

ΛΟΓΙΚΗ

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ: Η Αληθοσυναρτησιακή Λογική

Δημήτρης Πορτίδης
Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Γενική Εισαγωγή στην Έννοια του ‘Επιχειρήματος’
 - 1.1 Βασικές Έννοιες
 - 1.1.1 Η Έννοια του Επιχειρήματος
 - 1.1.2 Πως Διακρίνουμε ότι μια Ακολουθία Προτάσεων αποτελεί Επιχείρημα;
 - 1.1.3 Γιατί μας Ενδιαφέρει η Σπουδή των Επιχειρημάτων;
 - 1.1.4 Παραγωγικά Επιχειρήματα και Εγκυρότητα
 - 1.1.5 Τυποποίηση των Προτάσεων της Φυσικής Γλώσσας
 - 1.2 Η Έννοια της Πρότασης
 - 1.3 Λογική και Αλήθεια
 - 1.4 Λογικές Πλάνες
 - 1.5 Η Έννοια του Αντιπαραδείγματος
 - 1.6 Πειστικά Επιχειρήματα
 - Ασκήσεις 1
-
2. Προτασιακή Σύνταξη
 - 2.1 Δηλωτικές Προτάσεις
 - 2.2 Συμβολισμός και Δομή της Γλώσσας του Προτασιακού Λογισμού
 - 2.3 Κανόνες Σχηματισμού Προτασιακών Τύπων
 - 2.4 Οι Λογικοί Σύνδεσμοι και η Σχέση τους με την Φυσική Γλώσσα
 - 2.5 Τυποποίηση: Μετάφραση προτάσεων στην Γ
 - Ασκήσεις 2
-
3. Προτασιακή Σημασιολογία
 - 3.1 Πίνακες Αληθείας
 - Ασκήσεις 3
-
4. Ιδιότητες και Σχέσεις των Προτάσεων
 - 4.1 Ταυτολογίες
 - 4.2 Αντιφάσεις
 - 4.3 Ενδεχομενικές Προτάσεις
 - 4.4 Λογική Ισοδυναμία
 - 4.5 Οι βασικοί Νόμοι της Λογικής
 - Ασκήσεις 4
-
5. Οι Βασικές Έννοιες της Λογικής
 - 5.1 Η Έννοια της Λογικής Συνέπειας
 - 5.2 Η Έννοια της Λογικής Εγκυρότητας
 - 5.3 Διαδικασίες Απόφασης Λογικής Εγκυρότητας ή Ακυρότητας
 - 5.3.1 Η Μέθοδος των Πινάκων Αληθείας
 - 5.3.2 Η Μέθοδος της Έλλειψης Αντιπαραδείγματος
 - 5.4 Σχέση συνέπειας και εγκυρότητας
 - 5.5 Σχέση συνέπειας και εγκυρότητας
 - 5.6 Βασικά Έγκυρα Επιχειρηματικά Σχήματα και Λογικές Πλάνες
 - Ασκήσεις 5

1. Γενική Εισαγωγή στην Έννοια του ‘Επιχειρήματος’

Η Λογική είναι ένα από τα πρώτα επιστημονικά αντικείμενα με κύριο σκοπό της την ανάλυση και κατανόηση των συλλογισμών ή επιχειρημάτων μας. Υπάρχουν διάφορα είδη συλλογισμών και κατ’ επέκταση διάφορες θεωρίες λογικής για την εξέταση των διαφόρων ειδών συλλογισμού. Σε αυτές τις σημειώσεις θα επικεντρωθούμε στην ανάλυση του *Αληθοσυναρτησιακού* ή *Προτασιακού Λογισμού*. Σ’ αυτή την σχετικά εκτενή εισαγωγή θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε χωρίς τεχνικά εφόδια τον σκοπό της Λογικής και να αναδείξουμε γιατί η εξυπηρέτηση αυτού του σκοπού είναι σημαντική.

1.1 Βασικές Έννοιες

1.1.1 Η Έννοια του Επιχειρήματος

Η Λογική ασχολείται με την μελέτη των επιχειρημάτων (ή συλλογισμών, ή συναγωγών, ή συμπερασματικών κανόνων), δηλαδή των λογικών διαδικασιών με τις οποίες οδηγούμαστε από ένα σύνολο προκειμένων (ή υποθέσεων) σε ένα συμπέρασμα. Μερικά παραδείγματα επιχειρημάτων είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1:

Αν η Φιλοσοφική Λογική είναι κλάδος της Φιλοσοφίας, τότε είναι δύσκολη.

Η Φιλοσοφική Λογική είναι κλάδος της Φιλοσοφίας.

Επομένως, η Φιλοσοφική Λογική είναι δύσκολη.

Παράδειγμα 2:

Το UP είναι ο καλύτερος δίσκος των δυο τελευταίων δεκαετιών, επειδή οι R.E.M. είναι το καλύτερο συγκρότημα των δύο τελευταίων δεκαετιών και το UP είναι ο καλύτερος δίσκος των R.E.M.

Παράδειγμα 3:

Το λεωφορείο για Θεσσαλονίκη φεύγει είτε από τον σταθμό του Κηφισού είτε από τον σταθμό της Λιοσίων.

Αν φεύγει από τον σταθμό του Κηφισού, τότε φεύγει από τον ίδιο σταθμό με το λεωφορείο για Πάτρα.

Αλλά δεν φεύγει από τον ίδιο σταθμό με το λεωφορείο για Πάτρα.

Επομένως, το λεωφορείο για Θεσσαλονίκη φεύγει από τον σταθμό της Λιοσίων.

Παράδειγμα 4:

Μέχρι στιγμής, ο ήλιος ανατέλλει από την ανατολή.

Άρα, αύριο θα ανατείλει από την ανατολή.

Παράδειγμα 5:

Αυτός που σκότωσε το θύμα είχε και την δυνατότητα και το κίνητρο να το κάνει.

Ο υπηρέτης είχε και την δυνατότητα και το κίνητρο να το κάνει.

Άρα, το φόνο τον διέπραξε ο υπηρέτης.

Όλα τα παραπάνω είναι επιχειρήματα διατυπωμένα στην φυσική γλώσσα, δηλαδή στα Ελληνικά. Και είναι επιχειρήματα ακριβώς γιατί εμπεριέχουν άρρητα τον ισχυρισμό ότι οι προτάσεις που αποτελούν τις προκειμένες τους οδηγούν στο συμπέρασμα. Επομένως ένα επιχείρημα δεν είναι οποιαδήποτε ακολουθία προτάσεων, αλλά πρέπει να είναι έτσι δομημένο ώστε η ακολουθία των προτάσεων να χωρίζεται σε δύο υποσύνολα, τις προκειμένες και το συμπέρασμα. Επιπλέον για να είναι χρήσιμο ένα επιχείρημα οφείλει να συνδέει τις προκειμένες με το συμπέρασμα του, με τρόπο που οι προκειμένες να υποστηρίζουν την

συναγωγή του συμπεράσματος. Αν και στη φυσική μας γλώσσα δεν μιλάμε πάντα με ένα λογικά δομημένο τρόπο και ούτε συμπεριλαμβανόμε αναλυτικά όλες τις προκειμένες του επιχειρήματος στα λεγόμενα μας (όπως δείχνει το παράδειγμα 6 που ακολουθεί), η επιχειρηματική δομή των συλλογισμών μας μπορεί να δοθεί με μια λογική αναδιάταξη των προτάσεων μας ή με την συμπλήρωση των προκειμένων που υπονοούνται ή παραλείπονται γιατί θεωρούνται αυτονόητες.

