

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ**

**ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021 – 22**

**Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ**

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2022**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4-ΩΡΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**(Α΄ ΣΕΙΡΑ)**

**ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0048**

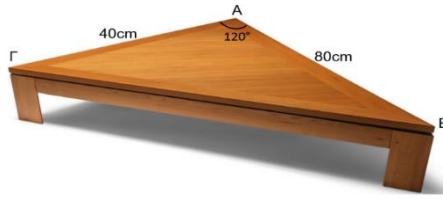
**Προτεινόμενες Λύσεις**

**ΜΕΡΟΣ Α΄:**

<p><b>1.</b> Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:</p> <p><b>(α)</b> <math>f(x) = x^2 - 2x</math></p> <p><b>(β)</b> <math>g(x) = \frac{2x+3}{x-1}</math></p> <p><b><u>Λύση:</u></b></p> <p><b>(α)</b> Π.Ο της <math>f</math> είναι το σύνολο <math>A = \mathbb{R}</math>, διότι είναι πολυωνυμική</p> <p><b>(β)</b> <math>x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1</math>, Π.Ο της <math>g</math> είναι το σύνολο</p> <p style="text-align: center;"><math>B = \mathbb{R} - \{1\}</math></p>	<p><b>(α)</b> Σωστό Π.Ο με ή χωρίς αιτιολόγηση <b>2,5</b></p> <p><b>(β)</b> Σωστό Π.Ο με ή χωρίς περιορισμό <b>2,5</b></p>
<p><b>2.</b> Να λύσετε τις εξισώσεις:</p> <p><b>(α)</b> <math>2^{x+1} = 8</math></p> <p><b>(β)</b> <math>\log_5 x = 2</math></p> <p><b><u>Λύση:</u></b></p> <p><b>(α)</b> <math>2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 3 - 1</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x = 2</math></p> <p><b>(β)</b> <math>\log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 5^2 \Leftrightarrow x = 25</math></p>	<p><b>(α)</b> <math>8 = 2^3</math> <b>1</b></p> <p>Εξίσωση εκθετών <b>1</b></p> <p>Αποτέλεσμα <b>0,5</b></p> <p><b>(β)</b> Ορισμός λογαρίθμου <b>2</b></p> <p>Αποτέλεσμα <b>0,5</b></p>

<p><b>3.</b> Να υπολογίσετε τα όρια:</p> <p>(α) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 11)</math></p> <p>(β) <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}</math></p> <p><b>Λύση:</b></p> <p>(α) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 11) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = 3(+\infty)^2 = +\infty</math></p> <p>(β) <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}</math></p> <p><math>f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2, A = \mathbb{R} - \{2\}</math></p> <p><math>f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4</math></p>	<p>(α) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2)</math> <b>1,5</b></p> <p>Αποτέλεσμα <b>1</b></p> <p>(β) Π.Ο <b>0,5</b></p> <p>Παραγοντοποίηση της <math>f(x)</math> <b>1</b></p> <p>Υπολογισμός ορίου <b>1</b></p>
<p><b>4.</b> Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο <math>AB\Gamma</math> ισχύει η σχέση:</p> $\frac{\gamma + 2\beta}{\alpha} = \frac{\eta\mu\Gamma + 2\eta\mu B}{\eta\mu A}$ <p><b>Λύση:</b></p> $\frac{\gamma + 2\beta}{\alpha} = \frac{2R\eta\mu\Gamma + 2 \cdot 2R\eta\mu B}{2R\eta\mu A} = \frac{2R(\eta\mu\Gamma + 2\eta\mu B)}{2R\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\Gamma + 2\eta\mu B}{\eta\mu A}$	<p><math>\alpha = 2R\eta\mu A</math> <b>1</b></p> <p><math>\beta = 2R\eta\mu B</math> <b>1</b></p> <p><math>\gamma = 2R\eta\mu\Gamma</math> <b>1</b></p> <p>Κοινός παράγοντας <b>1</b></p> <p>Απλοποίηση και αποτέλεσμα <b>1</b></p>
<p><b>5.</b> Δίνονται οι συναρτήσεις <math>f: A \rightarrow \mathbb{R}</math> και <math>g: B \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>A, B \subseteq \mathbb{R}</math> με τύπους <math>f(x) = x</math> και <math>g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}</math>.</p> <p>Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις είναι ίσες. Αν <math>f \neq g</math>, να προσδιορίσετε το ευρύτερο υποσύνολο του <math>\mathbb{R}</math> για το οποίο ισχύει ότι <math>f = g</math>.</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p><math>f(x) = x, A = \mathbb{R}</math></p> <p><math>g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}, x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3, B = \mathbb{R} - \{3\}</math></p> <p>Αφού <math>A \neq B \Rightarrow f \neq g</math>.</p> <p>Παρατηρούμε ότι <math>A \cap B = \mathbb{R} - \{3\}</math> και</p> <p><math>g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x(x - 3)}{x - 3} = x, \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}</math></p> <p>Άρα <math>f = g</math> στο <math>\mathbb{R} - \{3\}</math></p>	<p>Π.Ο. της <math>f</math> <b>0,5</b></p> <p>Π.Ο. της <math>g</math> <b>0,5</b></p> <p><math>A \neq B \Rightarrow f \neq g</math> <b>1</b></p> <p><math>A \cap B = \mathbb{R} - \{3\}</math> <b>1</b></p> <p>Απλοποίηση <b>1</b></p> <p><math>f = g</math> στο <math>\mathbb{R} - \{3\}</math> <b>1</b></p>

