ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

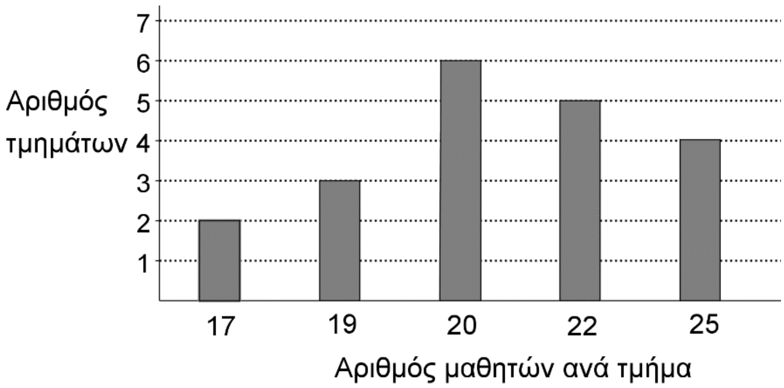
ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 27/5/2014 ΩΡΑ: 8:00 – 11:00

Προτεινόμενες Λύσεις

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζεται ο αριθμός των μαθητών ανά τμήμα σε ένα σχολείο.



α) Να υπολογίσετε το συνολικό αριθμό των τμημάτων του σχολείου.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των τμημάτων που έχουν λιγότερους από 20 μαθητές.

<u>Λύση</u>:

α) Συνολικός αριθμός τμημάτων του σχολείου : 2+3+6+5+4=20

β) Αριθμός τμημάτων που έχουν λιγότερους από 20 μαθητές: 2+3=5

2. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **Ο Δ Υ Σ Σ Ε Α Σ.**

<u>Λύση:</u>

ΣΣΣΟΔΥΕΑ

$$M_8{}^{\varepsilon} = \frac{8!}{3!} = 6720$$

3. Κύβος έχει όγκο $64\ cm^3$. Να υπολογίσετε:

α) Την ακμή του κύβου.

β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου.

<u>Λύση:</u>

α) $V = a^3$

$$a^3 = 64$$
$$a = 4\ cm$$

β) $E_{ολ} = 6α^2 = 6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16 = 96\ cm^2$

4. Η τιμή πώλησης μιας τηλεόρασης μετά από έκπτωση $20\ \%$ πάνω στην αρχική τιμή της είναι € 960. Να βρείτε την αρχική τιμή πώλησης της τηλεόρασης.

<u>Λύση:</u>

Αρχική τιμή πώλησης: $x = \frac{100 \cdot 960}{80} = €1200$

5. Ένα δοχείο σε σχήμα κώνου που έχει ύψος $36\ cm$ και ακτίνα βάσης $10\ cm$ είναι γεμάτο με λάδι. Αδειάζουμε το περιεχόμενο του κώνου σε ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης $15\ cm$ και ύψος $5\ cm$. Να εξετάσετε αν θα υπερχειλίσει το κυλινδρικό δοχείο και να δικαιολογήσετε πλήρως με μαθηματικές πράξεις την απάντηση σας.

<u>Λύση:</u>

$$V_{κώνου} = \frac{\pi R^2 υ}{3}$$
$$= \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 36}{3}$$
$$= 1200\pi\ cm^3$$

$$V_{κυλίνδρου} = \pi R^2 υ$$
$$= \pi \cdot 15^2 . 5$$
$$= 1125\pi\ cm^3$$

Θα υπερχειλίσει το κυλινδρικό δοχείο γιατί ο όγκος του κυλίνδρου είναι μικρότερος από τον όγκο του κώνου: $V_{κυλίνδρου} < V_{κώνου}$