Παράδειγμα 6:

Ο πρωθυπουργός μπορεί να μαγειρεύει επειδή μπορεί να μιλά καλά Αγγλικά.

Η λογική αναδιάταξη των προτάσεων του (6) συνίσταται στην κατασκευή μιας επιχειρηματικής δομής η οποία να αποτελείται από ένα σύνολο προκειμένων και το συμπέρασμα. Αυτή είναι:

(6') Ο πρωθυπουργός μιλά καλά Αγγλικά.
Επομένως, μπορεί να μαγειρεύει.

Αν και το (6') μπορεί να θεωρηθεί επιχείρημα αφού του έχει δοθεί η απαραίτητη επιχειρηματική δομή, ωστόσο μας είναι εντελώς άχρηστο ως συλλογισμός, διότι οι προκειμένες του δεν συνδέονται με κανένα τρόπο με το συμπέρασμα του. Συγκρίνατε το με το (1) παραπάνω, το οποίο είναι ένα χρήσιμο επιχείρημα ακριβώς επειδή έχει την απαραίτητη επιχειρηματική δομή αλλά και γιατί οι προκειμένες του εκφράζουν κάποιο λόγο για την αποδοχή του συμπεράσματος.

1.1.2 Πως Διακρίνουμε ότι μια Ακολουθία Προτάσεων αποτελεί Επιχείρημα;

Στην φυσική γλώσσα υπάρχουν μια σειρά από ενδεικτικές λέξεις ή εκφράσεις που υποδηλώνουν την ύπαρξη ενός επιχειρήματος. Όσον αφορά τις προκειμένες, μεταξύ άλλων, τέτοιες φράσεις είναι: «Με δεδομένα τα ...», «Από την στιγμή που ...». Όσον αφορά το συμπέρασμα, τέτοιες φράσεις είναι: «συνεπώς», «άρα», «επομένως», «κατά συνέπεια», «το αποτέλεσμα είναι», «έπεται», κλπ. Παρ' όλα αυτά, δεν υπάρχουν αυστηρά καθορισμένα γλωσσικά κριτήρια διάκρισης ή αναγνώρισης ενός επιχειρήματος και των συστατικών του στοιχείων. Πρέπει να προσπαθούμε να διακρίνουμε αν ένα σύνολο προτάσεων οι οποίες υποτίθεται ότι *οδηγούν* σε ένα συμπέρασμα όντως αποτελούν επιχείρημα.

Ένα *άμεσο* επιχείρημα έχει λέξεις ενδεικτικές του συμπεράσματος, όπως για παράδειγμα το ακόλουθο.

Παράδειγμα 7:

Από την στιγμή που η θανατική ποινή καταργήθηκε, η εγκληματικότητα έχει αυξηθεί.
Επομένως, η απειλή της θανατικής ποινής δρα ανασχετικά σε σχέση με την εγκληματικότητα.

Ενώ ένα *έμμεσο* επιχείρημα μπορεί να μην έχει λέξεις ενδεικτικές του συμπεράσματος, αλλά παρ' όλα αυτά να διατυπώνει κάποια συμπερασματική σχέση μεταξύ των προτάσεων του, όπως για παράδειγμα το ακόλουθο.

Παράδειγμα 8:

Πρέπει να σταματήσεις να του κάνεις πλάκα για την μύτη του. Θα σου άρεσε να σου έκαναν πλάκα για την δική σου μύτη;

Για να δούμε λοιπόν αν μια ακολουθία προτάσεων αποτελεί όντως ένα επιχείρημα, χρειάζεται να προσπαθήσουμε να την αναδιατάξουμε σε άμεση επιχειρηματική δομή. Το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής:

Παράδειγμα 8':

Είναι δυσάρεστο να κάνει κανείς πλάκα σε ανθρώπους με άσχημες μύτες. *Επομένως*, πρέπει να σταματήσεις να κάνεις πλάκα στον Ταδόπουλο για την μύτη του.

1.1.3 Γιατί μας Ενδιαφέρει η Σπουδή των Επιχειρημάτων;

Επιχειρήματα υπάρχουν σε κάθε πτυχή του λόγου μας. Παρέχονται ως δικαιολόγηση ενός συμπεράσματος. Επιχειρούμε μέσω των επιχειρημάτων να πείσουμε για την υιοθέτηση μιας άποψης, ή να δείξουμε ότι μια άποψη (ένα συμπέρασμα) έπεται από μια σειρά άλλων απόψεων που υιοθετούμε. Συνεπώς, τα επιχειρήματα είναι μορφές απόδειξης (ή δικαιολόγησης). Για να αποδείξουμε (ή για να δικαιολογήσουμε) έναν ισχυρισμό X, κατασκευάζουμε ένα επιχείρημα του οποίου οι προκείμενες οδηγούν συμπερασματικά στο X. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα επιχειρημάτων από τις θετικές και κοινωνικές επιστήμες .

Παράδειγμα 9:

«Οι επικρίσεις οι οποίες αναδύονται από κάποιες ψυχολογικές ανάγκες αυτών που κάνουν τις επικρίσεις, δεν αξίζουν ορθολογικής απάντησης. Όταν κάποιος άνθρωπος παραπονιούνται ότι η ψυχανάλυση κάνει ακραίες και αυθαίρετες δηλώσεις για τη παιδική σεξουαλικότητα, αυτή τους η κριτική πηγάζει από κάποιες ψυχολογικές τους ανάγκες. Επομένως, η κριτική ότι η ψυχανάλυση κάνει ακραίες και αυθαίρετες δηλώσεις για την παιδική σεξουαλικότητα δεν αξίζει ορθολογικής απάντησης.» (Sigmund Freud)

Παράδειγμα 10:

«Όταν ένα τρίγωνο Α είναι όμοιο με ένα τρίγωνο Β, και ένα Β είναι όμοιο με ένα τρίγωνο Γ, τότε το τρίγωνο Α είναι όμοιο με το τρίγωνο Γ.»

