

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (I) ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ (106)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : ΔΕΥΤΕΡΑ, 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

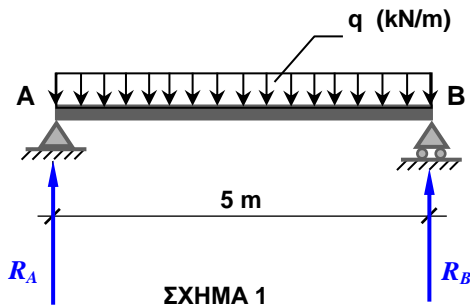
ΩΡΑ : 8:00 – 10:30

ΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 12 ερωτήσεις

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 4 μονάδες.

1. Η μέγιστη ροπή κάμψης που αναπτύσσεται στη δοκό του **Σχήματος 1**, είναι $M_{max} = 25 \text{ kNm}$. Να υπολογίσετε το μέγεθος του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου q (kN/m) που καταπονεί τη δοκό.

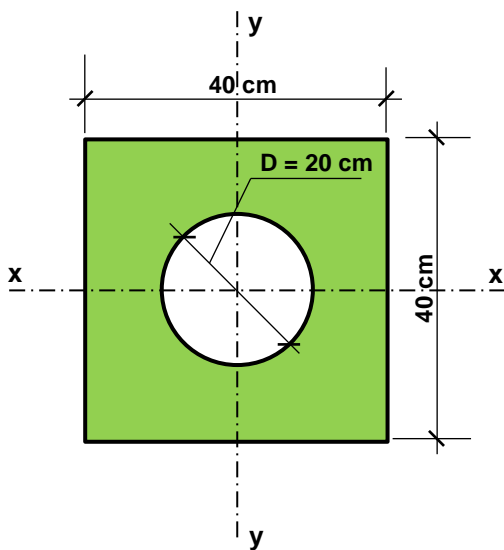


$$M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$q = \frac{8M}{l^2}$$

$$q = \frac{25 \times 8}{5^2} = 8 \text{ kN/m}$$

2. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης W_x , ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$ της σύνθετης διατομής, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2**.



$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$I_x = \frac{40 \times 40^3}{12} - \frac{\pi \cdot 20^4}{64}$$

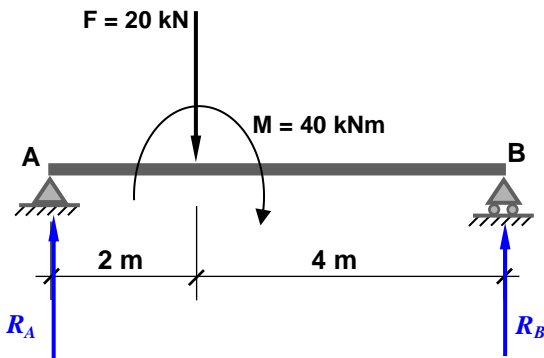
$$I_x = 213333,33 - 7853,98$$

$$I_x = 205479 \text{ cm}^4$$

$$W_x = \frac{I_{x-x}}{y} = \frac{205479,35 \text{ cm}^4}{20 \text{ cm}}$$

$$W_x = 10274 \text{ cm}^3$$

3. Για τη δοκό του **Σχήματος 3** να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B** και να τις σχεδιάσετε στο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 3

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A + R_B - 20 = 0$$

$$R_A + R_B = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 20 \times 2 + 40 - R_B \times 6 = 0$$

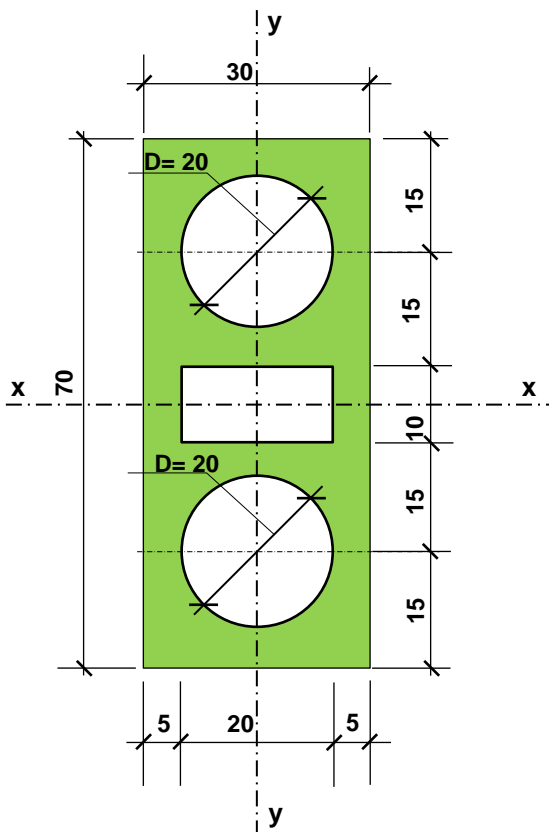
$$R_B = 13,33 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow R_A \times 6 - 20 \times 4 + 40 = 0$$

$$R_A = 6,67 \text{ kN}$$

$$\text{Έλεγχος: } R_A + R_B = 6,67 + 13,33 = 20 \text{ kN}$$

4. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας I_x , ως προς τον κεντροβαρικό άξονα **x - x** της διατομής του **Σχήματος 4**. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm.

