.3 ΣΠ6.4

Τα δεδομένα του πίνακα δείχνουν το ποσοστό των μητέρων ανάλογα με την ηλικία τους σε μια Ευρωπαϊκή χώρα για περίοδο 50 ετών.

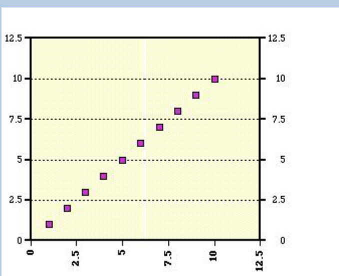
Ηλικία μητέρας	**1941 %**	**1951 %**	**1961 %**	**1971 %**	**1981 %**	**1991 %**
15-19	4.3	4.3	7.2	10.6	9.0	8.2
20-24	25.4	27.6	30.8	36.5	30.9	26.9
25-29	31.0	32.2	30.7	31.4	34.0	35.4
30-34	22.1	20.7	18.8	14.1	19.7	21.1
35-39	12.7	11.5	9.6	5.8	5.3	7.0
40-44	4.2	3.4	2.7	1.5	1.0	1.3
45-49	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

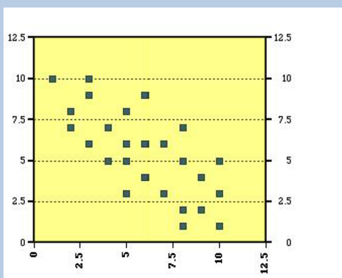
i. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ηλικίας των μητέρων για τα έτη 1941, 1961 και 1991 (να χρησιμοποιήσετε λογισμικό, π.χ. Excel).

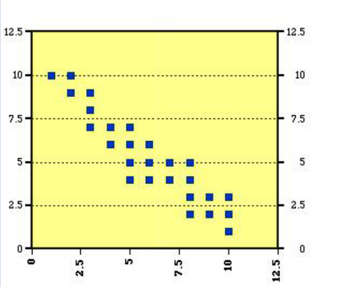
ii. Τι συμπεραίνετε για την ηλικία των μητέρων;

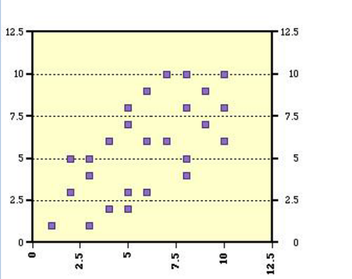
5 Διερευνούν το είδος της συσχέτισης δυο μεταβλητών μέσα από διαγράμματα διασποράς (scatter plots), όπως: ΣΠ6.5

Δίνονται τα επόμενα διαγράμματα διασποράς:









i. Ποιο διάγραμμα παρουσιάζει *ισχυρή* συσχέτιση;

ii. Ποια διαγράμματα παρουσιάζουν *θετική* συσχέτιση;

iii. Ποιά διαγράμματα παρουσιάζουν *αρνητική* συσχέτιση;

iv. Ποιο διάγραμμα παρουσιάζει *ασθενή αρνητική* συσχέτιση;

6 Υπολογίζουν την ευθεία παλινδρόμησης με χρήση ενός σημείου και κάνουν προβλέψεις σε σχέση με τη συμπεριφορά μεταβλητών ενός πληθυσμού, όπως: ΣΠ6.5 ΣΠ6.6

Σε ένα πείραμα φυσικής, θερμαίνεται νερό σε ένα δοχείο. Η θερμοκρασία του νερού καταγράφεται σε τακτά χρονικά διαστήματα, όπως δείχνει ο πίνακας:

Χρόνος (min)	0	2	4	6	8	10
Θερμοκρασία (^{o}C)	18	30	42	56	71	84

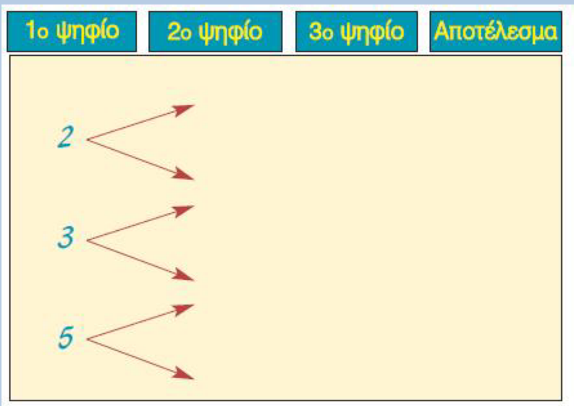
(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πειράματος.

(β) Να περιγράψετε το είδος της σχέσης των δυο μεταβλητών του πειράματος.

(γ) Να κατασκευάσετε προσεγγιστικά την ευθεία παλινδρόμησης και να υπολογίστε την εξίσωσή της.

(δ) Να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση, για να δώσετε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας του νερού στα 11 λεπτά.

(ε) Γιατί δεν είναι ορθό να χρησιμοποιήσουμε το γραμμικό μοντέλο, για να εκτιμήσουμε τη θερμοκρασία του νερού μετά τα 11 λεπτά;

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Εκφράζουν και απεικονίζουν με διαγράμματα Venn σύνθετα ενδεχόμενα ως αποτέλεσμα πράξεων απλών ενδεχομένων (συμπλήρωμα, ένωση, τομή, διαφορά) σε δραστηριότητες, όπως. Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι μία φορά. Να δώσετε με περιγραφή τα στοιχεία των πιο κάτω γεγονότων και να σχεδιάσετε τα αντίστοιχα διαγράμματα Venn. • Α={χ/χ: άρτια ένδειξη} • Β={χ/χ: ένδειξη μεγαλύτερη του 3} • Γ={χ/χ: ένδειξη άρτια ή μεγαλύτερη του 3} • Δ={χ/χ: ένδειξη άρτια και μεγαλύτερη του 3} • Ε={όχι άρτια ένδειξη} • Ποιά είναι τα γεγονότα: $A \cap B'$, $A - B$, $A' \cup B$	ΣΠ6.7
2	Αιτιολογούν διαισθητικά με κατάλληλα παραδείγματα τα αξιώματα του Kolmogorov, όπως: ▪ Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A)=0,45$ και $P(B)=0,48$. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα. ▪ Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω , ισχύουν: $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ και $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$. Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(B)$ και $P(B')$.	ΣΠ6.8
3	Αποτυπώνουν το δειγματικό χώρο σε πίνακες και δενδροδιαγράμματα, όπως: Το δενδροδιάγραμμα με το οποίο ένας μαθητής ήθελε να προσδιορίσει όλους τους τριψήφιους αριθμούς με ψηφία 2, 3, 5, όταν κάθε ψηφίο χρησιμοποιείται μια μόνο φορά, έμεινε ημιτελές. Μπορείτε να το συμπληρώσετε; 	ΣΠ6.9