Παράδειγμα 11:

«Τα άτομα είναι τα βασικά συστατικά όλης της ύλης. Μπορούν να συνδυαστούν ώστε να σχηματίσουν μόρια, των οποίων οι ιδιότητες είναι γενικά πολύ διαφορετικές από της ιδιότητες των συστατικών τους ατόμων. Το αλάτι, για παράδειγμα, το οποίο είναι μια απλή χημική ένωση που σχηματίζεται από χλώριο και νάτριο, δεν έχει καμία ομοιότητα ούτε με ένα δηλητηριώδες αέριο ούτε με ένα υψηλά ραδιενεργό άτομο.»

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα επιχειρημάτων από την πολιτική, τις εφημερίδες, τη δικαιοσύνη.

Παράδειγμα 12:

«Αν οι βιομηχανίες τσιγάρων δημοσιεύουν πάνω στα πακέτα ότι το κάπνισμα βλάπτει την υγεία, τότε οι καπνιστές ευθύνονται οι ίδιοι για όποιο ρίσκο παίρνουν από το κάπνισμα. Οι βιομηχανίες τσιγάρων δημοσιεύουν τις σχετικές προειδοποιήσεις πάνω στα πακέτα. Επομένως, οι καπνιστές ευθύνονται οι ίδιοι για όποιο ρίσκο παίρνουν από το κάπνισμα.»

Παράδειγμα 13:

«Από ένα υγιές Χρηματιστήριο αντλούν υγιή κεφάλαια και οι επιχειρήσεις, χωρίς το κόστος του τραπεζικού δανεισμού, εξασφαλίζοντας έτσι καλύτερες προϋποθέσεις ανάπτυξης. Η υπονόμευση επομένως του Χρηματιστηρίου, εξαιτίας πολιτικών παιχνιδιών, αποβαίνει τελικώς και σε βάρος της οικονομίας και όχι μόνο των φουκαράδων που πίστεψαν ότι μπορούσαν να δουν στον ήλιο μοίρα τοποθετούμενοι σε μετοχές ελληνικών εταιριών.»

Παράδειγμα 14:

«Η αμερικάνικη δεξιά έχει διαμορφώσει μια θεωρία ότι δεν μπορεί ο Αμερικανός φορολογούμενος να βοηθά μη δημοκρατικά καθεστάτα και κράτη που δεν έχουν φιλελεύθερους οικονομικούς θεσμούς. Διότι τα χρήματα που θα δώσει θα τα πάρουν οι ολιγαρχίες και τα μονοπώλια.»

Με το να ασχολείται διεξοδικά με τις ιδιότητες και την δομή των επιχειρημάτων, η Λογική βοηθά (και ίσως να καθορίζει) την δυνατότητα κριτικής σκέψης και ανάλυσης, αφού είναι προφανές ότι αυτές οι δεξιότητες είναι στενά συνδεδεμένες με την ικανότητα διατύπωσης και κατανόησης επιχειρημάτων.

1.1.4 Παραγωγικά Επιχειρήματα και Εγκυρότητα

Μέχρι στιγμής μιλήσαμε για την έννοια του επιχειρήματος με πολύ γενικούς όρους. Δεν έχουμε διακρίνει μεταξύ τύπων επιχειρήματος. Ειδικότερα, ενώ έχουμε χαρακτηρίσει το επιχείρημα ως μια ακολουθία προτάσεων τέτοια ώστε οι προκειμένες του να οδηγούν ή να υποστηρίζουν το συμπέρασμά του, δεν έχουμε αναλύσει τι ακριβώς εννοούμε με την έννοια ‘οδηγούν’ ή την έννοια ‘υποστηρίζουν’. Ποια ακριβώς είναι η σχέση υποστήριξης μεταξύ προκειμένων και συμπεράσματος ενός επιχειρήματος; Εδώ χρειάζεται να κάνουμε μια βασική διάκριση μεταξύ *παραγωγικών* και μη-παραγωγικών επιχειρημάτων.

Ένα επιχείρημα είναι *παραγωγικό* όταν με αυτό επιχειρείται να αποδειχθεί ότι το συμπέρασμα έπεται αναγκαία από τις προκειμένες. (Με όρους που θα εξηγήσουμε αργότερα, ένα επιχείρημα είναι παραγωγικό αν εκ της δομής του έπεται ότι το συμπέρασμα είναι ένα *λογικό επακόλουθο* των προκειμένων.) Με άλλα λόγια, ένα παραγωγικό επιχείρημα στηρίζεται στον ισχυρισμό ότι αν οι προκειμένες του είναι αληθείς, τότε και το συμπέρασμα του είναι επίσης αληθές. Έχουμε ήδη παραθέσει αρκετά παραδείγματα παραγωγικών επιχειρημάτων, όπως είναι το (1) και όπως επίσης είναι το ακόλουθο.

Παράδειγμα 15:

Αν η Γεωμετρία είναι κλάδος των Μαθηματικών, τότε είναι δύσκολη.

Η Γεωμετρία δεν είναι δύσκολη.

Επομένως, η Γεωμετρία δεν είναι κλάδος των Μαθηματικών.

Ένα επιχείρημα είναι μη-παραγωγικό όταν το συμπέρασμα δεν έπεται αναγκαία από τις προκειμένες. Δηλαδή όταν είναι δυνατόν όλες οι προκειμένες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Παρ’ όλα αυτά, ένα μη-παραγωγικό επιχείρημα μπορεί να είναι τέτοιο ώστε οι προκειμένες του –αν είναι αληθείς– να καθιστούν το συμπέρασμα πιθανό (ή πολύ πιθανό). Τα *επαγωγικά* επιχειρήματα, για παράδειγμα, τα οποία είναι μια υποκατηγορία των μη-παραγωγικών επιχειρημάτων, είναι εμφανώς μη-παραγωγικά, αλλά αυτό και μόνο το γεγονός δεν τα καθιστά άχρηστα. Πολλές από τις πεποιθήσεις μας μπορεί να μην έπονται λογικά από άλλες πεποιθήσεις που έχουμε ήδη υιοθετήσει, αλλά μπορεί παρ’ όλα αυτά να υποστηρίζονται σε μεγάλο βαθμό από αυτές. Για παράδειγμα, η πεποίθησή μου ότι θα περάσω στο Πανεπιστήμιο δεν έπεται λογικά από το γεγονός ότι έχω διαβάσει πολύ. Μπορεί κάποιος να έχει διαβάσει πολύ αλλά να μην περάσει στο Πανεπιστήμιο. Όμως, το γεγονός ότι έχω διαβάσει πολύ κάνει την πεποίθησή μου ότι θα περάσω στο Πανεπιστήμιο δικαιολογημένη, γιατί την κάνει αρκετά πιθανή: Το πολύ διάβασμα αυξάνει την πιθανότητα εισαγωγής στο Πανεπιστήμιο. Το επιχείρημα (4), για παράδειγμα, είναι επαγωγικό. Από το γεγονός ότι ο ήλιος ανατέλλει κάθε μέρα δεν έπεται λογικά ότι θα ανατείλει και αύριο (αύριο μπορεί να γίνει η συντέλεια του κόσμου). Παρ’ όλα αυτά, η πεποίθησή μου ότι ο ήλιος θα ανατείλει και αύριο είναι δικαιολογημένη γιατί είναι πολύ πιθανό να είναι αληθής. Και αυτό το συμπέρασμα είναι πολύ πιθανό να είναι αληθές ακριβώς γιατί υποστηρίζεται (επαγωγικά) από το ότι ο ήλιος μέχρι σήμερα ανατέλλει κάθε μέρα. Το ίδιο ισχύει και για το ακόλουθο το οποίο είναι επαγωγικό επιχείρημα. Ειδικότερα, το συμπέρασμα του δίδεται με τον προσδιορισμό ότι είναι πιθανό να είναι αληθές.