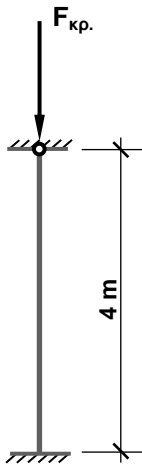


ΣΧΗΜΑ 4

$$I_x = \frac{30 \times 70^3}{12} - \frac{20 \times 10^3}{12} - 2 \left[\frac{\pi \cdot 20^4}{64} + \pi \cdot 10^2 \times 20^2 \right]$$

$$I_x = 588798 \text{ cm}^4$$

5. Ράβδος ορθογωνικής κοίλης διατομής, με πραγματικό μήκος $L = 4 \text{ m}$, στηρίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5**. Αν το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ και οι ροπές αδράνειας της διατομής $I_x = 124000 \text{ mm}^4$ και $I_y = 54500 \text{ mm}^4$, να υπολογίσετε το μέγιστο (κρίσιμο) φορτίο που μπορεί να μεταφέρει χωρίς να εκδηλώνεται σε αυτή λυγισμός.



ΣΧΗΜΑ 5

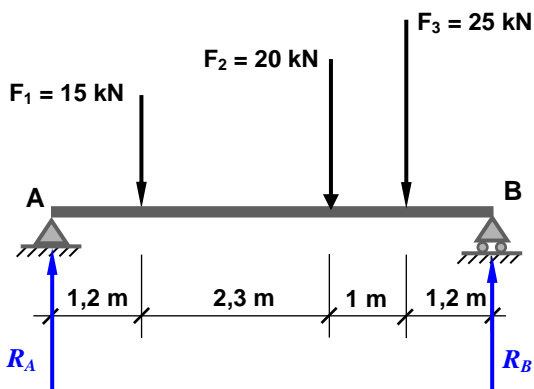
$$F_{\text{κρισ.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{ελ.}}}{l^2}$$

$$l = 0,7 \times 4 \text{ m} = 2,8 \text{ m} = 2800 \text{ mm}$$

$$F_{\text{κρισ.}} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \text{ kN/mm}^2 \cdot 54500 \text{ mm}^4}{(2800 \text{ mm})^2}$$

$$F_{\text{κρισ.}} = 13,71 \text{ kN}$$

6. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στις στηρίξεις **A** και **B** της αμφιέριστης δοκού του **Σχήματος 6**.



ΣΧΗΜΑ 6

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A + R_B - 15 - 20 - 25 = 0$$

$$R_A + R_B = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 15 \times 1,2 + 20 \times 3,5 + 25 \times 4,5 - R_B \times 5,7 = 0$$

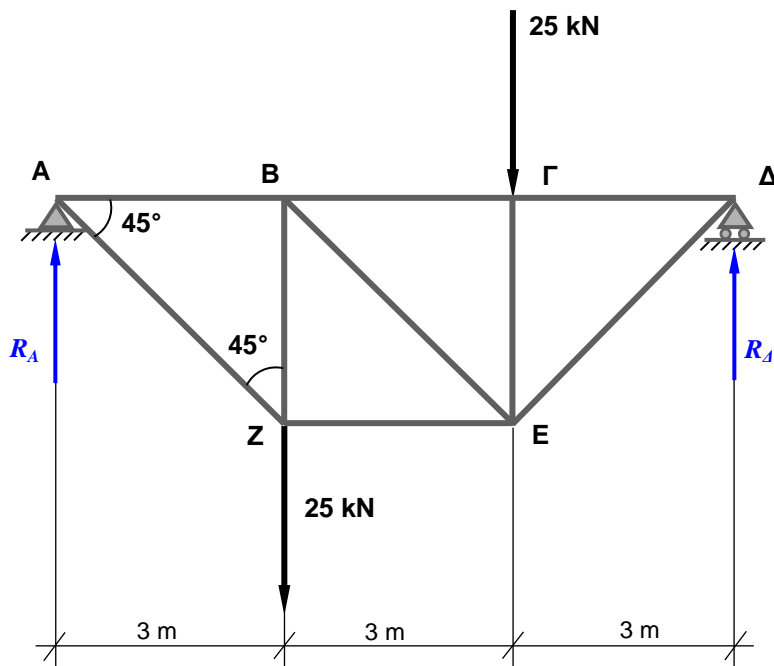
$$R_B = 35,18 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow R_A \times 5,7 - 15 \times 4,5 - 20 \times 2,2 - 25 \times 1,2 = 0$$

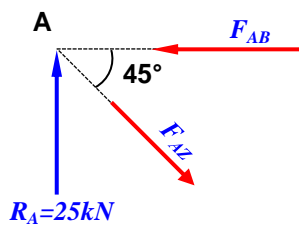
$$R_A = 24,82 \text{ kN}$$

$$\text{Έλεγχος: } R_A + R_B = 24,82 + 35,18 = 60 \text{ kN}$$

7. Να υπολογίσετε, με τη μέθοδο ανάλυσης – ισορροπίας των κόμβων, το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης που αναπτύσσεται στις ράβδους **AB** και **AZ** του δικτυώματος του Σχήματος 7 και να καθορίσετε το είδος καταπόνησης των πιο πάνω ράβδων.