6.	Το εμβαδόν της βάσης ορθού τετραγωνικού πρίσματος είναι $100\ cm^2$ και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του είναι $240\ cm^2$. Να υπολογίσετε: α) Το ύψος του πρίσματος. β) Τον όγκο του πρίσματος. **<u>Λύση:</u>** α) $E_\beta = 100\ cm^2 \Rightarrow \alpha^2 = 100 \ \Rightarrow \alpha = 10\ cm$ $$E_\pi = 240\ cm^2 \Rightarrow 4.10.\upsilon = 240\ cm^2 \Rightarrow\ \upsilon = 6\ cm$$ β)$V = E_\beta\ \upsilon \Rightarrow V = 100.6 \Rightarrow V = 600\ cm^3$	
7.	Σε μια φάρμα υπάρχουν 5 αγελάδες και 7 κατσίκια. Ο μέσος όρος του βάρους των αγελάδων είναι $85\ kg$ και ο μέσος όρος του βάρους όλων των ζώων είναι $43\ kg$. Να υπολογίσετε το μέσο όρο του βάρους των κατσικιών. **<u>Λύση:</u>** Σύνολο ζώων: $5\ +\ 7\ =\ 12$ $$\Sigma_{o\lambda} = 12 \cdot 43 = 516\ kg$$ $$\Sigma_{\alpha\gamma\varepsilon\lambda.} = 5 \cdot 85 = 425\ kg$$ $$\Sigma_{\kappa\alpha\tau\sigma.} = 516 - 425 = 91\ kg$$ $$\Rightarrow \bar{x} = \frac{91}{7} = 13\ kg$$	

8. Το παράπλευρο ύψος κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι ίσο με $5\sqrt{2}cm$ και σχηματίζει με τη βάση της γωνία $45°$. Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

β) Τον όγκο της πυραμίδας.

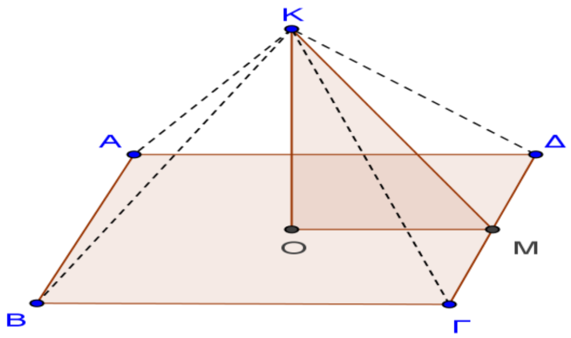
<u>Λύση:</u>

ΚΟΜΙσοσκελές τρίγωνο με ΚΟ=ΟΜ

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \upsilon \Rightarrow \upsilon^2 + \upsilon^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 2\,\upsilon^2 = 50$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = 25 \Rightarrow \upsilon = 5\ cm$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = 5 \Rightarrow a = 10\ cm$$



α) $E_{o\lambda} = E_\beta + E_\pi$

$$E_{o\lambda} = \alpha^2 + \frac{\Pi_\beta\ .\ h}{2}$$

$$E_{o\lambda} = 10^2 + \frac{40.5\sqrt{2}}{2}$$

$$E_{o\lambda} = \left(100 + 100\sqrt{2}\right) = 241{,}42cm^2$$

β) $V = \frac{E_\beta . \upsilon}{3}$

$$V = \frac{10^2 . 5}{3}$$

$$V = \frac{500}{3} = 166{,}67\ cm^3$$

9.	Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ιδίου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = P(B), P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(A) β) Αν $P(B) = \frac{7}{20}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες: i) $P(B - A)$ ii) $P(A' \cup B)$ **<u>Λύση:</u>** α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $$\Rightarrow \frac{3}{5} = P(A) + P(A) - \frac{1}{10}$$ $$\Rightarrow 2P(A) = \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{7}{20} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{20}$$ β)i)$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ $$\Rightarrow P(B - A) = \frac{7}{20} - \frac{1}{10}$$ $$\Rightarrow P(B - A) = \frac{1}{4}$$ ii)$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$ $$\Rightarrow P(A' \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A)$$ $$\Rightarrow P(A' \cup B) = 1 - \frac{7}{20} + \frac{7}{20} - \frac{1}{4}$$ $$\Rightarrow P(A' \cup B) = \frac{3}{4}$$	

