

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (Ι) ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : ΤΡΙΤΗ, 22 ΜΑΪΟΥ 2012

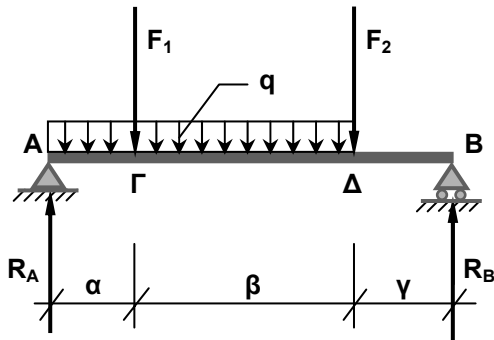
ΩΡΑ : 11:00 – 13:30

ΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄ (48 μονάδες)

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες.

1. Για τη δοκό του σχήματος 1, να γράψετε την εξίσωση για τον υπολογισμό της τέμνουσας δύναμης δεξιά του σημείου Δ ($Q_{\Delta}^{\text{δεξ.}}$).



ΣΧΗΜΑ 1

$$Q_{\Delta}^{\text{δεξ.}} = R_A - F_1 - F_2 - q \cdot (a + b)$$

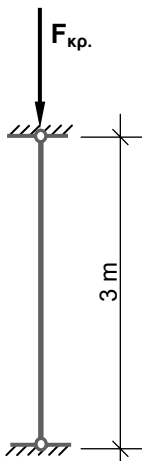
ή

$$Q_{\Delta}^{\text{δεξ.}} = -R_B$$

2. Ράβδος ορθγωνικής διατομής και με πραγματικό μήκος 3 m στηρίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Να υπολογίσετε το μέγιστο φορτίο που μπορεί να μεταφέρει χωρίς να εκδηλώνεται σε αυτή λυγισμός.

Δίνονται:

$$E = 200 \text{ kN/mm}^2, I_x = 312500 \text{ mm}^4, I_y = 112500 \text{ mm}^4$$



Ελεύθερο μήκος λυγισμού

$$\ell = L = 3 \text{ m}$$

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού

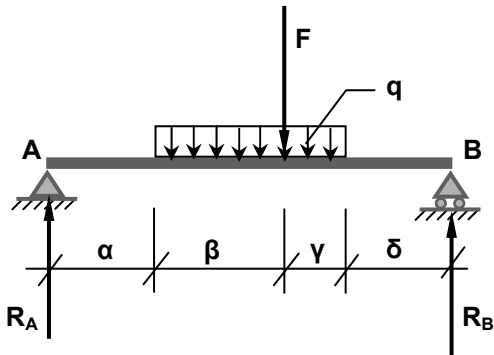
$$F_{\text{κρ.}} = \frac{\pi^2 E I_{\text{ελ.}}}{\ell^2}$$

$$F_{\text{κρ.}} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 112500 \text{ mm}^4}{(3 \cdot 10^3 \text{ mm})^2}$$

$$F_{\text{κρ.}} = 24670 \text{ N} = \underline{24,67 \text{ kN}}$$

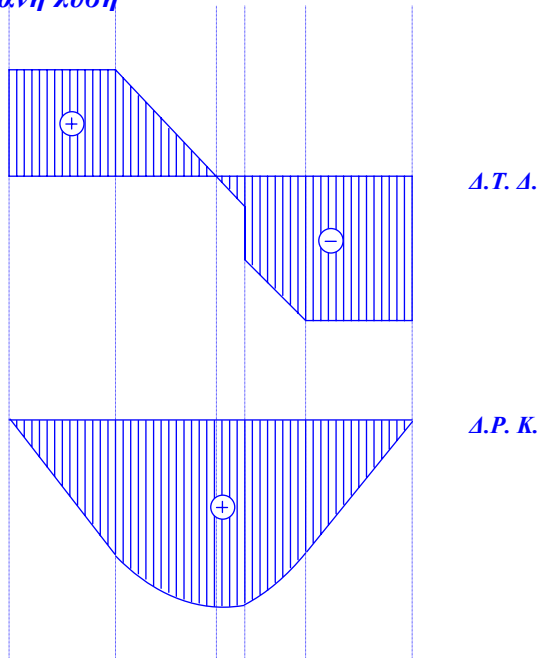
ΣΧΗΜΑ 2

3. Αμφιέρειστη δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Να σχεδιάσετε μια πιθανή μορφή των διαγραμμάτων των τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.) και των ροπών κάμψης (Δ.Ρ.Κ.) της δοκού.