<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>
Αποτυπώνουν το δειγματικό χώρο σε πίνακες, υπολογίζουν τις πιθανότητες συνδυασμένων ανεξάρτητων ενδεχομένων, όπως:

- Οι δυο τροχοί της τύχης που φαίνονται πιο κάτω περιστρέφονται ταυτόχρονα.

i. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα με όλα τα δυνατά αποτελέσματα
ii. Ποια είναι η πιθανότητα οι δυο τροχοί να δείξουν το ίδιο χρώμα;
iii. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί κίτρινο και μπλέ;
iv. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί κίτρινο και πράσινο;

Εφαρμόζουν την *Αρχή της Απαρίθμησης,* όπως:

- Σε Κινέζικο εστιατόριο το μενού προσφέρει 8 είδη στη Στήλη Α και 6 είδη στη Στήλη Β. Για να μπορέσει να ολοκληρωθεί μια παραγγελία, ο πελάτης είναι υποχρεωμένος να επιλέξει 3 είδη από τη Στήλη Α και 2 είδη από τη Στήλη Β. Πόσα είναι τα δυνατά διαφορετικά γεύματα;
</td>
<td>ΣΠ6.9
ΣΠ6.10</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>
Υπολογίζουν *Μεταθέσεις*, *Διατάξεις* και *Συνδυασμούς* και τους εφαρμόζουν στον υπολογισμό πιθανοτήτων, όπως:

Ένα κουτί περιέχει 20 βίδες από τις οποίες οι 15 είναι καλές και οι 5 είναι ελαττωματικές. Παίρνουμε στη τύχη 4 βίδες από το κουτί.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι όλες καλές.
(β) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι όλες ελαττωματικές.
</td>
<td>ΣΠ6.11</td>
</tr>
</table>

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1	Μια σχολική θεατρική ομάδα έχει 40 μέλη από τα οποία 15 είναι αγόρια. Για τους σκοπούς μιας έρευνας θα παρθούν συνεντεύξεις από 8 μέλη. Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια θα είναι στο δείγμα, αν γίνει στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία;	ΣΠ6.2
2	Υπολογίζουν μέτρα θέσης και διασποράς και συγκρίνουν δυο ή περισσότερα δείγματα, όπως:	ΣΠ6.3

Δειγματοληπτικός έλεγχος στην κεντρική αγορά στις τιμές του κρέατος και των ψαριών είχε τα αποτελέσματα που φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Ψάρι €/kg	7.3	8.2	7.1	8.3	8.9	7.9	9.2	8.7	7.3	8.7
Κρέας €/kg	4	3.1	4.2	2.4	3.1	5	3.9	3.2	3.4	3.8

I. Να υπολογίσετε (α) τη μέση τιμή, (β) την τυπική απόκλιση και (γ) το συντελεστή μεταβολής για το κάθε είδος.

II. Ποιο προϊόν έχει τις περισσότερο ομοιογενοποιημένες τιμές;

3	Μια επιχείρηση καταγράφει τα συνολικά κέρδη της ανά τετράμηνο σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ.	ΣΠ6.4

2008				**2009**			
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
24.1	26.3	28.4	20.4	29.3	31.9	35.2	28.4

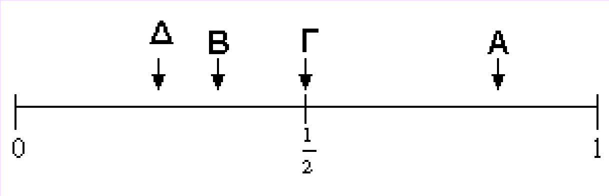
Να εκτιμήσετε τα κέρδη της επιχείρησης τα έτη (α) 2010, (β) 2007, χρησιμοποιώντας κινούμενο μέσο όρο τεσσάρων σημείων.

4	Διερευνούν το είδος της συσχέτισης δυο μεταβλητών μέσα από διαγράμματα διασποράς (scatter plots), όπως:	ΣΠ6.5

Οι βαθμοί στο μάθημα των Νέων Ελληνικών και της Ιστορίας σε ένα τυχαίο δείγμα 10 μαθητών συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα.

Νέα Ελληνικά	14	19	17	17	11	12	15	14	15	16
Ιστορία	12	20	18	16	13	11	14	16	17	18

i. Να αντιγράψετε τον πίνακα στην Excel και να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

	ii. Τι είδους συσχέτιση υπάρχει ανάμεσα στους βαθμούς των δυο μαθημάτων;	
5	Τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ και Δ έχουν πιθανότητες όπως φαίνονται στην ευθεία πιθανοτήτων.  • Ποιο ενδεχόμενο είναι το πιο πιθανόν να συμβεί; • Ποιο ενδεχόμενο είναι το λιγότερο πιθανόν να συμβεί; • Ποια ενδεχόμενα είναι περισσότερο πιθανά να συμβούν σε σχέση με το ενδεχόμενο Β;	ΣΠ6.8
6	Μια οικογένεια έχει 2 παιδιά. Να κατασκευάσετε δενδροδιάγραμμα με όλα τα ενδεχόμενα του φύλου των παιδιών. Ποιά είναι η πιθανότητα τα παιδιά να είναι, (α) δύο κορίτσια; (β) δύο αγόρια (γ) ένα αγόρι και ένα κορίτσι;	ΣΠ6.9 ΣΠ6.10

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Να σχεδιάστε ένα ερωτηματολόγιο που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, για να συγκεντρωθούν δεδομένα για το πώς περνούν οι μαθητές τις διακοπές τους.

