ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Σάββατο, 10 Ιουνίου 2006
7:30 – 10:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α

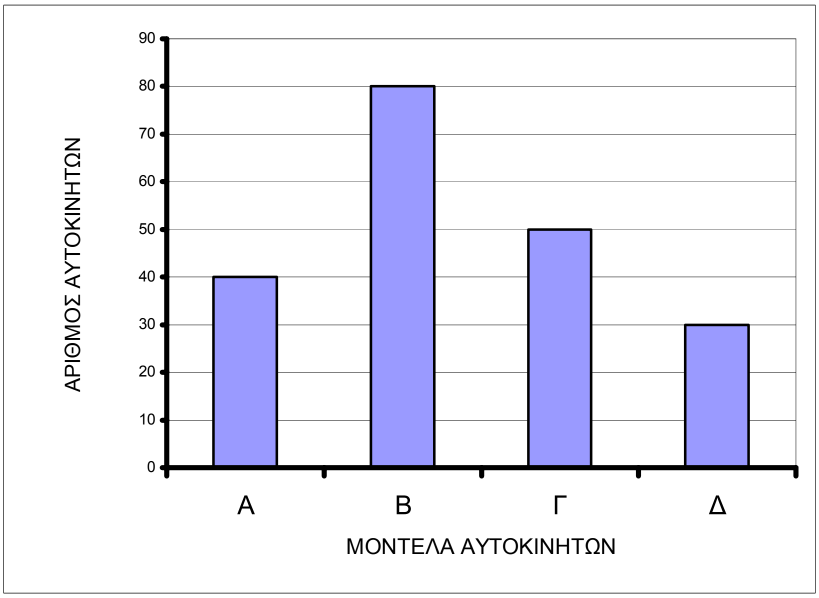
<table>
<tr><td>1</td><td>

Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = x^4 - 2x^3 + 5$

$\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x^2$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα φαίνεται η κατανομή των πωλήσεων, κατά τη διάρκεια ενός έτους, τεσσάρων διαφορετικών μοντέλων αυτοκινήτων Α, Β, Γ, Δ μιας εταιρείας.



Με βάση το πιο πάνω διάγραμμα να βρείτε:

α) Πόσα αυτοκίνητα πωλήθηκαν από το μοντέλο Β.

β) Ποιο μοντέλο αυτοκινήτου είχε τις λιγότερες πωλήσεις.

γ) Πόσα αυτοκίνητα πώλησε συνολικά η εταιρεία.

α) Από το μοντέλο Β πωλήθηκαν 80 αυτοκίνητα

β) Το μοντέλο με τις λιγότερες πωλήσεις είναι το Δ

γ) Η εταιρεία πώλησε συνολικά 200 αυτοκίνητα

</td></tr>
</table>

3	Οι ημερήσιες θερμοκρασίες που έχουν καταγραφεί στη Λάρνακα και στη Λεμεσό, την τελευταία εβδομάδα είναι οι πιο κάτω: Λάρνακα: 32, 33, 28, 30, 33, 32, 29 Λεμεσός: 34, 32, 27, 28, 32, 30, 27 Να βρείτε ποια ήταν η χαμηλότερη μέση θερμοκρασία και σε ποια πόλη. Η μέση θερμοκρασία της Λάρνακας ήταν: $\bar{x}_{\text{Λαρνακας}} = \frac{32+33+28+30+33+32+29}{7} = \frac{217}{7} = 31$ Η μέση θερμοκρασία της Λεμεσού ήταν: $\bar{x}_{\text{Λεμεσου}} = \frac{34+32+27+28+32+30+27}{7} = \frac{210}{7} = 30$ Η Λεμεσός είχε την χαμηλότερη μέση θερμοκρασία
4	Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΘΑΛΑΣΣΑ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Σ και τελειώνουν σε Σ; Οι αναγραμματισμοί είναι: $\frac{7!}{3!2!} = 420$ Οι αναγραμματισμοί που αρχίζουν με Σ και τελειώνουν σε Σ είναι: $\frac{5!}{3!} = 20$
5	Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων: Α: « το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 4» Β: «οι ενδείξεις να είναι οι ίδιες» Ν(Ω)=36 $A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \quad \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \quad \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

6

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε το ακρότατο της συνάρτησης $y = x^2 - 4x - 6$.

