

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021-22
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2022

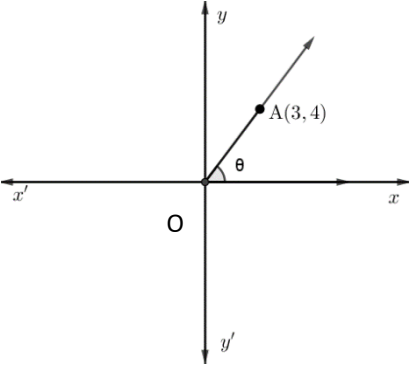
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4-ΩΡΟ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

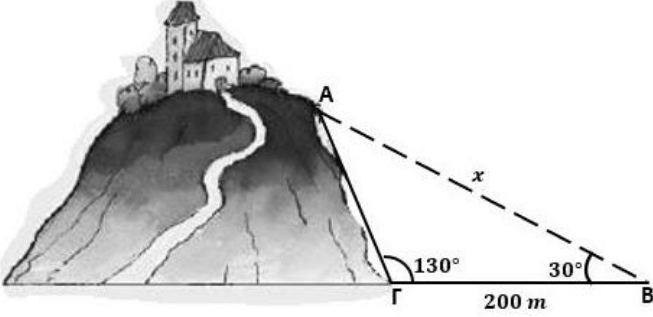
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0049

Προτεινόμενες λύσεις – Οδηγός διόρθωσης

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1.	<p>Οι βαθμολογίες 10 φοιτητών του τμήματος Μαθηματικών, σε μια εξέταση, ήταν οι ακόλουθες:</p> $2, 6, 6, 7, 3, 5, 8, 9, 7, 7$ <p>Να υπολογίσετε:</p> <p>(α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των πιο πάνω παρατηρήσεων. (2 μονάδες)</p> <p>(β) Τη μέση τιμή (\bar{x}) των πιο πάνω παρατηρήσεων. (3 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $x_\varepsilon = 7$</p> <p>(β) $\bar{x} = \frac{2+6+6+7+3+5+8+9+7+7}{10} = \frac{60}{10} = 6$</p>	<p>(α) $x_\varepsilon = 7$ 2μ</p> <p>(β) Με ή χωρίς τον τύπο \bar{x} μέχρι τις πράξεις 2μ Αποτέλεσμα 1μ</p>
------------	---	---

<p>A2.</p>	<p>Στο διπλανό σχήμα, δίνεται το σημείο $A(3,4)$ και η οξεία γωνία θ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta, \epsilon\varphi\theta, \sigma\varphi\theta$ της γωνίας θ.</p>  <p>Λύση:</p> $(OA)^2 = \rho^2 = x^2 + \psi^2 \Rightarrow \rho^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow \rho^2 = 25 \Rightarrow \rho = \sqrt{25} = 5$ $\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho} = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5},$ $\epsilon\varphi\theta = \frac{\psi}{x} = \frac{4}{3}, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{x}{\psi} = \frac{3}{4}$	<p>Υπολογισμός ρ 1μ Υπολογισμοί: $\eta\mu\theta$ 1μ, $\sigma\upsilon\nu\theta$ 1μ $\epsilon\varphi\theta$ 1μ, $\sigma\varphi\theta$ 1μ</p>											
<p>A3.</p>	<p>Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 2x - 15 < 0$.</p> <p>Λύση:</p> $x^2 + 2x - 15 < 0 \Rightarrow (x + 5) \cdot (x - 3) < 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$ <p>ή</p> $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$ $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$ <table border="1" data-bbox="219 1354 1182 1449"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-5</td> <td>3</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$x^2 + 2x - 15$</td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$-$</td> <td>0</td> <td>$+$</td> </tr> </tbody> </table> <p>$x^2 + 2x - 15 < 0$ για κάθε $x \in (-5, 3)$.</p>	x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$	$x^2 + 2x - 15$	$+$	0	$-$	0	$+$	<p>Παραγοντοποίηση τριωνύμου 1μ Υπολογισμός $x_{1,2}$ 1μ ή (Υπολογισμός Δ 1μ Υπολογισμός $x_{1,2}$ 1μ Πίνακας πρόσημου 2μ Τελική απάντηση $x \in (-5, 3)$ 1μ</p>
x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$									
$x^2 + 2x - 15$	$+$	0	$-$	0	$+$								
<p>A4.</p>	<p>(α) Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{2}{5-\sqrt{3}}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.</p> <p>(β) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-3} + 2 = 6$.</p>												

