Απαντήσεις Τεύχους Α΄

Ενότητα 1: Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού

Απροσδιόριστες μορφές ορίων – Κανόνες του De l΄ Hospital

Δραστηριότητες σελίδας 16

1. (α) $-\frac{1}{4}$ (β) $\frac{1}{2}$ (γ) 1

2. (α) $\frac{1}{3}$ (β) 4

(γ) $\frac{1}{2}$ (δ) 1

3. (α) 2 (β) 0 (γ) 2

(δ) 1 (ε) $-\infty$

4. (α) 0 (β) 0

(γ) $\frac{1}{2}$ (δ) 0

5. $a = \frac{27}{10}$

6. $a = -1,\ \beta = 1$

Θεώρημα Rolle

Δραστηριότητες σελίδας 22

1. (α) $\xi = 4$ (β) $\xi = 1$

(γ) $\xi = \frac{2\kappa\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ (δ) Δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

2. $x = 1$ ή $x = 4$

3. $\beta = a(1 - e^2),\ \xi = \sqrt{\frac{e^2 - 1}{2}}$

4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Σωστό

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

Δραστηριότητες σελίδας 28

1. (α) $\xi = \frac{1}{2}$ (β) $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(γ) $\xi = \frac{3}{2}$ (δ) $\xi = \frac{2 + \ln 3}{\ln 3}$

3. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Λάθος

Μονοτονία συνάρτησης (Ορισμοί)
Δραστηριότητες σελίδας 36

1. (α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

(γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

(δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

2. (α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

3. $[-5, -1]$

Ακρότατα συνάρτησης (Ορισμοί)
Δραστηριότητες σελίδας 43

1. (α) Η f έχει τοπικό (ολικό) ελάχιστο, το $f(0) = 0$.

(β) Η f δεν έχει τοπικά (ολικά) ακρότατα.

(γ) Η f έχει τοπικό μέγιστο, το $f(-1) = 5$ και τοπικό ελάχιστο, το $f(1) = 1$.

(δ) Η f έχει τοπικά ελάχιστα, τα $f(-2) = -27, f(1) = 0$ και τοπικό μέγιστο, το $f(0) = 5$.

(ε) Η f έχει τοπικά (ολικά) ελάχιστα, τα $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και τοπικό (ολικό) μέγιστο, το $f(0) = 1$.

(στ) Η f έχει τοπικά μέγιστα, τα $f(-2) = \sqrt[3]{4}, f(3) = \sqrt[3]{9}$ και τοπικό (ολικό) ελάχιστο, το $f(0) = 5$.
(Το $f(3) = \sqrt[3]{9}$ είναι και ολικό μέγιστο της συνάρτησης f.)

(ζ) Η f έχει τοπικά μέγιστα, τα $f(0) = 0, f(2) = 1$.
(Το $f(2) = 1$ είναι και ολικό μέγιστο της συνάρτησης f.)

2. (α) Λάθος (β) Σωστό

(γ) Σωστό (δ) Λάθος

3. (α) Η ελάχιστη τιμή της f είναι η $f(-2) = 2$.
Η f δεν έχει μέγιστη τιμή.

(β) Η ελάχιστη τιμή της f είναι η $f(-3) = -5$.
Η μέγιστη τιμή της f είναι η $f(0) = 4$.

Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Θεωρήματα)
Δραστηριότητες σελίδας 58

1. (α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.
(β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
(γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$.
(δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

2. (α) Η f έχει τοπικό (ολικό) μέγιστο, το $f(1) = 6$.
(β) Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
(γ) Η f έχει τοπικό (ολικό) ελάχιστο, το $f(-2) = -\frac{1}{e^2}$.
(δ) Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

3. (α) Η f έχει τοπικό μέγιστο, το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.
(β) Η f έχει τοπικό ελάχιστα, τα $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$, ενώ η f έχει τοπικό μέγιστα, τα $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

4. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

6. $a = 1,\ \beta = 1$

8. $[-35, 17]$

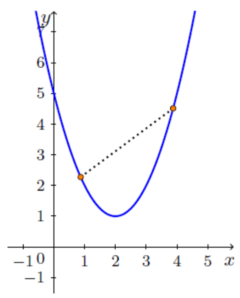
9. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Σωστό

10. $a \in [-6, 6]$

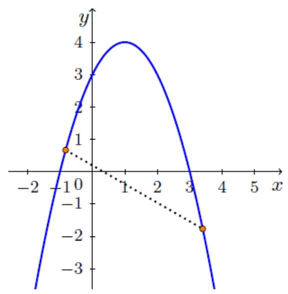
12. (α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
Η f έχει τοπικό (ολικό) ελάχιστο, το $f(1) = 0$.

Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης
Δραστηριότητες σελίδας 72

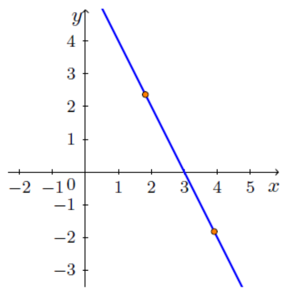
1. (α) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο της πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.



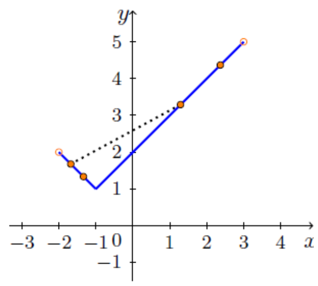
(β) Η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο της κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.



(γ) Η f είναι συγχρόνως κυρτή και κοίλη στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο της πάνω ή κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.



(δ) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο της πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.



2. (α) Η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και κοίλη στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

(β) Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(γ) Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0, \pi]$ και κυρτή στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$.

(δ) Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, ενώ η f είναι κυρτή στο διάστημα $[-2, 2]$.

3. (α) Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$.
Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $(1, 3)$.

(β) Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2]$ και κυρτή στο διάστημα $[-2, +\infty)$.
Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$.

(γ) Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και κυρτή στο διάστημα $(-1, +\infty)$.
Η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

(δ) Η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο διάστημα $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.
Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

4. (α) Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

5. $\lambda \in [-2, 2]$

Ασύμπτωτες
Δραστηριότητες σελίδας 83

1. (α) Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.
(β) Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.
(γ) Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.
(δ) Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 3$.

2. (α) Η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2$, όταν $x \to \pm\infty$.
(β) Η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, όταν $x \to -\infty$.
(γ) Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$, όταν $x \to 0^-$.
Η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες, όταν $x \to \pm\infty$.

3.

(α)	Σωστό	(β)	Λάθος	(γ)	Λάθος
(δ)	Λάθος	(ε)	Λάθος	(στ)	Σωστό

4. (α) Η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$, όταν $x \to \pm\infty$.
(β) Η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$, όταν $x \to +\infty$.
(γ) Η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$, όταν $x \to +\infty$ και την ευθεία $y = -x - \frac{1}{2}$, όταν $x \to -\infty$.
(δ) Η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x - 1$, όταν $x \to \pm\infty$.

5. $\lambda = -2$

Μελέτη – Γραφική παράσταση συνάρτησης
Δραστηριότητες σελίδας 97

1. (α) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$
Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(0, 0)$, $\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(2\sqrt{3}, 0\right)$
Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$[-2, 2]$.

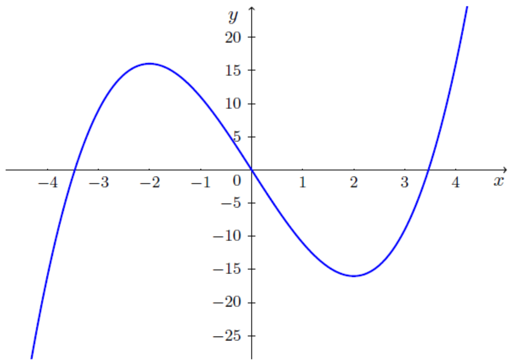
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό μέγιστο, το $f(-2) = 16$ και τοπικό ελάχιστο, το $f(2) = -16$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $(0, 0)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες.