2 Μια εταιρεία δημητριακών χρησιμοποιεί μια αυτόματη συσκευή πακεταρίσματος για ένα προϊόν που ζυγίζει 50 gr. Η συσκευή υποβάλλεται σε συνεχείς ελέγχους, για να επιβεβαιώνεται η ορθότητα της μάζας του πακέτου των 50gr. Τα αποτελέσματα 30 ελέγχων φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

54	50	47	50	51	50
53	50	47	51	50	51
52	49	46	52	50	49
52	48	48	53	49	49
51	48	49	52	49	50

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος των μετρήσεων.

(β) Ποια προβλήματα θα έχει η εταιρεία, αν η τιμή της τυπικής απόκλισης μεγαλώσει;

3 Στόχος μια έρευνας είναι η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ του διαθέσιμου εισοδήματος και της κατανάλωσης. Υπάρχουν δεδομένα που αφορούν το μέσο εισόδημα και την κατανάλωση για το διάστημα 1998-2004 για τους κατοίκους μιας επαρχίας της χώρας μας, όπως φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

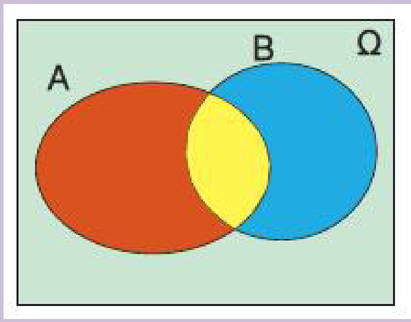
Έτος	Εισόδημα (X)	Κατανάλωση (Y)
2003	25	23.6
2004	25.7	24.3
2005	26.2	24.6
2006	26.7	25
2007	27.5	25.7
2008	27.9	26
2009	28.1	26.1

(α) Να κατασκευασθεί στο Excel το Διάγραμμα Διασποράς των 7 διαθέσιμων ζευγών τιμών (X,Y) και με βάση αυτό να εξετασθεί κατά πόσο η κατανάλωση σχετίζεται γραμμικά με το εισόδημα.

(β) Να σχεδιάσετε στο διάγραμμα την ευθεία παλινδρόμησης (προσεγγιστικά) και να βρείτε την εξίσωσή της.

(γ) Αν η κυβέρνηση υλοποιήσει μια σειρά μέτρων που αναμένονται να οδηγήσουν σε αύξηση του διαθέσιμου εισοδήματος κατά 5% το 2010 (σε σχέση με το 2009), να εκτιμήσετε την ετήσια κατανάλωση του 2010.

4 Με βάση το διπλανό διάγραμμα Venn να καθορίσετε το χρώμα ή τα χρώματα των παρακάτω ενδεχομένων:



i. $A \cup B$

ii. $A \cap B$

iii. $A \cup B$

iv. A'

v. B'

vi. $(A \cup B)'$

vii. $(A \cap B)'$

5 Ένας αρχαιολόγος σε μια σημαντική του ανακάλυψη βρήκε οστά ενός ανθρώπινου σκελετού. Θέλει να εξετάσει κατά πόσο είναι δυνατό να προβλέψει το ύψος ενός ανθρώπου. Για να ελέγξει τον ισχυρισμό του, πήρε μετρήσεις από 17 άτομα. Οι μετρήσεις αυτές φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

ΥΨΟΣ (CM)	ΜΗΚΟΣ ΠΟΔΙΟΥ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΟ ΓΟΝΑΤΟ (CM)
138	42
135	41
142	47
158	48
177	56
150	45
158	49
160	50
160	49
155	47
175	55
162	50
150	44
142	43
149	44
160	50
173	52

(α) Να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα διασποράς για τα πιο πάνω δεδομένα.

(β) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τις δύο μεταβλητές;

(γ) Να χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα, για να υπολογίσετε το ύψος ενός ανθρώπου που η περόνη του έχει μήκος 48cm.

(δ) Να εξηγήσετε τους περιορισμούς για τη χρήση αυτής της διαδικασίας ώστε να γίνουν εκτιμήσεις και τα πιθανά σφάλματα της διαδικασίας.

6	Αν το ενδεχόμενο Α είναι υποσύνολο του ενδεχομένου Β, $A \subset B$, να αποδείξετε ότι $P(A) \le P(B)$.
7	Ρίχνονται δυο αμερόληπτα ζάρια και παίρνουμε το γινόμενο των ενδείξεων. Ποια η πιθανότητα το γινόμενο να είναι: i. Ακριβώς 12 ii. Ακριβώς 20 iii. Μεγαλύτερο του 25 iv. Μικρότερο του 30 v. Άρτιος αριθμός
8	Μια κάλπη περιέχει 7 μαύρες και 3 άσπρες μπάλες. Επιλέγονται διαδοχικά τρεις μπάλες από την κάλπη. Σημειώνεται το χρώμα της μπάλας που επιλέγεται και επανατοποθετείται στην κάλπη. (α) Να κατασκευάσετε δενδροδιάγραμμα με όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος (β) Να χρησιμοποιήσετε το διάγραμμα, για να υπολογίσετε με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου τις πιθανότητες να: i) Εμφανίζονται 3 μαύρες μπάλες ii) Εμφανίζονται στη σειρά, Άσπρη, Μαύρη και Άσπρη μπάλα. iii) Εμφανίζονται δυο άσπρες και μια μαύρη μπάλα ανεξαρτήτως σειράς. iv) Εμφανίζονται δυο τουλάχιστον μαύρες μπάλες (γ) Να περιγράψετε ένα ενδεχόμενο του πειράματος πού είναι ασυμβίβαστο με το (iv) του προηγούμενου ερωτήματος.
9	Ποια είναι η πιθανότητα δυο ή περισσότερα άτομα από ένα τυχαίο δείγμα 25 ατόμων να έχουν τα γενέθλια τους την ίδια ημέρα;
10	Έστω Α, Β και Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου. Αν $P(A)+P(B)=0,8$, $P(B)+P(\Gamma)=0,9$ και $P(A)+P(\Gamma)=1,1$, να βρείτε i. Τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(\Gamma)$. ii. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα.
11	Μια έρευνα μεταξύ των μαθητών μιας τάξης έδειξε ότι: • Το 50% των μαθητών πήγε διακοπές στη θάλασσα. • Το 50% των μαθητών πήγε διακοπές στο βουνό • Το 12,5% πέρασε τις διακοπές του και στο βουνό και στη θάλασσα. • Η Μαρία, ο Κώστας και ο Βασίλης δεν πήγαν πουθενά. Πόσους μαθητές έχει η τάξη αυτή;

