ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ**
Ημερομηνία και ώρα έναρξης: **Τρίτη, 30 Μαΐου 2006**
7:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α.

1.	Να υπολογίσετε τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 5cm και 2cm. $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ $= 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30\ cm^3$
2	Να βρείτε τον τόκο που δίνει κεφάλαιο £12000 το οποίο τοκίζεται με απλό τόκο προς 5% για 2 χρόνια . $T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$ $\Rightarrow T = \frac{12000 \cdot 5 \cdot 2}{100} \Rightarrow T = £1200$
3	Να βρείτε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 3, 5, 6, 7, 9 χωρίς επανάληψη ψηφίου. Οι τριψήφιοι αριθμοί είναι $\Delta_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$
4	Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΠΑΠΑΓΑΛΟΣ». (Η απάντηση μπορεί να δοθεί σε παραγοντική μορφή). Οι αναγραμματισμοί είναι : $\frac{9!}{2! \cdot 3!} = 30240$

5

Οι 20 μαθητές μιας τάξης ρωτήθηκαν για τον αριθμό των αδελφών τους και οι απαντήσεις τους καταχωρήθηκαν στον πιο κάτω πίνακα.

Αρ. αδελφών	0	1	2	3
Αρ. μαθητών	5	8	4	3

Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τους πιο πάνω μαθητές. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: «Ο μαθητής δεν έχει αδέλφια».

Β: «Ο μαθητής έχει τουλάχιστο δύο αδέλφια».

$$P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=\frac{4+3}{20}=\frac{7}{20}$$

6

Δίνονται οι αριθμοί 8, y, 13, 13, 20, 26, 27, 31, 31, 31.
Αν η μέση τιμή $\overline{x}$ των αριθμών είναι 21, να βρείτε :

(ι) τον αριθμό y ,

(ιι) την επικρατούσα τιμή $x_ε$ και τη διάμεσο τιμή $x_δ$.

(ι) $$21=\frac{8+y+13+13+20+26+27+31+31+31}{10}$$

$$\Rightarrow 21=\frac{200+y}{10}\Rightarrow 200+y=210\Rightarrow y=10$$

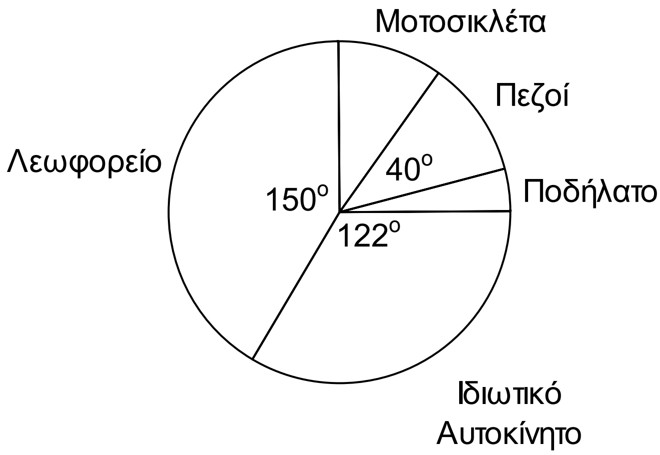
(ιι) Η επικρατούσα τιμή είναι $x_ε = 31$

Η διάμεσος τιμή βρίσκεται μεταξύ της $5^η$ και $6^η$ θέση άρα:

$$x_δ=\frac{20+26}{2}=\frac{46}{2}=23$$

7	Ένα αυτοκίνητο ξεκινά στις 7:00 το πρωί από το σημείο Α και κατευθύνεται προς το σημείο Β με σταθερή ταχύτητα 60km/h. Μετά από δύο ώρες, ένα δεύτερο αυτοκίνητο ξεκινά από το ίδιο σημείο Α, ακολουθεί την ίδια διαδρομή όπως και το πρώτο αυτοκίνητο, κινείται με σταθερή ταχύτητα και τα δύο αυτοκίνητα φθάνουν ταυτόχρονα στο σημείο Β στις 13:00 της ίδιας μέρας. Να υπολογίσετε: (α) την απόσταση ΑΒ και (β) την ταχύτητα του δεύτερου αυτοκινήτου. (α) Το πρώτο αυτοκίνητο ταξίδεψε για 6 ώρες $S_A = U_A \cdot t_A \Rightarrow S_A = 60 \cdot 6 = 360\text{km}$ ΄Αρα η απόσταση ΑΒ είναι 360 km (β) Ο χρόνος του δεύτερου αυτοκινήτου είναι 4 ώρες και η απόστασή του είναι ίση με την απόσταση ΑΒ. $S_B = U_B \cdot t_B \Rightarrow 360 = U_B \cdot 4 \Rightarrow U_B = \frac{360}{4} = 90\,\text{km/h}$

8	Το πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τον τρόπο μετάβασης των 900 μαθητών ενός Λυκείου στο σχολείο τους μια συγκεκριμένη μέρα. Αν οι μαθητές που μεταβήκανε στο σχολείο τους με μοτοσικλέτα ήταν τριπλάσιοι από τους μαθητές που μεταβήκανε με ποδήλατο, να υπολογίσετε τον αριθμό των μαθητών που μεταβήκανε στο σχολείο τους (α) με μοτοσικλέτα και (β) με ιδιωτικό αυτοκίνητο.