Γραφική παράσταση της f:



(β) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(-1, 0), (2, 0), (0, 4)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

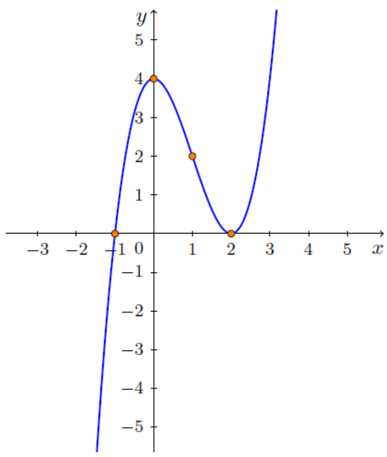
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό μέγιστο, το $f(0) = 4$ και τοπικό ελάχιστο, το $f(2) = 0$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $(1, 2)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες

Γραφική παράσταση της f:



(γ) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), (0, -1)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

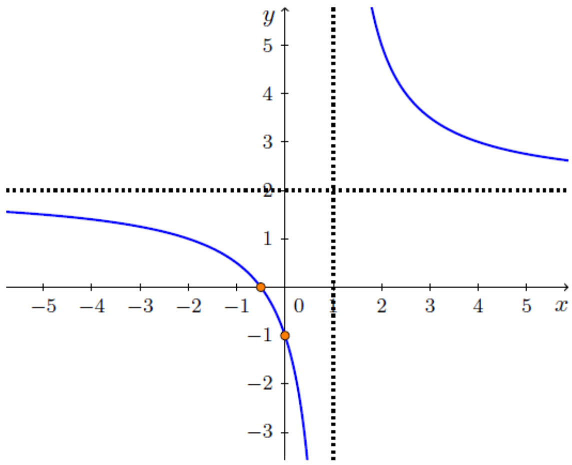
Ακρότατα: Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2$, όταν $x \to \pm\infty$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

Γραφική παράσταση της f:



(δ) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(0, 0)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $[1, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1]$.

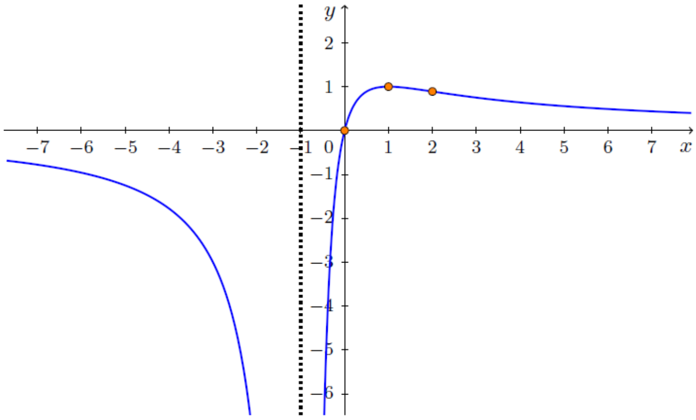
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, 2]$, ενώ η f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(2, \frac{8}{9}\right)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, όταν $x \to \pm\infty$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = -1$.

Γραφική παράσταση της f:



(ε) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(-4, 0), (2, 0), (0, -8)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

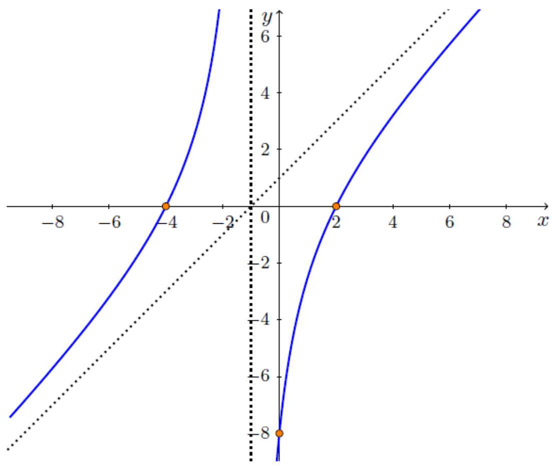
Ακρότατα: Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και κοίλη στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 1$, όταν $x \to \pm\infty$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = -1$.

Γραφική παράσταση της f:



(στ) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1), (-1, 0)$ και $(0, +\infty)$.

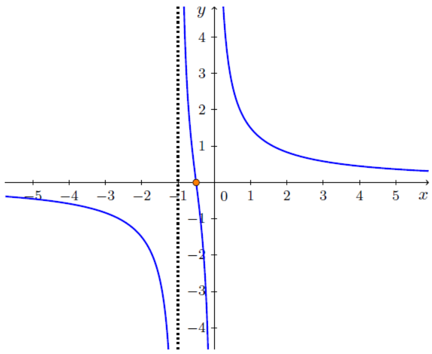
Ακρότατα: Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, ενώ η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-1, -\frac{1}{2}\right]$ και $(0, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, όταν $x \to \pm\infty$ και κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -1$ και $x = 0$.

