

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Πραγματικοί Αριθμοί

Δείκτες επιτυχίας:

- Ορίζουν την έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού α και αποδεικνύουν τις ιδιότητες ριζών, όταν $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0, 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Αρ.6.2
- Αποδεικνύουν την αρρητότητα των νιοστών ριζών των ρητών που δεν είναι νιοστές δυνάμεις ρητών αριθμών, κατανοώντας την ανεπάρκεια των ρητών αριθμών και την επάρκεια των πραγματικών αριθμών ως προς την ύπαρξη νιοστών ριζών κάθε τάξης n . Αρ6,3.
- Επιλύουν άρρητες, εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις. Αρ.6.15.
- Επιλύουν και διερευνούν προβλήματα γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων μιας μεταβλητής και αναπαριστούν γραφικά τις λύσεις τους. Α5.11.

Θα μάθουμε:

- Να υπολογίζουμε τη n -οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού.
- Να υπολογίζουμε τη ρίζα ενός πολυωνύμου της μορφής $P(x) = x^n - \alpha$ και τη λύση της εξίσωσης της μορφής $x^n - \alpha = 0$.
- Τις ιδιότητες των ριζών θετικού πραγματικού αριθμού.
- Να αναγνωρίζουμε και να υπολογίζουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
- Να αποδεικνύουμε και να χρησιμοποιούμε τις βασικές ιδιότητες διάταξης των πραγματικών αριθμών.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Ρίζες Πραγματικών Αριθμών**
- **Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη**
- **Ιδιότητες Διάταξης Πραγματικών Αριθμών**

Εισηγήσεις:

Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές:

- να συνδέσουν τις γνώσεις τους για την τετραγωνική και κυβική ρίζα μη αρνητικού αριθμού με τη n -οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού και να διακρίνουν τη n -οστή ρίζα



μη αρνητικού αριθμού από τη ρίζα πολυωνύμου. Επίσης, θα συνδέσουν τις γνώσεις τους στις δυνάμεις και στις ρίζες με τη δύναμη με ρητό εκθέτη. Στη συνέχεια, θα μάθουν βασικές ιδιότητες των ριζών και θα τις αποδείξουν.

- να αποδείξουν ορισμένες βασικές ιδιότητες διάταξης των Πραγματικών Αριθμών και να τις εφαρμόσουν σε δραστηριότητες και προβλήματα κυρίως ανισοτικών σχέσεων.

Συγκεκριμένα, η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Ρίζες Πραγματικών Αριθμών**

- Βασικός στόχος της διερεύνησης (1) είναι η επανάληψη γνώσεων των μαθητών για την τετραγωνική και κυβική ρίζα μη αρνητικού αριθμού μέσα από το γεωμετρικό μοντέλο που προτείνεται (εμβαδόν τετραγώνου, όγκος κύβου).

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές, μέσω του εφαρμογιδίου, κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στα πολυώνυμα της πρώτης στήλης του πίνακα της σελίδας 45 και στη συνέχεια συμπληρώνουν τον πίνακα. Σε αυτό το σημείο δεν μας ενδιαφέρει η παραγοντοποίηση των πολυωνύμων, αλλά ούτε και ο τρόπος υπολογισμού των ριζών ενός πολυωνύμου. Στη συνέχεια με βάση τις παρατηρήσεις τους θα συμπληρώσουν το δεύτερο πίνακα, χωρίς να κατασκευάσουν τις γραφικές παραστάσεις. Οι μαθητές αναμένεται να διακρίνουν τη n -οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού από τη ρίζα πολυωνύμου.

- Στις δραστηριότητες 1, 2, 3 και 4 οι μαθητές εφαρμόζουν τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει για τη n -οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητες των ριζών.

Στις δραστηριότητες 5 και 6 εφαρμόζουν τις ιδιότητες των ριζών στην εκτέλεση πράξεων και στη μετατροπή κλασμάτων με άρρητο παρονομαστή σε κλάσματα με ρητό παρονομαστή.

Στις δραστηριότητες 7 και 8 εφαρμόζουν τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει σε πράξεις με αλγεβρικές παραστάσεις.

Στις δραστηριότητες 9 και 10 οι μαθητές ασχολούνται με απλές αποδείξεις.



Τέλος, στις δραστηριότητες 11 και 12 συνδέουν τις γνώσεις τους με τη λύση εξίσωσης.

➤ **Δυνάμεις με ρητό εκθέτη**

- ◆ Στόχος της διερεύνησης είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές πως μετατρέπεται μια δύναμη με ρητό εκθέτη σε ρίζα και αντίστροφα.
- ◆ Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές μετατρέπουν δύναμη με ρητό εκθέτη σε ρίζα και αντίστροφα.

Στις δραστηριότητες 2 και 4 οι μαθητές εφαρμόζουν την μετατροπή από δύναμη με ρητό εκθέτη σε ρίζα και αντίστροφα, για να εκτελέσουν πράξεις και να απλοποιήσουν παραστάσεις.

Στη δραστηριότητα 3 εφαρμόζουν την μετατροπή από δύναμη με ρητό εκθέτη σε ρίζα και αντίστροφα, για να επιλύσουν εξισώσεις.