Οι μοίρες που αντιστοιχούν στο ποδήλατο και την μοτοσικλέτα είναι:

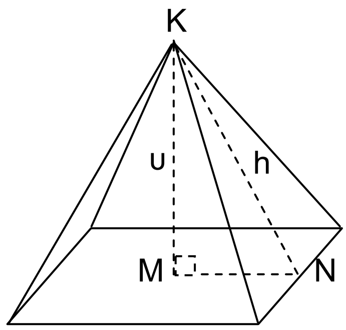
$360^o – (150^o + 122^o + 40^o) = 360^o – 312^o = 48^o$

Αν συμβολίσω με Χ τις μοίρες του τομέα που αντιστοιχεί με τους μαθητές που μεταβαίνουν με ποδήλατο τότε οι μοίρες του τομέα που μεταβαίνουν στο σχολείο με μοτοσικλέτα είναι 3Χ άρα:

$X + 3X = 48 \Rightarrow 4X = 48 \Rightarrow X = 12^o$ και $3X = 36^o$

Αρ. Μαθητών με ιδ. Αυτοκίνητο = $900 \cdot \frac{122}{360} = 305$

Αρ. Μαθητών με μοτοσικλέτα = $900 \cdot \frac{36}{360} = 90$

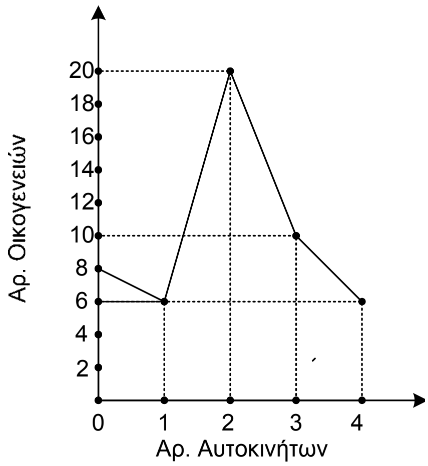
9	Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και $P(A΄)=2\cdot P(A)$, $P(B)=\frac{1}{2}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$, να υπολογίσετε τις τιμές των $P(A΄)$ και $P(A\cup B)$. $P(A΄) = 2\,P(A) \;\Rightarrow\; 1 - P(A) = 2\,P(A) \;\Rightarrow\; 3P(A) = 1 \;\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow\; P(A΄\,) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $\Rightarrow\; P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{10+15-6}{30}=\frac{19}{30}$
10	Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8cm και παράπλευρο ύψος h = 5 cm. Να υπολογίσετε: (α) το ύψος υ της πυραμίδας, (β) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της και (γ) τον όγκο της.  (α) $(KN)^2 = (MN)^2 + (KM)^2 \;\Rightarrow\; 5^2 = 4^2 + υ^2$ $\Rightarrow 25 = 16 + υ^2 \;\Rightarrow\; υ^2 = 9 \;\Rightarrow\; υ = 3cm$ (β) $E_{Π.Ε.} = \frac{Π_{βασ}\cdot h}{2}=\frac{32\cdot 5}{2}=80cm^2$ (γ) $V=\frac{E_β\cdot υ}{3}=\frac{64\cdot 3}{3}=64cm^3$

ΜΕΡΟΣ Β

1	Ένα κουτί περιέχει 2 άσπρες, 3 κόκκινες και μία πράσινη μπάλα. Παίρνουμε τυχαία δύο μπάλες, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων: Α: «Και οι δύο μπάλες είναι άσπρες». Β: «Οι δύο μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα». $P(A)=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{1}{\frac{6!}{4!2!}}=\dfrac{1}{15}$ $P(B)=\dfrac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}+\binom{3}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{2\cdot 3+3\cdot 1+2\cdot 1}{15}=\dfrac{11}{15}$
2	Υπάλληλος Εταιρείας πληρώνεται με βασικό μισθό £300 τον μήνα και επιπλέον παίρνει προμήθεια ανάλογα με την αξία των πωλήσεων που έχει κάνει στο μήνα. Για τις πρώτες £5000 η προμήθεια του είναι 5% και για το μέρος των πωλήσεων πέραν των £5000 η προμήθεια του είναι 10%. Κάθε μήνα γίνονται κρατήσεις 16% επί του συνόλου του βασικού μισθού και της προμήθειας του υπαλλήλου και τα υπόλοιπα αποτελούν τις καθαρές απολαβές του. Αν τον Απρίλιο οι πωλήσεις του ήταν £12000, να υπολογίσετε τις καθαρές απολαβές του για το μήνα αυτό. Από τις πρώτες £5000 θα έχει προμήθεια : $5000\cdot\dfrac{5}{100}=£250$ Από τις υπόλοιπες £7000 θα έχει προμήθεια : $7000\cdot\dfrac{10}{100}=£700$ Οι ολικές απολαβές του αυτό τον μήνα είναι: £ 300 + £ 250 + £ 700 = £ 1250 Σύνολο αποκοπών : $1250\cdot\dfrac{16}{100}=£\ 200$ Οι καθαρές απολαβές του είναι: £ 1250 - £ 200 = £ 1050

3

Σε μια έρευνα καταγράφηκε ο αριθμός των αυτοκινήτων που έχει κάθε οικογένεια μιας κοινότητας και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο διπλανό πολύγωνο συχνοτήτων.