ΣΧΗΜΑ 7



$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_\Delta = 50 \text{ kN}$$

Λόγω συμμετρίας $R_A = R_\Delta = 25 \text{ kN}$

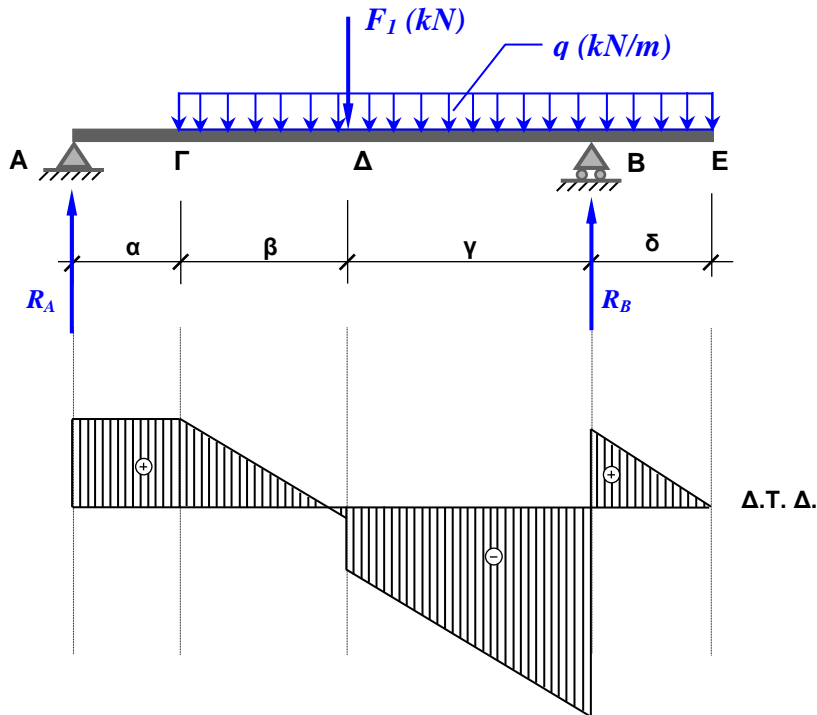
$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A - F_{AZ} \cdot \eta\mu 45^\circ = 0$$

$$F_{AZ} = \frac{25}{\eta\mu 45^\circ} = 35,36 \text{ kN} \quad \text{Εφελκόμενη}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow \quad F_{AZ} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ - F_{AB} = 0$$

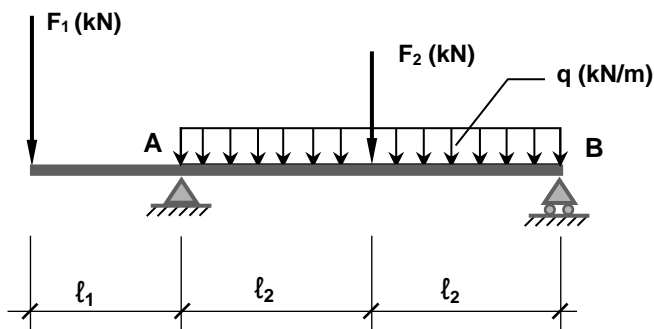
$$F_{AB} = -35,36 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = -25 \text{ kN} \quad \text{Θλιβόμενη}$$

8. Στο **Σχήμα 8** δίνονται προέχουσα δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**). Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και τα φορτία που καταπονούν τη δοκό, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο **Δ.Τ.Δ.**