6. Ένας επιπλοποιός θέλει να τοποθετήσει στην επιφάνεια ενός μικρού τριγωνικού τραπέζιου προστατευτικό γυαλί.



Αν οι δύο πλευρές της επιφάνειας του τραπέζιου είναι  $AB = 80\text{cm}$  και  $AG = 40\text{cm}$  και η περιεχόμενη γωνία τους είναι  $\hat{A} = 120^\circ$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να βρείτε:

- (α) το εμβαδόν της επιφάνειας που θα καλυφθεί με γυαλί.  
 (β) το μήκος της τρίτης πλευράς ( $BΓ$ ) του τραπέζιου.

**Λύση:**

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad E &= \frac{(AG) \cdot (AB) \cdot \eta\mu A}{2} = \frac{40 \cdot 80 \cdot \eta\mu 120^\circ}{2} = \frac{3200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \\ &= 800\sqrt{3}\text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad (BΓ)^2 &= (AG)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot (AG) \cdot (AB) \cdot \sigma\upsilon\nu A = \\ &= 40^2 + 80^2 - 2 \cdot 40 \cdot 80 \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ = \\ &= 1600 + 6400 - 6400 \cdot (-0,5) = 11200 \\ \Rightarrow (BΓ) &= \sqrt{11200} \Rightarrow (BΓ) = 105,83 \text{ cm} \quad \text{ή} \\ & \quad \quad \quad (BΓ) = 40\sqrt{7} \text{ cm} \end{aligned}$$

(α) Τύπος 1  
 Πράξεις 1  
 Αποτέλεσμα 0,5

(β) Τύπος 1  
 Πράξεις 1  
 Αποτέλεσμα 0,5

**ΜΕΡΟΣ Β΄:**

1. (α) Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i)  $g(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 2022$  (μον. 2,5)

(ii)  $h(x) = (x + 2)(2x^2 - 5)$  (μον. 3,5)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 + 3x$  στο σημείο  $x_0 = 1$ . (μον. 4)

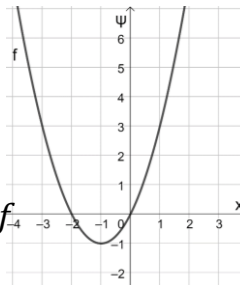
**Λύση:**

(α) (i)  $g(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 2022$

$$\Rightarrow g'(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot 2x^1 + 5 \cdot 1 - 0$$

