

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021 - 2022**  
**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ - Α΄ ΣΕΙΡΑ**

**ΜΕΡΟΣ Α:**

**A1.** Να λύσετε την εξίσωση  $|x + 2| = 7$

**Λύση**

$$|x + 2| = 7 \Leftrightarrow x + 2 = 7 \text{ ή } x + 2 = -7 \quad \text{1+1}$$

Επομένως,

$$\begin{array}{ll} \text{1} \quad x + 2 = 7 & \text{ή} \quad x + 2 = -7 \\ \Leftrightarrow x = 7 - 2 & \Leftrightarrow x = -7 - 2 \quad \text{1} \\ \text{0,5} \quad \Leftrightarrow x = 5 & \Leftrightarrow x = -9 \quad \text{0,5} \end{array}$$

**A2.** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \sigma\phi 2\alpha$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \text{A' Μέλος} &= \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - (1 - 2\eta\mu^2 2\alpha) + \eta\mu 2\alpha} \quad \text{1} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - 1 + 2\eta\mu^2 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} \quad \text{1} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha (1 + 2\eta\mu 2\alpha)}{\eta\mu 2\alpha (1 + 2\eta\mu 2\alpha)} \quad \text{1} \\ &= \sigma\phi 2\alpha = \text{B' Μέλος} \quad \text{0,5} \end{aligned}$$

**A3.** (α) Να διατυπώσετε τον ορισμό της άρτιας συνάρτησης. (1 μον.)

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  είναι άρτια. (4 μον.)

**Λύση**

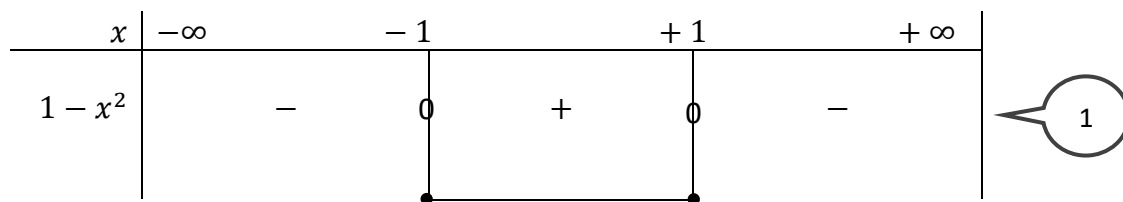
(α) Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  λέγεται άρτια όταν για κάθε  $x \in A$  ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

0,5                      0,5

(β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  είναι το:  $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\}$  0,5

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow (1 - x)(1 + x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1 \quad \text{0,5}$$



Επομένως,  $A = [-1, 1]$  1

Για κάθε  $x \in [-1, 1]$ , ισχύει ότι  $-x \in [-1, 1]$  0,5

και  $f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$  0,5

Άρα, η  $f$  είναι άρτια συνάρτηση.

**A4.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους  $f(x) = \frac{1}{x}$  και  $g(x) = x - \frac{1}{x}$   
 Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f + g$  και  $f \circ g$ , δίνοντας τους τύπους τους στην πιο απλή μορφή.

**Λύση**

Τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων  $f$  και  $g$  είναι  $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$  1

$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$  0,5

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = x, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$   
0,5 0,5

Εξετάζουμε αν το σύνολο

$A' = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} : x - \frac{1}{x} \neq 0\right\}$  0,5

είναι μη κενό:

$x - \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \neq 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$  0,5

Άρα  $A' = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \neq \emptyset$

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση  $f \circ g$  με πεδίο ορισμού το  $D_{f \circ g} = A' = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$   
 και τύπο:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x^2 - 1}{x}} = \frac{x}{x^2 - 1}$  0,5  
0,5 0,5

**A5.** Πιο κάτω δίνεται ένα τεμάχιο γης σε σχήμα τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 30m$ ,  $B\Gamma = 52m$ ,  $\Gamma\Delta = 27m$ ,  $A\Delta = 40m$  και  $\hat{A} = 90^\circ$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τεμαχίου γης.