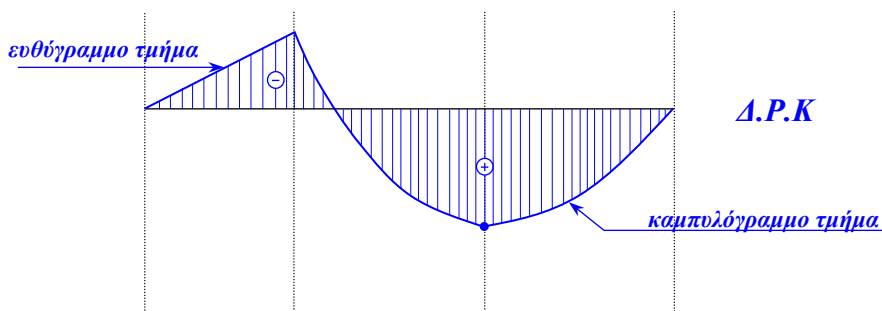


ΣΧΗΜΑ 8

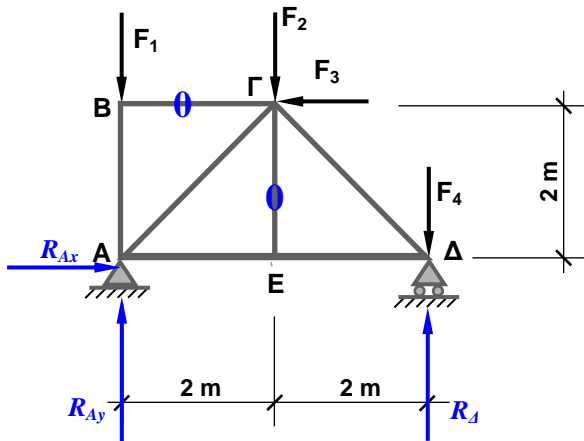
9. Να σχεδιάσετε τη μορφή του διαγράμματος των ροπών κάμψης **M**, της δοκού του **Σχήματος 9**, χωρίς να τη λύσετε. Στο διάγραμμα να δείξετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματά του.



ΣΧΗΜΑ 9



10. Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις του δικτυώματος του **Σχήματος 10**, χωρίς να λύσετε το δικτύωμα και να αναφέρετε σε ποιες ράβδους δεν αναπτύσσεται εσωτερική δύναμη.



ΣΧΗΜΑ 10

Οι ράβδοι στις οποίες δεν αναπτύσσεται εσωτερική δύναμη είναι: ΒΓ και ΕΓ

11. Σε δοκό ορθογωνικής διατομής **30 x 60 cm**, η οποία καταπονείται σε κάμψη, αναπτύσσεται μέγιστη ροπή $M_{max} = 150 \text{ kNm}$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τάση σε N/mm^2 που αναπτύσσεται στη διατομή της.

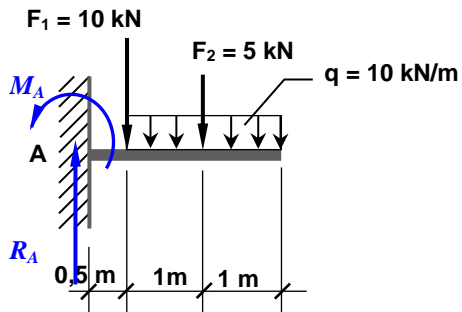
$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y}{I}$$

$$I_{max} = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{150 \cdot 100 \text{ kNm} \cdot 30 \text{ cm}}{540000 \text{ cm}^4} = 0,833 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{max} = 8,33 \text{ N/mm}^2$$

12. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στη στήριξη της δοκού προβόλου του Σχήματος 11.



ΣΧΗΜΑ 11

$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A - 10 - 15 - (10 \cdot 2) = 0$$

$$R_A = 35 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad -M_A + 10 \cdot 0,5 + 5 \cdot 1,5 + (10 \cdot 2) \cdot 1,5 = 0$$

$$M_A = 42,5 \text{ kNm}$$

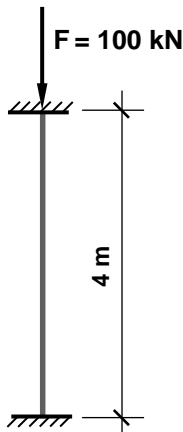
ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 4 ερωτήσεις

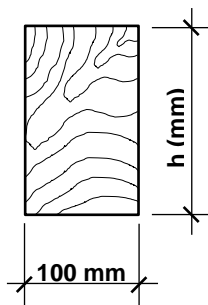
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 8 μονάδες.

13. Να υπολογίσετε το ύψος h της ορθογωνικής διατομής ενός αμφίπακτου ξύλινου στύλου, με πραγματικό μήκος $L = 4,0 \text{ m}$, ο οποίος μεταφέρει με ασφάλεια αξονικό φορτίο 100 kN (Σχήμα 12 α και Σχήμα 12 β).

