

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τετάρτη, 10 Ιουνίου 2009
7:30 – 10:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1.	Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών: 12, 17, 3, 13, 10 $\bar{x} = \frac{12+17+3+13+10}{5}$ $\bar{x} = \frac{55}{5}$ $\bar{x} = 11$	
2.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = x^2 - 5x + 2$ $\frac{dy}{dx} = 2x - 5$	
3.	Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 3x^2 dx$ $\int_1^2 3x^2 dx = [x^3]_1^2$ $= 2^3 - 1^3$ $= 8 - 1$ $= 7$	

4.	<p>Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΓΡΑΜΜΑΤΑ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από M και τελειώνουν σε M;</p> <p>ΓΡΑΜΜΑΤΑ Γ, Ρ, Τ, Α, Α, Α, Μ, Μ</p> $M_8^{\epsilon} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$ <p>M _ _ _ _ _ M</p> $M_6^{\epsilon} = \frac{6!}{3!} = 120$	
5.	<p>Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο Κ(3,2) και ακτίνα R = 4</p> $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$ $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$	
6.	<p>Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = x \cdot \sigma\upsilon\nu 5x$</p> $\frac{dy}{dx} = (x)' \sigma\upsilon\nu 5x + x(\sigma\upsilon\nu 5x)'$ $\frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu 5x - 5x\eta\mu 5x$	
7.	<p>Αν $y = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2\sigma\upsilon\nu x = 0$</p> <p>$y = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$</p> $\frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x = 0$	

8.

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

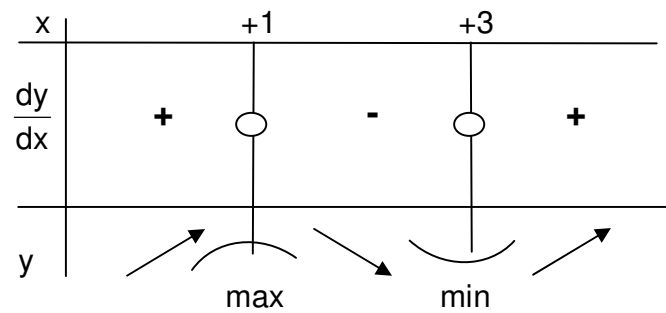
$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1) \cdot (x-3) = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$



$$\text{Για } x=3 \Rightarrow y = 5 \text{ (3, 5) min}$$

$$\text{Για } x=1 \Rightarrow y = 9 \text{ (1, 9) max}$$

9.	<p>Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = x^3 - 6x$ στο σημείο της με $x = 2$</p> <p>Για $x=2 \Rightarrow y = -4$ $A(2, -4)$</p> $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6$ <p>$\lambda_{\text{εφ}} = 3 \cdot 2^2 - 6 = 12 - 6 = 6$</p> <p><u>Εξίσωση εφαπτομένης στο A:</u></p> $y - y_1 = \lambda_{\text{εφ}}(x - x_1)$ $y - (-4) = 6(x - 2)$ $y + 4 = 6x - 12$ $y = 6x - 16$	
10.	<p>Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, και $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:</p> <p>α) $P(B')$</p> <p>β) $P(A \cap B)$</p> <p>γ) $P(B/A)$</p> <p>α) $P(B') = 1 - P(B)$ $P(B') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$</p> <p>β) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$</p> <p>γ) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $P(B/A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$</p>	

ΜΕΡΟΣ Β΄:

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 5x}{\eta\mu x}$

α)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x) &= 2^2 + 4 \cdot 2 \\ &= 4 + 8 = 12 \end{aligned}$$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 5x}{\eta\mu x} = \frac{0}{0}$ (απροσδιόριστη μορφή)

Εφαρμόζω De L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 5x}{\eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + 5}{\sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{0 + 5}{\sigma\upsilon\nu 0} \\ &= \frac{5}{1} = 5 \end{aligned}$$

2.

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των βιβλίων που δανείστηκαν από τη βιβλιοθήκη του σχολείου τους οι 20 μαθητές μιας τάξης, κατά τη διάρκεια ενός σχολικού έτους.

Αριθμός βιβλίων (x_i)	0	1	2	3	4	6
Αριθμός μαθητών (f_i)	4	1	2	3	7	3

Να βρείτε:

α) την επικρατούσα τιμή (x_e)

β) τη μέση τιμή (\bar{x})

γ) την τυπική απόκλιση (σ)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
0	4	0	-3	9	36
1	1	1	-2	4	4
2	2	4	-1	1	2
3	3	9	0	0	0
4	7	28	1	1	7
6	3	18	3	9	27
	20	60			76

α) $x_e = 4$

β) $\bar{x} = \frac{60}{20} = 3$

γ) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{76}{20}} \approx 1,95$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας, τις ασύμπτωτές της και να την παραστήσετε γραφικά.

