ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

8:00-11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α1. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(7,9)$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

Λύση

1ος τρόπος

Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθύγραμμου τμήματος AB

Είναι $x_K = \frac{1+7}{2} = 4$, $y_K = \frac{1+9}{2} = 5$. Επομένως, το κέντρο έχει συντεταγμένες $K(4,5)$.

Υπολογίζουμε το μήκος της διαμέτρου AB:

$d_{AB} = \sqrt{(9-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ μονάδες.

Επομένως, το μήκος της ακτίνας R του κύκλου είναι ίσο με $R = \frac{d_{AB}}{2} = \frac{10}{2} = 5$ μονάδες.

Άρα, η εξίσωση του κύκλου είναι η $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$$

2ος τρόπος

Έστω $T(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της περιφέρειας του κύκλου, οι χορδές AT και TB θα είναι κάθετες, επομένως το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης τους θα ισούται με -1.

$$\lambda_{AT} = \frac{y-1}{x-1},\ \lambda_{BT} = \frac{y-9}{x-7}$$

Άρα, $\frac{y-1}{x-1} \cdot \frac{y-9}{x-7} = -1 \Leftrightarrow (x-1)(x-7) + (y-1)(y-9) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 + y^2 - 10y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

A2.	Να βρείτε συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) = 3x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση περνά από το σημείο $A(2,6)$.
	Λύση Η αρχική συνθήκη είναι $f(2) = 6$, Έχουμε ότι $f(x) = \int 3x dx = \frac{3x^2}{2} + c$ Από την αρχική συνθήκη $6 = \frac{3\cdot 4}{2} + c \Longrightarrow c = 0$ Έτσι, $f(x) = \frac{3x^2}{2}$
A3.	Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $$\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2\, dx.$$
	Λύση **1ος τρόπος** $\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx = \int (\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x) dx = \int (1 + \eta\mu 2x) dx = x - \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + c$ **2ος τρόπος** $\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx = \int (\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x) dx = \int (1 + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x) dx$ $= x + 2\int \eta\mu x d\eta\mu x = x + 2\frac{\eta\mu^2 x}{2} + c = x + \eta\mu^2 x + c$
A4.	Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $$y = 2x + ln2,\ \text{στο} - \infty.$$ Να βρείτε τα όρια (α) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)+3x}{x}$, (β) $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - 2x)$.
	Λύση Η ευθεία $y = 2x + ln2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f , στο $-\infty$, οπότε: $\lambda = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\beta = \lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - \lambda x) = ln2$ [1η σχέση] **(α)** Από τα πιο πάνω $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)+3x}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + 3\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} + 3 = 2 + 3 = 5$ **(β)** από την [1η σχέση] προκύπτει $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - 2x) = ln2$

A5. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y + 16 + \lambda^2 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε όλες τις τιμές του λ, έτσι ώστε η πιο πάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

(β) Για τις τιμές του λ για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C_λ, να βρείτε συγκεκριμένη τιμή του λ, έτσι ώστε η δύναμη του σημείου $A(4,3)$ ως προς τον κύκλο C_λ, να είναι ίση με $\Delta_{C_\lambda}(A) = 32$.

Λύση

(α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y + 16 + \lambda^2 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

έχει τη μορφή: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

Έχουμε ότι $g = -2\lambda\,, f = \lambda \ \text{και}\ c = 16 + \lambda^2$

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο, όταν $g^2 + f^2 - c > 0$.

Έχουμε

$g^2 + f^2 - c > 0 \iff (-2\lambda)^2 + \lambda^2 - 16 - \lambda^2 > 0 \iff 4\lambda^2 - 16 > 0 \iff \lambda^2 - 4 > 0$

$\iff \lambda < -2$ ή $\lambda > 2$

Επομένως, η εξίσωση παριστάνει κύκλο C_λ για $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

(β) Τα κέντρα των κύκλων C_λ έχουν συντεταγμένες:

$$K(-g, -f) = (2\lambda, -\lambda)\,, \qquad \lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Η δύναμη του σημείου $A(4,3)$ προς τον κύκλο C_λ είναι

$$\Delta_{C_\lambda}(A) = 4^2 + 3^2 - 4\lambda \cdot 4 + 2\lambda \cdot 3 + 16 + \lambda^2 = \lambda^2 - 10\lambda + 41$$

Έχουμε ότι $\Delta_{C_\lambda}(A) = 32$

$\lambda^2 - 10\lambda + 41 = 32 \iff \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$

$\iff (\lambda - 9)(\lambda - 1) = 0 \iff \boldsymbol{\lambda = 9}$ ή $\boldsymbol{\lambda = 1}$

Όμως η τιμή $\lambda = 1$ απορρίπτεται διότι $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Άρα, $\lambda = 9$.