$y' = 2x - 4$

$y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$	

Αν x=2 $\Rightarrow y = 2^2 - 4 \cdot 2 - 6 = 4 - 8 - 6 = -10$

Η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (2, -10)

7

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \left(3x^2 - 2x + 3\right) dx$.

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 3)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_1^2 = \left[x^3 - x^2 + 3x\right]_1^2$$

$$= \left(8 - 4 + 6\right) - \left(1 - 1 + 3\right) = 10 - 3 = 7$$

8

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{3x + 2x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{3x + 2x^2} = \frac{\eta\mu 0}{3 \cdot 0 + 2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \text{ A.M.}$$

$$\overset{D.L.H.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{3 + 4x} = \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{3 + 4 \cdot 0} = \frac{1}{3}$$

9	Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ Στον κύκλο έχουμε: g = 2, f = -3 και c = -3 Άρα το κέντρο του έχει συντεταγμένες K(-2, 3) Η ακτίνα του είναι: $R^2=g^2+f^2-c \Rightarrow R^2=2^2+(-3)^2-(-3)$ $\Rightarrow R^2=4+9+3 \Rightarrow R^2=16 \Rightarrow R=4$
10	Για τα ενδεχόμενα A και B του ιδίου δειγματικού χώρου ισχύουν: $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{15}$. α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A\cup B)$ και $P(A/B)$. β) Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. (α) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{2}{15}=\frac{3+10-2}{15}=\frac{11}{15}$ $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ (β) Για να είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα A και B πρέπει να ισχύει η σχέση $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}=P(A\cap B)$ άρα είναι ανεξάρτητα

ΜΕΡΟΣ Β

1

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τις ασύμπτωτες, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(α)Πεδίο ορισμού: Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$ άρα $x\in R-\{-1,\ 1\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

Αν y=0 $\Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=2,\ x=-2$

΄Αρα τέμνει τον άξονα των x στα σημεία (-2, 0) και (2, 0)

Αν x=0 $\Rightarrow y=\dfrac{0-4}{0-1}=\dfrac{-4}{-1}=4$

΄Αρα τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0, 4)

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y'=\frac{2x\cdot(x^2-1)-2x\cdot(x^2-4)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2-1-x^2+4\right)}{(x^2-1)^2}=\frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

$y'=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y΄	-	‖	-	0	+	‖	+
y	$\searrow$	‖	$\searrow$	4	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

min(0, 4)

δ) Ασύμπτωτες

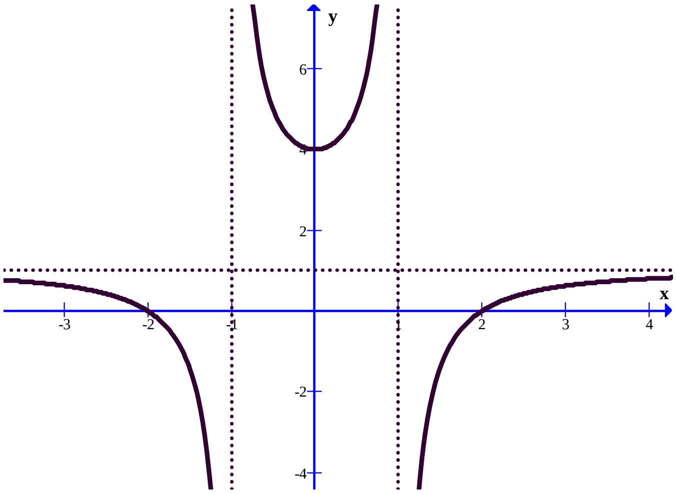
Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{-3}{(-2)\cdot 0^-}=-\infty\\ &\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{-3}{(-2)\cdot 0^+}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=-1\ \text{K.A.}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{-3}{0^+\cdot 2}=-\infty \\ &\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{-3}{0^-\cdot 2}=+\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=1 \;\; \text{K.A.}$$

Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}\text{A.M.}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{2x}=1 \\ &\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}\text{A.M.}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{2x}=1 \end{aligned}\right\} \quad \text{y=1 O.A.}$$



2 Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μια τετραμελής αντιπροσωπεία από μία ομάδα 10 ατόμων. Σε πόσους από αυτούς δύο συγκεκριμένα άτομα δεν μπορούν να είναι μαζί.

Η επιλογή μπορεί να γίνει με : $\binom{10}{4}=\frac{10!}{6!4!}=210$ τρόπους

Για να μη είναι δύο συγκεκριμένα άτομα μαζί πρέπει:

$$\binom{10}{4}-\binom{8}{2}=210-\frac{8!}{6!2!}=210-28=182$$

3

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει την κατανομή των απουσιών (σε μέρες) των 100 υπαλλήλων μιας εταιρείας για ένα χρόνο

Αριθμός ημερών απουσίας x_i	0	1	2	3	4	5	6
Αριθμός υπαλλήλων f_i	1	8	34	26	15	10	6

Να βρείτε:

α) Την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων.

β) Τη μέση τιμή των ημερών απουσίας των υπαλλήλων.

γ) Την τυπική απόκλιση των ημερών απουσίας των υπαλλήλων.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
0	1	0	$1(0-3)^2=9$
1	8	8	$8(1-3)^2=32$
2	34	68	$34(2-3)^2=34$
3	26	78	$26(3-3)^2=0$
4	15	60	$15(4-3)^2=15$
5	10	50	$10(5-3)^2=40$
6	6	36	$6(6-3)^2=54$
	100	300	184

(α) $x_\varepsilon = 2$ απουσίες

(β) $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{300}{100} = 3$

(γ) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{184}{100}} = 1{,}36$

4	Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $x^2+y^2+xy-4=0$ στο σημείο της με x=2 και $y<0$ είναι η $y+x=0$ Αν x=2 $\Rightarrow 4+y^2+2y-4=0 \Rightarrow y^2+2y=0 \Rightarrow y(y+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 & \text{Απορ.} \\ y=-2 \end{cases}$ ΄Αρα το σημείο είναι (2, -2) $2x+2y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=-2x-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{2y+x}$ Κλίση της εφαπτομένης: $\lambda_{εφ.}=\frac{-2\cdot 2-(-2)}{2\cdot(-2)+2}=\frac{-2}{-2}=1$ $\Rightarrow \lambda_{καθ}=-1$ Εξίσωση κάθετης: $y-(-2)=-1(x-2) \Rightarrow y+2=-x+2 \Rightarrow y+x=0$

5	α) Αν η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + 2x - \beta$ έχει τοπικό ακρότατο το σημείο Α(1,4), να βρείτε τις τιμές των α και β. (β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \sqrt{x^2 - 1}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int x\sqrt{x^2 - 1}dx$. (α) Πρέπει να μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος για x=1 $y' = 2\alpha x + 2$ Αν x=1 $\Rightarrow 0 = 2\alpha \cdot 1 + 2 \Rightarrow 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1$ Το σημείο Α(1, 4) επαληθεύει την συνάρτηση $\Rightarrow 4 = (-1)\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - \beta \Rightarrow 4 = -1 + 2 - \beta \Rightarrow \beta = -3$ (β) $u = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow u^2 = x^2 - 1$ $\Rightarrow 2udu = 2xdx \Rightarrow udu = xdx$ $\int x\sqrt{x^2 - 1}dx = \int u \cdot udu = \int u^2 du = \dfrac{u^3}{3} + c$ $= \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^3}{3} + c$