

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 3 Ιουνίου 2014
8:00 – 11:00

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΛΥΣΕΙΣ

<p>1.</p>	<p>Το πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζει τον εβδομαδιαίο μισθό σε ευρώ που παίρνουν 42 οικογένειες.</p> <div data-bbox="406 766 1250 1176" data-label="Figure"><table border="1"><thead><tr><th>Μισθός σε ευρώ</th><th>Αριθμός οικογενειών</th></tr></thead><tbody><tr><td>100</td><td>4</td></tr><tr><td>150</td><td>8</td></tr><tr><td>200</td><td>8</td></tr><tr><td>250</td><td>12</td></tr><tr><td>300</td><td>6</td></tr><tr><td>350</td><td>4</td></tr></tbody></table></div> <p>Να βρείτε:</p> <p>(α) Πόσες οικογένειες παίρνουν €250 εβδομαδιαίο μισθό.</p> <p>(β) Πόσες οικογένειες παίρνουν τουλάχιστον €300 εβδομαδιαίο μισθό.</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) 12 οικογένειες παίρνουν €250 εβδομαδιαίο μισθό.</p> <p>(β) 6+4=10 οικογένειες παίρνουν τουλάχιστον €300 εβδομαδιαίο μισθό.</p>	Μισθός σε ευρώ	Αριθμός οικογενειών	100	4	150	8	200	8	250	12	300	6	350	4	
Μισθός σε ευρώ	Αριθμός οικογενειών															
100	4															
150	8															
200	8															
250	12															
300	6															
350	4															
<p>2.</p>	<p>Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = 3x^2 - 4x + 5$</p> <p>Λύση:</p> $y = 3x^2 - 4x + 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x - 4$															

3.	<p>Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΣ.</p> <p>Λύση:</p> $M_{11}^E = \frac{11!}{3!} = \frac{39916800}{6} = 6652800$	
4.	<p>Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+10}{2x-3}$</p> <p>Λύση:</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+10}{2x-3} = \frac{4(+\infty)+10}{2(+\infty)-3} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ A.M}$ $\text{De L'Hospital } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+10}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x+10)'}{(2x-3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2} = 2$	
5.	<p>Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5x^4 dx$</p> <p>Λύση:</p> $\int_0^2 5x^4 dx = 5 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = 5 \left(\frac{2^5}{5} \right) = 32$	
6.	<p>Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο K(1,2) και ακτίνα R=3.</p> <p>Λύση:</p> $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$	
7.	<p>Ένα τμήμα μιας Τεχνικής Σχολής αποτελείται από 12 αγόρια και 4 κορίτσια. Στο διαγώνισμα των μαθηματικών η μέση τιμή της βαθμολογίας όλων των μαθητών του τμήματος ήταν 13. Αν η μέση τιμή της βαθμολογίας των κοριτσιών ήταν 16, να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των αγοριών.</p> <p>Λύση:</p>	

$$\bar{x}_{16} = \frac{\sum_{i=1}^{16} x_i}{16} = 13 \Rightarrow \sum_{i=1}^{16} x_i = 16 \cdot 13 = 208$$

$$\bar{x}_4 = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i}{4} = 16 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 x_i = 4 \cdot 16 = 64$$

$$\bar{x}_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{208 - 64}{12} = \frac{144}{12} = 12$$

8.

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = x \cdot \sqrt{\eta\mu 2x}$

Λύση:

$$\begin{aligned} y = x \cdot \sqrt{\eta\mu 2x} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x' \cdot \sqrt{\eta\mu 2x} + x \cdot (\sqrt{\eta\mu 2x})' \\ &= \sqrt{\eta\mu 2x} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sigma\upsilon\nu 2x}{\sqrt{\eta\mu 2x}} \\ &= \sqrt{\eta\mu 2x} + x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sqrt{\eta\mu 2x}} \end{aligned}$$

9.

Να βρείτε πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5 αν

(α) επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου,

(β) δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.

Λύση:

(α) Επιτρέπεται η επανάληψη.

Το μηδέν δεν μπορεί να πάρει τη θέση των χιλιάδων άρα,

Φάσεις	X	E	Δ	M	: $5 \cdot 6^3 = 5 \cdot 216 = 1080$
Τρόποι	5	6	6	6	

(β) Δεν επιτρέπεται η επανάληψη.

