

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ
ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΕΤΡΑΜΗΝΩΝ 2020-21
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα**
3. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
4. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κλπ.
5. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
6. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής η οποία πρέπει να φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
7. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις του Μέρους Α.

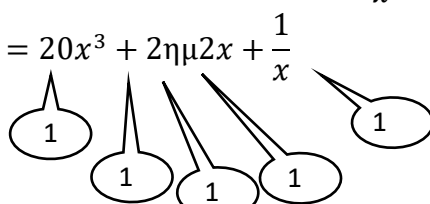
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 5x^4 - \sin 2x + \ln x, \quad x > 0$$

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

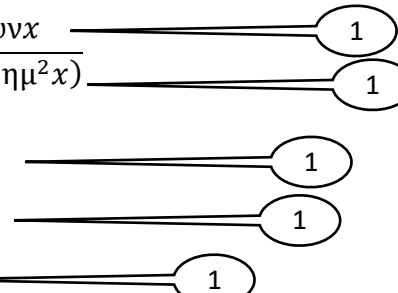
Λύση:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 20x^3 - (2x)'(-\eta\mu 2x) + \frac{1}{x} \\ &= 20x^3 + 2\eta\mu 2x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$


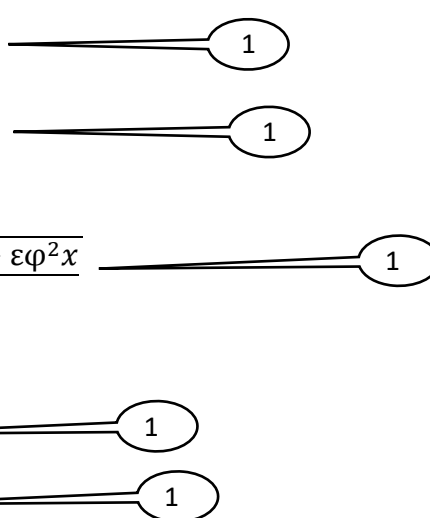
A2. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu 2x}{1 - \sin 2x} = \sigma\phi x$$

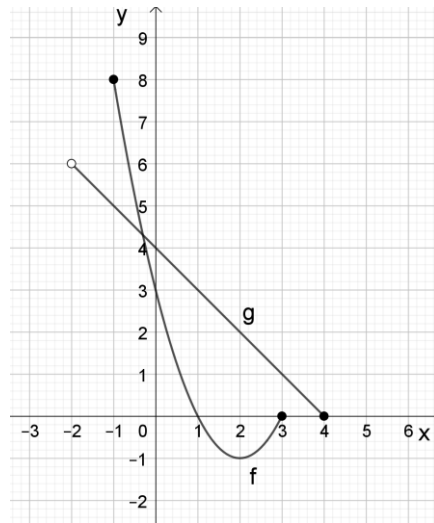
Λύση:

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu 2x}{1 - \sin 2x} &= \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{1 - (1 - 2\eta\mu^2 x)} \\ &= \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \\ &= \sigma\phi x \end{aligned}$$


Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu 2x}{1 - \sin 2x} &= \frac{\frac{2\varepsilon\phi x}{1 + \varepsilon\phi^2 x}}{1 - \frac{1 - \varepsilon\phi^2 x}{1 + \varepsilon\phi^2 x}} \\ &= \frac{\frac{2\varepsilon\phi x}{1 + \varepsilon\phi^2 x}}{\frac{1 + \varepsilon\phi^2 x - 1 + \varepsilon\phi^2 x}{1 + \varepsilon\phi^2 x}} \\ &= \frac{2\varepsilon\phi x}{2\varepsilon\phi^2 x} \\ &= \frac{1}{\varepsilon\phi x} \\ &= \sigma\phi x \end{aligned}$$


- A3.** Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f: A \rightarrow f(A)$ και $g: B \rightarrow g(B)$.
 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x = 2$.



Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να υπολογίσετε τις πιο κάτω τιμές:

- α) $(f - g)(2)$
- β) $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$
- γ) $e^{g(4)}$
- δ) $f'(2)$
- ε) $g^{-1}(3)$

Λύση:

- α) $(f - g)(2) = f(2) - g(2) \quad \text{0,5}$
 $= -1 - 2$
 $= -3 \quad \text{0,5}$
- β) $\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} \quad \text{0,5}$
 $= \frac{0}{3}$
 $= 0 \quad \text{0,5}$
- γ) $e^{g(4)} = e^0 \quad \text{0,5}$
 $= 1 \quad \text{0,5}$
- δ) $f'(2) = 0 \quad \text{1}$
- ε) $g^{-1}(3) = 1 \quad \text{1}$