	<p>Λύση:</p> $(α) \frac{2}{5-\sqrt{3}} = \frac{2}{5-\sqrt{3}} \cdot \frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (5+\sqrt{3})}{5^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot (5+\sqrt{3})}{25-3} =$ $\frac{2 \cdot (5+\sqrt{3})}{22} = \frac{5+\sqrt{3}}{11}$ <p>(β) $\sqrt{x-3} + 2 = 6 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow x-3 = 16 \Rightarrow x = 19$</p>	<p>(α) (0,5+0,5+0,5+0,5 +0,5) 2,5μ</p> <p>(β) (1+1+0,5) 2,5μ</p>
<p>A5.</p>	<p>Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η διαδρομή AB ενός εναέριου σιδηρόδρομου, ο οποίος πρόκειται να κατασκευαστεί. Το σημείο αφετηρίας B, βρίσκεται σε απόσταση $BΓ = 200 \text{ m}$ από τη βάση του βουνού. Ο εναέριος σιδηρόδρομος και η πλαγιά του βουνού σχηματίζουν με το έδαφος γωνίες 30° και 130° αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής AB του εναέριου σιδηρόδρομου.</p>  <p>Λύση:</p> <p>$\gamma = x \text{ m}$, $\alpha = 200 \text{ m}$, $\hat{\Gamma} = 130^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$</p> <p>$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (130^\circ + 30^\circ) = 20^\circ$</p> $\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Rightarrow \frac{200}{\eta\mu 20^\circ} = \frac{x}{\eta\mu 130^\circ} \Rightarrow x = \frac{200 \cdot \eta\mu 130^\circ}{\eta\mu 20^\circ} = \frac{200 \cdot 0,766}{0,342} = 447,95 \text{ m}$ <p>Το μήκος της διαδρομής $AB = 447,95 \text{ m}$.</p>	<p>Υπολογισμός \hat{A} 1μ Εφαρμογή νόμου ημιτόνου 1μ Αντικατάσταση 1μ Πράξεις 1μ Αποτέλεσμα 1μ</p>
<p>A6.</p>	<p>Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:</p> <p>(α) $\eta\mu^2\theta + \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\varphi^2\theta = 1$</p> <p>(β) $\varepsilon\varphi(90 - \theta) - \varepsilon\varphi(180 - \theta) = \frac{1}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$</p>	

<p>Λύση:</p> <p>(α) $\eta\mu^2\theta + \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\varphi^2\theta = \eta\mu^2\theta + \eta\mu^2\theta \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta}$ $= \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$</p> <p>(β) $\varepsilon\varphi(90 - \theta) - \varepsilon\varphi(180 - \theta) = \sigma\varphi\theta - (-\varepsilon\varphi\theta) = \sigma\varphi\theta + \varepsilon\varphi\theta$ $= \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} =$ $= \frac{1}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$</p>	<p>(α) Αντικατάσταση 1μ $\sigma\varphi^2\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta}$ Απλοποίηση 1μ Ταυτότητα 0,5μ</p> <p>(β) Αναγωγή 1μ Ταυτότητες 2x0,5μ Πράξεις 0,5μ</p>
--	---

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

<p>B1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:</p> <p>(α) Το πρόσημο του α.</p> <p>(β) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.</p> <p>(γ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης.</p> <p>(δ) Την τιμή του γ.</p> <p>(ε) Την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.</p> <p>(στ) Τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.</p> <p>(ζ) Το πρόσημο της παράστασης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$.</p> <p>(η) Την αριθμητική τιμή του $P = x_1 \cdot x_2$.</p> <p>(θ) Την αριθμητική τιμή του $-\frac{\beta}{\alpha}$.</p> <p>(ι) Τις τιμές των $f(-2)$ και $f(2)$.</p>		
---	--	--