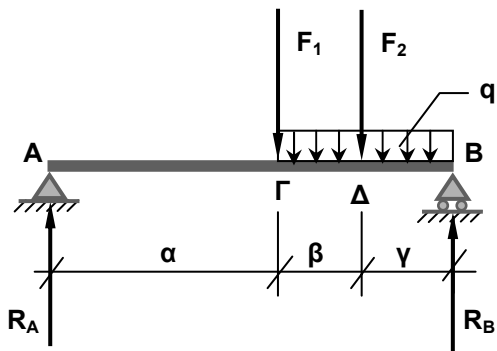


ΣΧΗΜΑ 3

Μια πιθανή λύση



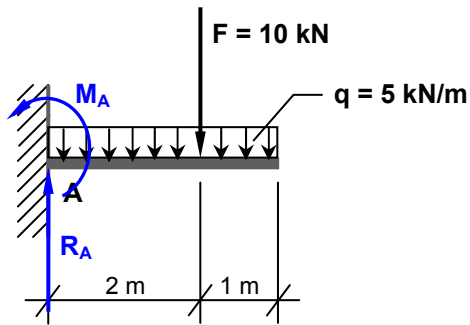
4. Για τη δοκό του σχήματος 4, να γράψετε την εξίσωση για τον υπολογισμό της ροπής κάμψης στο σημείο Δ.



$$M_{\Delta} = R_A \cdot (\alpha + \beta) - F_1 \cdot \beta - \frac{q \cdot \beta^2}{2}$$

ΣΧΗΜΑ 4

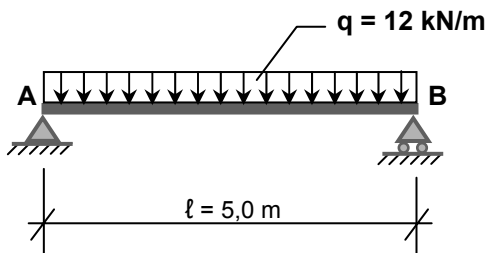
5. Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στη στήριξη της δοκού προβόλου του σχήματος 5.



ΣΧΗΜΑ 5

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \\ R_A - 10 - 5 \cdot 3 &= 0 \\ \underline{R_A = 25 \text{ kN}} \\ \Sigma M &= 0 \\ -M_A + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 1,5 &= 0 \\ \underline{M_A = 42,5 \text{ kNm}}\end{aligned}$$

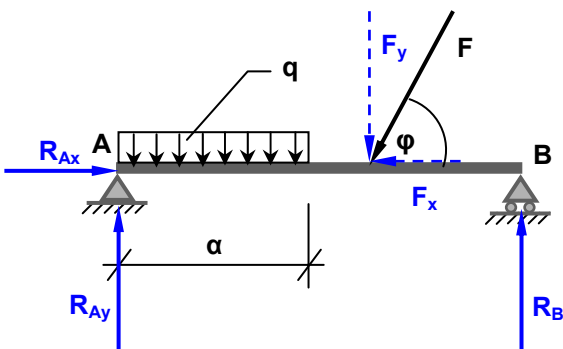
6. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ροπή κάμψης για τη δοκό του σχήματος 6 που φορτίζεται με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q = 12 \text{ kN/m}$ σε όλο το μήκος της $\ell = 5 \text{ m}$.



ΣΧΗΜΑ 6

$$M_{max} = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{12 \cdot 5^2}{8} = \underline{37,5 \text{ kNm}}$$

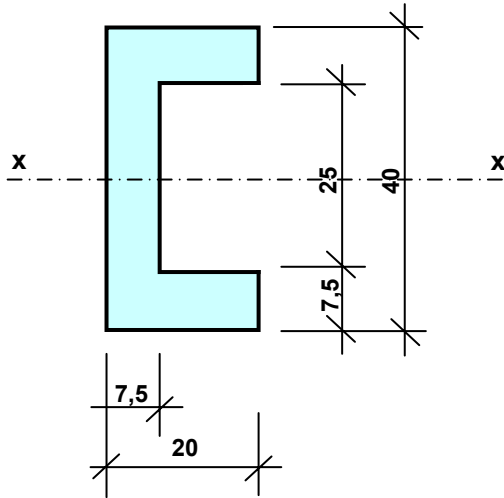
7. Για τη δοκό του σχήματος 7, να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και να γράψετε την εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων στην κατακόρυφη κατεύθυνση ($\Sigma F_y = 0$).