Παράδειγμα 16:

Όλα τα κοράκια που έχουν παρατηρηθεί μέχρι σήμερα είναι μαύρα.

Επομένως, (είναι πιθανό ότι) όλα τα κοράκια είναι μαύρα.

Σε αυτό το βιβλίο δεν θα ασχοληθούμε με μη-παραγωγικά επιχειρήματα. Ο λόγος για τον οποίο αναφέρουμε την ύπαρξή τους, και ειδικότερα την ύπαρξη επαγωγικών

επιχειρημάτων, είναι για να τα διακρίνουμε από τις λεγόμενες παραγωγικές πλάνες, για τις οποίες θα μιλήσουμε σε λίγο. Ας κρατήσουμε λοιπόν το βασικό: Αν ένα επιχείρημα, παρέχεται ως παραγωγικό, τότε ο ισχυρισμός είναι ότι αν οι προκείμενες του είναι αληθείς, το συμπέρασμα είναι αδύνατον να είναι ψευδές. Ακολουθεί ένα ακόμα παράδειγμα παραγωγικού επιχειρήματος.

Παράδειγμα 17:

Ο σκηνοθέτης του Underground είναι ή ο Κουστουρίτσα ή ο Πολάνσκι.

Δεν είναι ο Πολάνσκι.

Επομένως, είναι ο Κουστουρίτσα.

Όταν όμως λέμε ότι ένα επιχείρημα είναι παραγωγικό τι ακριβώς εννοούμε; Ειδικότερα, εννοούμε ότι απλά εμφανίζεται ως παραγωγικό ή ότι όντως είναι παραγωγικό; Συγκρίνατε τα παρακάτω επιχειρήματα:

Παράδειγμα 18:

Ο Στάθης λατρεύει την μύρα.

Αν ο Στάθης λατρεύει την μύρα, τότε πίνει μύρα συχνά.

Άρα, ο Στάθης πίνει μύρα συχνά.

Παράδειγμα 19:

Αν ο Στάθης λατρεύει την μύρα, τότε πίνει μύρα συχνά.

Ο Στάθης πίνει μύρα συχνά.

Άρα, ο Στάθης λατρεύει την μύρα.

Και τα δύο επιχειρήματα *εμφανίζονται* ως παραγωγικά. Δίδεται η εντύπωση, δηλαδή, ότι το συμπέρασμα έπεται αναγκαία από τις προκείμενες. Είναι όμως παραγωγικά; Ειδικότερα, είναι το (19) τέτοιο ώστε αν οι προκείμενες είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα είναι αναγκαία αληθές; Σκεφτείτε ότι και οι δυο προκείμενες του μπορεί να είναι αληθείς αλλά το συμπέρασμα του, δηλαδή «ο Στάθης λατρεύει την μύρα», μπορεί να είναι ψευδές. Ο Στάθης μπορεί κάλλιστα να μην λατρεύει την μύρα, αλλά να πίνει συχνά γιατί θέλει να εντυπωσιάσει τους φίλους του. Συνεπώς, η άρνηση του συμπεράσματος είναι συμβατή με την αλήθεια των προκειμένων του. Αντίθετα, το (18) δεν έχει αυτό το χαρακτηριστικό. Αν οι προκείμενες του είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα του δεν μπορεί να είναι ψευδές.

Ακριβώς επειδή χρειάζεται να διακρίνουμε μεταξύ επιχειρημάτων σαν το (18) και επιχειρημάτων σαν το (19), θα εισάγουμε την έννοια της *εγκυρότητας*. Αυτή είναι η βασική έννοια την Λογικής. Θα λέμε ότι ένα επιχείρημα είναι *παραγωγικά έγκυρο* ή *λογικά έγκυρο*, η απλά *έγκυρο* αν και μόνο αν είναι αδύνατον όλες οι προκείμενες του να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Η έννοια της εγκυρότητας, την οποία θα αναλύσουμε επαρκώς σε λίγο, αλλά διεξοδικά στο υπόλοιπο του βιβλίου, μας βοηθά να κάνουμε την διάκριση μεταξύ των επιχειρημάτων που φαίνονται και είναι παραγωγικά και αυτών (όπως το (19)) τα οποία φαίνονται παραγωγικά αλλά δεν είναι. Ένα επιχείρημα είναι παραγωγικό αν και μόνο αν είναι παραγωγικά έγκυρο. Αν ένα επιχείρημα φαίνεται να είναι παραγωγικό αλλά είναι άκυρο, αποτελεί μια *λογική πλάνη*.

Η βασική ιδιότητα των λογικά έγκυρων επιχειρημάτων είναι ότι κατά την μετάβαση από τις προκείμενες στο συμπέρασμα *διατηρείται η αλήθεια*. Αυτό δεν σημαίνει τίποτα άλλο από αυτό που έχουμε ήδη τονίσει: αν οι προκείμενες είναι αληθείς τότε και το συμπέρασμα θα είναι αληθές. Ωστόσο η θεμελιώδης έννοια της εγκυρότητας δεν συνεπάγεται ότι οι προκείμενες είναι όντως αληθείς.

1.1.5 Τυποποίηση των Προτάσεων της Φυσικής Γλώσσας

Η Λογική ερευνά τα ακόλουθα τρία θέματα:

1. Τι σημαίνει για ένα επιχείρημα να είναι έγκυρο;

2. Πως μπορούμε να αναγνωρίσουμε έγκυρα επιχειρήματα, και συνεπώς να τα ξεχωρίσουμε από τα άκυρα;
3. Υπάρχουν μέθοδοι για την δημιουργία και χρησιμοποίηση έγκυρων επιχειρημάτων καθώς και για την διάγνωση άκυρων επιχειρημάτων;

Και τα τρία αυτά θέματα διερευνώνται μέσω της τυποποίησης της φυσικής γλώσσας. Δηλαδή μέσω της μετάφρασης των επιχειρημάτων της φυσικής γλώσσας στην γλώσσα της Λογικής. Η τελευταία είναι μια γλώσσα με καλά καθορισμένη δομή (συντακτικούς και σημασιολογικούς κανόνες, τους οποίους θα εξετάσουμε εις βάθος στο υπόλοιπο του βιβλίου). Η μετάβαση από την φυσική στην τυπική γλώσσα αναδεικνύει την *λογική δομή* ή την *λογική μορφή*, ή την *επιχειρηματική δομή*, ή το *επιχειρηματικό σχήμα* του επιχειρήματος και κάνει εμφανείς τις λογικές του ιδιότητες.