Στη δραστηριότητα 5 εφαρμόζουν την μετατροπή από δύναμη με ρητό εκθέτη σε ρίζα και αντίστροφα, για να λύσουν ένα πρόβλημα.

Τέλος, στη δραστηριότητα 6 εφαρμόζουν την μετατροπή από δύναμη με ρητό εκθέτη σε ρίζα και αντίστροφα, για να αποδείξουν μια ισότητα.

➤ **Ιδιότητες Διάταξης Πραγματικών Αριθμών**

- ◆ Στην προτεινόμενη διερεύνηση οι μαθητές μεταβάλλουν τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου και παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής της περιμέτρου και του εμβαδού του. Με αυτόν τον τρόπο θα αντιληφθούν γιατί μπορούν να προσθέτουν ή να πολλαπλασιάζουν κατά μέλη δύο ανισοτικές σχέσεις. Την ίδια ώρα, μέσα από παρατήρηση, θα αντιληφθούν γιατί δεν μπορούν να αφαιρούν ή να διαιρούν κατά μέλη δύο ανισοτικές σχέσεις.

Οι μαθητές πριν προχωρήσουν στα λυμένα παραδείγματα και στις προτεινόμενες δραστηριότητες είναι σημαντικό να αποδείξουν τις ιδιότητες. Για την απόδειξη των ιδιοτήτων χρησιμοποιούνται δύο αξιώματα που αναφέρουν ότι για δύο θετικούς αριθμούς ισχύει ότι το άθροισμα τους και το γινόμενο τους είναι επίσης θετικός αριθμός.



- Στις δραστηριότητες 1, 2 και 3 οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες διάταξης.

Στις δραστηριότητες 4, 5, 6, 7 και 13 οι μαθητές διατάσσουν και συγκρίνουν πραγματικούς αριθμούς, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων διάταξης.

Στις δραστηριότητες 8, 9, 10, 11 και 14 οι μαθητές αποδεικνύουν ανισοτικές προτάσεις, εφαρμόζοντας ιδιότητες της διάταξης.

Στη δραστηριότητα 12 οι μαθητές αιτιολογούν γιατί μια ιδιότητα δεν ισχύει, δίνοντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα (να τονιστεί ότι το αντιπαράδειγμα είναι μέθοδος απόδειξης σε προτάσεις που δεν είναι αληθείς).

Στη δραστηριότητα 15 χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες ανίσωσης στην επίλυση προβλήματος.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1, 2 και 5, οι μαθητές εκτελούν πράξεις, για να απλοποιήσουν παραστάσεις, ενώ στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές εφαρμόζουν ιδιότητες της διάταξης, για να συγκρίνουν αριθμούς.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις με ρίζες.

Οι δραστηριότητες 6 και 7 είναι εφαρμογές βασικών ιδιοτήτων της διάταξης σε πιο σύνθετα προβλήματα, ενώ στις δραστηριότητες 11 και 12 ζητείται από τους μαθητές η διάταξη πραγματικών αριθμών που πληρούν δεδομένες συνθήκες.

Στις δραστηριότητες 8, 9, 10 και 13 οι μαθητές απλοποιούν παραστάσεις με ρίζες και συγκρίνουν αριθμούς, εφαρμόζοντας ιδιότητες της διάταξης.

Τέλος, στη δραστηριότητα 14 οι μαθητές αποδεικνύουν μια ισότητα που περιέχει ρίζες, ενώ στη δραστηριότητα 15 οι μαθητές επιλύουν μια εξίσωση με ρίζες, αφού δημιουργήσουν πρώτα ένα απλό γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές απλοποιούν μια παράσταση με ρίζες, ενώ στη δραστηριότητα 2 επιλύουν εξισώσεις με ρίζες.



Στη δραστηριότητα 3, οι μαθητές μετατρέπουν μια παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

Η δραστηριότητα 4 είναι εφαρμογή του ορισμού της κυβικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, ενώ οι δραστηριότητες 5, 8 και 15 αναφέρονται σε δραστηριότητες διάταξης πραγματικών αριθμών.

Οι δραστηριότητες 6, 9, 10, 13(γ) και 14 αναφέρονται σε αποδείξεις στις οποίες οι μαθητές, με χρήση γνωστών ιδιοτήτων, αποδεικνύουν πιο σύνθετες ανισοτικές σχέσεις.

Στη δραστηριότητα 7, οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις που περιέχουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

Στη δραστηριότητα 11, οι μαθητές επιλύουν μια ανίσωση α' βαθμού με τη βοήθεια ιδιοτήτων της διάταξης πραγματικών αριθμών.

Στη δραστηριότητα 12, οι μαθητές αποδεικνύουν μια ισότητα που περιέχει ρίζες και τη χρησιμοποιούν για να υπολογίσουν την τιμή μιας παράστασης.

Τέλος, η δραστηριότητα 13(α) είναι εφαρμογή του ορισμού της τετραγωνικής ρίζας σε πρόβλημα γεωμετρίας, ενώ στη δραστηριότητα 13(β) οι μαθητές αποδεικνύουν μιαν ανισοτική σχέση με τη βοήθεια ανισοτικών σχέσεων μεταξύ πλευρών τριγώνου.

Σημειώσεις:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί με γραπτό τελικό διαγώνισμα.