ΣΧΗΜΑ 7

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \\ F_y &= F \cdot \eta\mu\phi \\ R_{Ay} + R_B - q \cdot a - F_y &= 0\end{aligned}$$

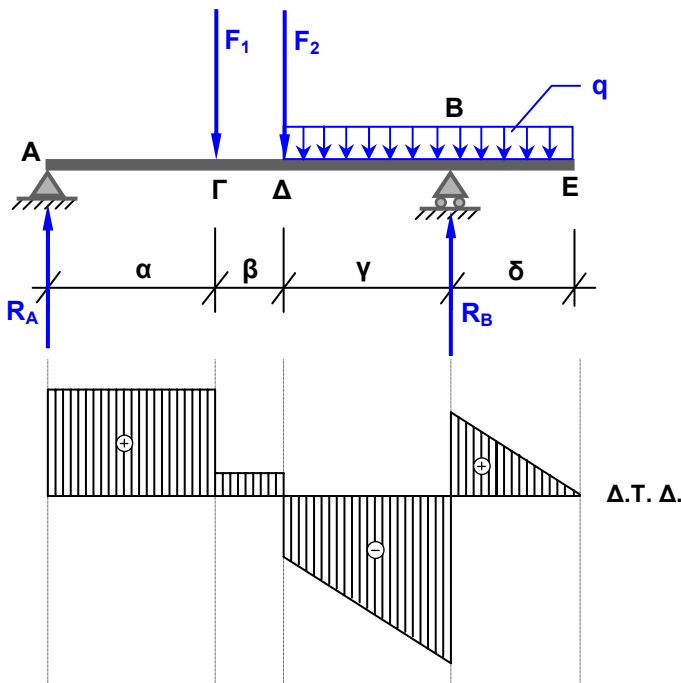
8. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της διατομής που φαίνεται στο σχήμα 8, ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$. (Οι διαστάσεις είναι σε cm.)



$$I_{x-x} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} - \frac{12,5 \cdot 25^3}{12}$$
$$\underline{I_{x-x} = 90390,63 \text{ cm}^4}$$

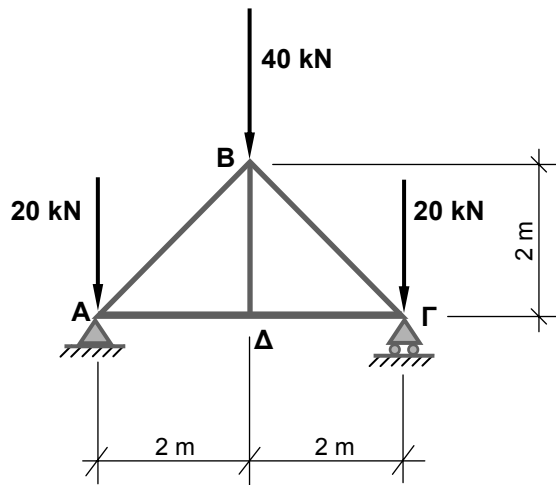
ΣΧΗΜΑ 8

9. Στο σχήμα 9 δίνονται η προέχουσα δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων ($\Delta.T.\Delta.$). Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και τα φορτία που καταπονούν τη δοκό, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο $\Delta.T.\Delta.$



ΣΧΗΜΑ 9

10. Να υπολογίσετε το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης που αναπτύσσεται στη ράβδο **AB** του δικτυώματος του σχήματος 10.

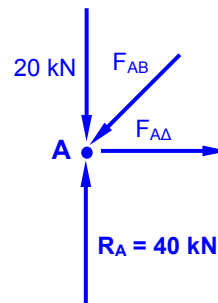


ΣΧΗΜΑ 10

Λόγω συμμετρίας

$$R_A = R_\Gamma = \frac{40 + 2 \cdot 20}{2} = 40 \text{ kN}$$

Κόμβος A

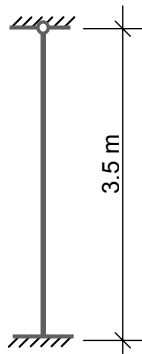


$$\Sigma F_y = 0$$

$$40 - 20 - F_{AB} \cdot \eta\mu 45^\circ = 0$$

$$\underline{F_{AB} = 28,3 \text{ kN (θλιβόμενη)}}$$

11. Να υπολογίσετε τη λυγρότητα της ράβδου του σχήματος 11. Η ράβδος έχει ορθογωνική διατομή 8 x 10 cm.



