

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ (Θ.Κ.) (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0048

Τάξη: Β΄

Ημερομηνία εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

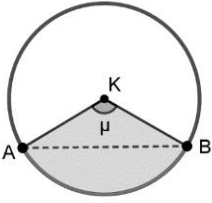
Προτεινόμενες Λύσεις

Σημείωση: Κατά την κρίση του διορθωτή, μπορούν να δοθούν 0,5 της μονάδας σε κάθε σημείο αξιολόγησης.

ΜΕΡΟΣ Α΄

<p>A1.</p>	<p>Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:</p> <p>(α) $f(x) = x^3 - 5x$ (2 μονάδες)</p> <p>(β) $g(x) = \frac{7}{x-5}$ (3 μονάδες)</p> <p><u>Λύση:</u></p> <p>(α) Π.Ο. της f είναι το σύνολο $A = R$, διότι πολυωνυμική.</p> <p>(β) $x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$ Άρα Π.Ο. της g είναι το σύνολο $B = R - \{5\}$</p>	<p>(α)</p> <p>Σωστό Π.Ο. με ή χωρίς αιτιολόγηση 2</p> <p>(β)</p> <p>Περιορισμός 1</p> <p>Επίλυση 1</p> <p>Σωστό Π.Ο. 1</p>
<p>A2.</p>	<p>Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:</p> <p>(α) $f(x) = 2x^3 + \sqrt{5}$ (2 μονάδες)</p> <p>(β) $g(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 7)$ (3 μονάδες)</p> <p><u>Λύση:</u></p> <p>(α) $f(x) = 2x^3 + \sqrt{5} \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2x^2 + 0 \Rightarrow f'(x) = 6x^2$</p> <p>(β) Α΄ τρόπος: $g(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 7) = x^3 + 7x - 2x^2 - 14$ $\Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 7 - 4x - 0 = 3x^2 - 4x + 7$</p> <p>Β΄ τρόπος: $g(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 7)$ $\Rightarrow g'(x) = (x - 2)' \cdot (x^2 + 7) + (x - 2) \cdot (x^2 + 7)'$ $= 1 \cdot (x^2 + 7) + (x - 2) \cdot 2x = x^2 + 7 + 2x^2 - 4x$ $= 3x^2 - 4x + 7$</p>	<p>(α)</p> <p>$(2x^3)' = 3 \cdot 2x^2$ 1</p> <p>$(\sqrt{5})' = 0$ 0,5</p> <p>Πράξεις</p> <p>Αποτέλεσμα 0,5</p> <p>(β)</p> <p>Πράξεις ή τύπος παραγώγου γινομένου 1</p> <p>Παραγωγή επί μέρους όρων 1,5</p> <p>Αποτέλεσμα 0,5</p>

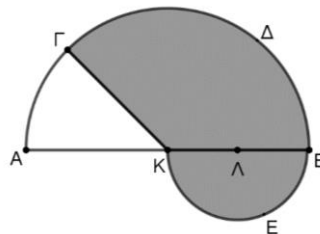
<p>A3.</p>	<p>(α) Οι αριθμοί 4, x, 9 αποτελούν διαδοχικούς όρους <u>Γεωμετρικής Προόδου</u>. Να υπολογίσετε την τιμή του x</p> <p>(β) <u>Αριθμητική Πρόοδος</u> έχει $\alpha_1 = 2$ και $\delta = 3$. Να βρείτε τον δέκατο όρο (α_{10}) της.</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\underbrace{4}_\alpha, \underbrace{x}_\beta, \underbrace{9}_\gamma$</p> $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow x^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$ <p>(β) $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \cdot \delta$</p> $\Rightarrow \alpha_{10} = 2 + (10 - 1) \cdot 3 = 2 + 9 \cdot 3 = 2 + 27 = 29$	<p>(α)</p> <p>Σωστή σχέση $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ 1</p> <p>Αντικατάσταση 0,5</p> <p>Πράξεις 0,5</p> <p>Αποτέλεσμα 0,5</p> <p>(β)</p> <p>Σωστός τύπος $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \cdot \delta$ 1</p> <p>Αντικατάσταση 0,5</p> <p>Πράξεις 0,5</p> <p>Αποτέλεσμα 0,5</p>
<p>A4.</p>	<p>Να λύσετε τις εξισώσεις:</p> <p>(α) $\left(\frac{3}{8}\right)^{2x} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-x+6}$ (2 μονάδες)</p> <p>(β) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$ (3 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\left(\frac{3}{8}\right)^{2x} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-x+6} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{8}\right)^{x-6}$</p> $\Rightarrow 2x = x - 6 \Rightarrow 2x - x = -6 \Rightarrow x = -6$ <p>(β) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0 \Rightarrow 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$</p> <p>θέτω: $\omega = 7^x$</p> $\Rightarrow \omega^2 - 6 \cdot \omega - 7 = 0$ <p>Α' τρόπος: $(\omega - 7) \cdot (\omega + 1) = 0 \Rightarrow \omega = 7$ ή $\omega = -1$</p> <p>Β' τρόπος: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64$</p> $\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$ <p>Διερεύνηση</p> <p>Για $\omega = 7 \Rightarrow 7^x = 7 \Rightarrow x = 1$</p> <p>Για $\omega = -1 \Rightarrow 7^x = -1$ αδύνατη στο R</p>	<p>(α)</p> <p>Αντιστροφική κλάσματος 1</p> <p>Εξίσωση εκθετών 0,5</p> <p>Πράξεις και αποτέλεσμα 0,5</p> <p>(β)</p> <p>$49^x = 7^{2x}$ 0,5</p> <p>θέτω: $\omega = 7^x$ 0,5</p> <p>Επίλυση εξίσωσης β' βαθμού 1</p> <p>$x = 1$ 0,5</p> <p>$7^x = -1$ αδύνατη 0,5</p>