Δίνονται: Μέτρο ελαστικότητας $E = 10 \text{ kN/mm}^2$
Συντελεστής ασφάλειας $\gamma = 3$



ΣΧΗΜΑ 12 α



ΣΧΗΜΑ 12 β

$$F_{\text{κρισ.}} = \gamma \cdot F_{\text{επιτρ.}} = 3 \times 100 = 300 \text{ kN}$$

$$l = 0,5 \times 4 \text{ m} = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$$

$$F_{\text{κρισ.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{ελ.}}}{l^2} \quad \rightarrow \quad I_{\text{ελ.}} = \frac{F_{\text{κρι.}} \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E}$$

$$I_{\text{ελ.}} = \frac{300 \text{ kN} \cdot (2000 \text{ mm})^2}{\pi^2 \cdot 10 \text{ kN/mm}^2} = 12158542 \text{ mm}^4$$

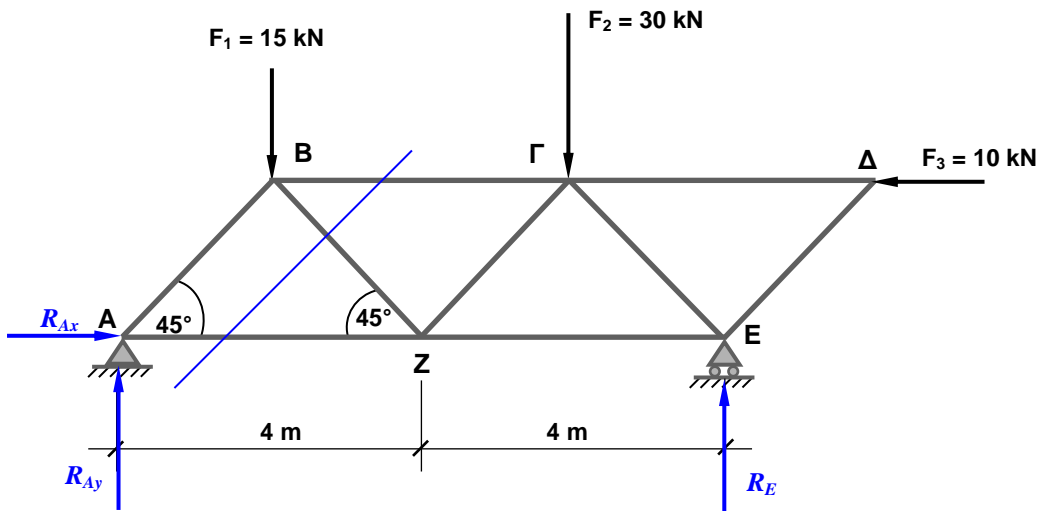
$$I_{\text{ελ.}} = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad \rightarrow \quad h = \frac{12 \cdot I_{\text{ελ.}}}{b^3} \quad \rightarrow \quad h = \frac{12 \cdot 12158542}{100^3} = 145,9 \text{ mm}$$

$$\underline{h = 146 \text{ mm}}$$

14. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο **Σχήμα 13**.

(α) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **E**.

(β) Να υπολογίσετε το μέγεθος και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **BΓ**, **BZ** και **AZ** με τη μέθοδο των τομών.



ΣΧΗΜΑ 13

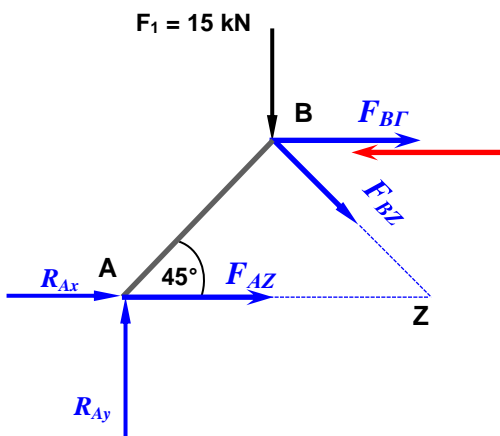
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_E - 15 - 30 = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_E = 45 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} - 10 = 0 \rightarrow R_{Ax} = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 15 \times 2 + 30 \times 6 - 10 \times 2 - R_E \times 8 = 0 \rightarrow R_E = 23,75 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_E = 0 \rightarrow R_{Ay} \times 8 - 15 \times 6 - 30 \times 2 - 10 \times 2 = 0 \rightarrow R_{Ay} = 21,25 \text{ kN}$$

Έλεγχος: $R_{Ay} + R_E = 21,25 + 23,75 = 45 \text{ kN}$



Ράβδος BΓ

$$\Sigma M_Z = 0 \rightarrow R_{Ay} \times 4 - 15 \times 2 + F_{B\Gamma} \times 2 = 0$$

$$F_{B\Gamma} = -27,5 \text{ kN} \quad \text{Θλιβόμενη}$$

Ράβδος AZ

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow R_{Ay} \times 2 - R_{Ax} \times 2 - F_{AZ} \times 2 = 0$$

$$F_{AZ} = 11,25 \text{ kN} \quad \text{Εφελκόμενη}$$

Ράβδος BZ

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 15 \times 2 - F_{B\Gamma} \times 2 + F_{BZ} \times 2,83 = 0$$

$$F_{BZ} = 8,83 \text{ kN} \quad \text{Εφελκόμενη}$$

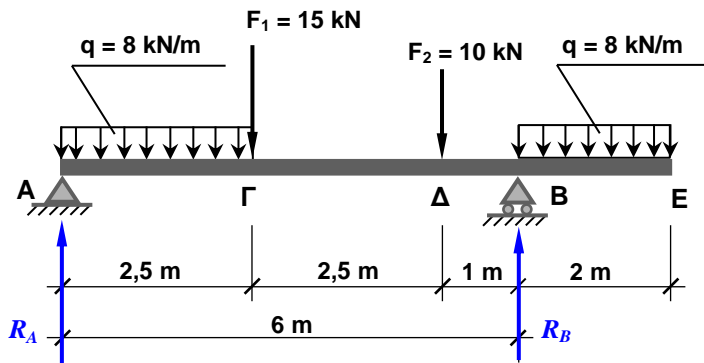
$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$AB = 2,83 \text{ m}$$