Γραφική παράσταση της f:



(ζ) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(-1, 0)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, 0)$.

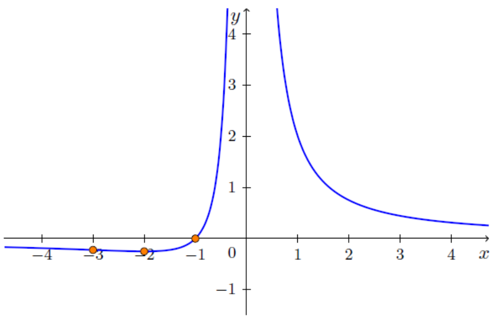
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό ελάχιστο, το $f(-2) = -\frac{1}{4}$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -3]$ και κυρτή στα διαστήματα $[-3, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(-3, -\frac{2}{9}\right)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, όταν $x \to \pm\infty$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

Γραφική παράσταση της f:



(η) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(0, 0)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(1, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1)$.

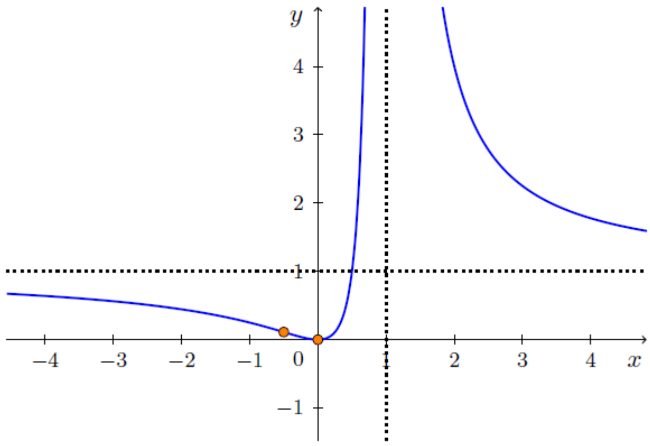
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, ενώ η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$ και $(1, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{9}\right)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$, όταν $x \to \pm\infty$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

Γραφική παράσταση της f:



(θ) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(0, 0)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$.

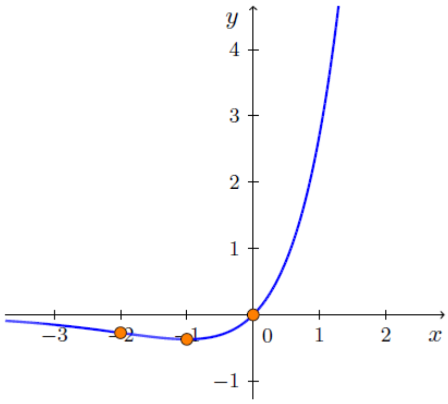
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό ελάχιστο, το $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2]$ και κυρτή στο διάστημα $[-2, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, όταν $x \to -\infty$.

Γραφική παράσταση της f:



(ι) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(0, 1)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

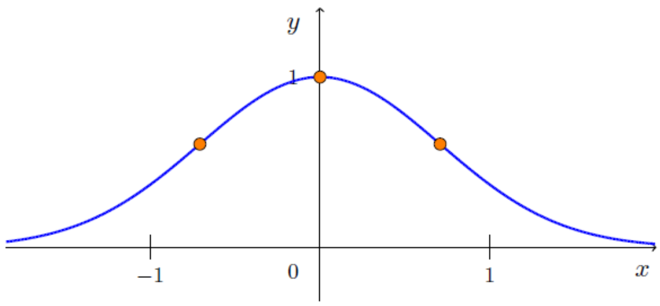
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό (ολικό) μέγιστο, το $f(0) = 1$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, ενώ η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημεία καμπής, τα $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, όταν $x \to \pm\infty$.