ΣΧΗΜΑ 11

Ελεύθερο μήκος λογισμού

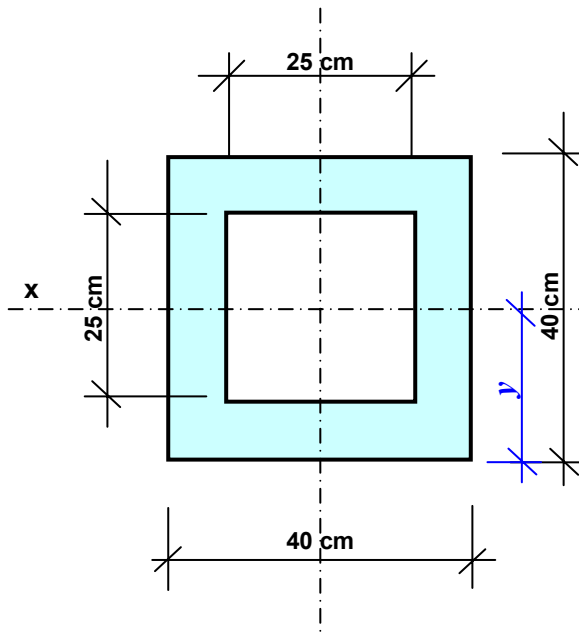
$$\ell = 0,7 \cdot L = 0,7 \cdot 350 = 245 \text{ cm}$$

$$i_{ελ.} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 8^3}{12}} = \sqrt{\frac{5120}{12}} = \sqrt{426,67} = 20,65 \text{ cm}$$

Λυγρότητα

$$\lambda = \frac{\ell}{i_{ελ.}} = \frac{245}{20,65} = \underline{11,82}$$

12. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης W_x της διατομής που φαίνεται στο σχήμα 12.



$$I_{x-x} = \frac{40 \cdot 40^3}{12} - \frac{25 \cdot 25^3}{12} = 180781,25 \text{ cm}^4$$

$$W_x = \frac{I_{x-x}}{y} = \frac{180781,25}{20} = \underline{\underline{9039,06 \text{ cm}^3}}$$

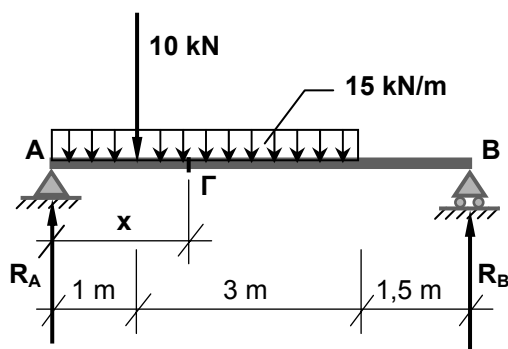
ΣΧΗΜΑ 12

ΜΕΡΟΣ Β' (32 μονάδες)

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 8 μονάδες.

13. Για τη δοκό που φαίνεται στο σχήμα 13:

- (α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις R_A και R_B .
- (β) Να υπολογίσετε την απόσταση (x) του σημείου Γ από το σημείο A , στο οποίο η τέμνουσα δύναμη έχει μηδενική τιμή (αλλάζει πρόσημο).



ΣΧΗΜΑ 13

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_A = 0$$

$$10 \cdot 1 + 15 \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 5,5 = 0$$

$$10 + 120 - 5,5R_B = 0$$

$$\underline{R_B = 23,64 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot 5,5 - 10 \cdot 4,5 - 15 \cdot 4 \cdot 3,5 = 0$$