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλίμακα 7

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ	
1	Μελετούν και παρουσιάζουν σε πίνακες και διαγράμματα ομαδοποιημένες παρατηρήσεις και υπολογίζουν μέτρα θέσης και διασποράς. *
2	Μελετούν, κατασκευάζουν και αναλύουν αθροιστικά διαγράμματα κατανομών, πολύγωνα συχνοτήτων και καμπύλες συχνοτήτων για ομαδοποιημένες και μη παρατηρήσεις.
3	Συγκρίνουν δυο ή περισσότερα δείγματα με χρήση φυλλογραφημάτων (Stem and Leaf plots) και θηκογραμμάτων (Boxplots).
4	Υπολογίζουν και ερμηνεύουν το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης (pearson) ανάμεσα σε δυο μεταβλητές.
5	Μελετούν και ερμηνεύουν γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης, υπολογίζουν την ευθεία παλινδρόμησης με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και χρησιμοποιούν τα μοντέλα ως εργαλεία πρόβλεψης της συμπεριφοράς μιας μεταβλητής.

* Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται η χρήση κατάλληλων λογισμικων.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	
6	Διακρίνουν τα συνδυασμένα ενδεχόμενα σε *Δεσμευμένα* (υπό συνθήκη) και *Ανεξάρτητα* και υπολογίζουν την πιθανότητα σε κάθε περίπτωση.
7	Κατανοούν και εφαρμόζουν το νόμο της Ολικής Πιθανότητας.
8	Κατανοούν την έννοια της τυχαίας μεταβλητής.
9	Βρίσκουν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής τυχαίας διακριτής μεταβλητής

10	Υπολογίζουν τη Μέση τιμή και Διασπορά (διακύμανση) τυχαίας διακριτής μεταβλητής.
11	Μελετούν τη κατανομήν Bernoulli και τη Διωνυμική κατανομή μέσω εφαρμογών σε πειράματα τύχης.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ — Δ.Ε.

Οι μαθητές:

1 Μελετούν και παρουσιάζουν σε πίνακες και διαγράμματα ομαδοποιημένες παρατηρήσεις, όπως: ΣΠ7.1 ΣΠ7.2

«Ο αριθμός των παραβάσεων που έγιναν στον αυτοκινητόδρομο Λευκωσίας – Λεμεσού κατά τη διάρκεια ενός χειμερινού μήνα ανά μέρα ήταν:

45	57	73	43	67	58
53	48	53	69	47	78
34	67	65	53	71	63
31	54	70	56	64	67
54	56	58	63	58	75

I. Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις πλάτους 10.

II. Με βάση τα ομαδοποιημένα δεδομένα να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά τους

III. Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ιστόγραμμο, πολύγωνο συχνοτήτων και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

IV. Να σχολιάσετε τον αριθμό των τροχαίων παραβάσεων.

2 Συγκρίνουν δυο ή περισσότερα δείγματα με χρήση φυλλογραφημάτων (Stem and Leaf plots) και θηκογραμμάτων (Boxplots) όπως: ΣΠ7.3

«Ο Πέτρος παίζει βιολί και ο Ιάκωβος παίζει μπουζούκι. Το ωδείο στο οποίο φοιτούν τους ζήτησε να σημειώνουν το χρόνο που έκαναν εξάσκηση με το όργανό τους κάθε μέρα. Τις τελευταίες εικοσιπέντε μέρες τα παιδιά έγραψαν στο τετράδιό τους το χρόνο εξάσκησής τους σε λεπτά.

Πέτρος: 55,45,60,45,30,30,90,50,40,75,25,90,105,60,62
43,72,51,57,46,98,54,48,62,88

Ιάκωβος: 20,120,25,20,0,15,30,15,90,0,30,30,10,30,35
58,56,67,24,28,67,96,108,58,74

Να παρουσιάσετε με φυλλογράφημα και θηκόγραμμα τα δεδομένα και να κάνετε συγκρίσεις για το χρόνο που εξασκήθηκαν τα δύο αγόρια.»

3 Υπολογίζουν και ερμηνεύουν το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης και υπολογίζουν την ευθεία παλινδρόμησης, όπως: ΣΠ7.4 ΣΠ7.5

«Στο πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται μερικά στοιχεία 20 ποδοσφαιριστών της εθνικής ομάδας ποδοσφαίρου της Ελλάδας, που κατέκτησε το Ευρωπαϊκό πρωτάθλημα του 2004.

Επώνυμα	Όνομα	Θέση	Ηλικία	Ύψος	Βάρος	Ομάδα
1. Βρύζας	Ζήσης	Επιθετικός	31	182	79	Φιορεντίνα
2. Γιαννακόπουλος	Στέλιος	Μέσος	30	172	70	Μπόλτον
3. Γκούμας	Γιάννης	Αμυντικός	29	184	76	Παναθηναϊκός
4. Δέλλας	Τραϊανός	Αμυντικός	28	196	88	Ρόμα
5. Ζαγοράκης	Θοδωρής	Μέσος	33	178	75	ΑΕΚ
6. Καραγκούνης	Γιώργος	Μέσος	27	176	74	Ίντερ
7. Κατσουράνης	Κώστας	Μέσος	25	182	75	ΑΕΚ
8. Καφές	Παντελής	Μέσος	26	180	73	Ολυμπιακός
9. Καψής	Μιχάλης	Αμυντικός	31	182	79	ΑΕΚ
10. Λάκης	Βασίλης	Μέσος	28	177	71	ΑΕΚ
11. Μπασινάς	Άγγελος	Μέσος	28	180	76	Παναθηναϊκός
12. Νικολαΐδης	Ντέμης	Επιθετικός	31	170	70	Ατλέτικο Μαδ
13. Νικοπολίδης	Αντώνης	Τερματοφύλακας	33	187	88	Ολυμπιακός
14. Νταμπίζας	Νίκος	Αμυντικός	31	186	86	Λέστερ
15. Παπαδόπουλος	Δημήτρης	Επιθετικός	23	177	69	Παναθηναϊκός
16. Σεϊταρίδης	Γιούρκας	Αμυντικός	23	185	78	Παναθηναϊκός
17. Τσιάρτας	Βασίλης	Μέσος	32	185	83	ΑΕΚ
18. Φύσσας	Τάκης	Αμυντικός	31	188	80	Μπενφίκα
19. Χαλκιάς	Κώστας	Τερματοφύλακας	30	196	92	Παναθηναϊκός
20. Χαριστέας	Άγγελος	Επιθετικός	24	191	82	Βέρντερ Βρ.

I. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στο ύψος και τη μάζα των πιο πάνω αθλητών.

II. Να εκτιμήσετε τη γραμμική σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές;

III. Να χρησιμοποιήσετε τη σχέση αυτή για να εκτιμήσετε το ύψος ενός αθλητή που ζυγίζει 90 kg.

IV. Είναι λογική η εκτίμηση σας;»

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Υπολογίζουν τις πιθανότητες ανεξάρτητων και υπό συνθήκη ενδεχομένων και εφαρμόζουν το νόμο της Ολικής Πιθανότητας, όπως: Στο αεροδρόμιο Λάρνακας φτάνουν καθημερινά πτήσεις από την Ευρώπη και τη Μέση Ανατολή σε ποσοστά 60% και 40%, αντιστοίχως. Το 10% των πτήσεων από την Ευρώπη και το 5% των πτήσεων από τη Μέση Ανατολή φθάνουν με καθυστέρηση. (α) Να ονομάσετε ανάλογα τα ενδεχόμενα και να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα του προβλήματος. (β) Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία μια από τις πτήσεις που φτάνουν στο αεροδρόμιο, να υπολογίσετε: i) Την πιθανότητα η πτήση να έχει φτάσει με καθυστέρηση. ii) Την πιθανότητα να προέρχεται από Ευρωπαϊκή χώρα, αν έχει φτάσει με καθυστέρηση.	ΣΠ7.6 ΣΠ7.7
2	Εφαρμόζουν τις έννοιες των Ανεξάρτητων και Δεσμευμένων ενδεχομένων σε αποδεικτικές ασκήσεις, όπως: Δίνεται $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(A)=\frac{3}{8}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A\cup B)$, $P(A'\cap B)$ όταν: i. *A, B* ανεξάρτητα, ii. $P(A\|B)=\frac{4}{9}$	ΣΠ7.6
3	Εφαρμόζουν τον νόμο της Ολικής Πιθανότητας, όπως: Μια βιομηχανία αυτοκινήτων, προμηθεύεται κινητήρες από 3 διαφορετικές εταιρείες $Ε_1$, $Ε_2$ και $Ε_3$. Η $Ε_1$ προμηθεύει διπλάσιους σε πλήθος κινητήρες από την $Ε_2$ και η $Ε_3$ το ίδιο πλήθος με την $Ε_2$. Η $Ε_1$ δεν προμηθεύει ποτέ ελαττωματικούς κινητήρες. Η $Ε_2$ έχει ποσοστό ελαττωματικών 1% και η $Ε_3$ έχει ποσοστό ελαττωματικών 2%. Επιλέγουμε ένα αυτοκίνητο στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε ελαττωματικό κινητήρα;	ΣΠ7.7
4	Κατανοούν την έννοια της τυχαίας μεταβλητής και βρίσκουν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής τυχαίας διακριτής μεταβλητής, όπως: «Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Χ ως το πλήθος των Κ που εμφανίστηκαν. Να υπολογιστεί η πυκνότητα πιθανότητας και	ΣΠ7.8 ΣΠ7.9

	η συνάρτηση κατανομής της Χ».	
5	Υπολογίζουν τη Μέση τιμή και Διασπορά (διακύμανση) τυχαίας διακριτής μεταβλητής, όπως: «Η τυχαία μεταβλητή Χ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον πίνακα:	ΣΠ7.10

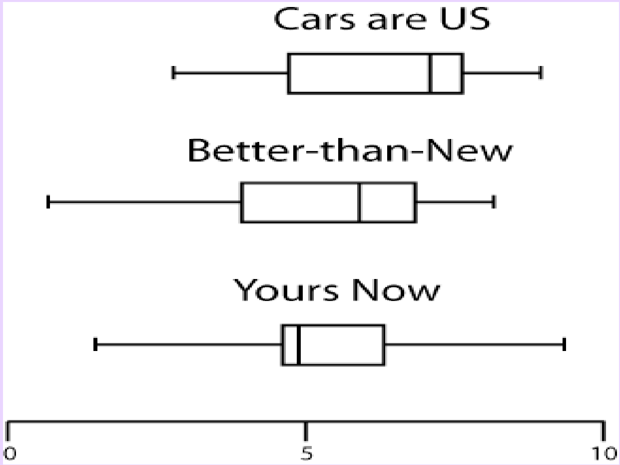
x	0	1	2	3	4
***f*(*x*)**	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά.»