Γραφική παράσταση της f:



(ια) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(1, 0), (0, -1)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

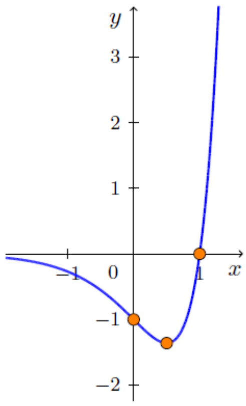
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό (ολικό) ελάχιστο, το $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $(0,-1)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$, όταν $x \to -\infty$.

Γραφική παράσταση της f:



(ιβ) Πεδίο Ορισμού: $A_f=(0,+\infty)$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(1,0)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$.

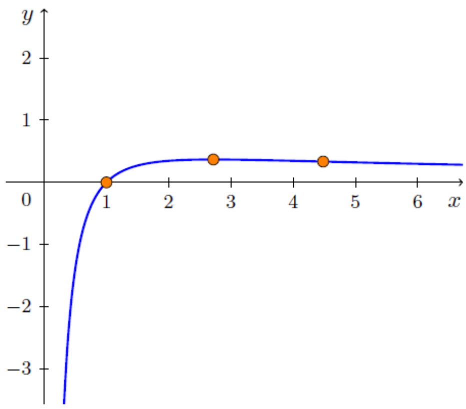
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό (ολικό) μέγιστο, το $f(e)=\frac{1}{e}$.

Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0,\sqrt{e^3}\right]$ και κυρτή στο διάστημα $\left[\sqrt{e^3},+\infty\right)$.

Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(\sqrt{e^3},\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$, όταν $x \to 0^+$ και οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$, όταν $x \to +\infty$.

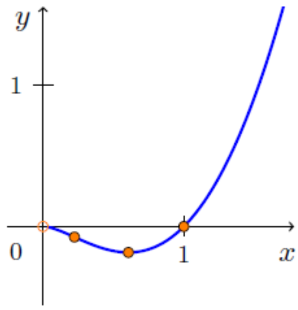
Γραφική παράσταση της f:



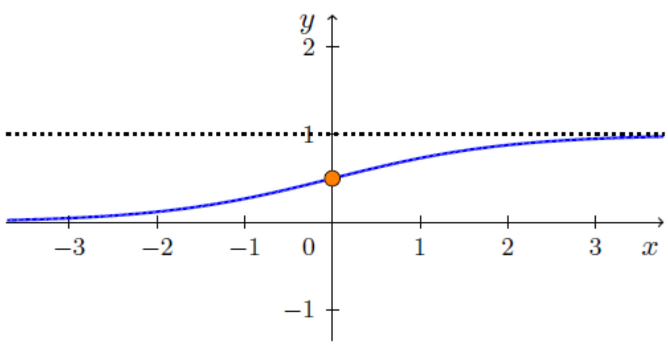
(ιγ) Πεδίο Ορισμού: $A_f=(0,+\infty)$

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(1,0)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$.
Ακρότατα: Η f έχει τοπικό (ολικό) ελάχιστο, το $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$.
Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right]$ και κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty\right)$.
Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$.
Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες.
Γραφική παράσταση της f:

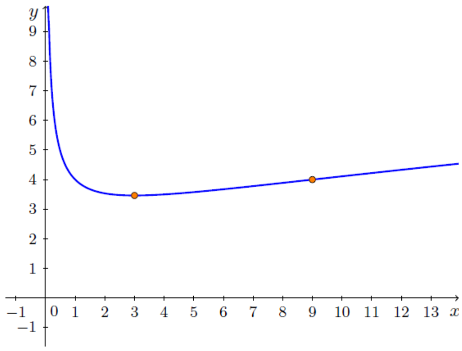


(ιδ) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$
Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Ακρότατα: Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
Διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη: Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$.
Σημεία καμπής: Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$, όταν $x \to +\infty$ και την ευθεία $y = 0$, όταν $x \to -\infty$.
Γραφική παράσταση της f:



2. $\kappa = 3$

Γραφική παράσταση της f:



Προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων
Δραστηριότητες σελίδας 105

2. Θετικός αριθμός: $a = 1$

3. Θετικός αριθμός: $a = \frac{1}{2}$

4. (α) Μήκος: $a = 2\sqrt{2}$ μονάδες, Πλάτος: $\beta = \sqrt{2}$ μονάδες
(β) Εμβαδόν: $E = 4$ τετραγωνικές μονάδες