$$5,5R_A - 45 - 210 = 0$$

$$\underline{R_A = 46,36 \text{ kN}}$$

Έλεγχος $\Sigma F_y = 0$

$$46,36 + 23,64 - 10 - 15 \cdot 4 = 0$$

Θέση μηδενικής τέμνουσας δύναμης

$$R_A - 10 - 15 \cdot x = 0$$

$$46,36 - 10 - 15x = 0$$

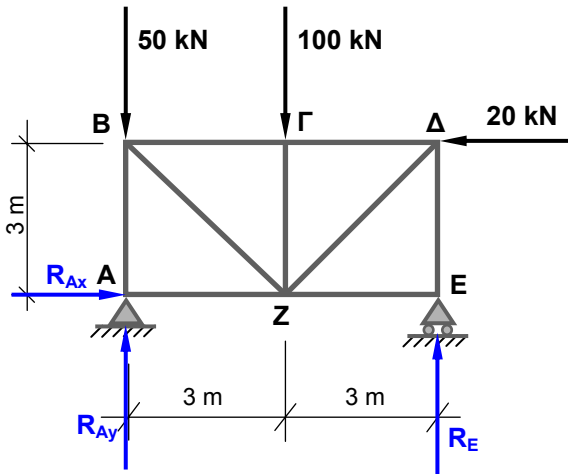
$$36,36 = 15x$$

$$\underline{x = 2,42 \text{ m (από το σημείο A)}}$$

14. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο σχήμα 14.

(α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **E**.

(β) Να υπολογίσετε το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **ΓΔ**, **ZΔ** και **ZE**, με τη μέθοδο των τομών.



ΣΧΗΜΑ 14

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_{Ax} - 20 = 0 \rightarrow \underline{R_{Ax} = 20 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$100 \cdot 3 - 20 \cdot 3 - R_E \cdot 6 = 0$$

$$300 - 60 - 6R_E = 0$$

$$\underline{R_E = 40 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_E = 0$$

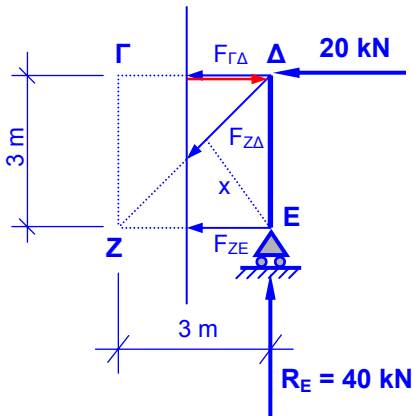
$$R_A \cdot 6 - 50 \cdot 6 - 100 \cdot 3 - 20 \cdot 3 = 0$$

$$6R_A - 300 - 300 - 60 = 0$$

$$\underline{R_A = 110 \text{ kN}}$$

Έλεγχος $\Sigma F_y = 0$

$$110 + 40 - 50 - 100 = 0$$



Ράβδος ΓΔ

$$\Sigma M_Z = 0$$

$$- F_{\Gamma\Delta} \cdot 3 - 20 \cdot 3 - 40 \cdot 3 = 0$$

$$\underline{F_{\Gamma\Delta} = -60 \text{ kN}} \rightarrow \underline{\text{θλιβόμενη}}$$

Ράβδος ΖΔ

$$\Sigma M_E = 0$$

$$- F_{Z\Delta} \cdot x + F_{\Gamma\Delta} \cdot 3 - 20 \cdot 3 = 0$$

$$- F_{Z\Delta} \cdot 2,12 + 60 \cdot 3 - 20 \cdot 3 = 0$$

$$- 2,12F_{Z\Delta} + 180 - 60 = 0$$

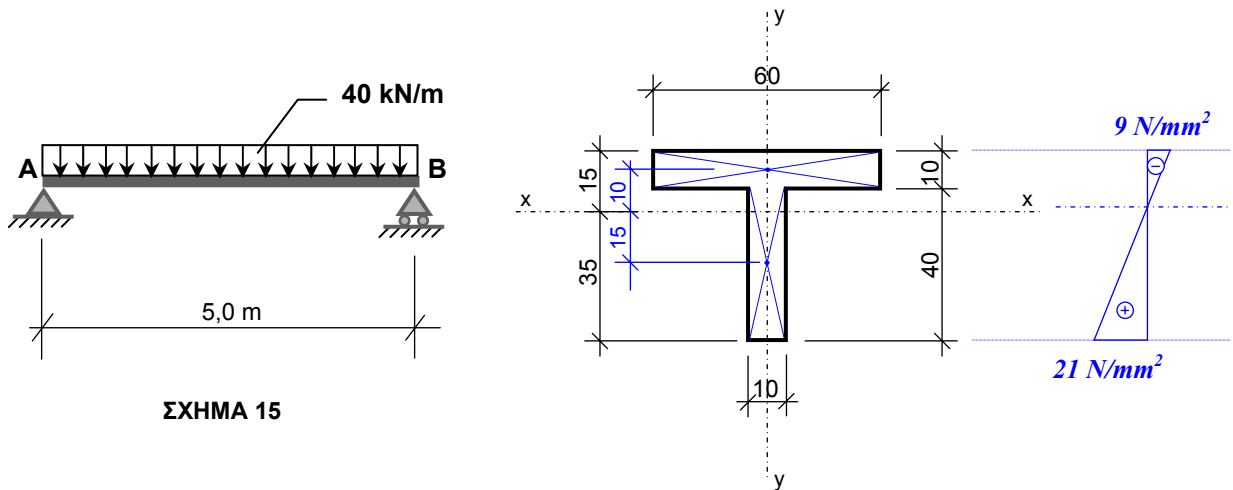
$$\underline{F_{Z\Delta} = 56,6 \text{ kN}} \rightarrow \underline{\text{εφελκρόμενη}}$$

