

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ  
ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021-22  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ / ΤΕΣΕΚ  
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 26 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2022  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: 90 ΛΕΠΤΑ

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

---

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κλπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής η οποία πρέπει να φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
9. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις του Μέρους Α.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

**A1.** Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int (5x + e^{3x} + \eta\mu 2x) dx$$

**A2.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , αν δίνονται τα σημεία  $A(1, -5)$  και  $B(9,1)$ .

**A3.** (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. (2μ)

(β) Αν η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-1,2)$  και  $B(1,3)$ , να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $\Gamma(\xi, f(\xi))$  με  $\xi \in (-1,1)$  στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon): 2x + y - 5 = 0$  (3μ)

**A4.** Να βρείτε τα ολοκληρώματα

(α)  $\int \varepsilon\varphi^9 x \tau\epsilon\mu^2 x dx$  (2μ)

(β)  $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$  (3μ)

**A5.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. (3μ)

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), να συγκρίνετε τους αριθμούς  $3^\pi$  και  $\pi^3$  (2μ)

**A6.** Δίνεται η συνάρτηση  $g$  με τύπο:

$$g(x) = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (2,5μ)

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, g(-1))$  και  $B(0, g(0))$  είναι η  $(\varepsilon): y = \frac{\pi}{4}x$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι:

$$4\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi x < \pi x, \quad \forall x \in (-1,0) \quad (2,5\mu)$$

**ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις του Μέρους Β.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**B1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

**B2.** Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$  και  $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

(α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτονται εσωτερικά. (3μ)

(β) Να βρείτε την εξίσωση ( $\varepsilon$ ) της εφαπτομένης του κύκλου  $C_2$  που άγεται προς αυτόν από το σημείο  $\Sigma(0, -2)$  και έχει θετική κλίση. (2μ)

(γ) Η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) τέμνει την κοινή εφαπτομένη των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$  στο σημείο  $A$ . Να δείξετε ότι το σημείο  $A$  έχει συντεταγμένες  $A(3,2)$  και να βρείτε τις δυνάμεις του σημείου  $A$  ως προς τους δύο κύκλους. (2μ)

(δ) Αν το σημείο  $T(-1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$  με  $\theta \in [0, 2\pi)$  είναι τυχαίο σημείο του κύκλου  $C_2$ , να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου  $M(x, y)$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AT$ . (3μ)

**B3.** (α) Να δείξετε ότι για  $x \in (0, \pi)$ ,

$$\int \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu 2x} dx = -\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + c \quad (3\mu)$$

(β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{2}\eta\mu^2 x\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}, \quad \forall x \in (0, \pi)$$

και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(\frac{\pi}{4}, 1)$ . (4μ)

(γ) Αν η πιο πάνω συνάρτηση  $f$  έχει τύπο  $f(x) = \eta\mu 2x$ ,  $x \in (0, \pi)$ , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $P(x, y)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της είναι ελάχιστη. (3μ)

**ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

### 1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } \nu = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu \bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \quad \text{όπου } \Sigma_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

### 2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

### Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$x = 360^\circ\kappa + \alpha$ ή $x = 360^\circ\kappa + 180^\circ - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha$	$x = 360^\circ\kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\alpha$	$x = 180^\circ\kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

### 3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλυρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda$	$V = \frac{\pi \upsilon}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

### 4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ :  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου  $A(x_1, y_1)$  από την ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$ :  $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$$

Εστίες  $(\pm \gamma, 0)$ , Διευθετούσες  $x = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$ , Εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

### 5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\eta x \qquad (\sigma\upsilon\eta x)' = -\eta\mu x \qquad (\varepsilon\varphi x)' = \tau\epsilon\mu^2 x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

### 6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\epsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\epsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c \qquad \int \sigma\tau\epsilon\mu x \, dx = \ln\left|\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau\omicron\zeta\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c \qquad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau\omicron\zeta\varepsilon\varphi \frac{x}{\alpha} + c$$

### 7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$