<p>A5.</p>	<p>Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος ($K, 9cm$) Αν η χορδή AB είναι πλευρά κανονικού τριγώνου, εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτό, να υπολογίσετε:</p>  <p>(α) το μήκος της χορδής AB (1 μονάδα) (β) την επίκεντρη γωνία $\hat{\mu}$ (να αιτιολογήσετε την απάντησή σας) (2 μονάδες) (γ) το εμβαδόν του σκιασμένου κυκλικού τομέα, αν $\hat{\mu} = 120^\circ$ (Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π) (2 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $AB = \lambda_3 \Rightarrow AB = R\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ cm}$ (β) $AB = \lambda_3 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ (επίκεντρη γωνία κανονικού τριγώνου) (γ) $E_T = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 27\pi \text{ cm}^2$</p>	<p>(α) Τύπος λ_3 0,5 Αποτέλεσμα 0,5</p> <p>(β) Εύρεση γωνιάς 1 Δικαιολογία 1</p> <p>(γ) Τύπος $E_T = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ}$ 1 Πράξεις 0,5 Αποτέλεσμα 0,5</p>
<p>A6.</p>	<p>Μια πισίνα σχήματος τετραγωνικού πρίσματος έχει ακμή βάσης $8m$. Για να γεμίσει αδειάζουμε σ' αυτήν 24 ντεπόζιτα γεμάτα με νερό. Αν τα ντεπόζιτα έχουν σχήμα κύβου με ακμή $2m$, να υπολογίσετε το ύψος του νερού στην πισίνα.</p> <p>Λύση:</p> $V_{\text{πισίνας}} = 24 \cdot V_{\text{ντεποζίτου}} \Rightarrow E_\beta \cdot v = 24 \cdot \alpha^3$ $\Rightarrow 8^2 \cdot v = 24 \cdot 2^3$ $\Rightarrow 64 \cdot v = 24 \cdot 8$ $\Rightarrow 64 \cdot v = 192$ $\Rightarrow v = \frac{192}{64}$ $\Rightarrow v = 3m$ <p>Απάντηση: το ύψος του νερού στην πισίνα είναι $3m$</p>	<p>Σχέση όγκων 1 Όγκος πρίσματος 1 Όγκος κύβου 1 Πράξεις 1,5 Αποτέλεσμα 0,5</p>

ΜΕΡΟΣ Β΄

<p>B1.</p>	<p>(α) Δίνονται οι πέντε πρώτοι όροι μιας Προόδου $3, 1, -1, -3, -5, \dots$ Να βρείτε το άθροισμα των δώδεκα πρώτων όρων της. (4 μονάδες)</p> <p>(β) Σε μια πόλη παρουσιάστηκε μια μολυσματική ασθένεια, της οποίας τα κρούσματα καθημερινά αυξάνονται με ρυθμό Γεωμετρικής Προόδου. Την πρώτη μέρα που παρουσιάστηκε η ασθένεια, βρέθηκαν πέντε κρούσματα και σε κάθε επόμενη μέρα ο αριθμός των κρουσμάτων διπλασιάζεται. Να βρείτε:</p> <p>(i) πόσα νέα κρούσματα θα βρεθούν την έκτη μέρα (3 μονάδες)</p> <p>(ii) πόσα συνολικά κρούσματα θα βρεθούν τις πρώτες δέκα ημέρες. (3 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $3, 1, -1, -3, -5, \dots$ Παρατηρούμε ότι η πρόοδος είναι Α.Π. με $\alpha_1 = 3$ και $\delta = -2$</p> $\Sigma_n = \frac{[2\alpha_1 + (n-1)\delta] \cdot n}{2}$ $\Rightarrow \Sigma_{12} = \frac{[2 \cdot 3 + (12-1) \cdot (-2)] \cdot 12}{2} = \frac{[6 + 11 \cdot (-2)] \cdot 12}{2}$ $= (6 - 22) \cdot 6 = -16 \cdot 6 = -96$ <p>Απάντηση: το άθροισμα των δώδεκα πρώτων όρων της είναι -96</p> <p>(β) Τα κρούσματα αυξάνονται με ρυθμό Γεωμετρικής Προόδου με $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 2$</p> <p>(i) $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$ $\Rightarrow \alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 5 \cdot 2^5 = 5 \cdot 32 = 160$</p> <p>Απάντηση: την έκτη μέρα θα βρεθούν 160 νέα κρούσματα</p> <p>(ii) $\Sigma_n = \frac{\alpha_1 \cdot (1-\lambda^n)}{1-\lambda}$ $\Rightarrow \Sigma_{10} = \frac{5 \cdot (1-2^{10})}{1-2} = \frac{5 \cdot (1-1024)}{-1} = 5 \cdot 1023 = 5115$</p> <p>Απάντηση: τις πρώτες δέκα μέρες θα βρεθούν συνολικά 5115 κρούσματα.</p>	<p>(α) Αναγνώριση Προόδου και Τύπος Σ_n 1+1</p> <p>Αντικατάσταση και πράξεις 1,5</p> <p>Αποτέλεσμα 0,5</p> <p>(β)</p> <p>(i) Στοιχεία Προόδου και Τύπος α_n 0,5+1</p> <p>Αντικατάσταση και πράξεις 1</p> <p>Αποτέλεσμα 0,5</p> <p>(ii) Τύπος Σ_n 1</p> <p>Αντικατάσταση και πράξεις 1,5</p> <p>Αποτέλεσμα 0,5</p>
-------------------	--	--