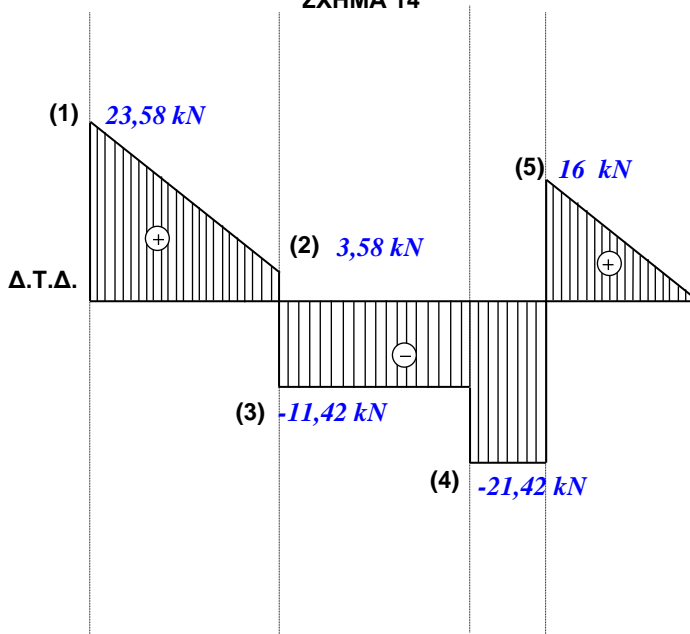
15. Δίνεται προέχουσα δοκός, η οποία φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 14**, καθώς και το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων της.

(α) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.

(β) Να υπολογίσετε και να αναγράψετε στο διάγραμμα τις τιμές των **τεμνουσών δυνάμεων στα σημεία (1), (2), (3), (4) και (5)**.



ΣΧΗΜΑ 14



ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$Q_1 = R_A = 23,58 \text{ kN}$$

$$Q_2 = 23,58 - 8 \times 2,5 = 3,58 \text{ kN}$$

$$Q_3 = 3,58 - 15 = -11,42 \text{ kN}$$

$$Q_4 = -11,42 - 10 = -21,42 \text{ kN}$$

$$Q_5 = -21,42 + R_B = 16 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B - 8 \times 2,5 - 15 - 10 - 8 \times 2 = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B = 61 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad (8 \times 2,5) \times 1,25 + 15 \times 2,5 + 10 \times 5 - R_B \times 6 + (8 \times 2) \times 7 = 0$$

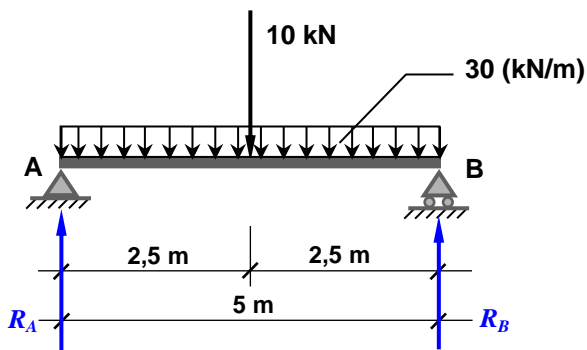
$$\rightarrow \quad R_B = 37,42 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_A \times 6 - (8 \times 2,5) \times 4,75 - 15 \times 3,5 - 10 \times 1 + (8 \times 2) \times 1 = 0$$

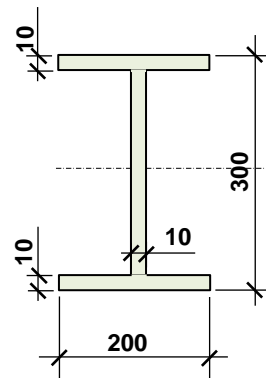
$$\rightarrow \quad R_A = 23,58 \text{ kN}$$

Έλεγχος: $R_A + R_B = 23,58 + 37,42 = 61 \text{ kN}$

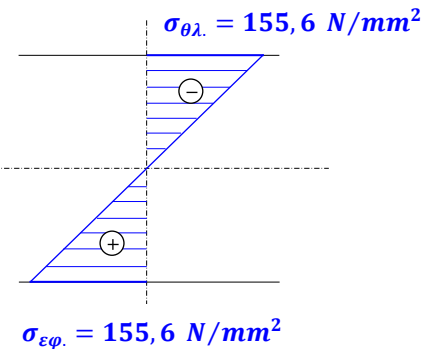
16. Δίνονται αμφιέρειστη μεταλλική δοκός με φορτία (Σχήμα 15 α) και η διατομή της (Σχήμα 15 β). Να υπολογίσετε τις μέγιστες τάσεις εφελκυσμού και θλίψης σε N/mm^2 που θα αναπτυχθεί στη δοκό και να σχεδιάσετε το διάγραμμα των τάσεων. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε mm.