(α) Πεδίο ορισμού: Πρέπει $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$ άρα $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

$$\text{Αν } y=0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

Άρα τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $(-1, 0)$ και $(1, 0)$

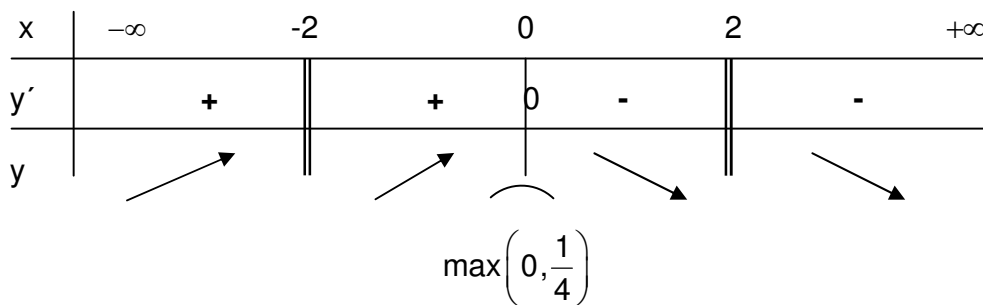
$$\text{Αν } x=0 \Rightarrow y = \frac{0-1}{0-4} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Άρα τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, \frac{1}{4})$

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$



δ) Ασύμπτωτες
Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} &= \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} &= \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -2 \text{ Κ.Α.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow x = 2$ K.A.

Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M.}$$

Εφαρμόζω De L'Hospital

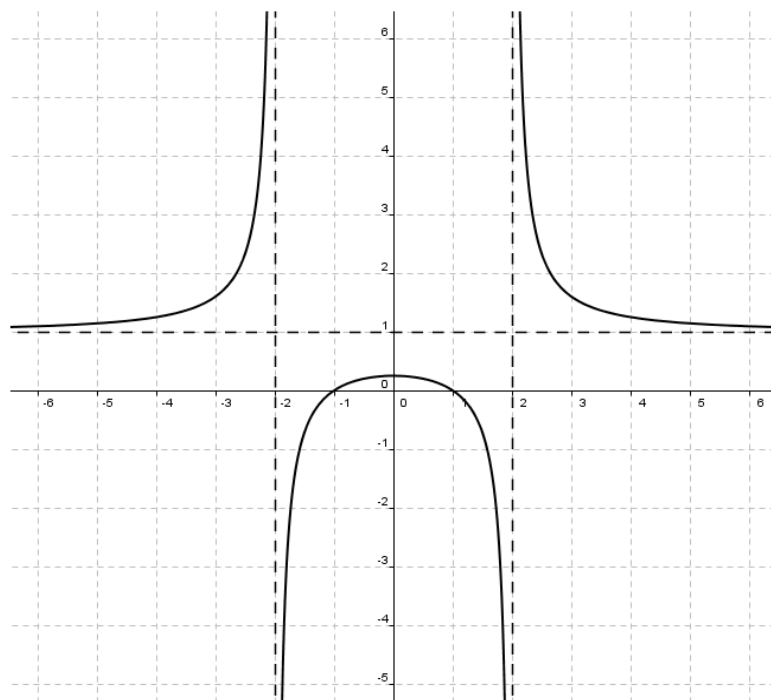
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M.}$$

Εφαρμόζω De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ O.A.



4.	<p>Από ένα δοχείο που περιέχει 8 μαύρες και 3 γαλάζιες μπάλες παίρνουμε δύο μπάλες. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων: Α: «και οι δύο μπάλες είναι γαλάζιες» Β: «τουλάχιστο μία μπάλα είναι γαλάζια».</p> $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{3}{55}$ $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{8}{1}\binom{3}{1} + \binom{3}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{8 \cdot 3 + 3}{55} = \frac{27}{55}$	
5.	<p>Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \sqrt{x^2 - 1}$ ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{6x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$</p> $u = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow u^2 = x^2 - 1$ $x^2 = u^2 + 1$ $2x dx = 2u du \Rightarrow x dx = u du$ $\int \frac{6x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{6x^2 x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$ $= \int \frac{6(u^2 + 1)u}{u} du = \int (6u^2 + 6) du$ $= \frac{6u^3}{3} + 6u + c = 2u^3 + 6u + c = 2(\sqrt{x^2 - 1})^3 + 6(\sqrt{x^2 - 1}) + c$	