10.	Δύο πόλεις Α και Β απέχουν μεταξύ τους $72\ Km$. Ένας ποδηλάτηςβρίσκεται στην πόλη Α και ένας πεζός βρίσκεται στην πόλη Β. Αναχωρούν ταυτόχρονα με σταθερές ταχύτητες. Αν κινηθούν προς την ίδια κατεύθυνση, ώστε ο ποδηλάτης να ακολουθεί τον πεζό, θα συναντηθούν μετά από 6 ώρες. Αν όμως ο ποδηλάτης κατευθυνθεί προς την πόλη Β και ο πεζός κατευθυνθεί προς την πόλη Α, τότε θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες. Να βρείτε την ταχύτητα του καθενός. **<u>Λύση:</u>** Ποδηλάτης $\longrightarrow S_1\ , u_1$ και Πεζός $\longrightarrow S_2\ , u_2$ Όταν κινηθούν προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν σε 6 ώρες και η απόσταση $\boldsymbol{S_1}$ που θα διανύσει ο ποδηλάτης δίνεται από τη σχέση: $$\boldsymbol{S'_1 = 72 + S'_2} \Rightarrow u_1 \cdot 6 = 72 + u_2 \cdot 6 \Rightarrow 6u_1 - 6u_2 = 72 \Rightarrow u_1 - u_2 = 12$$ Όταν κινηθούν ο ένας προς τον άλλο θα συναντηθούν σε 3 ώρες και η απόσταση που θα διανύσουν δίνεται από τη σχέση: $$\boldsymbol{S_1 + S_2 = 72} \Rightarrow u_1 \cdot 3 + u_2 \cdot 3 = 72 \Rightarrow 3u_1 + 3u_2 = 72 \Rightarrow u_1 + u_2 = 24$$ $$\left.\begin{aligned} u_1 - u_2 = 12 \\ u_1 + u_2 = 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2u_1 = 36 \Rightarrow u_1 = 18\ km/h \Rightarrow u_2 = 6\ km/h$$	

ΜΕΡΟΣ Β΄

1.	Ο κ. Κώστας κατάθεσε ένα κεφάλαιο στην τράπεζα με επιτόκιο $5\,\%$. Μετά από 4 μήνες, το σύνολο της κατάθεσης του συμπεριλαμβανομένων και των τόκων έγινε $€\,488000$. Στα πλαίσια των οικονομικών μέτρων, οι πρώτες $€\,100000$ του συνόλου της κατάθεσης του παρέμειναν χωρίς αποκοπή, ενώ στο ποσό πέραν των $€\,100000$ έγινε αποκοπή ύψους $37{,}5\,\%$. Να υπολογίσετε: α) Το αρχικό κεφάλαιο που είχε καταθέσει στην τράπεζα ο κ. Κώστας. β) Το ποσό των χρημάτων που απέμεινε στο λογαριασμό του μετά την επιβολή των οικονομικών μέτρων. **Λύση:** α) $K + T = 488000$ $$\Rightarrow K + \frac{KEX}{1200} = 488000$$ $$\Rightarrow K + \frac{K \cdot 4 \cdot 5}{1200} = 488000$$ $$\Rightarrow K + \frac{K}{60} = 488000 \Rightarrow 61K = 488000 \cdot 60$$ $$\Rightarrow K = €480000$$ β) Έγιναν αποκοπές στις $(488000 - 100000) = €388000$ $$100\% - 37{,}5\% = 62{,}5\%$$ $$\frac{62{,}5}{100} \cdot €388000 = €242500$$ Απέμειναν στο λογαριασμό: $€242500 + €100000 = €342500$	

2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις τιμές και τους αντίστοιχους αριθμούς εισιτηρίων διπλής διαδρομής λεωφορείου που αγοράζουν καθημερινά οι 22 υπάλληλοι μιας εταιρείας για να μεταβούν στην εργασία τους.