A6. **(α)** Να αποδείξετε ότι η παραβολή με εστία το σημείο $E(\alpha, 0)$, $\alpha > 0$, και διευθετούσα την ευθεία $x + \alpha = 0$, έχει εξίσωση $y^2 = 4\alpha x$.

(β) Σε τυχαίο σημείο $M(\alpha t^2, 2\alpha t)$, $t \neq 0$, της παραβολής $y^2 = 4\alpha x, \alpha > 0$, με εστία E, φέρουμε την εφαπτομένη, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A.

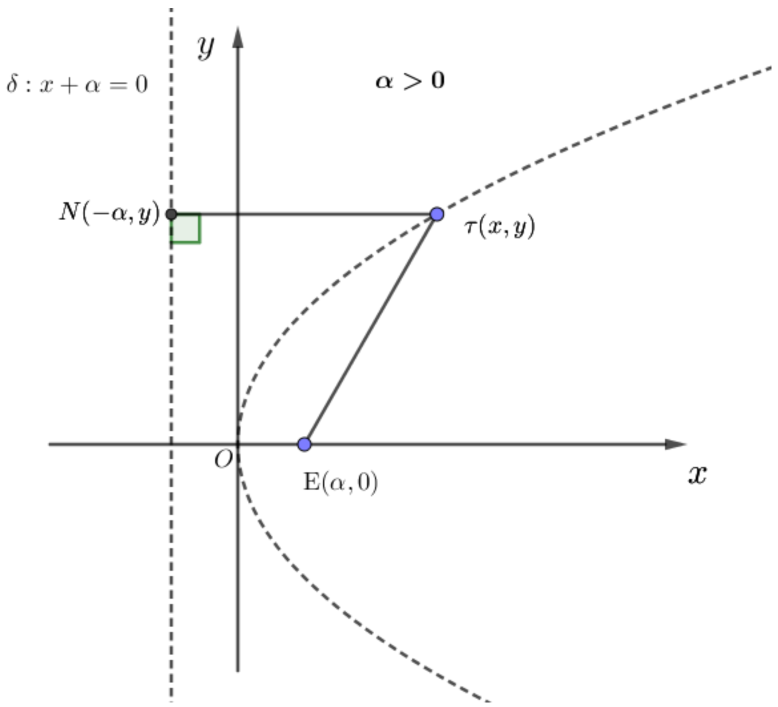
Να δείξετε ότι η γωνία $\angle EAM = 90^o$.

Λύση

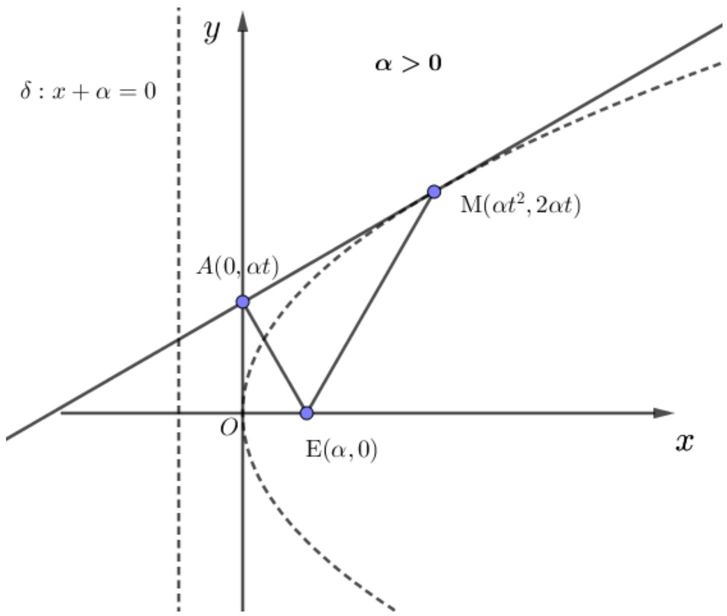
(α) Έστω $T(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής. Έστω N η ορθή προβολή του σημείου T πάνω στην ευθεία (δ). Το σημείο N έχει συντεταγμένες $N(-\alpha, y), \alpha > 0$

Από τον ορισμό της παραβολής ισχύει ότι $TE = TN \Leftrightarrow (TE)^2 = (TN)^2$

$\Leftrightarrow |x + a|^2 = (x - \alpha)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 4ax$.



