ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 28 Μαΐου 2009
11:00 – 14:00

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	Ένας μαθητής πήρε τους πιο κάτω βαθμούς σε πέντε διαγωνίσματά του για τα Μαθηματικά στο Α΄ τρίμηνο: $11, 19, 15, 9, 16$. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών αυτών. $\overline{X} = \frac{11+19+15+9+16}{5}$ $\overline{X} = \frac{70}{5}$ $\overline{X} = 14$	
2.	Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $\alpha = 3\ cm$, $\beta = 4\ cm$ και $\gamma = 6\ cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο V του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ $V = 3 \cdot 4 \cdot 6$ $V = 72\,cm^3$	
3.	Πόσα θα πληρώσει κάποιος για να αγοράσει έναν υπολογιστή αξίας €600, αν ο καταστηματάρχης του κάνει έκπτωση 25%; $600 \cdot \frac{25}{100}$ = €150 600 - 150 = €450	

4.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = 2x^3 + 5x - 1$. $y = 2x^3 + 5x - 1$ $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 5$	
5.	Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΕΚΛΟΓΕΣ**. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από **Ε** και τελειώνουν σε **Ε**; ΕΚΛΟΓΕΣ Ε, Ε, Κ, Λ, Ο, Γ, Σ $M_7^{\varepsilon} = \frac{7!}{2!} = 2520$ Ε, _ _ _ _ _ ,Ε Κ, Λ, Ο, Γ, Σ $M_5 = 5! = 120$	
6.	Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int 2\sigma\upsilon\nu x\, dx$ $\int 2\sigma\upsilon\nu x dx = 2\eta\mu x + c$	
7.	Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(1, 2)$ και ακτίνα $R = 5$. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$	

8.	Να λύσετε το σύστημα: $\begin{matrix} y - x = 5 \\ xy = -6 \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} y - x = 5 \\ x \cdot y = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} y = 5 + x \\ x \cdot y = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} y = 5 + x \\ x \cdot (5 + x) = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $x^2 + 5x + 6 = 0$ $(x + 2)(x + 3) = 0$ $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ Αν $x = -2 \Rightarrow y = 5 - 2 \Rightarrow y = 3$ Αν $x = -3 \Rightarrow y = 5 - 3 \Rightarrow y = 2$ <u>Λύση</u>: $x = -2$, $y = 3$ ή $x = -3$, $y = 2$	
9.	Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu(x + 10°) = \eta\mu 25°$ στο διάστημα $[0°, 360°]$. $\eta\mu(x + 10°) = \eta\mu 25°$ <u>α΄ τρόπος</u>: $x + 10 = 360\kappa + 25$ $\quad$ $x + 10 = 360\kappa + 180 - 25$ $x = 360\kappa + 15°$ $\quad$ $x = 360\kappa + 145°$ κ=0 $\quad x = 15°$ $\quad$ ή $\quad x = 145°$ <u>β΄ τρόπος</u>: $x + 10 = 25 \Rightarrow x = 15°$ $\quad$ ή $\quad x + 10 = 180 - 25 \Rightarrow x = 145°$	

10.	Τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης $E_\beta = 100\ cm^2$ και ύψος $\upsilon = 12\ cm$. Να βρείτε:	

α) Το παράπλευρο ύψος (h) της πυραμίδας.

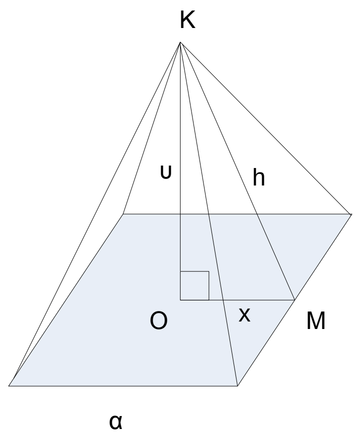
β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $(E_{o\lambda})$ της πυραμίδας .

γ) Τον όγκο (V) της πυραμίδας.

α) $\alpha^2 = 100 \Rightarrow \alpha = 10\ \text{cm}$

OM=10:2 = 5 cm

$$h^2 = \upsilon^2 + (OM)^2$$
$$h^2 = 12^2 + 5^2$$
$$h^2 = 144 + 25$$
$$h^2 = 169 \Rightarrow h = 13\ \text{cm}$$



β)

$$\Pi_\beta = 4 \cdot 10 = 40\ \text{cm}$$
$$E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2}$$
$$E_\pi = \frac{40 \cdot 13}{2}$$
$$E_\pi = 260\ \text{cm}^2$$