5. $x_P = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6. Ακτίνα: $R = \sqrt{2}\ \mathrm{m}$, Ύψος: $1\ \mathrm{m}$, Μέγιστος Όγκος: $V_{max} = \frac{2\pi}{3}\ \mathrm{m}^3$

7. Πλευρά βάσης: $a = 15\ \mathrm{cm}$, Ύψος: $\upsilon = 10\ \mathrm{cm}$

8. (α) $P(x) = -\dfrac{x^2}{5} + 200x - 50,\ \ x \in [0, +\infty)$
(β) $x = 500$ τόνοι

9. (α) $E(x) = (300 + x)(5000 - 10x),\ \ x \in [-300, +\infty)$
(β) Τιμή εισιτηρίου: 400 ευρώ $(x = 100)$
(γ) Μέγιστο κέρδος: $E(100) = 1600000$ ευρώ

10. $x = 20$

Δραστηριότητες Ενότητας σελίδας 107

2. (α) $\xi = 1$ (β) $\xi = 2$

5. $\xi = \sqrt[3]{9}$

6. (α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f = \mathbb{R}$.
(β) Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_g = [2, +\infty)$.

7. (α) $f(2) > f(3)$
(β) $f\big(f(2)\big) < f\big(f(3)\big)$
(γ) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

8. Διαστήματα μονοτονίας: Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, e]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$.
$e^{\pi} < \pi^{e}$

9. $k \in [-4, 4]$

11. (α) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

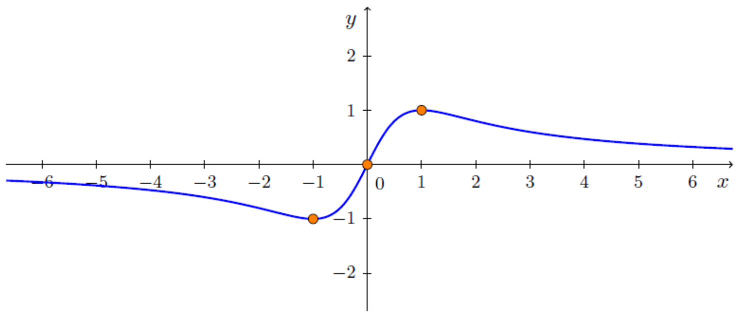
Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(0, 0)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

Ακρότατα: Η f έχει τοπικό ελάχιστο, το $f(-1) = -1$ και τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, όταν $x \to \pm\infty$.

Γραφική παράσταση της f:



(β) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

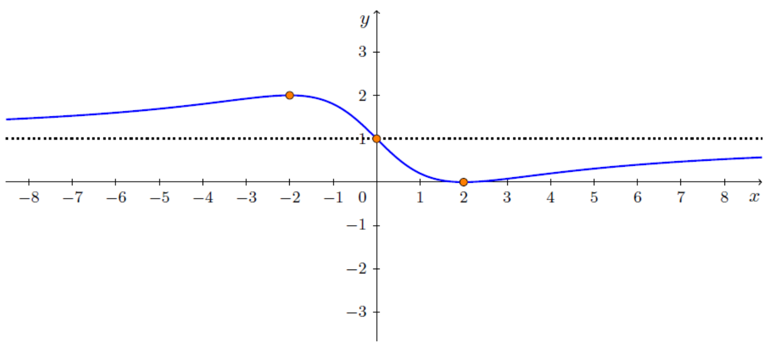
Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(2, 0), (0, 1)$

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 2]$.

Ακρότατα: Η f έχει τοπικό μέγιστο, το $f(-2) = 2$ και τοπικό ελάχιστο, το $f(2) = 0$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$, όταν $x \to \pm\infty$.

Γραφική παράσταση της f:



(γ) Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$

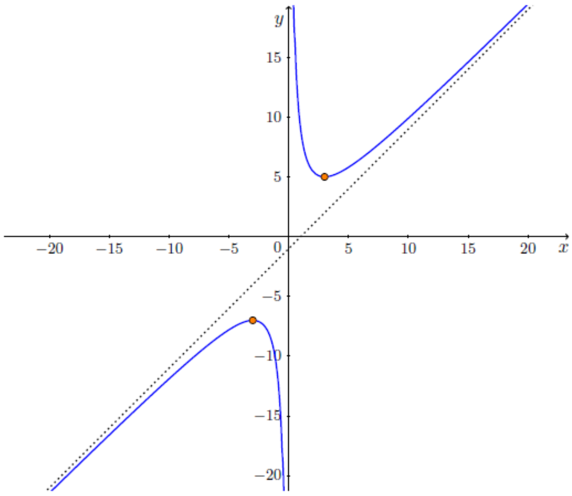
Δεν υπάρχουν σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων.