Φάσεις	X	E	Δ	M	: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$
Τρόποι	5	5	4	3	

10.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{3}{5}$,

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{13}{15}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α) $P(A')$

(β) $P(B)$

(γ) $P(A/B)$

(δ) $P(A' \cup B)$

Λύση:

(α) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

(β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) \Rightarrow$$

$$P(B) = \frac{13}{15} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

(γ) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$

(δ) $P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄:

1.

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση:

(α) Πεδίο ορισμού: $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3$ Π.Ο. $\mathbb{R} - \{-3, +3\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

$$\text{Αν } x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{9}$$

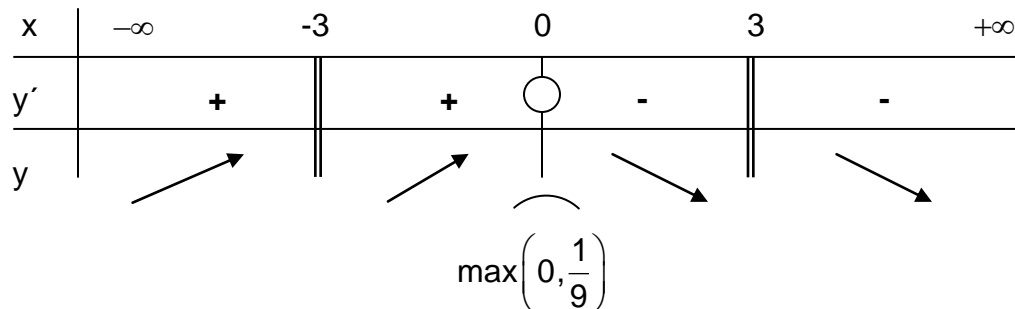
$$\text{Αν } y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Άρα τέμνει τους άξονες στα σημεία $(1,0)$, $(-1,0)$, $\left(0, \frac{1}{9}\right)$

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 - 9) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{2x^3 - 18x - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 9)^2} \quad x \neq \pm 3$$

$$y' = 0 \Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$



δ) Ασύμπτωτες

Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

} $\Rightarrow x = -3$ Κ.Α.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

} $\Rightarrow x=3$ Κ.Α.

Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M.}$$

Εφαρμόζω De L'Hospital

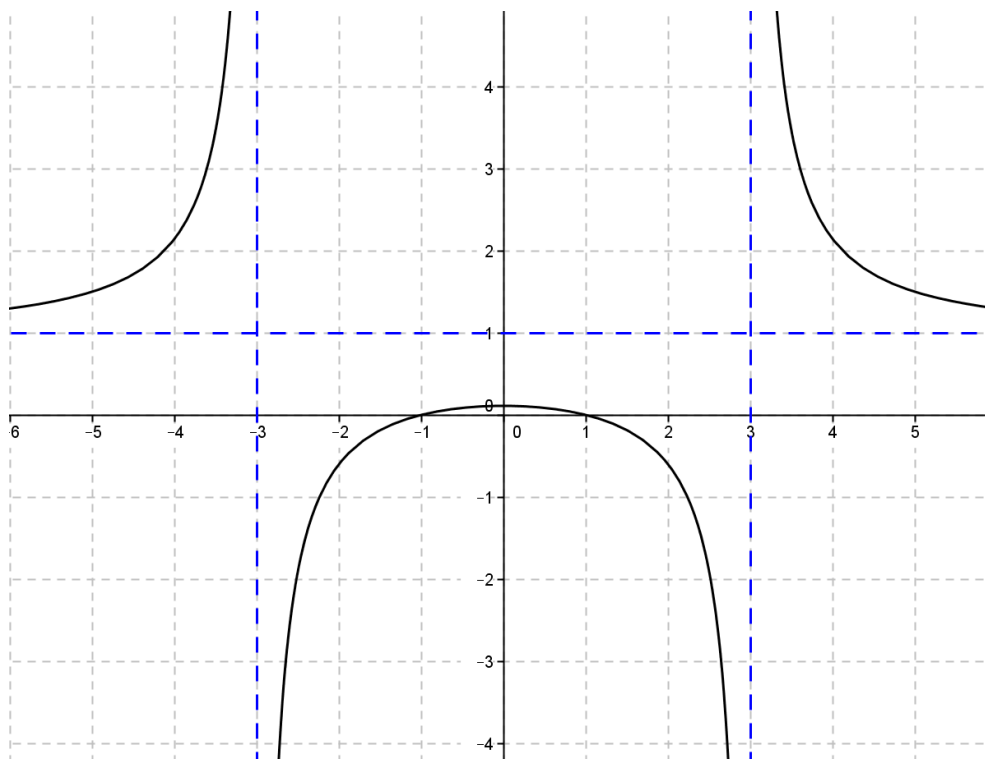
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M.}$$