A4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log_3(3^x + 8) = 2 - x$$

Λύση:

$$3^x + 8 > 0, \text{ ισχύει } \forall x \in \mathbb{R}$$

0,5

$$\log_3(3^x + 8) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 8 = 3^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 8 = \frac{9}{3^x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} + 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x + 9) \cdot (3^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 9 = 0 \text{ ή } 3^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x = -9 \text{ ή } 3^x = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Αδύνατη } x = 0 \text{ (δεκτή)}$$

0,5

1

0,5

0,5

0,5

1

0,5

Εναλλακτικά:

$$\text{Θέτουμε } 3^x = \omega$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 + 8 \cdot \omega - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega + 9) \cdot (\omega - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = -9 \text{ ή } \omega = 1$$

$$\Leftrightarrow 3^x = -9 \text{ ή } 3^x = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Αδύνατη } x = 0 \text{ (δεκτή)}$$

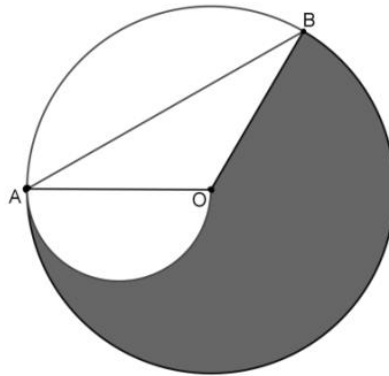
0,5

0,5

1

0,5

A5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) με χορδή $AB = \lambda_3$ και ημικύκλιο με διάμετρο AO . Αν $AO = 12 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου σκιασμένου χωρίου.



Λύση:

Δεδομένου ότι $AB = \lambda_3$, η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ του μικρότερου τόξου AB είναι κεντρική γωνία ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο. Άρα:

$$A\hat{O}B = \hat{K}_3 = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

0,5

0,5

Δεδομένου ότι η διάμετρος του ημικυκλίου είναι $AO = 12 \text{ cm}$, η ακτίνα του ημικυκλίου είναι:

$$\rho = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

1

Το εμβαδόν του μικτόγραμμου σκιασμένου χωρίου είναι:

$$E = E_{\text{κύκλου}} - E_{\text{κ.τομ.ΑΟΒ}} - E_{\text{ημικυκλίου}}$$

$$= \pi R^2 - \frac{\pi R^2 (A\hat{O}B)}{360^\circ} - \frac{\pi \rho^2}{2}$$

$$= \pi \cdot 12^2 - \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{\pi \cdot 6^2}{2}$$

$$= 144\pi - 48\pi - 18\pi$$

$$= 78\pi \text{ cm}^2$$

0,5

0,5

0,5

Η περίμετρος του μικτόγραμμου σκιασμένου χωρίου είναι:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \Pi_{\text{κύκλου}} - \gamma_{AB} + OB + \Pi_{\text{ημικυκλίου}} && 0,5 \\
 &= 2\pi R - \frac{2\pi R(A\hat{O}B)}{360^\circ} + R + \frac{2\pi\rho}{2} \\
 &= 2\pi \cdot 12 - \frac{2\pi \cdot 12 \cdot 120^\circ}{360^\circ} + 12 + 6\pi \\
 &= 24\pi - 8\pi + 12 + 6\pi && 0,5 \\
 &= (12 + 22\pi) \text{ cm} && 0,5
 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά:

Δεδομένου ότι $AB = \lambda_3$, η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία του μικρότερου τόξου AB είναι κεντρική γωνία ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο. Άρα η γωνία $A\hat{O}B$ που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο τόξο AB είναι:

$$A\hat{O}B = 360^\circ - \hat{K}_3 = 360^\circ - \frac{360^\circ}{3} = 240^\circ \quad 1$$

Δεδομένου ότι η διάμετρος του ημικυκλίου είναι $AO = 12 \text{ cm}$, η ακτίνα του ημικυκλίου είναι:

$$\rho = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm} \quad 1$$

Το εμβαδόν του μικτόγραμμου σκιασμένου χωρίου είναι:

$$\begin{aligned}
 E &= E_{\text{κ.τομ.ΑΟΒ}} - E_{\text{ημικυκλίου}} && 0,5 \\
 &= \frac{\pi R^2(A\hat{O}B)}{360^\circ} - \frac{\pi\rho^2}{2} \\
 &= \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 240^\circ}{360^\circ} - \frac{\pi \cdot 6^2}{2} && 0,5 \\
 &= 96\pi - 18\pi && 0,5 \\
 &= 78\pi \text{ cm}^2 && 0,5
 \end{aligned}$$

Η περίμετρος του μικτόγραμμου σκιασμένου χωρίου είναι:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \gamma_{AB} + OB + \Pi_{\text{ημικυκλίου}} && 0,5 \\
 &= \frac{2\pi R(A\hat{O}B)}{360^\circ} + R + \frac{2\pi\rho}{2} \\
 &= \frac{2\pi \cdot 12 \cdot 240^\circ}{360^\circ} + 12 + 6\pi && 0,5 \\
 &= 16\pi + 12 + 6\pi && 0,5 \\
 &= (12 + 22\pi) \text{ cm} && 0,5
 \end{aligned}$$

A6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \lambda, & x \leq 1 \\ \kappa x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ και λ .