Τιμή εισιτηρίου σε ευρώ(x_i)	4	5	6	7	8	9	10
Αριθμός εισιτηρίων (f_i)	6	5	3	4	1	1	2

Να υπολογίσετε:

α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των παρατηρήσεων.

β) Τη διάμεσο τιμή (x_δ)των παρατηρήσεων.

γ) Τη μέση τιμή $(\bar{x})$τωνπαρατηρήσεων.

δ) Την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

<u>Λύση:</u>

x_i	f_i	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	6	24	4	24
5	5	25	1	5
6	3	18	0	0
7	4	28	1	4
8	1	8	4	4
9	1	9	9	9
10	2	20	16	32
	$\sum f_i = 22$	$\sum f_i x_i = 132$		$\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 78$

α) επικρατούσα τιμή $x_\varepsilon = 4$

β) διάμεσος τιμή θα βρίσκεται στην $11^η$ και $12^η$ θέση, $x_\delta = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$

γ) μέση τιμή $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{132}{22} = 6$

δ) τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{78}{22}} = 1{,}88$

3.	Ένας πελάτης μπαίνει σε ένα κατάστημα κατοικίδιων ζώων για να αγοράσει 5 πουλιά. Το κατάστημα διαθέτει προς πώληση 6 παπαγάλους και 9 καναρίνια. α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των πουλιών που θα αγοράσει ο πελάτης. β) Αν ο πελάτης αγοράσει τα 5 πουλιά στην τύχη, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: Κ: « ο πελάτης να αγοράσει ακριβώς ένα παπαγάλο » Λ: « ο πελάτης να αγοράσει το πολύ ένα καναρίνι » Μ: « ο πελάτης να αγοράσει μόνο ένα είδος πουλιών » **<u>Λύση:</u>** α) $\binom{15}{5} = 3003$ τρόποι β) $N(\Omega) = 3003$ $K \rightarrow$ 1 παπαγάλος και 4 καναρίνια $P(K) = \dfrac{\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{4}}{\binom{15}{5}} = \dfrac{756}{3003} = \dfrac{36}{143}$ $\Lambda \rightarrow$ 5 παπαγάλοι ή 4 παπαγάλοι και 1 καναρίνι $P(\Lambda) = \dfrac{\binom{6}{5}+\binom{6}{4}\cdot\binom{9}{1}}{\binom{15}{5}} = \dfrac{6+135}{3003} = \dfrac{141}{3003} = \dfrac{47}{1001}$ $M \rightarrow$ 5 παπαγάλοι ή 5 καναρίνια $P(M) = \dfrac{\binom{6}{5}+\binom{9}{5}}{\binom{15}{5}} = \dfrac{6+126}{3003} = \dfrac{132}{3003} = \dfrac{4}{91}$	

4. Δίνονται τα ψηφία $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

α) Να βρείτε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.

β) Να βρείτε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών μεγαλύτερων του 400 που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία:

i) Αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.

ii) Αν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.

<u>Λύση:</u>

E	Δ	M
5	5	4

α)

$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ αριθμοί

E	Δ	M
2	5	4

β) i)

$2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ αριθμοί

E	Δ	M
2	6	6

ii)

$2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ αριθμοί

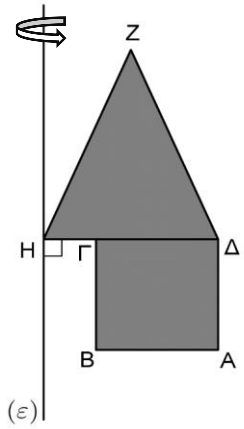
Σε αυτούς τους αριθμούς περιλαμβάνεται και το 400 το οποίο πρέπει να αποκλειστεί αφού θέλουμε αριθμούς μεγαλύτερους του 400.