Ράβδος ΖΕ

$$\Sigma M_\Delta = 0$$

$$- F_{ZE} \cdot 3 = 0 \rightarrow \underline{F_{ZE} = 0}$$

15. Αμφιέριστη δοκός μήκους **5 m** και με διατομή **T** όπως φαίνεται στο σχήμα 15, φορτίζεται με συνεχές ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο **q = 40 kN/m**. Να υπολογίσετε τις μέγιστες τάσεις θλίψης και εφελκυσμού και να σχεδιάσετε το διάγραμμά τους. Δίνεται η θέση του κεντροβαρικού άξονα **x - x**. (Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm.)



ΣΧΗΜΑ 15

$$M_{max} = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{40 \cdot 5^2}{8} = 125 \text{ kNm}$$

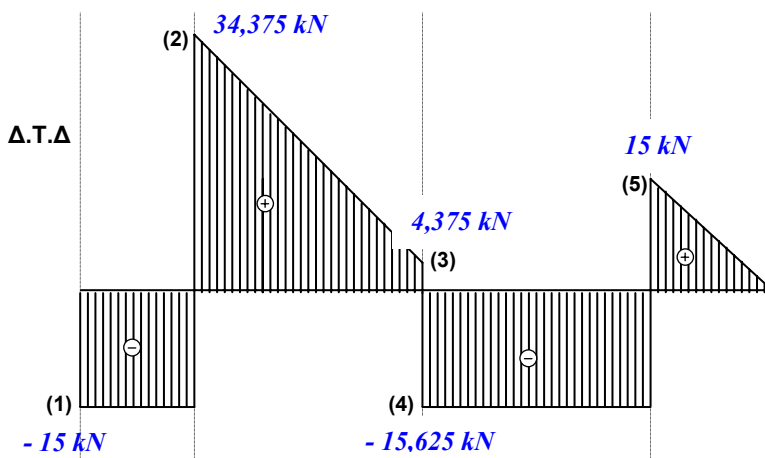
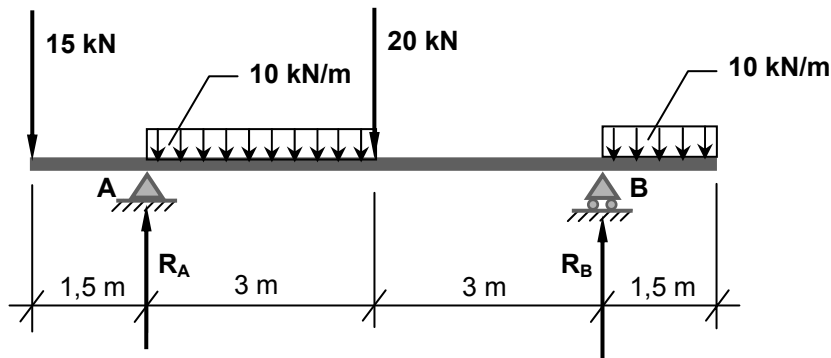
$$I_{x-x} = \left(\frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600 \cdot 10^2 \right) + \left(\frac{10 \cdot 40^3}{12} + 400 \cdot 15^2 \right) = 65000 + 143333 = 208333 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ Ncm} \cdot 15 \text{ cm}}{208333 \text{ cm}^4} = 900 \text{ N/cm}^2 = \underline{9 \text{ N/mm}^2}$$

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ Ncm} \cdot 35 \text{ cm}}{208333 \text{ cm}^4} = 2100 \text{ N/cm}^2 = \underline{21 \text{ N/mm}^2}$$

16. Δίνεται αμφιπροέχουσα δοκός, η οποία φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 16, καθώς και το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων της.