(β)



$$y^2 = 4ax \implies 2yy' = 4a \implies y' = \frac{2a}{y} \implies \lambda_{\varepsilon\varphi|M} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2) \implies yt - x = at^2$$

Στο σημείο A , $x = 0 \implies y_A = at \implies A(0, at)$

$$\boldsymbol{\lambda_{AE} = \frac{0 - at}{a - 0} = -t}$$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi|M} = \frac{1}{t}$$

$\boldsymbol{\lambda_{AE} \cdot \lambda_{\varepsilon\varphi|M} = -1} \iff AE \perp \varepsilon\varphi_M \implies$ Η γωνία $\angle EAM = 90°$

A7. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι:

(α)Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(β)Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση g είναι:

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

-παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ισχύει $g(a)=\frac{f(a)}{a}=0=\frac{f(\beta)}{\beta}=g(\beta)$

Επομένως, η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

(β) Από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$.

Όμως είναι $g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$, οπότε έχουμε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow$

$\frac{f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)=0\Leftrightarrow \xi f'(\xi)=f(\xi)$.

A8. Να αποδείξετε την ανισότητα

$$2-\frac{e}{\pi}<ln\pi<\frac{\pi}{e}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=lnx$, $x\in[e,\pi]$.

Η f είναι:

- συνεχής στο $[e,\pi]$, και

-παραγωγίσιμη στο (e,π).

Ισχύει για την f το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[e,\pi]$. Δηλαδή, υπάρχει $\xi\in(e,\pi)$, τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e}$$

Όμως $f'(x)=\frac{1}{x}$,$\forall x\in(e,\pi)$

Άρα,

$$f'(\xi)=\frac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\xi}=\frac{ln\pi-lne}{\pi-e}\qquad[1]$$

Ισχύει $0<e<\xi<\pi\quad\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{e}\quad\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}<\frac{ln\pi-lne}{\pi-e}<\frac{1}{e}$ Από την [1]

$\Leftrightarrow\frac{\pi-e}{\pi}<ln\pi-lne<\frac{\pi-e}{e}$, $\qquad(\pi-e)>0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{e}{\pi}<ln\pi-1<\frac{\pi}{e}-1\Leftrightarrow 2-\frac{e}{\pi}<ln\pi<\frac{\pi}{e}$

<table>
<tr><td>Α9.</td><td>Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xτοξεφx,\ x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,

(β) Αν $α, β \in \mathbb{R}\ με\ α > β$, να δείξετε ότι ισχύει $τοξεφα - τοξεφβ > \frac{β}{1+β^2} - \frac{α}{1+α^2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Λύση
(α) $f(x) = xτοξεφx$
$f'(x) = τοξεφx + \dfrac{x}{1+x^2}$
$f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
Άρα, η fείναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(β) Αφού $f''(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$ τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Επομένως, ισχύει $α > β \Rightarrow f'(α) > f'(β) \Rightarrow τοξεφα + \frac{α}{1+α^2} > τοξεφβ + \frac{β}{1+β^2}$
$$\Rightarrow τοξεφα - τοξεφβ > \frac{β}{1+β^2} - \frac{α}{1+α^2}.$$</td></tr>
<tr><td>Α10</td><td>Δίνεται συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο ανοικτό διάστημα A.
(α) Να αποδείξετε ότι στο A ισχύει,
$$\int [f(x) + f''(x)]ημxdx = f'(x)ημx - f(x)συνx + c.$$
(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα στο $(0, +\infty)$,
$$\int \left(lnx - \frac{1}{x^2}\right)ημxdx.$$</td></tr>
<tr><td></td><td>Λύση
(α)1^{ος} τρόπος
$$\int [f(x) + f''(x)]ημxdx = \int f(x)ημxdx + \int f''(x)ημxdx$$
$= \int f(x)ημxdx + \int ημxd\big(f'(x)\big) = \int f(x)ημxdx + ημxf'(x) - \int f'(x)συνxdx$
$= \int f(x)ημxdx + ημxf'(x) - \int συνxd\big(f(x)\big)$
$= \int f(x)ημxdx + ημxf'(x) - \left(συνxf(x) - \int f(x)(-ημx)dx\right) = f'(x)ημx - f(x)συνx + c$</td></tr>
</table>

2ος τρόπος

$[f'(x)ημx - f(x)συνx + c]' = [f(x) + f''(x)]ημx$

(β) Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο έχει τύπο $f(x) = lnx \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\ και\ f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ η οποία είναι συνεχής στο $A = (0, +\infty)$

Επομένως, από το (α) ερώτημα για την συνάρτηση $f(x) = lnx\ , x > 0$

Ισχύει $\int \left(lnx - \frac{1}{x^2}\right) ημx dx = \int [lnx + (lnx)''] ημx\ dx = \frac{1}{x} ημx - lnx\ συνx + c$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