ΣΧΗΜΑ 15 α



ΣΧΗΜΑ 15 β



$$R_A = R_B = \frac{10 + (30 \times 5)}{2} = 80 \text{ kN}$$

$$M_{max} = R_A \times 2,5 - (30 \times 2,5) \times 1,25 = 106,25 \text{ kNm}$$

$$I_x = \frac{200 \times 300^3}{12} - 2 \times \frac{95 \times 280^3}{12} = 102426666,7 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{106,25 \times 10^6 \text{ Nmm} \times 150 \text{ mm}}{102426666,7 \text{ mm}^4} = 155,6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\theta.l.} = 155,6 \text{ N/mm}^2 \quad \text{Άνω}$$

$$\sigma_{\epsilon.p.} = 155,6 \text{ N/mm}^2 \quad \text{Κάτω}$$

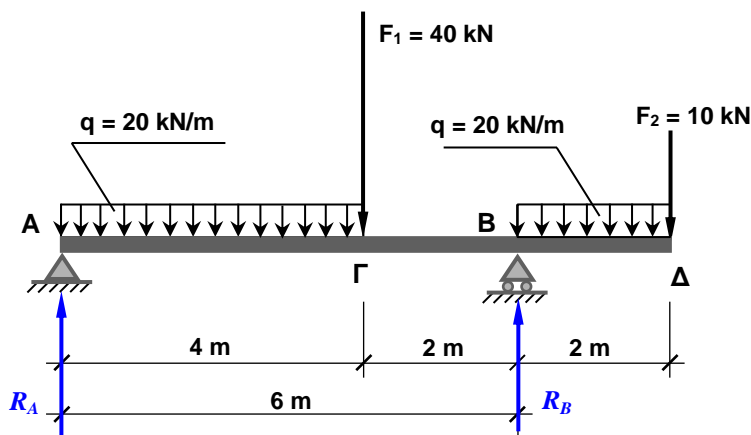
ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β´
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Γ´

ΜΕΡΟΣ Γ': Αποτελείται από 1 ερώτηση

Η ερώτηση βαθμολογείται με 20 μονάδες.

17. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 16**.

- (α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- (β) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**.
- (γ) Να υπολογίσετε τη θέση στην οποία αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης M_{max} (σημείο μηδενικής τιμής τέμνουσας δύναμης).
- (δ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{max} .
- (ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων Q και των ροπών κάμψης M και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ** καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{max} . Στο διάγραμμα ροπών κάμψης να δείξετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματά του.



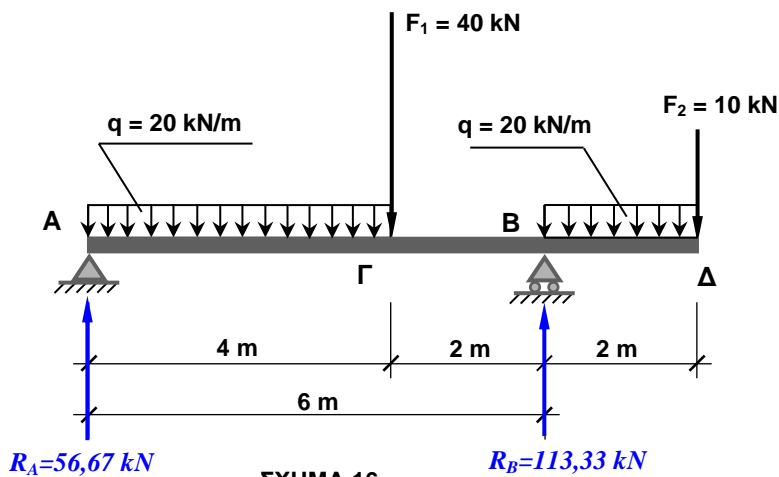
ΣΧΗΜΑ 16

$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B - 20 \times 4 - 40 - 20 \times 2 - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B = 170 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad (20 \times 4) \times 2 + 40 \times 4 - R_B \times 6 + (20 \times 2) \times 7 + 10 \times 8 = 0$$
$$\underline{R_B = 113,33 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_A \times 6 - (20 \times 4) \times 4 - 40 \times 2 + (20 \times 2) \times 1 + 10 \times 2 = 0$$
$$\rightarrow \quad \underline{R_A = 56,67 \text{ kN}}$$

$$\text{Έλεγχος:} \quad R_A + R_B = 56,67 + 113,33 = 170 \text{ kN}$$



ΣΧΗΜΑ 16

ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$Q_A = R_A = 56,67 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\alpha\rho.} = 56,67 - 20 \times 4 = -23,33 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi.} = -23,33 - 40 = -63,33 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\alpha\rho.} = -63,33 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\xi.} = -63,33 + 113,33 = 50 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{\alpha\rho.} = 50 - 20 \times 2 = 10 \text{ kN}$$