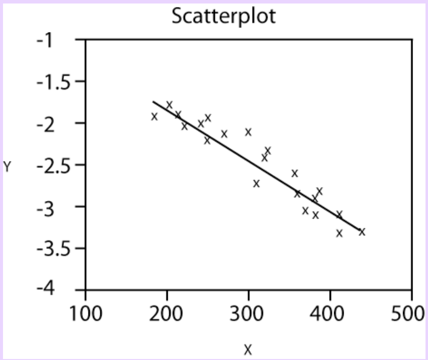
6	Μελετούν τη κατανομή Bernoulli και τη Διωνυμική κατανομή μέσω εφαρμογών σε πειράματα τύχης, όπως: «Μια οικογένεια έχει 6 παιδιά. Να βρεθεί η πιθανότητα η οικογένεια: (α) i) να έχει 2 κορίτσια ii) να έχει τουλάχιστον 5 κορίτσια. iii) να έχει το πολύ 1 κορίτσι. (β) Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός κοριτσιών»	ΣΠ7.11

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

	Οι μαθητές:	Δ.Ε.
1	Καθένα από τα πιο κάτω θηκογράμματα παρουσιάζει τις τιμές πώλησης μεταχειρισμένων αυτοκινήτων (σε χιλιάδες ευρώ) που βρίσκονται σε τρία διαφορετικά καταστήματα. Ποιο κατάστημα θα προτιμούσατε να επισκεφτείτε, αν θέλετε να επισκεφτείτε το κατάστημα με τις καλύτερες τιμές σε μεγάλο ποσοστό των αυτοκινήτων του; Να χρησιμοποιήσετε τα πιο κάτω γραφήματα για να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.	ΣΠ7.3



2	Ποιες λέξεις (δυνατή, αδύνατη, θετική ή αρνητική) θα χρησιμοποιούσατε, για να περιγράψετε τη γραμμική συσχέτιση που φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα διασποράς;	ΣΠ7.4



3	Για τα ενδεχόμενα Α και Β γνωρίζουμε ότι $P(A)=0,6$, $P(B)=0,2$ και $P(A\mid B)=0,1$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:	ΣΠ7.6

i. Να πραγματοποιηθούν και τα δυο ενδεχόμενα

ii. Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα Α και Β

iii. Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα δυο ενεδεχόμενα

iv. Να πραγματοποιηθεί το Β ενδεχόμενο δεδομένης της πραγματοποίησης του Α ενδεχομένου.

4	Ένας αιματολογικός εργαστηριακός έλεγχος είναι ικανός να εντοπίζει μια συγκεκριμένη νόσο με ποσοστό επιτυχίας 95%, όταν αυτή πράγματι υπάρχει. Εντούτοις, ο ίδιος έλεγχος εντοπίζει σε ποσοστό 1% την ύπαρξη της νόσου εκεί που δεν υπάρχει (λανθασμένα θετικό). Αν είναι γνωστό ότι το 5% του πληθυσμού είναι πιθανός φορέας της νόσου, ποια η πιθανότητα ένα συγκεκριμένο άτομο να είναι φορέας της νόσου, αν ο αιματολογικός έλεγχος ήταν θετικός;	ΣΠ7.6 ΣΠ7.7
5	Ένας μαθητής ρίχνει ένα ζάρι 6 φορές. Θεωρείται ότι κερδίζει, όταν φέρει ένδειξη 5 ή 6. Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή που μετρά πόσες φορές ο μαθητής κερδίζει. (α) Τι τιμές μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή; (β) Τι κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή; (γ) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της. (δ) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να κερδίσει 2 φορές. (ε) Να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει τρεις φορές και πάνω.	ΣΠ7.8 ΣΠ7.9 ΣΠ7.11

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Οι μαθητές:

1 Το Μάρτιο τρεις στις πέντε ημέρες, κατά μέσο όρο, δεν είναι βροχερές. Όταν ο καιρός δεν είναι βροχερός η Παναγιώτα πηγαίνει με τα πόδια στη δουλειά με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, παίρνει το λεωφορείο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Διαφορετικά, χρησιμοποιεί το αυτοκίνητο της, για να πάει στη δουλειά. Ποτέ δεν περπατά όταν ο καιρός είναι βροχερός και χρησιμοποιεί το αυτοκίνητό της τετραπλάσιες φορές από ότι το λεωφορείο. Η πιθανότητα να καθυστερήσει στη δουλειά της είναι $\frac{1}{2}$, όταν πηγαίνει με τα πόδια και $\frac{1}{4}$ όταν παίρνει το λεωφορείο. Δεν καθυστερεί ποτέ όταν χρησιμοποιεί το αυτοκίνητό της. Σε μια τυχαία ημέρα του Μαρτίου, ποια είναι η πιθανότητα:

i. Να μην καθυστερήσει στη δουλειά της.

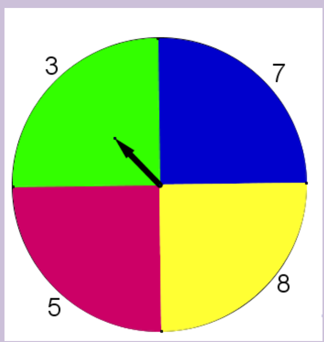
ii. Να πάρει το λεωφορείο και να καθυστερήσει.

Αν καθυστερήσει στη δουλειά της ποια η πιθανότητα να μην είναι βροχερή ημέρα;

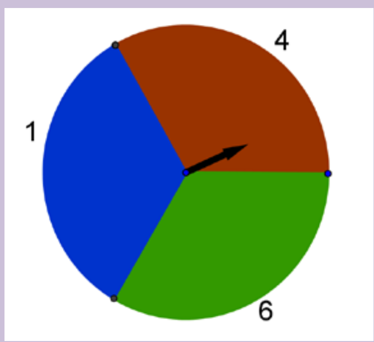
2 Στο τάβλι οι παίκτες ρίχνουν δύο ζάρια. Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές το άθροισμα των αριθμών των δύο ζαριών.

Να βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Χ και να τις παραστήσετε γραφικά.

3 Ο Χρίστος και ο Αλέξης παίζουν με τους πιο κάτω τροχούς της τύχης.



Χρίστος



Αλέξης

Αν Χ η τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές σύμφωνα με τον τροχό του Χρίστου και Ψ αυτή που αντιστοιχεί στον τροχό του Αλέξη

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της κάθε μεταβλητής.

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της καθεμιάς.