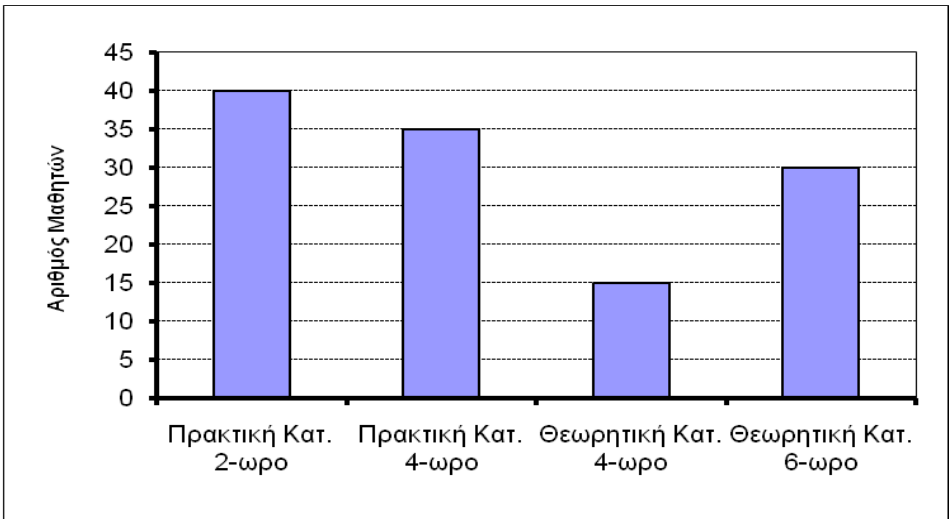
$$E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta$$
$$E_{o\lambda} = 260 + 100$$
$$E_{o\lambda} = 360\ \text{cm}^2$$

γ)

$$V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3}$$
$$V = \frac{100 \cdot 12}{3}$$
$$V = 400\ \text{cm}^3$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνονται οι επιλογές των μαθητών της Β΄ τάξης μιας Τεχνικής Σχολής στο μάθημα των Μαθηματικών (Πρακτική Κατ. 2-ωρο, Πρακτική Κατ. 4-ωρο, Θεωρητική Κατ. 4-ωρο, Θεωρητική Κατ. 6-ωρο).



Να βρείτε:

α) Πόσοι μαθητές επέλεξαν Μαθηματικά Πρακτικής Κατ. 2-ωρο.

β) Πόσοι μαθητές επέλεξαν Μαθηματικά Πρακτικής Κατ. 4-ωρο.

γ) Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές της Β΄ τάξης αυτής της Τεχνικής Σχολής.

δ) Το ποσοστό (%) των μαθητών που επέλεξαν Μαθηματικά Θεωρητικής Κατ. 4-ωρο.

α) 40 μαθητές

β) 35 μαθητές

γ) 40+35+15+30 = 120 μαθητές

δ) $\frac{15}{120} \cdot 100\% = 12{,}5\%$

2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν οι 20 μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά.

Βαθμός (x_i)	8	10	12	15	16	18	19
Αριθμός μαθητών (f_i)	3	5	3	4	1	2	2

Να βρείτε:

α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε).

β) Τη μέση τιμή $(\bar{x})$.

γ) Την τυπική απόκλιση (σ).

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
8	3	24	-5	25	75
10	5	50	-3	9	45
12	3	36	-1	1	3
15	4	60	2	4	16
16	1	16	3	9	9
18	2	36	5	25	50
19	2	38	6	36	72
	20	260			270

α) Η επικρατούσα τιμή είναι: $x_\varepsilon = 10$

β) Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i . x_i}{\Sigma f_i} = \frac{260}{20} = 13$$

γ) Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{270}{20}} = \sqrt{13,5} \approx 3,67$$

3.	Μια εταιρεία ζητά προσφορές για την κατασκευή 25 μεταλλικών δεξαμενών. Κάθε δεξαμενή θα πρέπει να έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος 5 m, πλάτος 4 m, ύψος 2 m και θα πρέπει να είναι ανοικτή στο πάνω μέρος της. Αν το υλικό κατασκευής στοιχίζει €12 το τετραγωνικό μέτρο και τα εργατικά €5 το τετραγωνικό μέτρο, ποια θα είναι η προσφορά (σε ευρώ) που πρέπει να κάνει ένας κατασκευαστής, ώστε να έχει κέρδος 30% επί του συνολικού κόστους του;	

$$\mathrm{E}_{\delta\varepsilon\xi\alpha\mu\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma} = 2(\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma)+\alpha\cdot\beta$$

$$\mathrm{E}_{\delta\varepsilon\xi\alpha\mu\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma} = 2(5\cdot 2+4\cdot 2)+5\cdot 4$$

$$\mathrm{E}_{\delta\varepsilon\xi\alpha\mu\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma} = 2(10+8)+20$$

$$\mathrm{E}_{\delta\varepsilon\xi\alpha\mu\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma} = 36+20$$

$$\mathrm{E}_{\delta\varepsilon\xi\alpha\mu\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma} = 56\ \mathrm{m}^2$$

$$25\cdot\mathrm{E}_{\delta\varepsilon\xi\alpha\mu\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma} = 25\cdot 56 = 1400\ \mathrm{m}^2$$