Β1.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{(x-2)^2}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{2\}$

Σημεία τομής της με τους άξονες $x = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{4} \Longrightarrow (0, \frac{1}{4})$

$y = 0 \Longrightarrow \frac{e^x}{(x-2)^2} = 0$, $Όμως\ e^x > 0,\ για\ κάθε\ x\ \epsilon\mathbb{R} \Longrightarrow \nexists$ τομές με τον άξονα $x'x$

Μονοτονία-Τοπικά Ακρότατα:

$$\left.\begin{array}{c} f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)^2 - e^x 2(x-2)}{(x-2)^4} = \dfrac{e^x(x-4)}{(x-2)^3} \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4, \qquad x \neq 2$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\vert\vert$	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

f γν. αύξουσα στα $(-\infty, 2)$ και $[4, +\infty)$

f γν. φθίνουσα στο $(2, 4]$

Τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 4$, το $f(4) = \frac{e^4}{4}$

Κατακόρυφες Ασύμπτωτες:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{e^x}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{e^x}{(x-2)^2} = +\infty$$

Άρα, η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Οριζόντιες Ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(x-2)^2}$$

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-2)^2 = +\infty$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L'Hospital.

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{((x-2)^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2(x-2)}$

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} 2(x-2) = +\infty$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L'Hospital.

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{[2(x-2)]'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$

Επομένως ισχύει ότι: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(x-2)^2} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{(x-2)^2} = 0$

Άρα, η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στην περιοχή του $-\infty$.

Πλάγιες Ασύμπτωτες

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x(x-2)^2}$

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x(x-2)^2 = +\infty$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L'Hospital.

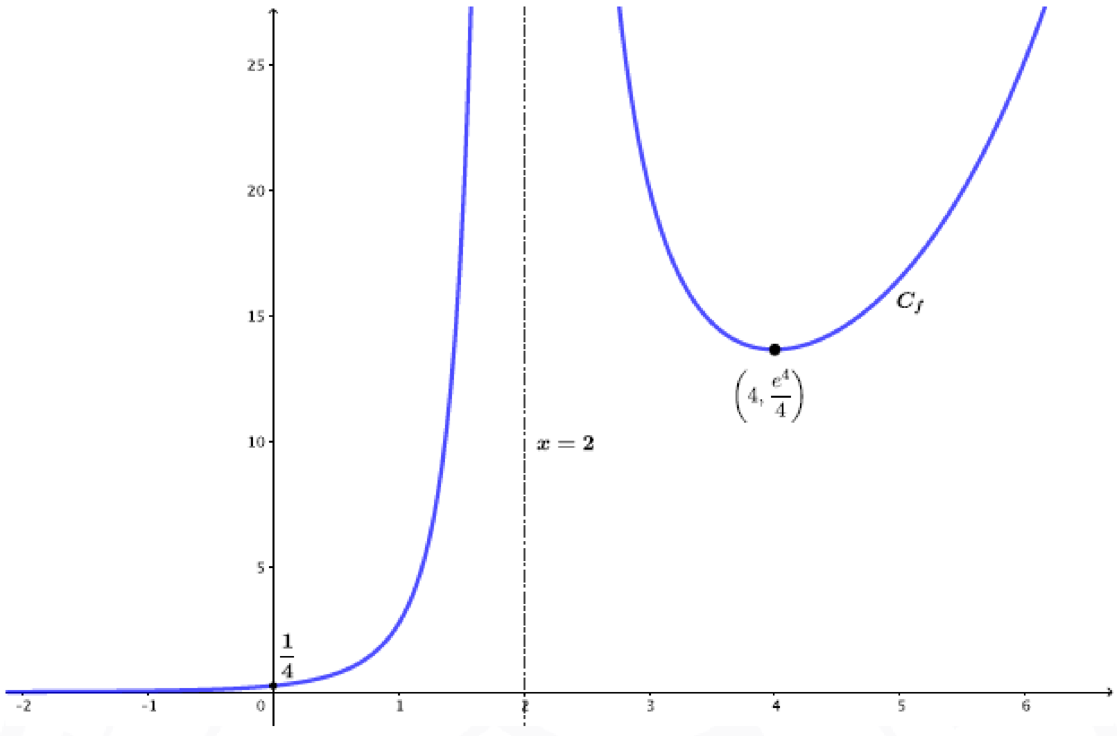
Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x(x-2)^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-8x+4}$

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-8x+4) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L'Hospital.