(α) Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων για την έρευνα αυτή.

(β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των οικογενειών που συμμετείχαν στην έρευνα.

(γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των αυτοκινήτων που έχει μια οικογένεια της κοινότητας.

(δ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

(α)

Αρ. Μαθητών X_i	Αρ. Οικογενειών f_i	$x_i\, f_i$	$f_i\,(\overline{x} - x_i)^2$
0	8	0	$8 \cdot 4 = 32$
1	6	6	$6 \cdot 1 = 6$
2	20	40	$20 \cdot 0 = 0$
3	10	30	$10 \cdot 1 = 10$
4	6	24	$6 \cdot 4 = 24$
	50	100	72

(β) Συμμετείχαν 50 οικογένειες

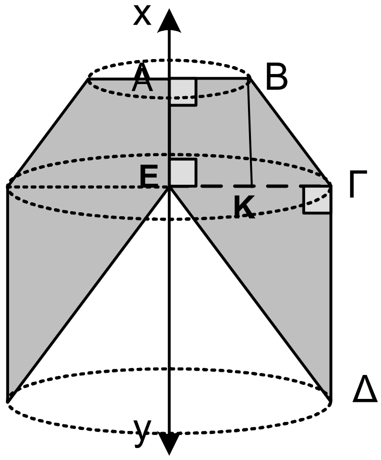
(γ) $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{100}{50} = 2$

(δ)σ=$\sqrt{\dfrac{\sum f_i\left(\overline{x} - x_i\right)^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\dfrac{72}{50}} = \sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$

4	Μια αντιπροσωπεία 4 ατόμων θα επιλεγεί από μια τάξη η οποία αποτελείται από 7 αγόρια και 5 κορίτσια. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αν: (α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός. (β) η αντιπροσωπεία πρέπει να αποτελείται από 3 αγόρια και 1 κορίτσι. (γ) η αντιπροσωπεία πρέπει να περιλαμβάνει το πολύ 1 κορίτσι. (α) $\binom{12}{4} = \frac{12!}{8!4!} = 495$ (β) $\binom{7}{3}\binom{5}{1} = 35 \cdot 5 = 175$ (γ) $\binom{7}{3}\binom{5}{1} + \binom{7}{4} = 35 \cdot 5 + 35 = 210$

5 Στο διπλανό σχήμα ΑΕ=4cm, ΒΓ=5cm, ΓΔ=8cm, ΔΕ=10cm, $E\hat{\Gamma}\Delta=90^{o}$ και οι ΑΒ, ΕΓ είναι κάθετες στον άξονα xy. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του παραγομένου στερεού.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΔ

$(E\Gamma)^2 = (E\Delta)^2 - (\Gamma\Delta)^2 \Rightarrow (E\Gamma)^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow (E\Gamma)^2 = 100 - 64 \Rightarrow E\Gamma = 6$ cm

ΒΚ = 4cm Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ

$(K\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2 - (BK)^2 \Rightarrow (K\Gamma)^2 = 25 - 16 \Rightarrow K\Gamma = 3\text{cm} \Rightarrow AB = 6 - 3 = 3$ cm

$E_{ολ} = E_{κυρ.κώνου} + E_{κυρ.κυλίνδρου} + E_{κυρ.\ κολ.κώνου} + E_{κύκλου}$

$E_{κυρ.\ κώνου} = \pi R\lambda = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi\ cm^2$

$E_{κυρ.\ κυλίνδρου} = 2\pi R\ υ = 2\pi \cdot 6 \cdot 8 = 96\ \pi cm^2$

$E_{κυρ..κολ.κώνου} = \pi(R+r)\lambda = \pi(6+3)\cdot 5 = 45\pi\ cm^2$

$E_{κύκλου} = \pi R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi\ cm^2$

$E_{ολ} = 60\pi + 96\ \pi + 45\pi + 9\pi = 210\pi\ cm^2$

$V_{ολ} = V_{κολ.κώνου} + V_{κυλίνδρου} - V_{κώνου}$

$$V_{κολ.κώνου} = \frac{\pi(R^2 + R\cdot r + r^2)\cdot υ}{3} = \frac{\pi(36+3\cdot 6+9)\cdot 4}{3} = 84\,\pi\ cm^3$$

$V_{κυλίνδρου} = \pi R^2 υ = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi\ cm^3$

$$V_{κώνου} = \frac{\pi R^2 υ}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 96\,\pi\ cm^3$$

$V_{ολ} = 84\pi + 288\pi - 96\pi = 276\pi\ cm^3$