$$\Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 6x + 5$$

(α)  
 (i) Παράγωγοι 4x0,5=2  
 Αποτέλεσμα 0,5

<p><b>(ii) Α' τρόπος:</b> <math>h(x) = (x + 2)(2x^2 - 5)</math></p> $\Rightarrow h'(x) = (x + 2)' \cdot (2x^2 - 5) + (x + 2) \cdot (2x^2 - 5)'$ $= 1 \cdot (2x^2 - 5) + (x + 2) \cdot 4x = 2x^2 - 5 + 4x^2 + 8x =$ $= 6x^2 + 8x - 5$ <p><b>Β' τρόπος:</b> <math>h(x) = (x + 2)(2x^2 - 5) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 10</math></p> $\Rightarrow h'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x^1 - 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2 + 8x - 5$ <p><b>(β)</b> <math>f(x) = x^2 + 3x</math>, <math>x_0 = 1</math></p> $f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 + 3 = 4 \rightarrow (1, 4)$ $f'(x) = 2x + 3$ $\lambda_{εφ} = f'(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ <p>Εξίσωση εφαπτομένης: <math>\psi - \psi_1 = \lambda \cdot (x - x_1)</math></p> $\psi - 4 = 5 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \psi - 4 = 5x - 5$ $\Leftrightarrow \psi = 5x - 5 + 4 \Leftrightarrow \psi = 5x - 1 \text{ ή } 5x - \psi - 1 = 0$	<p><b>(ii)</b></p> <p><b>Α' τρόπος:</b></p> <p>Κανόνας <math>(u \cdot v)'</math>    <b>1,5</b></p> <p>Παραγώγοι    <b>2x0,5= 1</b></p> <p>Αποτέλεσμα    <b>1</b></p> <p><b>Β' τρόπος:</b></p> <p>Πολλαπλασιασμοί    <b>1</b></p> <p>Παραγώγοι    <b>4x0,5= 2</b></p> <p>Αποτέλεσμα    <b>0,5</b></p> <p><b>(β)</b></p> <p>Εύρεση σημείου    <b>0,5</b></p> <p>Παράγωγος    <b>1</b></p> <p>Κλίση    <b>1</b></p> <p>Εξίσωση    <b>0,5</b></p> <p>Αντικατάσταση    <b>0,5</b></p> <p>Εύρεση εξίσωσης    <b>0,5</b></p>
<p><b>2.</b> Δίνονται οι συναρτήσεις <math>f</math> και <math>g</math> με τύπους <math>f(x) = x^2 + 2x</math> και</p> $g(x) = \frac{1+x}{x}.$ <p><b>(α)</b> Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων <math>f + g</math>, <math>f \cdot g</math> και <math>\frac{f}{g}</math>.    <b>(μον. 7,5)</b></p> <p><b>(β)</b> Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης <math>f</math>.</p> <p>Από τη γραφική παράσταση:</p> <p><b>(i)</b> Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης <math>f</math>.</p> <p><b>(ii)</b> Να εξετάσετε αν η συνάρτηση <math>f</math> είναι 1 – 1 (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)    <b>(μον. 2,5)</b></p>	

**Λύση:**

**(α)**  $f(x) = x^2 + 2x \quad A = \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1+x}{x}, \quad x \neq 0, \quad \text{π.ο. } B = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow A \cap B = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{aligned} \triangleright (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = x^2 + 2x + \frac{1+x}{x} = \\ &= \frac{x \cdot (x^2 + 2x) + 1 + x}{x} = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x} \quad \text{π.ο. } A \cap B = \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 2x) \cdot \left(\frac{1+x}{x}\right) = \\ &= \frac{(x^2 + 2x) \cdot (1+x)}{x} = \frac{x(x+2) \cdot (1+x)}{x} = \\ &= (x+2) \cdot (1+x) = x^2 + 3x + 2, \quad \text{π.ο. } A \cap B = \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

$$\triangleright \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x}{\frac{1+x}{x}} = \frac{x \cdot (x^2 + 2x)}{1+x} = \frac{x^3 + 2x^2}{1+x}$$

$1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1, \quad \text{π.ο. } \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

**(β)** (i) Σ.Τ.  $f(B) = [-1, +\infty)$

(ii) Η συνάρτηση  $f$  δεν είναι 1-1, διότι υπάρχουν διαφορετικές τιμές του  $x$  του Π.Ο. που δεν αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του  $\psi$  του Σ.Τ. (π.χ.  $x = -3$  και  $x = 1$ )