Παράδειγμα 20:

Αν η τηλεόραση έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα, τότε η τηλεόραση δείχνει πολλά ντοκιμαντέρ. Επομένως, η τηλεόραση δείχνει πολλά ντοκιμαντέρ.

Για να μεταφέρουμε αυτό το επιχείρημα σε τυπική γλώσσα, πρέπει να απομονώσουμε τις προτάσεις που το συνιστούν και να τις αντικαταστήσουμε με σύμβολα. (Αυτό δεν είναι όμως από μόνο του αρκετό. Όπως θα δούμε, πρέπει επίσης να βρούμε και τους λογικούς συνδέσμους που χρησιμοποιούνται για την δημιουργία σύνθετων προτάσεων.)

p: «Η τηλεόραση έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα»

q: «Η τηλεόραση δείχνει πολλά ντοκιμαντέρ»

«Αν η τηλεόραση έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα, τότε πρέπει να δείχνει πολλά ντοκιμαντέρ.»

Το «αν . . . τότε . . .» είναι ένας *λογικός σύνδεσμος*. Οι τελείες αντικαθιστώνται από προτάσεις.

Συνεπώς, η πρόταση «αν η τηλεόραση έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα, τότε δείχνει πολλά ντοκιμαντέρ.», μεταφέρεται στην τυπική γλώσσα (με βάση τους πιο πάνω ορισμούς μας) ως: «αν p, τότε q». Μια πρόταση της μορφής «αν p, τότε q» λέγεται *συνεπαγωγή*. Η πρώτη συστατική της πρότασης –η p– λέγεται *ηγούμενη*. Η δεύτερη συστατική της πρότασης –η q– λέγεται *επόμενη*. (Σημείωση: Οι υποθετικές προτάσεις δεν είναι από μόνες τους επιχειρήματα αλλά μπορούν να είναι προκειμένες σε επιχειρήματα. Προσπαθήστε να εξηγήσετε γιατί.) Με βάση αυτά, το επιχείρημα (20) έχει την παρακάτω τυποποιημένη μορφή η οποία είναι έγκυρη (η ακριβής απόδειξη θα δοθεί αργότερα).

Αν p, τότε q.

p.

Επομένως, q.

Περισσότερα επί της τυποποίησης θα ακολουθήσουν αργότερα. Είναι όμως σημαντικό να σημειώσουμε ότι η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος δεν είναι συνέπεια του τι λέει το επιχείρημα στην φυσική γλώσσα, δηλαδή δεν είναι συνέπεια του *περιεχομένου* του επιχειρήματος, αλλά της *λογικής του μορφής*. Η εγκυρότητα είναι ιδιότητα επιχειρηματικών δομών, ή συλλογιστικών σχημάτων, ή συναγωγικών κανόνων, ή συμπερασματικών κανόνων. Η τυποποίηση αναδεικνύει την λογική μορφή του επιχειρήματος και συνεπώς βοηθά (στην ουσία, καθορίζει) την διάγνωση της εγκυρότητας.

Μια βασική συνέπεια της τυποποίησης είναι η ακόλουθη: Δύο ή και περισσότερα επιχειρήματα με διαφορετικές προκειμένες και συμπεράσματα (στη φυσική γλώσσα) μπορεί να έχουν την ίδια λογική (τυπική) μορφή ή το ίδιο επιχειρηματικό σχήμα.

Παράδειγμα 21:

Όλα τα παιδιά είναι ατίθασα.

Ο Γιάννης είναι παιδί.

Επομένως, ο Γιάννης είναι ατίθασος.

Παράδειγμα 21':

Όλοι οι ισοβίτες θα πεθάνουν στην φυλακή.

Ο Κλεομένης είναι ισοβίτης.

Επομένως, ο Κλεομένης θα πεθάνει στην φυλακή.

Το (21) και το (21') έχουν την ίδια λογική μορφή, η οποία είναι η εξής: Όλα τα αντικείμενα που είναι A (ή έχουν την ιδιότητα A) είναι επίσης B (ή έχουν την ιδιότητα B). Το συγκεκριμένο αντικείμενο α είναι A (ή έχει την ιδιότητα A). Επομένως, το συγκεκριμένο αντικείμενο α είναι B (ή έχει την ιδιότητα B).

Σημειώστε ότι η παραπάνω ανάδειξη της κοινής λογικής μορφής των (21) και (21') είναι ακόμα αρκετά γενική ώστε να συλλαμβάνει την καθαρή λογική μορφή τους. Γι' αυτό χρειαζόμαστε να απαλείψουμε πλήρως την αναφορά σε λέξεις της φυσικής γλώσσας. Αργότερα, θα δείξουμε πως αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση συμβόλων.

Μια άλλη συνέπεια των όσων έχουμε πει για την τυποποίηση και την εγκυρότητα είναι η ακόλουθη: Αν δύο ή και περισσότερα επιχειρήματα έχουν την ίδια λογική μορφή, τότε αν το ένα είναι έγκυρο, αυτό σημαίνει ότι όλα τα άλλα είναι επίσης έγκυρα. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που η Τυπική Λογική αποκτά την σημασία της στην ανάλυση των συλλογισμών και μας εφοδιάζει μεταξύ άλλων με γενικούς κανόνες και συνεπώς με οικονομία στην σκέψη.

1.2 Η Έννοια της Πρότασης

Ποια είναι ακριβώς η έννοια της λέξης 'πρόταση'; Ειδικότερα, είναι μια συντακτική ή μια σημασιολογική έννοια; Δυστυχώς, τα Ελληνικά δεν έχουν ξεχωριστές εκφράσεις για να αποδώσουν τις σχετικές διακρίσεις της λέξης 'πρόταση'. Η απόδοση της λέξης «πρόταση» στα Ελληνικά, μπορεί να αναφέρεται στην πρόταση ως συντακτική οντότητα, ή στην πρόταση ως έχουσα σημασία, ή στο νόημα ή το σημασιολογικό περιεχόμενο της πρότασης. Οφείλουμε και εμείς να κάνουμε αντίστοιχες διακρίσεις, γιατί έχουν σημασία για την κατανόηση της γλώσσας της Λογικής (αλλά και οποιαδήποτε άλλης γλώσσας).

Πρόταση ως συντακτική οντότητα: μια ακολουθία λέξεων που συνδέονται σύμφωνα με καθορισμένους συντακτικούς κανόνες.