B2. Στο διπλανό σχήμα το $AG\Delta B$ είναι ημικύκλιο με κέντρο K και διάμετρο $AB = 8\text{cm}$. Αν η γωνία $\widehat{AK\Gamma} = 45^\circ$ και το KEB είναι ημικύκλιο με διάμετρο την KB , να υπολογίσετε:



- (α) το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής
 (β) την περίμετρο της σκιασμένης περιοχής.

(Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π)

Λύση:

(α) ακτίνα ημικυκλίου $AG\Delta B$, $R = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}$

ακτίνα ημικυκλίου KEB , $\rho = \frac{KB}{2} = \frac{4}{2} = 2\text{cm}$

$\widehat{AK\Gamma} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{\Gamma KB} = 135^\circ$

$E_{\sigma\kappa} = E_{\text{τομέα}(K\Gamma B)} + E_{\text{ημικυκλίου}} =$

$= \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ} + \frac{\pi \rho^2}{2}$

$= \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 135^\circ}{360^\circ} + \frac{\pi \cdot 2^2}{2}$

$= 6\pi + 2\pi = 8\pi \text{ cm}^2$

(β) $\Pi_{\sigma\kappa} = (K\Gamma) + \gamma_{G\Delta B} + \gamma_{KEB} =$

$= 4 + \frac{2\pi R \mu^\circ}{360^\circ} + \frac{2\pi \rho}{2} =$

$= 4 + \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 135^\circ}{360^\circ} + \frac{2\pi \cdot 2}{2} =$

$= 4 + 3\pi + 2\pi = (4 + 5\pi)\text{cm}$

(α)

$R = 4\text{cm}$ 0,5

$\rho = 2\text{cm}$ 0,5

$\widehat{\Gamma KB} = 135^\circ$ 0,5

Άθροισμα

εμβαδών($E_{\sigma\kappa}$) 1

$E_{\text{τομέα}K\Gamma B}$ 1

$E_{\text{ημ} KEB}$ 1

Αποτέλεσμα 0,5

(β)

Σχέση $\Pi_{\sigma\kappa}$ 1,5

$K\Gamma = R$ 0,5

Υπολογισμός

$\gamma_{G\Delta B}$ 1

Υπολογισμός

γ_{KEB} 1

Πράξεις 0,5

Αποτέλεσμα 0,5

B3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(x) = 3x^2 + x - 1 \text{ και } g(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

(α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +3} g(x)$ **(4 μονάδες)**

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$

(6 μονάδες)

Λύση:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +3} g(x) = \lim_{x \rightarrow +3} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} \right) \left(\frac{0}{0} \right)$ Απροσδιόριστη μορφή

$$\lim_{x \rightarrow +3} g(x) = \lim_{x \rightarrow +3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +3} \frac{(x + 3)}{(x + 1)} =$$

$$= \frac{3+3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(β) $f(x) = 3x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x + 1$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(1) = 6 \cdot 1 + 1 = 7$$

Για $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 3 + 1 - 1 = 3$, άρα $A(1, 3)$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$\psi - \psi_1 = \lambda_{\varepsilon\varphi}(x - x_1) \Leftrightarrow \psi - 3 = 7 \cdot (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \psi - 3 = 7x - 7 \Leftrightarrow \psi = 7x - 7 + 3 \Leftrightarrow \psi = 7x - 4$$

(α)

Υπολογισμός

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **2**

Υπολογισμός

$\lim_{x \rightarrow +3} g(x)$

Απροσδιόριστη μορφή **0,5**

Παραγοντοποίηση

Αποτέλεσμα **1**
0,5

(β)

Παράγωγος **1**

Εύρεση κλίσης **1**

Εύρεση σημείου **1**

Εξίσωση εφαπτ. **1**

Αντικατάσταση **1**

Εύρεση εξίσωσης

ευθείας **1**