ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

8:00-11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1 Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(7,9)$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

Α2 Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x)=3x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση περνά από το σημείο $A(2,6)$.

Α3 Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2\,dx.$$

Α4 Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία

$$y=2x+ln2,\ \text{στο} -\infty.$$

Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)+3x}{x}$, (β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)$.

Α5 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y + 16 + \lambda^2 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε όλες τις τιμές του λ, έτσι ώστε η πιο πάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

(β) Για τις τιμές του λ για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C_λ, να βρείτε την συγκεκριμένη τιμή του λ, έτσι ώστε η δύναμη του σημείου $A(4,3)$ ως προς τον κύκλο C_λ , να είναι ίση με $\Delta_{C_\lambda}(A) = 32$.

Α6 **(α)** Να αποδείξετε ότι η παραβολή με εστία το σημείο $E(\alpha, 0)$, $\alpha > 0$, και διευθετούσα την ευθεία $x + \alpha = 0$, έχει εξίσωση $y^2 = 4\alpha x$.

(β) Σε τυχαίο σημείο $M(\alpha t^2, 2\alpha t), t \neq 0$, της παραβολής $y^2 = 4\alpha x,\ \alpha > 0$, με εστία E, φέρουμε την εφαπτομένη, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A. Να δείξετε ότι η γωνία $\angle EAM = 90^o$.

Α7 Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(β) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

Α8 Να αποδείξετε την ανισότητα

$$2 - \frac{e}{\pi} < ln\pi < \frac{\pi}{e}$$

Α9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\tau o\xi\varepsilon\varphi x,\ x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \alpha > \beta$, να δείξετε ότι ισχύει $\tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha - \tau o\xi\varepsilon\varphi\beta > \frac{\beta}{1+\beta^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$

Α10 Δίνεται συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο ανοικτό διάστημα A.

(α) Να αποδείξετε ότι στο A ισχύει,

$$\int [f(x) + f''(x)]\eta\mu x dx = f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x + c.$$

(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα στο $(0, +\infty)$,

$$\int \left(lnx - \frac{1}{x^2}\right)\eta\mu x dx.$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{(x-2)^2}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και να την παραστήσετε γραφικά.

Β2 Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 = 5$ και C_2: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κάθε κύκλου και να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κάθε κύκλου.

(β) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου A που ανήκει στον κύκλο C_1, για το οποίο ισχύει ότι $\Delta_{C_1}(A) = \Delta_{C_2}(A)$.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου C_1 στο σημείο του $B(1,-2)$ και να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται και στον κύκλο C_2 .

Β3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και σημείο της $B\ (\kappa, \lambda)$, όπου $\kappa > 0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο B, τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy στο σημείο A. Στον θετικό ημιάξονα Ox παίρνουμε σημείο Γ, τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $OAB\Gamma$ να είναι τραπέζιο.

(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(\kappa)$ του τραπεζίου $OAB\Gamma$ δίνεται από τη σχέση

$$E(\kappa) = \frac{1}{2}\kappa(\kappa + 2)e^{-\kappa}.$$

(β) Να βρείτε την τιμή του κ, για την οποία το εμβαδόν $E(\kappa)$ γίνεται μέγιστο.

Β4 (α) Να δείξετε ότι το κλάσμα $\frac{1}{x(x+1)^2}$ γράφεται ως άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

(β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = \frac{lnx}{(x+1)^3}, \quad x\epsilon(0,+\infty) \quad \kappa\alpha\iota \;\; f(1) = -\frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{4}$$

(γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Β5 Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και τα σημεία της $T(t^2, 2t)$ και $P(\rho^2, 2\rho), ό\pi o\upsilon$ $t \neq \rho$, $t \neq 0 \; \kappa\alpha\iota \; \rho \neq 0$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής TP είναι $2x - (t+\rho)y + 2t\rho = 0$.

(β) Αν η χορδή TP εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 2x$, να δείξετε ότι:

(i) $(t+\rho)^2 = 8t\rho$.

(ii) Η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής Μ, των εφαπτόμενων της $y^2 = 4x$, στα σημεία της T και P, έχει εξίσωση $y^2 = 8x$.

(γ) Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2 = 8x$, διαφορετικό από την κορυφή της και E είναι η εστία της, να δείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΣE, εφάπτεται του άξονα $y'y$.

ΤΕΛΟΣ