**(α)**Π.Ο. της  $f$  **0,5**Π.Ο. της  $g$  **0,5** $A \cap B = \mathbb{R} - \{0\}$  **0,5** $f+g$ :  
Αντικατάσταση **0,5**Πράξεις **0,5**Αποτέλεσμα σε  
παραγοντοποιημένη  
μορφή ή όχι **0,5**Π.Ο. **0,5** $f \cdot g$ :  
Αντικατάσταση **0,5**Πράξεις **0,5**Αποτέλεσμα σε  
παραγοντοποιημένη  
μορφή ή όχι **0,5**Π.Ο. **0,5** $\frac{f}{g}$ :  
Αντικατάσταση **0,5**Πράξεις **0,5**Αποτέλεσμα σε  
παραγοντοποιημένη  
μορφή ή όχι **0,5**Π.Ο. **0,5****(β)**(i) Σωστό Σ.Τ. **1**(ii) Σωστή απάντηση **1**Αιτιολόγηση με ή  
χωρίς παράδειγμα **0,5**

<p><b>3. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:</b></p> <p>(i) <math>2 \log(x - 2) = \log(x + 1) + \log(x - 4)</math> <b>(μον. 4)</b></p> <p>(ii) <math>9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0</math> <b>(μον. 4)</b></p> <p><b>(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: (μον. 2)</b></p> <p><math>A = \log_a(3a) - \log_a 3 + \log 10^3 - \ln \sqrt{e} + \alpha^{\log_a 22}, \alpha &gt; 0, \alpha \neq 1</math></p> <p><b>Λυση:</b></p> <p><b>(α) (i)</b> <math>2 \log(x - 2) = \log(x + 1) + \log(x - 4)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \log(x - 2)^2 = \log[(x + 1) \cdot (x - 4)]</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (x - 2)^2 = (x + 1) \cdot (x - 4)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + x - 4</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x - x + 4 = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow -x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8</math> <b>δεκτή</b></p> <p><b>Περιορισμοί:</b></p> $\left. \begin{array}{l} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 4$ <p><b>(ii)</b> <math>9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0</math></p> <p>θέτω : <math>3^x = \omega</math></p> <p><math>\Rightarrow \omega^2 - 10 \cdot \omega + 9 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 9) \cdot (\omega - 1) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \omega_1 = 9, \omega_2 = 1</math></p> <p>Για <math>\omega_1 = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x_1 = 2</math></p> <p>Για <math>\omega_2 = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x_2 = 0</math></p> <p><b>(β)</b> <math>A = \log_a(3a) - \log_a 3 + \log 10^3 - \ln \sqrt{e} + \alpha^{\log_a 22},</math></p> <p><math>\alpha &gt; 0, \alpha \neq 1</math></p> <p><math>\Rightarrow A = \log_a 3 + \log_a \alpha - \log_a 3 + \log 10^3 - \ln e^{\frac{1}{2}} + \alpha^{\log_a 22} =</math></p> <p><math>= \log_a \alpha + \log 10^3 - \ln e^{\frac{1}{2}} + \alpha^{\log_a 22} =</math></p> <p><math>= 1 + 3 - \frac{1}{2} + 22 = 25 \frac{1}{2}</math></p>	<p><b>(α)</b></p> <p><b>(i) ιδιότητες</b> <b>2x0,5=1</b></p> <p>Ταυτότητα + γινόμενο <b>2x0,5 =1</b></p> <p>Πράξεις <b>0,5</b></p> <p>Αποτέλεσμα + χαρακτηρισμός <b>1</b></p> <p>Περιορισμοί <b>0,5</b></p> <p><b>(ii)</b></p> <p><math>9^x = 3^{2x}</math> <b>0,5</b></p> <p>θέτω: <math>3^x = \omega</math> <b>0,5</b></p> <p>Εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού + επίλυση <b>1</b></p> <p><math>\omega_1 \rightarrow x_1</math> <b>1</b></p> <p><math>\omega_2 \rightarrow x_2</math> <b>1</b></p> <p><b>(β)</b></p> <p><math>\log_a(3a) =</math></p> <p><math>= \log_a 3 + \log_a \alpha</math> <b>0,5</b></p> <p><math>\log 10^3</math> <b>0,5</b></p> <p><math>\ln \sqrt{e}</math> <b>0,5</b></p> <p><math>\alpha^{\log_a 22}</math> <b>0,5</b></p>
--	--