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(3x^2-8x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x-8}$

	Έχουμε $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(6x-8) = +\infty$ Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L'Hospital. Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(6x-8)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6} = +\infty$ Επομένως, ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x(x-2)^2} = 0$ Άρα, δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες. 
Β2.	Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 = 5$ και C_2: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$. **(α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κάθε κύκλου και να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κάθε κύκλου. **(β)** Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου. **(γ)** Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου A που ανήκει στον κύκλο C_1, για το οποίο ισχύει ότι $\Delta_{C_1}(A) = \Delta_{C_2}(A)$.

	(δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου C_1 στο σημείο του $B(1,-2)$ και να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται και στον κύκλο C_2
Β2	**Λύση** **(α)**$x^2+y^2=5$, $K_1(0,0)$, $R=\sqrt{5}$ $x^2+y^2-8x-4y+15=0,\ K_2(4,2),\ \rho=\sqrt{5}$ **(β)** $\delta=(K_1K_2)=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},$ $R+\rho=2\sqrt{5}$ Άρα, οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, διότι ισχύει $\delta=R+\rho$ $x^2+y^2-5=0$ $x^2+y^2-8x-4y+15=0$ Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των δύο κύκλων παίρνουμε $8x+4y-20=0 \Leftrightarrow 2x+y=5$ Λύνουμε το σύστημα $\begin{Bmatrix} x^2+y^2=5 \\ y=5-2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2+(5-2x)^2-5=0 \\ y=5-2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2+25-20x+4x^2-5=0 \\ y=5-2x \end{Bmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5x^2-20x+20=0 \\ y=5-2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2-4x+4=0 \\ y=5-2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x-2)^2=0 \\ y=5-2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2 \\ y=1 \end{Bmatrix}$ Άρα, οι συντεταγμένες του σημείου επαφής είναι $(2,1)$ **(γ)** Εφόσον το σημείο A ανήκει στον κύκλο $C_1 \Leftrightarrow \Delta_{C_1}(A)=0$ Εφόσον $\Delta_{C_1}(A)=\Delta_{C_2}(A) \Rightarrow \Delta_{C_2}(A)=0$ Άρα, το σημείο A ανήκει και στον κύκλο C_2. **Συνεπώς το σημείο A είναι το κοινό σημείο των δύο κύκλων (σημείο επαφής)** Άρα, από το ερώτημα (β) το κοινό σημείο είναι το $A(2,1)$ **(δ) 1ος τρόπος** $$x^2+y^2=5 \Longrightarrow 2x+2yy'=0$$ $yy'=-x \Longrightarrow y'=-\dfrac{x}{y} \Longrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi B}=\dfrac{1}{2}$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης στο B είναι: $y+2=\frac{1}{2}(x-1) \Longrightarrow 2y+4=x-1 \Longrightarrow$ $(\varepsilon): x-2y-5=0$

Για να εφάπτεται η ευθεία (ε) του C_2 πρέπει $d(\kappa_{2,}\varepsilon)=\rho$

$d(\kappa_2,\varepsilon)=\frac{|4-2\cdot 2-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=\rho$. Άρα, η ευθεία (ε) εφάπτεται του C_2.

2ος τρόπος

Από το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} x^2+y^2-8x-4y+15=0 \\ x=2y+5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (2y+5)^2+y^2-8(2y+5)-4y+15=0 \\ x=2y+5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2+20y+25+y^2-16y-40-4y+15=0 \\ x=2y+5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2=0 \\ x=2y+5 \end{cases}$.

Είναι $\Delta=0$. Άρα η ευθεία (ε) εφάπτεται του C_2.

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}, x\in\mathbb{R}$ και σημείο της $B\ (\kappa,\lambda)$, όπου $\kappa>0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο B, τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy στο σημείο A. Στον θετικό ημιάξονα Ox παίρνουμε σημείο Γ, τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $OAB\Gamma$ να είναι τραπέζιο.

(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(\kappa)$ του τραπεζίου $OAB\Gamma$ δίνεται από τη σχέση