### Λύση

Φέρουμε τη διαγώνιο  $B\Delta$  και το τετράπλευρο χωρίζεται

σε δύο τρίγωνα,  $AB\Delta$  και  $B\Delta\Gamma$ .



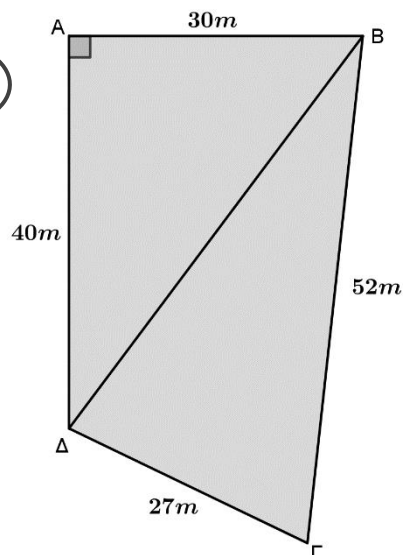
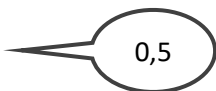
Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ορθογώνιο καθώς  $\hat{A} = 90^\circ$ .  
Ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$(B\Delta)^2 = (AB)^2 + (A\Delta)^2$$

$$\Rightarrow (B\Delta)^2 = 1600 + 900$$

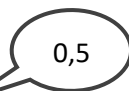
$$\Rightarrow (B\Delta)^2 = 2500$$

$$\Rightarrow (B\Delta) = 50m$$

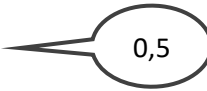


Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  ώστε να υπολογίσουμε μια από τις γωνίες του:

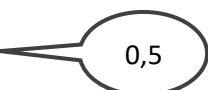
$$\sigma\upsilon\upsilon\Gamma = \frac{(B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 - (B\Delta)^2}{2(B\Gamma)(\Gamma\Delta)} = \frac{52^2 + 27^2 - 50^2}{2 \cdot 52 \cdot 27} = \frac{933}{2808} (*)$$



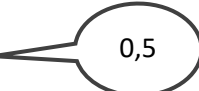
$$\eta\mu\Gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{933}{2808}\right)^2} = \sqrt{\frac{779375}{876096}}$$



$$E_{B\Delta\Gamma} = \frac{(B\Gamma)(\Gamma\Delta)\eta\mu\Gamma}{2} = \frac{52 \cdot 27 \cdot \sqrt{\frac{779375}{876096}}}{2} \approx 662,12 m^2$$



$$E_{AB\Delta} = \frac{(AB)(A\Delta)}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600 m^2$$



$$E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AB\Delta} + E_{B\Delta\Gamma} \approx 1262,12 m^2$$



(\*) Εναλλακτικά  $\sigma\upsilon\upsilon\Gamma = \frac{933}{2808} \Rightarrow \Gamma \approx 70,5937^\circ \Rightarrow \eta\mu\Gamma \approx \eta\mu(70,5937^\circ)$  κ.λπ.

**A6.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{|3-x|-x^2+9}{2x^2-6x}$

Να υπολογίσετε τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

(3 μον.)

(β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2 μον.)

### Λύση

(α)

Για  $x > 3$ , έχουμε ότι  $3 - x < 0 \Rightarrow |3 - x| = x - 3$  και άρα:

0,5

$$f(x) = \frac{x - 3 - x^2 + 9}{2x^2 - 6x} = \frac{-x^2 + x + 6}{2x^2 - 6x}$$

0,5

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + x + 6}{2x^2 - 6x}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$

0,5

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 6}{2x^2 - 6x} = -\frac{x^2 - x - 6}{2x(x-3)} = -\frac{(x-3)(x+2)}{2x(x-3)} = -\frac{x+2}{2x} \quad (\text{καθώς } x \neq 3)$$

0,5

0,5

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( -\frac{x+2}{2x} \right) = -\frac{3+2}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{6}$$

0,5

(β)

Για  $x < 3$ , έχουμε ότι  $3 - x > 0 \Rightarrow |3 - x| = 3 - x$  και άρα:

0,5

$$f(x) = \frac{3 - x - x^2 + 9}{2x^2 - 6x} = \frac{-x^2 - x + 12}{2x^2 - 6x}$$

0,5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 - x + 12}{2x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

0,5

0,5

**ΜΕΡΟΣ Β:** Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις του Μέρους Β.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

**B1.** (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα  $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)$  (2 μον.)