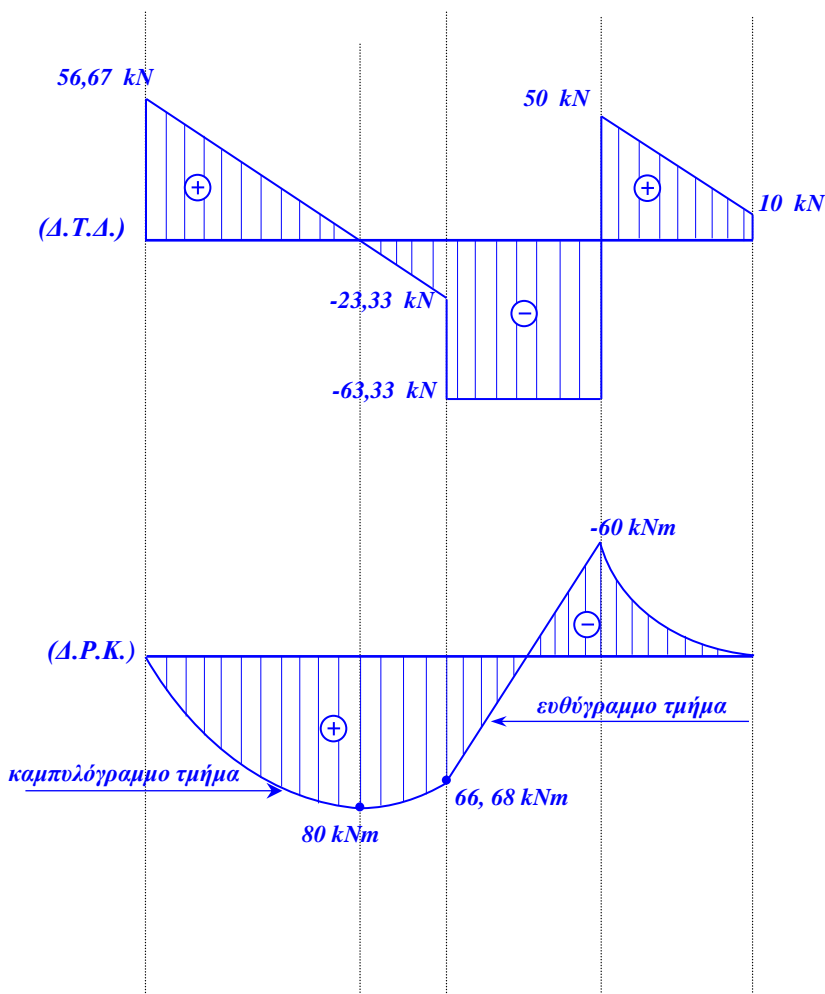
$$Q_{\Delta} = 10 - 10 = 0$$

ΣΗΜΕΙΟ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

$$Q_x = 0$$

$$56,67 - 20x = 0$$

$$x = 2,83 \text{ m}$$



ΡΟΠΕΣ ΚΑΜΨΗΣ

$$M_{max} = 56,67 \times 2,83 - (20 \times 2,83) \times 1,42 = 80 \text{ kNm}$$

$$M_A = 0$$

$$M_{\Gamma} = 56,67 \times 4 - (20 \times 4) \times 2 = 66,68 \text{ kNm}$$

$$M_B = 56,67 \times 6 - (20 \times 4) \times 4 - 40 \times 2 = -60 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta} = 0$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

| | |
|----------------------------|---|
| Συνθήκες ισορροπίας | $\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$ |
| Ροπές αδράνειας | $I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$ |
| Θεώρημα Στάινερ | $I_{x-x} = I_x + Ad_y^2 \quad I_{y-y} = I_y + Ad_x^2$ |
| Ακτίνα αδράνειας | $i_x = \sqrt{\frac{I_{x-x}}{A}} \quad i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $i_x = i_y = 0,25 D \quad i_x = i_y = 0,25 \sqrt{D^2 + d^2}$ |
| Ροπές αντίστασης | $W_x = \frac{I_{x-x}}{y} \quad W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \quad W_x = W_y = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D}$ |
| Απλή κάμψη | $\sigma = \frac{M}{I} y \quad \sigma = \frac{M}{W}$ |
| Λογισμός | $F_{κρ.} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ.}}{\ell^2} \quad \lambda = \frac{\ell}{i_{ελ}} \quad F_{επ.} = \frac{F_{κρ.}}{\gamma}$ |

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

A series of horizontal dotted lines for writing.