Εφαρμόζω De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

} $\Rightarrow y=1$ Ο.Α.



2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των τροχαίων παραβάσεων που καταγράφηκαν κατά το μήνα Απρίλιο σε μια πόλη.

Αριθμός παραβάσεων (x_i)	10	11	13	15	16	19	20
Αριθμός ημερών (f_i)	6	6	1	8	4	3	2

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των παρατηρήσεων.
- (β) Τη διάμεσο (x_δ) των παρατηρήσεων.
- (γ) Τη μέση τιμή (\bar{x}) των παρατηρήσεων.
- (δ) Την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

Λύση:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
10	6	60	16	96
11	6	66	9	54
13	1	13	1	1
15	8	120	1	8
16	4	64	4	16
19	3	57	25	75
20	2	40	36	72
	30	420		322

(α) $x_\varepsilon = 15$

(β) $x_\delta = 15$

(γ) $\bar{x} = \frac{420}{30} = 14$

(δ) $\sigma = \sqrt{\frac{322}{30}} = \sqrt{10.733} = 3,276$

3. Η συνάρτηση με τύπο $y = \alpha x^2 + 2\beta x + 4$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(1,3)$.
- (α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .
- (β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = -1$ να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο της με $x = -1$.

Λύση:

$$(α) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 0 \Rightarrow 2\alpha \cdot 1 + 2\beta = 0 \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \quad (1)$$

$$y = \alpha x^2 + 2\beta x + 4 \text{ στο } A(1,3) \Rightarrow 3 = \alpha + 2\beta + 4 \Rightarrow \alpha + 2\beta = -1 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) } \left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow$$

$$\text{Από (1) } \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$(β) y = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow (-1, 7)$$

$$\lambda_{\text{εφ}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1} = 2x - 2 \Big|_{x=-1} = -4 \Rightarrow \lambda_{\text{καθ}} = \frac{1}{4}$$

Εξίσωση Καθέτου στο $A(-1, 7)$:

$$y - 7 = \frac{1}{4}(x + 1) \Rightarrow 4y - x = 29$$

4. Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν 12 λαμπτήρες από τους οποίους οι 3 είναι ελαττωματικοί. Παίρνουμε τυχαία 4 λαμπτήρες. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Μόνο ένας λαμπτήρας είναι ελαττωματικός».

B: «Το πολύ 2 λαμπτήρες είναι ελαττωματικοί».

Γ: «Τουλάχιστον 3 λαμπτήρες να μην είναι ελαττωματικοί».

Λύση:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{12}{4}} = \frac{3 \cdot 84}{495} = \frac{252}{495} = \frac{28}{55}$$

$$P(B) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{9}{4} + \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{3} + \binom{3}{2} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{126 + 3 \cdot 84 + 3 \cdot 36}{495} = \frac{486}{495} = \frac{54}{55}$$

$$P(\Gamma) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{9}{3} + \binom{3}{0} \cdot \binom{9}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{3 \cdot 84 + 126}{495} = \frac{378}{495} = \frac{42}{55}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = \eta\mu^2x$

(α) Να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y - 2\sigma\upsilon\nu^2x = 0$

(β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^2x \, dx$

Λύση:

(α) $y = \eta\mu^2x \Rightarrow$

(i) $\frac{dy}{dx} = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x \cdot (-\eta\mu x) = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 2\eta\mu^2x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y - 2\sigma\upsilon\nu^2x = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 2\eta\mu^2x + 2\eta\mu^2x - 2\sigma\upsilon\nu^2x = 0$$

(β) $\int \eta\mu^2x \, dx = \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\eta\mu 2x}{2} \right) + c$