$$E(\kappa)=\frac{1}{2}\kappa(\kappa+2)e^{-\kappa}.$$

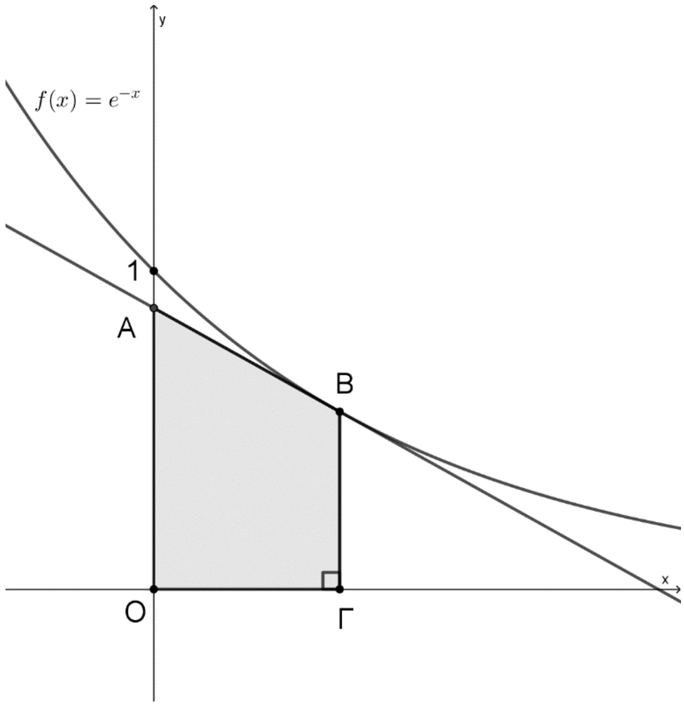
(β) Να βρείτε την τιμή του κ, για την οποία το εμβαδόν $E(\kappa)$ γίνεται μέγιστο.

Λύση

(α) $f(x)=e^{-x} \Longrightarrow y'=-e^{-x}$. Άρα $\lambda_{\varepsilon\varphi B}=-e^{-\kappa}$

Το σημείο $B(\kappa,\lambda)$ ανήκει στην C_f άρα $\lambda=f(\kappa)=e^{-\kappa}$

Συνεπώς $B(\kappa,e^{-\kappa})$



Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο B είναι

$y - e^{-\kappa} = -e^{-k}(x - \kappa) \Rightarrow y - e^{-\kappa} = -e^{-k}x + \kappa e^{-\kappa}$

$x_A = 0 \Rightarrow y - e^{-\kappa} = \kappa e^{-\kappa} \Rightarrow y = (\kappa + 1)e^{-\kappa}$, συνεπώς οι συντεταγμένες του σημείου A είναι $A(0, (\kappa + 1)e^{-\kappa})$

$E_{\tau\rho\alpha\pi} = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$ άρα,

$E(\kappa) = \frac{[(\kappa+1)e^{-\kappa}+e^{-\kappa}]\cdot\kappa}{2}$, $\upsilon = x_\Gamma$ $E(\kappa) = \frac{\kappa(\kappa+2)e^{-\kappa}}{2} \Rightarrow E(\kappa) = \frac{(\kappa^2+2\kappa)e^{-\kappa}}{2}$

(β) $E'(\kappa) = \frac{(2\kappa+2)e^{-\kappa}-e^{-\kappa}(\kappa^2+2\kappa)}{2} \Rightarrow E'(\kappa) = \frac{(2\kappa+2-\kappa^2-2\kappa)e^{-\kappa}}{2} \Rightarrow E'(\kappa) = \frac{(2-\kappa^2)e^{-\kappa}}{2}$

$\Rightarrow E'(\kappa) = 0 \Rightarrow \kappa = \sqrt{2}$ δεκτή $(\kappa > 0)$ ή $\kappa = -\sqrt{2}$ (απορρίπτεται).

1^{ος} τρόπος

Βρίσκω το είδος του ακροτάτου με το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου

$E''(\kappa) = \frac{-2\kappa e^{-\kappa} - (2 - \kappa^2)e^{-\kappa}}{2} \Rightarrow E''(\kappa) = \frac{-e^{-\kappa}(2\kappa + 2 - \kappa^2)}{2}$

$\Rightarrow E''(\sqrt{2}) = \frac{-e^{-\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+2-2)}{2} = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} < 0$ άρα για $\kappa = \sqrt{2}$ έχουμε μέγιστο εμβαδόν τραπεζίου.

2^{ος} τρόπος (πίνακας μονοτονίας)

κ	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$E'(\kappa)$	+	0	-
$E(\kappa)$	↗	max	↘

Άρα, για $\kappa = \sqrt{2}$ έχουμε μέγιστο εμβαδόν τραπεζίου.