Οι εκφράσεις «Ο Γιάννης αγαπά την Μαρία» και «Τα πολλά χρήματα διαφθείρουν» είναι προτάσεις. Αλλά και η έκφραση «Όλα τα γκαγκά είναι μπαντά» είναι επίσης πρόταση από συντακτικής απόψεως (με την προϋπόθεση ότι η λέξη 'γκαγκά' είναι ουσιαστικό και η λέξη 'μπαντά' επίθετο), άσχετα αν δεν καταλαβαίνουμε το νόημα της.

Σκεφτείτε ότι ένας παράξενος, αλλά δυνατός, τρόπος για να μάθει κανείς μια ξένη γλώσσα είναι να μάθει πρώτα όλους τους συντακτικούς της κανόνες (δηλαδή το πως σχηματίζονται προτάσεις) και μετά να μάθει την σημασιολογία των όρων της γλώσσας. Για να γίνει καθαρή η έννοια της πρότασης ως συντακτικής οντότητας, αρκεί να δώσουμε μερικά παραδείγματα εκφράσεων που δεν είναι προτάσεις: «Ένωσε Γιάννης καλά καλώδια» και «Κολύμπι τροχός άρτιος παππούς». Αυτές δεν είναι προτάσεις, αν κριτήριο μας είναι η έννοια της πρότασης ως συντακτικής οντότητας. Η 'πρόταση' υπό αυτή την έννοια είναι ένα φυσικό αντικείμενο το οποίο (ακολουθώντας τους καθορισμένους συντακτικούς κανόνες) γράφεται στο χαρτί ή στην οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή (έχει μέγεθος, σχήμα, κλπ.) ή είναι κάτι το οποίο εκφέρεται (με συγκεκριμένο τόνο, χροιά, κλπ.).

Πρόταση ως σημασιολογική οντότητα: μια πρόταση η οποία έχει νόημα.

Δηλαδή μια *ερμηνευμένη* πρόταση. Μια πρόταση έχει νόημα αν και μόνον αν είναι αληθής ή ψευδής. Εκεί όπου είναι χρήσιμο, θα αποκαλούμε ‘δηλώσεις’ τις προτάσεις ως σημασιολογικές οντότητες. Οι εκφράσεις «Ο Γιάννης αγαπά την Μαρία», και «Το χιόνι είναι μαύρο» είναι προτάσεις με νόημα (μπορούν να είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς). Η τελευταία είναι ψευδής, αλλά έχει νόημα. Είναι συνεπώς μια δήλωση. Αλλά, η πρόταση «Όλα τα γκαγκά είναι μπαντά» δεν είναι δήλωση πριν ξεκαθαρίσουμε τι ακριβώς εννοούμε με τις λέξεις της. Για να κατανοηθεί καλύτερα η διάκριση μεταξύ σύνταξης και νοήματος μιας πρότασης συγκρίνετε τις παρακάτω συντακτικές οντότητες (που οφείλονται στον διάσημο γλωσσολόγο Noam Chomsky):

(α) Οι άχρωμες πράσινες ιδέες κοιμούνται βίαια.

(β) Οι βίαια κοιμισμένες ιδέες πράσινα άχρωμες.

Ενώ η (β) δεν είναι πρόταση, η (α) είναι. Η (α) φαίνεται να είναι συντακτικά ορθή, αλλά συνδυάζει έννοιες με παράξενους ή και αδύνατους τρόπους. Έχει νόημα και είναι απλά ψευδής ή στερείται νοήματος; Πρόκειται μήπως για μια ψευδή δήλωση ή δεν αποτελεί καν δήλωση; Εδώ τα πράγματα δυσκολεύουν. Οι ειδικοί δεν συμφωνούν για το τι ακριβώς συμβαίνει με τέτοιου είδους προτάσεις. Όμως για μας αυτό που έχει σημασία είναι ότι μπορούμε να διακρίνουμε αν μια έκφραση είναι πρόταση (έστω και αν δεν έχει νόημα), καθώς επίσης μπορούμε να διακρίνουμε το νόημα μιας πρότασης από την σύνταξή της.

Πρόταση ως το νόημα (περιεχόμενο) μιας δήλωσης: αυτό το οποίο αν υπάρχει καθιστά μια δήλωση αληθή.

Δηλαδή μια κατάσταση πραγμάτων η οποία αν ισχύει καθιστά μια πρόταση αληθή. Η πρόταση «Το χιόνι είναι ροζ» είναι μια δήλωση (ψευδής). Το νόημα της είναι μια κατάσταση πραγμάτων (το χιόνι να είναι ροζ) η οποία αν ισχύει καθιστά την δήλωση αληθή. Μια τέτοια κατάσταση πραγμάτων δεν ισχύει στον κόσμο στον οποίο ζούμε (και γι’ αυτό η δήλωση «το χιόνι είναι ροζ» είναι ψευδής), αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι η συγκεκριμένη πρόταση στερείται περιεχομένου (νοήματος). Η έννοια του περιεχομένου (ή νοήματος) είναι σημαντική γιατί δυο διαφορετικές δηλώσεις μπορούν να έχουν το ίδιο νόημα (δηλαδή να έχουν το ίδιο περιεχόμενο). Για παράδειγμα: «Τα Ιμαλία είναι η ψηλότερη οροσειρά» και «Η ψηλότερη οροσειρά είναι τα Ιμαλία», ή «Ο Σωκράτης ήταν σοφός» και «Η σοφία ήταν μια ιδιότητα του Σωκράτη». Αντίστροφα, η ίδια δήλωση μπορεί να έχει *διαφορετικά νοήματα*. Παράδειγμα: Η δήλωση «Εγώ πεινάω» διατυπωμένη από μένα και διατυπωμένη από τον/ην αναγνώστη/ρια.

Στην Λογική ασχολούμαστε με *δηλώσεις* (ή δηλωτικές προτάσεις), δηλαδή με προτάσεις που μπορεί να είναι αληθείς ή ψευδείς. Οι ιδιότητες ‘αληθής’ και ‘ψευδής’ αποκαλούνται *τιμές αληθείας* ή *αληθοτιμές*. Άρα οι προτάσεις της Λογικής επιδέχονται τιμές αληθείας. Η Λογική δεν ασχολείται με άλλου είδους προτάσεις, όπως π.χ. με ερωτήσεις, προσταγές, εκφράσεις θαυμασμού, προτροπές (π.χ. Ας πάμε για ένα ποτό).

Πως μπορούμε να κρίνουμε αν μια πρόταση X είναι δηλωτική; Να ένα απλό (αλλά όχι απόλυτο) κριτήριο δηλωσιμότητας. Ρωτήστε: Είναι αληθές ή ψευδές ότι X; Όπου στην θέση της μεταβλητής X βάζουμε μια πρόταση. Κάθε πρόταση που παίρνει την θέση του X είναι δηλωτική αν το ερώτημα «Είναι αληθές ή ψευδές ότι X;» είναι επιδεκτικό απάντησης, (αληθές ή ψευδές). Εφαρμόστε αυτή την μέθοδο στις ακόλουθες προτάσεις και ελέγξτε αν έχουν δηλωτικό χαρακτήρα: «Οι τιμές των υπολογιστών πέφτουν συνεχώς», «Το απόλυτο αγωνιά», «Ας πάμε για διάβασμα».