Λύση:

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο \mathbb{R} .

Συνεπώς είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Αφού είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

Είναι:

$$f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + \lambda = 4 + \lambda$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (\kappa x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3x + \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \kappa + 2 = 4 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \kappa = \lambda + 2 \quad (I)$$

Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\kappa x + 2 - 4 - \lambda}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\kappa x + 2 - \kappa - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\kappa(x - 1)}{x - 1} \\ &= \kappa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x + \lambda - 4 - \lambda}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Άρα: $\kappa = 5$.

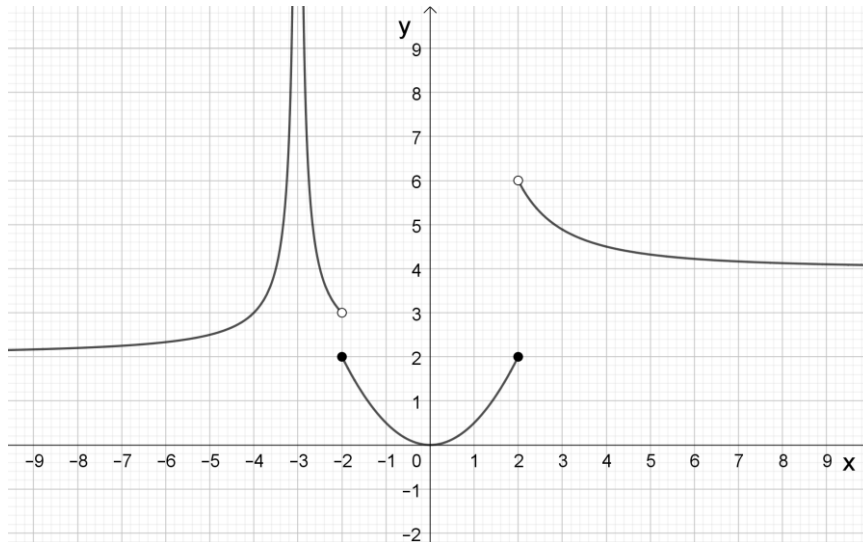
Από την σχέση (I):

$$\begin{aligned} \kappa = \lambda + 2 &\Leftrightarrow 5 = \lambda + 2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 3 \end{aligned}$$

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις του Μέρους Β.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. α) Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο x_0 του πεδίου ορισμού της. (2μον.)

β) Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g: \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow [0, +\infty)$



- i) Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x = 2$ (αιτιολογώντας την απάντησή σας). (2μον.)
- ii) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x)$ (4μον.)
- iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g . (1μον.)
- iv) Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση g είναι επί (αιτιολογώντας την απάντησή σας). (1μον.)

Λύση:

α) Έστω f συνάρτηση και x_0 είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, το οποίο είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 , όταν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (2)

(Αν γράφεται μόνο το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, να δίνονται οι 2 μονάδες)

β) i) Η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο $x = 2$, γιατί:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 6$ (1) (1)

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = +\infty$ (1)

iii) $g(A) = [0, +\infty)$ (1)

iv) Η συνάρτηση g είναι επί, αφού $g(A) = [0, +\infty)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της είναι ίσο με το πεδίο τιμών της. (0,5) (0,5)

B2. Δίνεται η συνάρτηση που ορίζεται από την εξίσωση: $x^2 + y^3 + x^2y = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(1+y)}{x^2 + 3y^2}$$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της με τεταγμένη $y = 1$ και τετμημένη θετική.

Λύση:

α) Είναι:

$$\begin{aligned} x^2 + y^3 + x^2y = 9 &\Rightarrow 2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} + 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} = 0 && \text{2,5} \\ \Leftrightarrow 3y^2 \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{dy}{dx} &= -2x - 2xy && \text{1} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} (3y^2 + x^2) &= -2x(1+y) && \text{1} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x(1+y)}{x^2 + 3y^2} && \text{0,5} \end{aligned}$$

β) Για $y = 1$:

$$\text{0,5}$$

$$x^2 + 1^3 + x^2 \cdot 1 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (δεκτή)} \text{ ή } x = -2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

$$\text{1}$$

Το σημείο είναι το $A(2, 1)$

Η κλίση της εφαπτομένης της δοσμένης καμπύλης στο σημείο $A(2, 1)$ είναι:

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon\varphi} &= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{A(2,1)} && \text{0,5} \\ &= -\frac{2 \cdot 2 \cdot (1+1)}{2^2 + 3 \cdot 1^2} && \text{0,5} \\ &= -\frac{8}{7} && \text{0,5} \end{aligned}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $A(2, 1)$ είναι:

$$\text{0,5}$$

$$y - y_0 = \lambda_{\varepsilon\varphi}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{8}{7}(x - 2)$$

$$\text{1}$$

$$\Leftrightarrow 7y + 8x - 23 = 0$$

$$\text{0,5}$$

B3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = \ln(x - 2) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(x + 2)$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1} της f . (4μον.)
- β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f^{-1} και στη συνέχεια τη συνάρτηση f στο ίδιο σύστημα αξόνων σημειώνοντας τα σημεία τομής της κάθε γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (2μον.)
- γ) Να ορίσετε την συνάρτηση $f + g$ (τύπος και πεδίο ορισμού) (2μον.)
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $(f + g)(x) = 0$ (2μον.)

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} = (2, +\infty)$$

0,5

Θα εξετάσουμε αν η f είναι 1-1:

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in A \text{ με } f(x_1) = f(x_2)$$

0,5

$$\Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \quad (\text{Η συνάρτηση } y = \ln x \text{ είναι 1-1})$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

0,5

Άρα η f είναι 1-1.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι επί:

$$y = \ln(x - 2) \Leftrightarrow e^y = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x = e^y + 2$$

0,5

$$x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0 \text{ το οποίο ισχύει } \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Συνεπώς, } f(A) = \mathbb{R}$$

0,5

0,5

Άρα η f είναι επί, γιατί το σύνολο τιμών της είναι ίσο με το πεδίο τιμών της.

Αφού η f είναι 1-1 και επί, αντιστρέφεται.

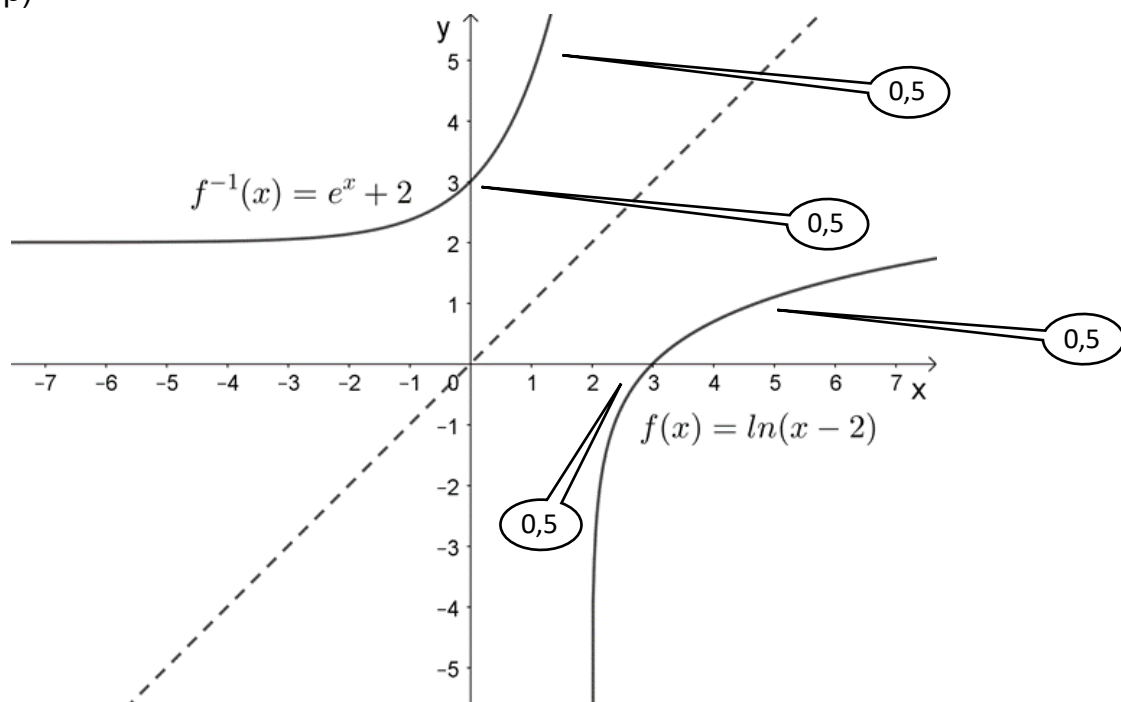
0,5

Συνεπώς,

$$f^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

0,5

β)



γ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (2, +\infty)$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το:

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\} = (-2, +\infty)$$

Άρα: $A \cap B = (2, +\infty)$

Έτσι: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \ln(x-2) + \ln(x+2)$, με $D_{f+g} = (2, +\infty)$

δ) Είναι: $(f + g)(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) + \ln(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln((x-2)(x+2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ (δεκτή) ή } x = -\sqrt{5} \text{ (απορρίπτεται)}$$