	<p>Λύση:</p> <p>(α) $\alpha > 0$</p> <p>(β) $x = -1$</p> <p>(γ) $[-4, +\infty)$</p> <p>(δ) $\gamma = -3$</p> <p>(ε) $\psi_{\varepsilon\lambda} = -4$</p> <p>(στ) $x_1 = -3, x_2 = 1$</p> <p>(ζ) $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$</p> <p>(η) $P = x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 1 = -3$</p> <p>(θ) $-\frac{\beta}{\alpha} = S = x_1 + x_2 = -3 + 1 = -2$</p> <p>(ι) $f(-2) = -3, f(2) = 5$</p>	<p>(α) 1μ</p> <p>(β) 1μ</p> <p>(γ) 1μ</p> <p>(δ) 1μ</p> <p>(ε) 1μ</p> <p>(στ) 1μ</p> <p>(ζ) 1μ</p> <p>(η) 1μ</p> <p>(θ) 1μ</p> <p>(ι) 1μ</p>
<p>B2.</p>	<p>(α) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{8} - \sqrt{8\sqrt{8\sqrt{4}}} \right)$ και $B = 36^{\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{81} - \left(\frac{1}{8} \right)^{-\frac{1}{3}}$. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής να αποδείξετε ότι $A = -4$ και $B = 1$. (7 μονάδες)</p> <p>(β) Να κατασκευάσετε εξίσωση β' βαθμού η οποία να έχει ρίζες τις $x_1 = A$ και $x_2 = B$. (3 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α)</p> $A = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{8} - \sqrt{8\sqrt{8\sqrt{4}}} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{8} - \sqrt{8\sqrt{8 \cdot 2}} \right) =$ $\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{8} - \sqrt{8 \cdot 4} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{8} - \sqrt{32} \right) = \sqrt{16} - \sqrt{64} = 4 - 8 = -4$ $B = 36^{\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{81} - \left(\frac{1}{8} \right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{36} - \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{8} = 6 - 3 - 2 = 1$ <p>(β)</p> $x_1 = -4 \text{ και } x_2 = 1$ $S = x_1 + x_2 = -4 + 1 = -3$ $P = x_1 x_2 = -4 \cdot 1 = -4$ $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$	<p>(α)</p> <p>Υπολογισμός A (8x0,5) 4μ</p> <p>Υπολογισμός B (6x0,5) 3μ</p> <p>(β)</p> <p>Υπολογισμός S 0,5μ</p> <p>Υπολογισμός P 0,5μ</p> <p>Τύπος εξίσωσης 1μ</p> <p>Αντικατάσταση 2x0,5</p>

<p>B3.</p>	<p>(α) Οι πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 8\text{ cm}$, $\beta = 7\text{ cm}$ και $\gamma = 5\text{ cm}$. Να υπολογίσετε: (i) Τη γωνία B του τριγώνου. (4 μονάδες) (ii) Το εμβαδόν του τριγώνου. (3 μονάδες)</p> <p>(β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $4R^2\eta\mu A\eta\mu\Gamma - \gamma^2 = 0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές. (3 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α)</p> <p>(i) $\cos B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{64 + 25 - 49}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$</p> <p>(ii) $E = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B}{2} = \frac{8 \cdot 5 \cdot \eta\mu 60^\circ}{2} = \frac{8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{40\sqrt{3}}{4} = 10\sqrt{3}\text{ cm}^2$</p> <p>(β) $4R^2\eta\mu A\eta\mu\Gamma - \gamma^2 = 0 \Rightarrow 4R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{\gamma}{2R} - \gamma^2 = 0$ $\Rightarrow 4R^2 \cdot \frac{a \cdot \gamma}{4R^2} - \gamma^2 = 0$ $a \cdot \gamma - \gamma^2 = 0 \Rightarrow \gamma \cdot (\alpha - \gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ (αδύνατο) ή $\alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma$ Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές</p>	<p>(α)</p> <p>(i) Τύπος 1μ Αντικατάσταση 1μ Πράξεις/Αποτέλεσμα 1μ Γωνιά Β 1μ</p> <p>(ii) Τύπος 1μ Αντικατάσταση 1μ Πράξεις/Αποτέλεσμα 1μ</p> <p>(β) Αντικατάσταση τύπων 0,5μ Πράξεις 1μ $\gamma = 0$ (αδύνατο) 0,5μ $\alpha = \gamma$ 0,5μ Ισοσκελές 0,5μ</p>
-------------------	--	--

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