(β) Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu 10x\sigma\upsilon\nu 6x = \eta\mu 18x\sigma\upsilon\nu 2x$  στο διάστημα  $(0, \frac{\pi}{4})$  (8 μον.)

**Λύση**

(α)  
 $B' \text{ Μέλος} = \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha) + (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha)$   
 $= 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = A' \text{ Μέλος}$

(β)

$$\eta\mu 10x\sigma\upsilon\nu 6x = \eta\mu 18x\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow 2\eta\mu 10x\sigma\upsilon\nu 6x = 2\eta\mu 18x\sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(10x + 6x) + \eta\mu(10x - 6x) = \eta\mu(18x + 2x) + \eta\mu(18x - 2x)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 16x + \eta\mu 4x = \eta\mu 20x + \eta\mu 16x$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 20x = \eta\mu 4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x = 2k\pi + 4x \\ 20x = 2k\pi + \pi - 4x \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x - 4x = 2k\pi \\ 20x + 4x = 2k\pi + \pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x = 2k\pi \\ 24x = 2k\pi + \pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{8} \\ x = \frac{k\pi}{12} + \frac{\pi}{24} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Για να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης στο  $(0, \frac{\pi}{4})$  δίνουμε κατάλληλες τιμές στην παράμετρο  $k$

- $x = \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$ 
  - Αν  $k = 0$  τότε  $x = 0$ , απορρίπτεται
  - Αν  $k = 1$  τότε  $x = \frac{\pi}{8}$ , δεκτή
  - Αν  $k = 2$  τότε  $x = \frac{\pi}{4}$ , απορρίπτεται

- $x = \frac{\kappa\pi}{12} + \frac{\pi}{24}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$

- Αν  $\kappa = -1$  τότε  $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{24} = -\frac{\pi}{24}$ , απορρίπτεται

- Αν  $\kappa = 0$  τότε  $x = \frac{\pi}{24}$ , δεκτή 0,5

- Αν  $\kappa = 1$  τότε  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$ , δεκτή 0,5

- Αν  $\kappa = 2$  τότε  $x = \frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{24} = \frac{5\pi}{24}$ , δεκτή 0,5

- Αν  $\kappa = 3$  τότε  $x = \frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}$ , απορρίπτεται

Οι λύσεις της εξίσωσης  $\eta\mu 10x \sin 6x = \eta\mu 18x \sin 2x$  στο διάστημα  $(0, \frac{\pi}{4})$  είναι οι:

$$x_1 = \frac{\pi}{24}, x_2 = \frac{\pi}{8}, x_3 = \frac{5\pi}{24}$$

**B2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} x + \beta, & -1 \leq x < 2 \\ -2x + \gamma, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  να περνά από το σημείο  $(1,3)$  και η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x = 2$ . (6 μον.)

(β) Αν  $\beta = 2$  και  $\gamma = 8$ , να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ . (4 μον.)

### Λύση

(α)

Για να περνά η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  από το σημείο  $(1,3)$  πρέπει:

$$f(1) = 3$$

0,5

$$\Rightarrow 1 + \beta = 3 \Rightarrow \beta = 2$$

0,5

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση  $f$  στο σημείο με  $x = 2$ , πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

0,5

Αφού υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , τότε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης  $f$  στο 2 είναι ίσα.

Δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

0,5

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4$

0,5+0,5

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2x + \gamma) = -4 + \gamma$

0,5+0,5

- $f(2) = -2 \cdot 2 + \gamma = -4 + \gamma$

0,5+0,5

Επομένως έχουμε ότι:  $-4 + \gamma = 4 \Rightarrow \gamma = 8$

0,5+0,5

(β)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -1 \leq x < 2 \\ -2x + 8, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- $-1 \leq x < 2$

Μετασχηματίζουμε τον τύπο  $y = x + 2$  της συνάρτησης ως προς  $x$

$$y = x + 2 \Leftrightarrow x = y - 2$$

0,5

Ελέγχουμε για ποιες τιμές του  $y$  το  $x$  ανήκει στο  $[-1, 2)$ . Έχουμε ότι:

$$-1 \leq x < 2 \Leftrightarrow -1 \leq y - 2 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq y < 4 \quad (1)$$

0,5

0,5

- $2 \leq x \leq 5$

Μετασχηματίζουμε τον τύπο  $y = -2x + 8$  της συνάρτησης ως προς  $x$

$$y = -2x + 8 \Leftrightarrow 2x = 8 - y \Leftrightarrow x = \frac{8 - y}{2}$$

0,5

Ελέγχουμε για ποιες τιμές του  $y$  το  $x$  ανήκει στο  $[2, 5]$ . Έχουμε ότι:

$$2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{8 - y}{2} \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq 8 - y \leq 10$$

0,5

$$\Leftrightarrow -4 \leq -y \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 4 \quad (2)$$

0,5

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το σύνολο:

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 5]\} = [1, 4) \cup [-2, 4] = [-2, 4]$$

0,5

0,5

**B3.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: A \rightarrow f(A)$ , με τύπο  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  (2 μον.)
- (β) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση,  $f^{-1}$  (3 μον.)
- (γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $\frac{f^{-1}}{f}$  (2 μον.)
- (δ) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \left( \frac{f^{-1}}{f} \right) (x) \right]$  (3 μον.)

## Λύση

$$(α) A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

0,5

$$y = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - y \quad (1)$$

$$\Rightarrow x = (1 - y)^2$$

0,5

Ελέγχουμε για ποιες τιμές του  $y$  το  $x$  ανήκει στο  $A$ :

$$x \geq 0 \Rightarrow (1 - y)^2 \geq 0$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ .

Επιπλέον, από την (1), έχουμε ότι  $1 - y \geq 0$  αφού ισούται με μία τετραγωνική ρίζα.

0,5

Δηλαδή  $y \leq 1$ .

Άρα,  $f(A) = (-\infty, 1]$ .

0,5

(β) Εξετάζουμε αν η  $f$  είναι 1 - 1:

Έστω  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$  με  $f(x_1) = f(x_2)$

0,5

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{x_1} = 1 - \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1 - 1

0,5

Η συνάρτηση  $f$  είναι **επί** καθώς το πεδίο τιμών της είναι ίσο με το σύνολο τιμών  $f(A)$

0,5

Αφού η  $f$  είναι 1 - 1 και **επί**, αντιστρέφεται.

0,5

Από το (α) πήραμε  $x = (1 - y)^2$

Άρα  $f^{-1}(x) = (1 - x)^2$ ,  $x \in (-\infty, 1]$

0,5

0,5



$$(\gamma) A \cap f(A) = [0, +\infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1]$$

0,5

Για να ορίζεται η συνάρτηση  $\frac{f^{-1}}{f}$  πρέπει επιπλέον να ισχύει  $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

0,5

Άρα η συνάρτηση  $\frac{f^{-1}}{f}$  ορίζεται στο  $[0, 1)$  και έχει τύπο

0,5

$$\left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x) = \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \frac{(1-x)^2}{1-\sqrt{x}}, \quad x \in [0, 1)$$

0,5

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{(1-x)^2}{1-\sqrt{x}} \right] \text{ καθώς } x \in [0, 1)$$

0,5

Παρατηρούμε ότι υπάρχει απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$

Με χρήση της συζυγούς παράστασης η συνάρτηση  $\frac{f^{-1}}{f}$  μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x) = \frac{(1-x)^2(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{(1-x)^2(1+\sqrt{x})}{(1-x)} = (1-x)(1+\sqrt{x})$$

1

0,5

0,5

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(1-x)(1+\sqrt{x})] = 0 \cdot 2 = 0$$

0,5

**ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**