Σε κάθε περίπτωση, η φυσική γλώσσα εμπεριέχει ασαφείς λέξεις (ή κατηγορήματα). Συγκρίνατε: ‘είναι σφαιρικό’ και ‘είναι φαλακρός’. Ένα αντικείμενο είναι σφαιρικό ή δεν είναι. Αλλά, με τους φαλακρούς τα πράγματα είναι πιο δύσκολα. Η έννοια ‘φαλακρός’ είναι ασαφής διότι υπάρχουν πολλές ‘οριακές περιπτώσεις’. Άρα, το κριτήριο δηλωσιμότητας αποτελεί μια εξιδανίκευση. Όμως, στην Τυπική Λογική κάνουμε ακριβώς αυτή την εξιδανίκευση. Συνεπώς, η Παραγωγική Λογική είναι δίτιμη (ή δισθενής). Κάθε δηλωτική πρόταση στην Λογική είναι αληθής ή ψευδής αλλά όχι και τα δύο. Αυτή είναι η περίφημη

αρχή της δισθενείας. Συνεπώς στην Τυπική Λογική δουλεύουμε με το αξίωμα ότι όλες οι έννοιες λειτουργούν ως να είναι σαφείς.

Αν και το πρόβλημα είναι περίπλοκο, θα δώσουμε ένα επιχειρήμα για την αρχή της δισθενείας: Η Λογική δεν αναφέρεται στον κόσμο αλλά στις έννοιες που χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε τον κόσμο. Και κάθε σαφής έννοια είναι τέτοια ώστε να κατατάσσει τα πράγματα σε δυο κατηγορίες σε αυτά που εμπίπτουν στο πεδίο της και σε αυτά που δεν εμπίπτουν. Εξ' αυτού πηγάζει και το δίτιμο ή δισθενές της Λογικής.

1.3 Λογική και Αλήθεια

Ανακαλέστε ότι η παραγωγική λογική ασχολείται με την διατήρηση της αλήθειας κατά την μετάβαση από τις προκειμένες στο συμπέρασμα. Συνεπώς, η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος ορίζεται έτσι ώστε η μόνη περίπτωση η οποία αποκλείεται (και συνεπώς καθιστά το επιχειρήμα άκυρο) είναι η ακόλουθη: Οι προκειμένες είναι όλες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Για λόγους ευκολίας θα χρησιμοποιούμε το γράμμα T (από την αγγλική λέξη “true” – αληθές) για να δηλώσουμε την τιμή αληθείας “αληθές” και το γράμμα F (από την αγγλική λέξη “false” – ψευδές) για να δηλώσουμε την τιμή αληθείας “ψευδές”. Είναι διαισθητικά φανερό ότι υπάρχουν τέσσερις δυνατοί συνδυασμοί τιμών αληθείας μεταξύ των προκειμένων και του συμπεράσματος:

1. Προκειμένες– Αληθείς T
Συμπέρασμα– Αληθές T
2. Προκειμένες– Αληθείς T
Συμπέρασμα– Ψευδές F
3. Προκειμένες– Ψευδείς F
Συμπέρασμα– Αληθές T
4. Προκειμένες– Ψευδείς F
Συμπέρασμα– Ψευδές F

Μπορούμε να καταγράψουμε αυτούς τους συνδυασμούς σε ένα πίνακα όπως ο παρακάτω:

Προκειμένες	Συμπέρασμα	Εγκυρότητα
T	T	ΕΓΚΥΡΟ
T	F	ΑΚΥΡΟ
F	T	ΕΓΚΥΡΟ
F	F	ΕΓΚΥΡΟ

Αν ένα επιχειρήμα είναι έγκυρο, τότε η μόνη γραμμή του πίνακα που αποκλείεται είναι η δεύτερη. Ένα έγκυρο επιχειρήμα δεν μπορεί να έχει όλες τις προκειμένες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές, πράγμα που δηλώνεται στην δεύτερη σειρά του πίνακα. Τι γίνεται τότε με τις άλλες τρεις κατανομές τιμών αληθείας μεταξύ προκειμένων και συμπεράσματος; Με βάση το ότι ένα επιχειρήμα είναι άκυρο μόνο όταν ισχύει η κατάσταση της δεύτερης σειράς του πίνακα, φαίνεται ότι ένα επιχειρήμα μπορεί να είναι έγκυρο ακόμα και αν έχει ψευδείς προκειμένες ή ψευδές συμπέρασμα. Θυμηθείτε τον ορισμό της εγκυρότητας: αν οι προκειμένες είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα οφείλει να είναι επίσης αληθές. Δηλαδή, οι προκειμένες δεν οφείλουν να είναι αληθείς για να είναι το επιχειρήμα έγκυρο. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι: αν υποθέσουμε ότι όλες οι προκειμένες είναι αληθείς, τότε πρέπει επίσης το συμπέρασμα να είναι αληθές. Ως παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένας συνομιλητής μας

πιστεύει (λανθασμένα) ότι η λεμονάδα είναι κρασί. Πιστεύει επίσης (σωστά) ότι όλα τα κρασιά είναι αλκοολούχα ποτά, και κάνει χρήση του ακόλουθου επιχειρήματος:

Παράδειγμα 1:

Όλα τα κρασιά είναι αλκοολούχα ποτά.

Η λεμονάδα είναι κρασί.

Επομένως, η λεμονάδα είναι αλκοολούχο ποτό.

Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι «Η λεμονάδα είναι αλκοολούχο ποτό». Το συμπέρασμα αυτό είναι ψευδές. Αλλά τι μπορούμε να πούμε για τον συλλογισμό με τον οποίο κατέληξε σ' αυτό; Είναι φανερό ότι σκέφτηκε σωστά. Αν όλα τα κρασιά ήταν αλκοολούχα ποτά, και αν η λεμονάδα ήταν κρασί, τότε η λεμονάδα *θα ήταν* αλκοολούχο ποτό. (Με άλλα λόγια, αν οι προκείμενες ήταν αληθείς, τότε το συμπέρασμα θα ήταν επίσης αληθές.) Το πρόβλημα, λοιπόν του συνομιλητή μας δεν είναι στον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε αλλά στο ότι δεν είχε πράγματι όλες τις προκείμενες του συλλογισμού του αληθείς. Το (1) είναι ένα έγκυρο επιχειρήμα. Διατηρεί ή μεταφέρει την αλήθεια από τις προκείμενες στο συμπέρασμα. Το πρόβλημα με το (1) είναι ότι έχει μια προκείμενη (τη δεύτερη) η οποία είναι ψευδής. Το συμπέρασμα του είναι επίσης ψευδές. Αλλά, το (1) δεν είναι τέτοιο ώστε όλες οι προκείμενες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Συνεπώς το (1) είναι ένα παράδειγμα έγκυρου επιχειρήματος με ψευδείς προκείμενες (ή τουλάχιστον κάποιες από αυτές) και ψευδές συμπέρασμα. Παρά ταύτα είναι έγκυρο επειδή για να ήταν άκυρο θα έπρεπε να είχε όλες τις προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Ανάλογη δικαιολόγηση μπορεί να δοθεί στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 2:

Όλα τα κρασιά είναι αναψυκτικά.