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει ο Αλέξης, αν κερδίζει όποιος φέρει μεγαλύτερο αριθμό από τον άλλο;

(δ) Αν παίξουν το παιχνίδι 8 φορές και Ζ η τυχαία μεταβλητή που μετρά πόσες φορές

	νίκησε ο Αλέξης, να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της Ζ. (ε) Να βρεθεί: $P(Z=4)=$ $P(Z\geq 5)=$ $P(3\leq Z\leq 5)=$
4	Να ζητήσετε από τη διεύθυνση του Σχολείου να σας δοθούν ανώνυμα τα αποτελέσματα των τελικών εξετάσεων της Α Λυκείου (Μαθηματικά, Φυσικά, Νέα Ελληνικά, Ιστορία). Με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού: ▪ Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα με κατάλληλους πίνακες και γραφήματα ▪ Να γίνουν συγκρίσεις των αποτελεσμάτων στα 4 μαθήματα ▪ Να διερευνήσετε αν υπάρχει γραμμική συσχέτιση στα αποτελέσματα στα 4 αυτά μαθήματα (ανά δύο) και αν υπάρχει να βρείτε τις γραμμικές σχέσεις που τα συνδέουν (να παρουσιαστούν και γραφικά).

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλίμακα 8

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

Οι μαθητές:

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
1	Διατυπώνουν και ελέγχουν υποθέσεις σχετικά με το βαθμό «εξάρτησης» ή μη δυο κατηγορικών μεταβλητών και κατασκευάζουν πίνακες συνάφειας.*
2	Υπολογίζουν και ερμηνεύουν τη Λοξότητα (Skewness) και την Κύρτωση (Kurtosis) της καμπύλης κατανομής μιας μεταβλητής.
3	Υπολογίζουν Απλοποιημένα Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή και το ποσοστό και ερμηνεύουν τα αποτελέσματά τους.

*Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται ή χρήση κατάλληλων λογισμικών

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
4	Κατανοούν τις έννοιες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής
5	Υπολογίζουν πιθανότητες σε συγκεκριμένα διαστήματα, τη Μέση τιμή και τη Διασπορά (διακύμανση) συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.
6	Γνωρίζουν τις ιδιότητες της Κανονικής κατανομής και εφαρμόζουν σε προβλήματα τον πίνακα της Τυπικής κανονικής και το Κεντρικό Οριακό θεώρημα.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Διατυπώνουν και ελέγχουν υποθέσεις σχετικά με το βαθμό «εξάρτησης» ή μη δυο κατηγορικών μεταβλητών σε δραστηριότητες, όπως: «Να καταγράψετε το επίπεδο μόρφωσης (πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια, ανώτερη, ανώτατη) των παππούδων και γιαγιάδων σας στον πιο κάτω πίνακα:	ΣΠ8.1

	Παππούς 1	Γιαγιά 1	Παππούς 2	Γιαγιά 2
Μαθητής 1	δευτεροβάθμια	πρωτοβάθμια	ανώτερη	ανώτερη
Μαθητής 2	…	…	…	…
Μαθητής 3				
…				

	Να οργανώσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο πίνακα συνάφειας και να εξετάσετε κατά πόσο το φύλο επηρέαζε το επίπεδο μόρφωσης στη γενιά των παππούδων και γιαγιάδων σας.»	
2	Υπολογίζουν και ερμηνεύουν τη Λοξότητα (Skewness) και την Κύρτωση (Kurtosis) της καμπύλης κατανομής μιας μεταβλητής όπως: «Ο καθηγητής των μαθηματικών καταγράφει ανώνυμα στον πίνακα τις βαθμολογίες των μαθητών της τάξης στο τελευταίο διαγώνισμα. (α) Με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα, την καμπύλη που προσεγγίζει την κατανομή των βαθμολογιών και να υπολογίσετε τη λοξότητα και την κύρτωση. (β) Να συγκρίνετε την κατανομή των βαθμολογιών με την Κανονική κατανομή».	ΣΠ8.2
3	Υπολογίζουν Απλοποιημένα Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) για τη μέση τιμή και το ποσοστό και ερμηνεύουν τα αποτελέσματα τους, όπως: «Από έρευνα που έγινε με δείγμα 900 ατόμων σε Παγκύπρια βάση, οι 270 δήλωσαν ότι θα ψηφίσουν το κόμμα Α στις Βουλευτικές Εκλογές, οι 180 το κόμμα Β και οι 450 το κόμμα Γ. (α) Να βρείτε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για το ποσοστό του κάθε κόμματος. (β) Από τι εξαρτάται το μέγεθος του Σφάλματος Περιθωρίου για καθένα από τα πιο πάνω διαστήματα εμπιστοσύνης.; Τι θα μπορούσαμε να μεταβάλουμε για να το περιορίσουμε; (γ) Να συζητήσετε τις προϋποθέσεις που χρειάζονται για να ισχύσουν αυτά τα διαστήματα εμπιστοσύνης (δειγματοληπτικά και μη δειγματοληπτικά	ΣΠ8.3

σφάλματα).

(δ) Υποθέτουμε ότι θεωρητικά πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις, για να εκτιμήσουμε το πραγματικό ποσοστό των κομμάτων με βάση το δείγμα μας. Αν πραγματοποιηθούν 100 τέτοιες έρευνες την ίδια περίοδο θα πετύχουν και οι 100 τα πραγματικά ποσοστά μέσα στα διαστήματα εμπιστοσύνης.»

	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	Δ.Ε.
	Οι μαθητές:	
1	Κατανοούν τις έννοιες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, όπως: «Η τυχαία μεταβλητή Χ έχει πυκνότητα πιθανότητας $f(x)=\begin{cases}0.2, & -\theta \le x \le \theta \\ 0, & αλλού\end{cases}.$ (α) Να βρεθεί η σταθερά θ. (β) Να βρεθεί η Συνάρτηση Κατανομής της Χ. (γ) Να βρεθεί η $P(-1 \le X \le 2)$ (δ) Να βρεθεί η σταθερά c: $P\left(X \ge c\right)=0.8$.	ΣΠ8.4
2	Υπολογίζουν πιθανότητες σε συγκεκριμένα διαστήματα, τη Μέση τιμή και τη Διασπορά (διακύμανση) συνεχούς τυχαίας μεταβλητής όπως: «Η τυχαία μεταβλητή Χ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $f(x)=\begin{cases}(x+5)/25, & αν\ -5 \le x \le 0 \\ 0 & αλλού \\ (-x+5)/25, & αν\ 0 \le x \le 5\end{cases}$ (α) Να βρεθούν οι : i) P($X \ge 2$) , ii) P($X \le -1$) , iii) P($-2 \le X \le 3$) (β) Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά».	ΣΠ8.5
3	Γνωρίζουν τις ιδιότητες της Κανονικής κατανομής και εφαρμόζουν σε προβλήματα τον πίνακα της Τυπικής κανονικής και το Κεντρικό Οριακό θεώρημα, όπως: «Το μέσο ύψος των φοιτητών ενός Λυκείου είναι 170 cm με διασπορά 100 cm. Να υπολογίσετε: (α) το ποσοστό των μαθητών που το ύψος τους κυμαίνεται από 1,60 μέχρι 1,80.	ΣΠ8.6

(β) το ποσοστό των μαθητών που το ύψος τους είναι μικρότερο από 1,75.