- (α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις R_A και R_B .
 (β) Να υπολογίσετε και να αναγράψετε στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων, τις τιμές των τεμνουσών δυνάμεων στα σημεία (1), (2), (3), (4) και (5).



ΣΧΗΜΑ 16

Τέμνουσες δυνάμεις

$$Q_{(1)} = -15 \text{ kN}$$

$$Q_{(2)} = -15 + 49,375 = \underline{34,375 \text{ kN}}$$

$$Q_{(3)} = -15 + 49,375 - 10 \cdot 3 = \underline{4,375 \text{ kN}}$$

$$Q_{(4)} = -15 + 49,375 - 10 \cdot 3 - 20 = \underline{-15,625 \text{ kN}}$$

$$Q_{(5)} = -15 + 49,375 - 10 \cdot 3 - 20 + 30,625 = \underline{15 \text{ kN}}$$

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-15 \cdot 1,5 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20 \cdot 3 - R_B \cdot 6 + 10 \cdot 1,5 \cdot 6,75 = 0$$

$$183,75 = 6R_B$$

$$\underline{R_B = 30,625 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-15 \cdot 7,5 + R_A \cdot 6 - 10 \cdot 3 \cdot 4,5 - 20 \cdot 3 + 10 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 0$$

$$6R_A = 296,25$$

$$\underline{R_A = 49,375 \text{ kN}}$$

Έλεγχος $\Sigma F_y = 0$

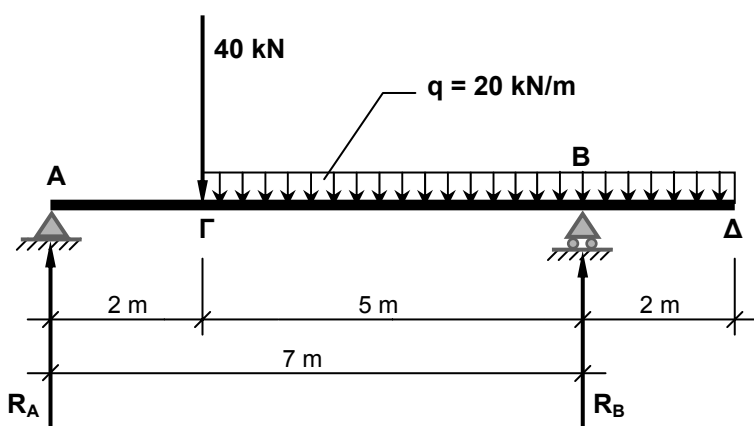
$$49,375 + 30,625 - 15 - 10 \cdot 3 - 20 - 10 \cdot 1,5 = 0$$

ΜΕΡΟΣ Γ΄

Η ορθή απάντηση βαθμολογείται με 20 μονάδες.

17. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 17.

- (α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- (β) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**.
- (γ) Να υπολογίσετε την απόσταση από το σημείο στήριξης **A**, όπου αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης **M_{max}**.
- (δ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M_{max}**.
- (ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων **Q** και των ροπών κάμψης **M** και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**, καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M_{max}**.



ΣΧΗΜΑ 17

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \\ 40 \cdot 2 + 20 \cdot 7 \cdot 5,5 - R_B \cdot 7 &= 0 \\ 80 + 770 - 7R_B &= 0 \\ 7R_B &= 850 \\ \underline{R_B} &= \underline{121,43 \text{ kN}} \end{aligned}$$