Διαστήματα μονοτονίας: Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -3]$ και $[3, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-3, 0)$ και $(0, 3]$.

Ακρότατα: Η f έχει τοπικό μέγιστο, το $f(-3) = -7$ και τοπικό ελάχιστο, το $f(3) = 5$.

Ασύμπτωτες: Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x - 1$, όταν $x \to \pm\infty$.

Γραφική παράσταση της f:



12. Μήκος: $a = \frac{2R\sqrt{2}}{2}$ μονάδες, Πλάτος: $\beta = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ μονάδες

13. (α) Ακτίνα: $R = 4\ \text{cm}$, Ύψος: $\frac{5}{3}\ \text{cm}$

(β) Ακτίνα: $R = 3\ \text{cm}$, Ύψος: $\frac{5}{2}\ \text{cm}$

14. Μήκος: $a = 2\sqrt{3}$ μονάδες, Πλάτος: $\beta = 6$ μονάδες

Ενότητα 2: Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Δραστηριότητες σελίδας 120

1.
(α) $\frac{\pi}{3}$ (β) 0 (γ) $\frac{\pi}{4}$
(δ) $\frac{\pi}{3}$ (ε) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (στ) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $\text{ημ}\left(\text{τοξσφ}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\text{συν}\left(\text{τοξσφ}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

4. $\text{ημ}(\text{τοξεφ}x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, $\text{συν}(\text{τοξσφ}x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων – Εφαρμογές

Δραστηριότητες σελίδας 124

1.
(α) $\frac{1}{2}$ (β) $\frac{1}{2}$
(γ) 1 (δ) 0

2. (α) $A_f = [-2, 2]$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $x \in (-2, 2)$

(β) $A_f = \left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$, $x \in \left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$

(γ) $A_f = \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$

$f'(x) = \frac{2\text{εφ}x(1+\text{εφ}^2x)}{1+\text{εφ}^4x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$

(δ) $A_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right)}$, $x \in \mathbb{R}$

(ε) $A_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

3. $x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. (α) Η f έχει τοπικό μέγιστο, το $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$ και τοπικό ελάχιστο, το $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

(β) Η f έχει τοπικό (ολικό) μέγιστο, το $f(0) = \frac{\pi}{2}$ και τοπικά (ολικά) ελάχιστα, τα $f(-1) = f(1) = 0$.

(γ) Η f έχει τοπικό (ολικό) μέγιστο, το $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

Δραστηριότητες Ενότητας σελίδας 125

1. $A = \dfrac{4}{5}$

4. (α) $A_f = [-1, 1]$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot \text{τοξημ}x + 1 + x - 2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$$

(β) $A_f = \mathbb{R}$

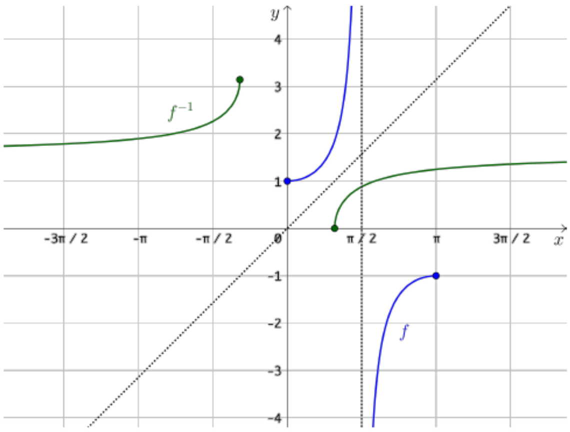
$f'(x) = 2\text{τοξεφ}x, x \in \mathbb{R}$

(γ) $A_f = [0, 1]$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}, x \in (0, 1)$$

5. $A_{f^{-1}} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}:



6. Η f έχει τοπικό ελάχιστο, το $f(-1) = 2 - \pi$ και τοπικό μέγιστο, το $f(1) = \pi - 2$.