(γ) το ποσοστό των μαθητών που το ύψος τους είναι μικρότερο 1,55.

(δ) το ποσοστό των μαθητών που είναι ψηλότεροι από 1,95.

(ε) Να υπολογίσετε πόσοι μαθητές έχουν ύψος πάνω από 2,05 cm αν το Λύκειο είχε 900 μαθητές.»

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι μαθητές: **Δ.Ε.**

1 Τρία εμβόλια για παρωτίτιδα (Α, Β, Γ) διατέθηκαν σε διαφορετικές ομάδες παιδιών και είχαμε τα αποτελέσματα που καταγράφονται στον ακόλουθο πίνακα. ΣΠ8.1

Εμβόλιο	Δεν αρρώστησαν	αρρώστησαν ελαφρά	αρρώστησαν σοβαρά
Α	140	30	30
Β	120	20	10
Γ	140	50	60

Ο προμηθευτής του εμβολίου Γ, με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα, ισχυρίζεται ότι το εμβόλιο Γ είχε τα ίδια αποτελέσματα με το εμβόλιο Α. Επομένως, το εμβόλιο Γ είναι το ίδιο καλό με το εμβόλιο Α και είναι καλύτερο από το εμβόλιο Β. Να σχολιάσετε και να δώσετε τα δικά σας συμπεράσματα.

2 Μια εταιρεία ισχυρίζεται ότι οι μπαταρίες που παράγει έχουν διάρκεια ζωής κατά μέσο όρο 24 συνεχόμενες ώρες. Οι καταναλωτές όμως διαμαρτύρονται ότι η διάρκεια ζωής τους είναι λιγότερη. Ο σύνδεσμος καταναλωτών, για να αποδείξει ότι η εταιρεία παραπλανεί, πήρε τυχαίο δείγμα 100 μπαταριών και υπολόγισε μέσο όρο διάρκειας 22 ώρες και τυπική απόκλιση 8. Να υπολογίσετε το διάστημα εμπιστοσύνης στο οποίο βρίσκεται ο πραγματικός μέσος όρος ζωής των μπαταριών, για να ελέγξετε ποιος έχει τελικά δίκαιο. ΣΠ8.3

3 Η ημερήσια ποσότητα αμόλυβδης βενζίνης *X* (σε χιλιόλιτρα) που πωλεί πρατήριο καυσίμων είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας: ΣΠ8.4

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{25}, & 0<x<5 \\ 10-x, & 5\le x<10 \\ 0, & x\le 0 \text{ ή } x\ge 10 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε:

(α) τη μέση τιμή και τη διασπορά της ποσότητας Χ που πωλεί το πρατήριο

(β) τη συνάρτηση κατανομής *F*(*x*)

(γ) την πιθανότητα να πωλεί περισσότερα από 8 χιλιόλιτρα τη μέρα $P(X>8)$

(δ) την πιθανότητα να πωλεί από 4 μέχρι 7 χιλιόλιτρα τη μέρα $P\left(4\le X\le 7\right)$

4	Σε έναν πληθυσμό πιθήκων έχει βρεθεί ότι ο όγκος της κρανιακής κοιλότητας (X) ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 1200 cc και τυπική απόκλιση 140cc. Να βρείτε: (α) την πιθανότητα ένα μέλος του πληθυσμού, που επιλέχθηκε στην τύχη, να έχει όγκο κρανιακής κοιλότητας μεγαλύτερο από 1400 cc. (β) τον όγκο της κρανιακής κοιλότητας K πάνω από τον οποίο βρίσκεται το 35% του πληθυσμού. (γ) το ποσοστό των πιθήκων που ο όγκος της κρανιακής κοιλότητας τους απέχει από τη μέση τιμή το πολύ 1.5 σ.	ΣΠ8.6

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	
	Οι μαθητές:
1	Να επιλέξετε ένα θέμα που ενδιαφέρει τους μαθητές του σχολείου σας και θα θέλατε να γνωρίζετε την άποψη τους πραγματοποιώντας δειγματοληπτική έρευνα. Αφού οργανώσετε την δειγματοληπτική έρευνα και λάβετε τις απαντήσεις των συμμαθητών σας, με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού, να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα εκτιμώντας και τα διαστήματα εμπιστοσύνης για το ποσοστό (στο σύνολο των μαθητών του σχολείου) της καθεμιάς από τις επιλογές.
2	Η εκθετική συνάρτηση $$f(r)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda r}, & r>0\\ 0\ \ , & r\le 0\end{cases}$$ όπου λ>0 σταθερά, χρησιμοποιείται συχνά για τη μοντελοποίηση της εξάπλωσης των σπόρων. Η συνάρτηση *f*(*r*) είναι η συνάρτηση πυκνότητας και για 0<α<β, $\int_{a}^{\beta} f(r)dr$ περιγράφει το ποσοστό των σπόρων που εξαπλώθηκαν σε απόσταση μεταξύ *α* και *β* από την πηγή στο *r*=0. (α) Να δείξετε ότι η *f*(*r*) είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. (β) Να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής. (γ) Να βρεθεί το *R* για το οποίο το 60% των σπόρων εξαπλώνονται εντός απόστασης R από την πηγή. Πώς το R εξαρτάται από το λ;