Άρα $72 - 1 = 71$ αριθμοί

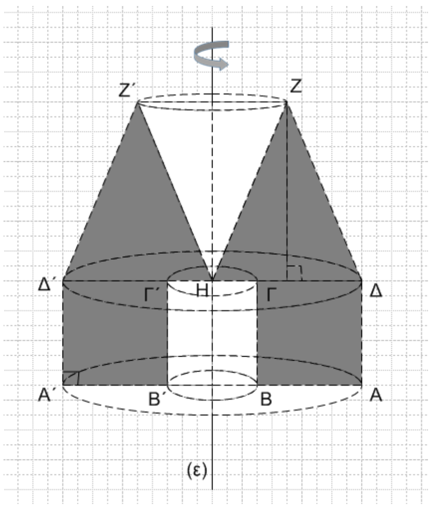
5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ZH\Delta$ είναι ισοσκελές με $ZH = Z\Delta = 13\ cm$ και $H\Delta = 10\ cm$. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $7\ cm$. Το σκιασμένο πολύγωνο $ZH\Gamma BA\Delta$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που είναι κάθετη στην $H\Delta$. Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού.

β) Τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



<u>Λύση:</u>



<u>Κόλουρος Κώνος ΔΖΖ΄Δ΄</u> :

$\lambda = 13\ cm$, $R = 10\ cm$, $\rho = 5\ cm$

$$\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2 \Rightarrow 13^2 = \upsilon^2 + 5^2$$
$$\Rightarrow \upsilon^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow \upsilon = 12\ cm$$

<u>Κώνος ΗΖΖ΄</u> :

$\lambda = 13\ cm, \rho = 5\ cm, \upsilon = 12\ cm$

<u>Κύλινδρος ΑΔΔ΄Α΄</u> : $R = 10\ cm, \upsilon_1 = 7\ cm$

<u>Κύλινδρος ΒΓΓ΄Β΄</u> : $r = 3\ cm, \upsilon_1 = 7\ cm$

α) $E_{o\lambda} = E_{\kappa K\acute{\omega}\nu o\upsilon} + E_{\kappa K o\lambda.K\omega\nu} + E_{\kappa K\upsilon\lambda.1} + E_{\kappa K\upsilon\lambda.2} + E_{\delta\alpha\kappa\tau} + E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.}$

$$\Rightarrow E_{o\lambda} = \pi\rho\lambda + \pi(R+\rho)\lambda + 2\pi R\upsilon_1 + 2\pi r\upsilon_1 + \pi R^2 - \pi r^2 + \pi r^2$$

$$\Rightarrow E_{o\lambda} = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi(10+5)\cdot 13 + 2\pi \cdot 10 \cdot 7 + 2\pi \cdot 3 \cdot 7 + \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3^2$$

$$\Rightarrow E_{o\lambda} = 65\pi + 195\pi + 140\pi + 42\pi + 100\pi$$

$$\Rightarrow E_{o\lambda} = 542\pi\ cm^2$$

β) $V = V_{Ko\lambda.K\omega\nu} + V_{K\upsilon\lambda.1} - V_{K\upsilon\lambda.2} - V_{K\acute{\omega}\nu o\upsilon}$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi\upsilon(R^2 + R\rho + \rho^2)}{3} + \pi R^2\upsilon_1 - \pi r^2\upsilon_1 - \frac{\pi\rho^2\upsilon}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi 12(10^2 + 10\cdot 5 + 5^2)}{3} + \pi 10^2 \cdot 7 - \pi 3^2 \cdot 7 - \frac{\pi 5^2 \cdot 12}{3}$$

$$\Rightarrow V = 700\pi + 700\pi - 63\pi - 100\pi$$

$$\Rightarrow V = 1237\pi\ cm^3$$