

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 1 Ιουνίου 2010
7:30 – 10:30**

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από δύο (2) σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.
Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int (2x - \eta\mu x - e^x) dx$.

2) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - e^{2x}}{x^2}$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + \alpha$. Αν το $(1, 2)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να υπολογίσετε τον αριθμό α . Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το ακρότατο της συνάρτησης και να το χαρακτηρίσετε.

4) Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -2 & -15 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Να δείξετε ότι: $A - A^{-1} = 2B$.

5) Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $\chi\psi + 2 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του β έτσι ώστε η ευθεία $\psi = 2\chi + \beta$ να εφάπτεται της υπερβολής.

- 6) Σε ένα γραφείο εργάζονται 5 άνδρες και 6 γυναίκες.
- Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μία τριμελής επιτροπή από τα άτομα που εργάζονται στο γραφείο.
 - Να βρείτε σε πόσους από αυτούς τους τρόπους η επιτροπή αποτελείται από άτομα του ίδιου φύλου.
- 7) Δίνονται οι καμπύλες $\psi^2 = 4\chi$ και $\chi\psi = 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δυο καμπύλες, την ευθεία $\chi = 4$ και τον άξονα των χ .
- 8) Δίνονται οι κύκλοι: $(K): \chi^2 + \psi^2 = 4$ και $(\Lambda): \chi^2 + \psi^2 - 8\chi - 4\psi + 12 = 0$. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων $\Sigma(\chi, \psi)$ του επιπέδου, των οποίων η δύναμη τους ως προς τον κύκλο (Λ) είναι διπλάσια από τη δύναμη τους ως προς τον κύκλο (K) .
- 9) Έστω $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα του $K = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $\Lambda = \{\beta, \gamma, \delta\}$. Συμβολίζουμε με $E_1 = \{\alpha\}$, $E_2 = \{\beta\}$, $E_3 = \{\gamma\}$ και $E_4 = \{\delta\}$. Αν είναι $P(E_2) = P(E_3)$, $P(K) = \frac{1}{3}$ και $P(\Lambda) = \frac{4}{5}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(E_1)$, $P(E_2)$ και $P(E_4)$.
- 10) α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.
 β) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi + \sqrt{\chi}$, $\chi \in [1, 4]$. Να βρείτε αριθμό $\xi \in (1, 4)$ έτσι ώστε να ικανοποιείται το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση f .

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις.

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 4\chi + 4}{\chi - 4}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατά της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τις ασύμπτωτές της, να την παραστήσετε γραφικά.

2) Αν $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+2\eta\mu\chi} d\chi$ και $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2\chi}{1+2\eta\mu\chi} d\chi$,

να υπολογίσετε τα: A , $A+B$ και B .

3) Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta$, και σημείο $P(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta)$ πάνω σε

αυτή.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο P είναι:

$$\alpha\eta\mu\theta \cdot \chi - \beta\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \psi = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta.$$

β) Αν η κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των ψ στο σημείο B , να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος PB καθώς το P κινείται πάνω στην έλλειψη.

4) Ένα δοχείο Δ_1 περιέχει 40 λαχνούς με αριθμούς 1, 2, 3, ..., 40. Παίρνουμε τυχαία 10 λαχνούς από το Δ_1 και τους τοποθετούμε σε κενό δοχείο Δ_2 .

Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «το Δ_2 περιέχει το λαχνό με αριθμό 34».

B: «το Δ_2 περιέχει μόνο λαχνούς με άρτιο αριθμό».

Γ: «το Δ_2 περιέχει 6 λαχνούς με άρτιο αριθμό και 4 με περιττό αριθμό».

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1+\chi^2}{e^{2\chi}}$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι στρέφει τα κοίλα της προς τα πάνω, στο πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta$, ισχύει η σχέση: $\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2} > e^{2(\alpha-\beta)}$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 f(\chi) d\chi$.

Τ Ε Λ Ο Σ