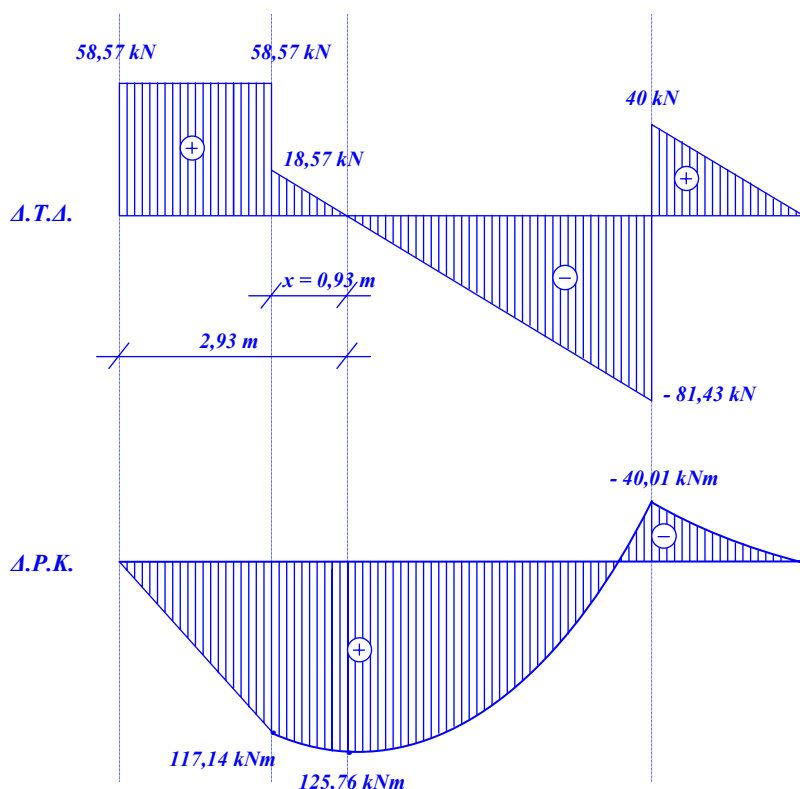
$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0 \\ R_A \cdot 7 - 40 \cdot 5 - 20 \cdot 7 \cdot 1,5 &= 0 \\ 7R_A - 200 - 210 &= 0 \\ 7R_A &= 410 \\ \underline{R_A} &= \underline{58,57 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Έλεγχος

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ 58,57 + 121,43 - 40 - 20 \cdot 7 &= 0 \end{aligned}$$

Τέμνουσες δυνάμεις

$$\begin{aligned} Q_{A(\delta\epsilon\zeta)} &= R_A = \underline{58,57 \text{ kN}} \\ Q_{\Gamma(\alpha\rho)} &= Q_{A(\delta\epsilon\zeta)} = \underline{58,57 \text{ kN}} \\ Q_{\Gamma(\delta\epsilon\zeta)} &= 58,57 - 40 = \underline{18,57 \text{ kN}} \\ Q_{B(\alpha\rho)} &= 58,57 - 40 - 20 \cdot 5 = \underline{-81,43 \text{ kN}} \\ Q_{B(\delta\epsilon\zeta)} &= 58,57 - 40 - 20 \cdot 5 + 121,43 = \\ &= \underline{40 \text{ kN}} \\ Q_{\Delta} &= 58,57 - 40 - 20 \cdot 7 + 121,43 = 0 \end{aligned}$$



Σημείο μηδενικής τέμνουσας δύναμης

$$R_A - F - q \cdot x = 0$$

$$58,57 - 40 - 20 \cdot x = 0$$

$$x = \underline{0,93 \text{ m}}$$

Απόσταση του σημείου της μηδενικής τέμνουσας δύναμης από το σημείο A

$$2 + 0,93 = \underline{2,93 \text{ m}}$$

Ροπές κάμψης

$$M_A = 0$$

$$M_G = 58,57 \cdot 2 = \underline{117,14 \text{ kNm}}$$

$$M_{max} = 58,57 \cdot 2,93 - 40 \cdot 0,93 - 20 \cdot 0,93 \cdot 0,465 = \underline{125,76 \text{ kNm}}$$

$$M_B = 58,57 \cdot 7 - 40 \cdot 5 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5 = \underline{-40,01 \text{ kNm}}$$

$$M_A = 58,57 \cdot 9 - 40 \cdot 7 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 121,43 \cdot 2 = \sim 0$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

<i>Ανάλυση δυνάμεων</i>	$F_x = F \cdot \text{συν}\varphi$ $F_y = F \cdot \eta\mu\varphi$
<i>Συνθήκες ισορροπίας</i>	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M = 0$
<i>Ροπές αδράνειας</i>	$I_{x-x} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x-x} = I_{y-y} = \frac{\pi D^4}{64}$
<i>Ακτίνα αδράνειας</i>	$i_x = \sqrt{\frac{I_{x-x}}{A}}$ $i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$
<i>Θεώρημα Στάινερ</i>	$I_{x-x} = I_x + Ad_y^2$ $I_{y-y} = I_y + Ad_x^2$
<i>Ροπές αντίστασης</i>	$W_x = \frac{I_{x-x}}{y}$ $W_x = \frac{bh^2}{6}$
<i>Απλή κάμψη</i>	$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$
<i>Λογισμός</i>	$F_{\text{κρ.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{ελ.}}}{\ell^2}$ $\lambda = \frac{\ell}{i_{\text{ελ.}}}$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