B4. **(α)** Να δείξετε ότι το κλάσμα $\frac{1}{x(x+1)^2}$ γράφεται ως άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

(β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν

$$f'(x) = \frac{lnx}{(x+1)^3}, \quad x\epsilon(0, +\infty) \quad \kappa\alpha\iota \;\; f(1) = -\frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{4}$$

(γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

Λύση

(α) $\frac{1}{x(x+2)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2}$

$1 \equiv A(x+1)^2 + Bx(x+1) + \Gamma x$

για $x = 0 \Longrightarrow A = 1$

για $x = -1 \Longrightarrow \Gamma = -1$

Συγκρίνουμε τους συντελεστές του x^2 και στα δύο μέλη

$$0 = A + B \Longrightarrow B = -1$$

Άρα, $\frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

(β) $f'(x) = \frac{lnx}{(x+1)^3}$ ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη

$f(x) = \int lnx d\left(\frac{(x+1)^{-2}}{-2}\right) = \frac{lnx}{-2(x+1)^2} + \int \frac{dx}{2x(x+1)^2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{lnx}{-2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{lnx}{-2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\left(ln|x| - ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right) + c$$

$$f(1) = -\frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{2}\left(ln1 - ln2 + \frac{1}{2}\right) + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{4} + c$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c = 0}$$

Άρα, $f(x) = \frac{lnx}{-2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\left(ln|x| - ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right).$

$|x| = x$ και $|x+1| = x+1,$ διότι $x > 0.$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\boldsymbol{lnx}}{\boldsymbol{2(x+1)^2}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{ln}\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+1}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2(x+1)}}\right).$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα όρια:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{2(x+1)^2}\right),$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}ln\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+1}},$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2(x+1)}}$**.**

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(x+1)^2 = +\infty$ Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L'Hospital

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{2(x+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{[(x+1)^2]'} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x(x+1)} = 0$

ιι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}ln\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\right)$

Θέτω $u = \frac{1}{x+1}$ όταν $x \to +\infty$ τότε $u = \frac{1}{x+1} \to 0$

Άρα, $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{u\to0}(\ln(1-u)) = \frac{1}{2}ln1 = 0$

ιιι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2(x+1)}\right) = 0$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)}\right) = 0$

B5.	Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και τα σημεία της $T(t^2, 2t)$ και $P(\rho^2, 2\rho), όπου\ t \neq \rho,$ $t \neq 0\ και\ \rho \neq 0.$ **(α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής TP είναι $2x - (t+\rho)y + 2t\rho = 0.$ **(β)** Αν η χορδή TP εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 2x$, να δείξετε ότι: **(i)**$(t+\rho)^2 = 8t\rho.$ **(ii)** Η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής Μ, των εφαπτόμενων της $y^2 = 4x$, στα σημεία της T και P, έχει εξίσωση $y^2 = 8x$. **(γ)** Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2 = 8x$, διαφορετικό από την κορυφή της και E είναι η εστία της, να δείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΣE, εφάπτεται του άξονα $y'y$.

Λύση

$$y^2 = 4x \quad T(t^2, 2t), \qquad P(\rho^2, 2\rho)$$

(α) $\lambda_{TP} = \frac{2t-2\rho}{t^2-\rho^2} = \frac{2(t-\rho)}{(t-\rho)(t+\rho)} = \frac{2}{t+\rho}$

$$TP:\ y - 2t = \frac{2}{t+\rho}(x - t^2) \iff (t+\rho)(y-2t) = 2x - 2t^2 \iff$$

$$(t+\rho)y - 2t^2 - 2t\rho = 2x - 2t^2 \iff 2x - (t+\rho)y + 2t\rho = 0$$

(β) (i) $\left.\begin{matrix} y^2 = 2x \\ x = \frac{(t+\rho)y - 2t\rho}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2 = 2 \cdot \frac{(t+\rho)y-2t\rho}{2} \iff \left.\begin{matrix} y^2 - (t+\rho)y + 2t\rho = 0 \\ \Delta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$[-(t+\rho)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2t\rho = 0 \iff (t+\rho)^2 = 8t\rho$$

(ii) $2yy' = 4 \iff y' = \frac{2}{y} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi|T} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t} \Rightarrow \varepsilon\varphi_{|T}:\ y - 2t = \frac{1}{t}(x - t^2)$