Κόστος υλικού κατασκευής $= 1400\cdot 12 =$ € 16800

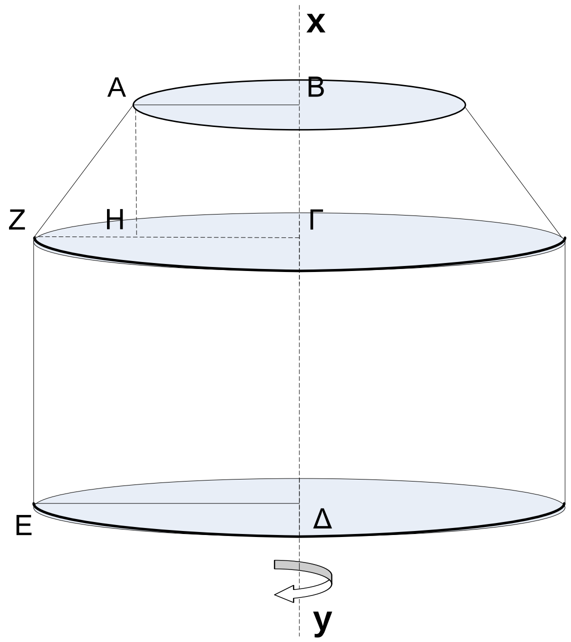
Εργατικά $= 1400\cdot 5 =$ € 7000

16800+7000= € 23800

Κέρδος: $\frac{30}{100}\cdot 23800 =$ € 7140

Συνολικό κόστος προσφοράς: 23800+7140= € 30940

4. Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΖ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο και το $ΖΓΔΕ$ τετράγωνο. Το σχήμα $ΑΒΓΔΕΖ$ κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα **xy**. Αν $ΑΒ = 5\ cm$, $ΒΔ = 12\ cm$ και $ΕΔ = 8\ cm$, να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



ΓΔ = ΕΔ = ΖΓ = ΖΕ = 8 cm

ΒΓ= 12 – 8 = 4 cm

ΑΗ=ΒΓ=4 cm

ΖΗ= 8-5= 3 cm

$(AZ)^2=(AH)^2+(ZH)^2$

$(AZ)^2= 4^2 + 3^2$

$(AZ)^2= 16 + 9$

$(AZ)^2= 25$

AZ= 5 cm

<u>Στοιχεία κυλίνδρου:</u>

R = 8 cm

υ = 8 cm

<u>Στοιχεία κόλουρου κώνου:</u>

R = 8cm

ρ = 5 cm

λ = 5 cm(Π.Θ)

υ = 4 cm

$$\begin{aligned}
E_{ολ} &= E_{AZ} + E_{ZE} + E_{EΔ} + E_{AB} \\
&= E_{Κυρτ,κόλουρου\ κώνοου} + E_{Κυρτ.κυλίνδρου} + E_{μεγάλης\ βάσης} + E_{μικρής\ βάσης} \\
&= \pi(R+\rho)\lambda + 2\pi R υ_{κυλ.} + \pi R^2 + \pi\rho^2 \\
&= \pi\cdot(8+5)\cdot 5 + 2\cdot\pi\cdot 8\cdot 8 + \pi\cdot 8^2 + \pi\cdot 5^2 \\
&= 65\pi + 128\pi + 64\pi + 25\pi \\
&= 282\pi\ cm^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{ολ.} &= V_{κυλίνδρου} + V_{κόλουρου\ κώνου} \\
&= \pi\cdot 8^2\cdot 8 + \frac{\pi\cdot 4}{3}\left(8^2 + 8\cdot 5 + 5^2\right) \\
&= 512\pi + \frac{4\pi}{3}(64+40+25) \\
&= 512\pi + 172\pi\ cm^3 \\
&= 684\pi\ cm^3
\end{aligned}$$

5.	Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. i) Να βρείτε τις πιθανότητες: α) $P(B')$ β) $P(A)$ γ) $P(A/B)$ ii) Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ i) α) $P(B') = 1 - P(B)$ $P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\frac{2}{3} = P(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ $P(A) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ γ) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(A/B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ ii) $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ $\Bigg\}$ $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ Άρα Α, Β ανεξάρτητα ενδεχόμενα	