$$\iff ty - 2t^2 = x - t^2 \iff ty = x + t^2$$

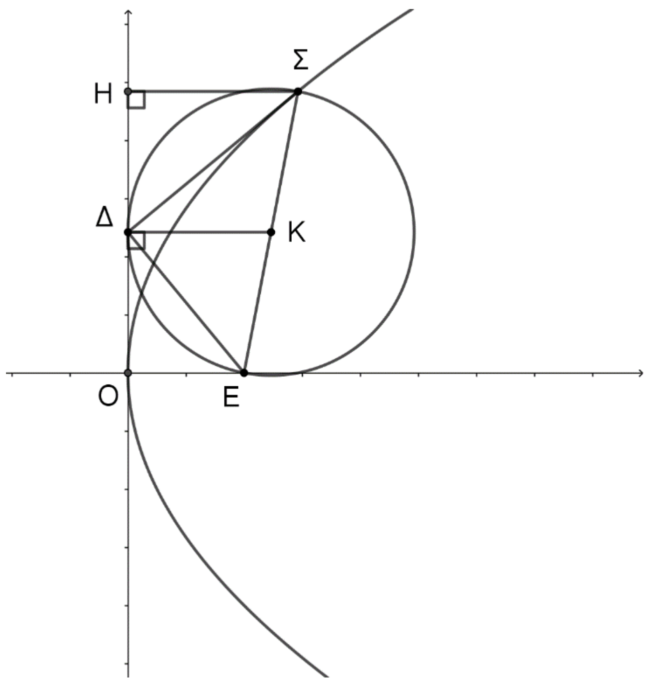
$$\left.\begin{matrix} \varepsilon\varphi_{|T}:\ x = ty - t^2 \\ \varepsilon\varphi_{|P}:\ \rho y = x + \rho^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho y = ty - t^2 + \rho^2 \iff$$

$$(\rho - t)y = (\rho - t)(\rho + t) \iff y = \rho + t$$

Έστω, $M(x, y)$ τυχαίο σημείο του γ.τ. τότε:

$$\left.\begin{matrix} x = ty - t^2 \\ y = \rho + t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = t(\rho + t) - t^2 = t\rho \Rightarrow M(t\rho, t+\rho)$$

$$\left.\begin{matrix} x = t\rho \\ y = t + \rho \\ (t+\rho)^2 = 8t\rho \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2 = 8x$$



(γ) 1ος τρόπος

Έστω $\Sigma(2t^2,4t)$ και K μέσο του ΣE $\Longrightarrow$

$$K\left(\frac{2+2t^2}{2},\frac{0+4t}{2}\right) \Longrightarrow K(1+t^2,2t)$$

Έστω $\Delta(0,2t)$ η προβολή του K στον $y'y$.

$$\Delta K = 1+t^2$$

$$R=(K\Sigma)=\sqrt{(2t^2-1-t^2)^2+(4t-2t)^2}$$

$$=\sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2}=\sqrt{(t^2+1)^2}=t^2+1$$

Άρα, το Δ ανήκει στον κύκλο με διάμετρο το $E\Sigma$ δηλ.

$K\Delta = R$ άρα εφάπτεται του y'y

2ος τρόπος

$\lambda_{\Sigma\Delta}\cdot\lambda_{\Delta E}=\frac{4t-2t}{2t^2}\cdot\frac{2t}{-2}=\frac{4t^2}{-4t^2}=-1$, άρα, $\Sigma\Delta E$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

Άρα, το Δ ανήκει στον κύκλο με διάμετρο το $E\Sigma$ δηλ. ο κύκλος με διάμετρο ΕΣ εφάπτεται του άξονα y΄y και ισχύει

$$K\Delta=\frac{\Sigma E}{2}=R \qquad \kappa\alpha\iota \qquad K\Delta\perp y'y$$

3ος τρόπος

Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΣE.

Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του κέντρου: $K\left(\frac{2+2t^2}{2}, \frac{4t}{2}\right) \Rightarrow K(t^2+1, 2t)$.

Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $x=0$:

$$d = \frac{|t^2+1|}{\sqrt{1^2}} = t^2+1$$

Υπολογίζουμε το μήκος της ακτίνας του κύκλου:

$$R = K\Sigma = \sqrt{(t^2-1)^2+(2t)^2} = \sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2} = \sqrt{t^4+2t^2+1}$$

$$= \sqrt{(t^2+1)^2} = t^2+1$$

Παρατηρούμε ότι $d=R$ επομένως ο κύκλος εφάπτεται της ευθείας $x=0$ δηλαδή του άξονα $y'y$.

4ος τρόπος

Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΣE.

Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του κέντρου: $K\left(\frac{2+2t^2}{2}, \frac{4t}{2}\right) \Rightarrow K(t^2+1, 2t)$.

Υπολογίζουμε το μήκος της ακτίνας του κύκλου:

$$R = K\Sigma = \sqrt{(t^2-1)^2+(2t)^2} = \sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2} = \sqrt{t^4+2t^2+1}$$

$$= \sqrt{(t^2+1)^2} = t^2+1$$

Επομένως, η εξίσωση του κύκλου είναι η $(x-t^2-1)^2+(y-2t)^2=(t^2+1)^2$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση της ευθείας $x=0$

$$\Leftrightarrow y^2-4ty+4t^2=0$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που προκύπτει:

$$\Delta = 16t^2-16t^2=0$$

Επομένως, ο κύκλος εφάπτεται της ευθείας $x=0$ δηλαδή, του άξονα $y'y$.