Η λεμονάδα είναι κρασί.

Επομένως, η λεμονάδα είναι αναψυκτικό.

Εδώ το επιχειρήμα είναι έγκυρο για παρόμοιους λόγους. Η μόνη διαφορά είναι ότι αυτή τη φορά, οι προκείμενες είναι ψευδείς αλλά το συμπέρασμα αληθές.

Παράδειγμα 3:

Όλα τα κρασιά είναι αλκοολούχα ποτά.

Η ρομπόλα είναι κρασί.

Επομένως, η ρομπόλα είναι αλκοολούχο ποτό.

Και εδώ το επιχειρήμα είναι έγκυρο για παρόμοιους λόγους. Η μόνη διαφορά είναι ότι αυτή τη φορά όλες οι προκείμενες είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι επίσης αληθές. Συνεπώς, έγκυρα επιχειρήματα μπορούν να έχουν όλους τους συνδυασμούς αληθών και ψευδών προκειμένων και συμπεράσματος εκτός από όλες τις προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Σημειώστε ότι αν το επιχειρήμα είναι έγκυρο, αλλά το συμπέρασμα είναι ψευδές, τότε πρέπει να συμπεράνουμε ότι *τουλάχιστον μια* από τις προκείμενες είναι ψευδείς. Μπορεί να μην γνωρίζουμε ποια ακριβώς, αλλά γνωρίζουμε σίγουρα ότι τουλάχιστον μία είναι.

Παράδειγμα 4:

Η Ωδή στη Χαρά συνετέθη είτε από τον Beethoven είτε από τον Mozart.

Δεν συνετέθη από τον Beethoven.

Άρα, συνετέθη από τον Mozart.

Εδώ το συμπέρασμα είναι ψευδές. Συνεπώς, τουλάχιστον μια από τις προκείμενες είναι ψευδής. Και αν δεν ξέρουμε ποια, τότε συμπεραίνουμε ότι είτε η συμφωνία συνετέθη από τον Beethoven είτε από κάποιον άλλο.

Γιατί χρειάζεται να επιμείνουμε στο να χαρακτηρίσουμε το (2) και το (4) έγκυρα επιχειρήματα, αν και το συμπέρασμα τους είναι ψευδές; Γιατί υπάρχει μια προφανής έννοια με την οποία ο συλλογισμός στον οποίο βασίζεται το επιχείρημα είναι σωστός: αν οι προκείμενες ήταν αληθείς, τότε το συμπέρασμα θα ήταν επίσης αληθές. Αυτή η έννοια του σωστού συλλογισμού συλλαμβάνεται από την έννοια της εγκυρότητας. Αν δεν αισθάνεστε άνετα με την ιδέα ότι μπορούμε να υποθέσουμε την αλήθεια μιας πρότασης, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι ψευδής, τότε παίξτε απλά ένα παιχνίδι φαντασίας. Όπως στην περίπτωση όπου αν και γνωρίζουμε ότι το χιόνι είναι λευκό, μπορούμε να το φανταστούμε μαύρο έτσι και για τους συλλογισμούς μας αφαιρούμε την σχέση τους με τον ενεργειακό κόσμο για να τους αναλύσουμε λογικά. Ένας λογικά έγκυρος συλλογισμός (ένα λογικά έγκυρο επιχείρημα) δεν εγγυάται την αλήθεια του συμπεράσματος στο οποίο οδηγεί. Η εγγύηση που παρέχει είναι υποθετικής φύσης: αν οι προκείμενες είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα ενός έγκυρου επιχειρήματος θα είναι επίσης αληθές. Αυτό που προκύπτει από όλα αυτά είναι ότι η εγκυρότητα των επιχειρημάτων είναι μια *λογική ιδιότητα* των συλλογισμών μας ανεξάρτητη από το περιεχόμενο των προτάσεων που συνιστούν το επιχείρημα και των σχέσεών τους με τον κόσμο μας. Προκύπτει επίσης ότι υπάρχουν έγκυρα επιχειρήματα με την πρόσθετη ιδιότητα να έχουν τις προκείμενες τους αληθείς.

Η ιδιότητα της ορθότητας των επιχειρημάτων: Αν ένα επιχείρημα είναι έγκυρο και όλες του οι προκείμενες είναι αληθείς, τότε το επιχείρημα καλείται *ορθό*.

ΟΡΘΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ= ΕΓΚΥΡΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ + ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΟΚΕΙΜΕΝΕΣ ΑΛΗΘΕΙΣ

Στην αξιολόγηση των επιχειρημάτων μας ενδιαφέρει και η ορθότητα τους, και είναι όντως ενδιαφέρον ότι από μια απλή εξέταση της χρήσης των συλλογισμών μας τόσο στην καθημερινή ζωή αλλά και στις επιστήμες μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι έχει νόημα να αναρωτηθούμε αναφορικά με ένα επιχείρημα αν είναι ορθό ή όχι. Η ορθότητα ωστόσο δεν είναι λογική ιδιότητα των συλλογισμών μας.

Προκύπτει, από όσα έχουμε πει, ότι αν ένα επιχείρημα είναι *ορθό* τότε είναι *έγκυρο*, αλλά ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Αλλά προσέξτε ότι κατά πόσον οι προκείμενες ενός επιχειρήματος είναι αληθείς ή όχι, είναι κάτι που μπορεί να εξετασθεί μόνο σε επίπεδο πληροφοριακού περιεχομένου των προκειμένων και πάντα σε αντιστοιχία με την ισχύουσα κατάσταση πραγμάτων (εμπειρική ή μη) και όχι λογικά. Συνεπώς η διαπίστωση της ορθότητας επιχειρημάτων έχει δυο πτυχές: την διαπίστωση αν οι προκείμενες είναι όντως αληθείς και την λογική διαπίστωση αν το επιχείρημα είναι έγκυρο. Η δεύτερη πτυχή των ορθών επιχειρημάτων μας υποδεικνύει μια από τις πιο συναρπαστικές πλευρές της Παραγωγικής Λογικής: το πως μπορούμε να καταλήξουμε σε νέα αληθή συμπεράσματα, αν ξεκινήσουμε από αληθείς προκείμενες και χρησιμοποιήσουμε ένα έγκυρο επιχείρημα, όπως επιδεικνύεται από το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5:

Ας υποθέσουμε ότι δεν έχουμε γνώμη για το αν φυτρώνουν κερασιές στην κορυφή του Ολύμπου. Αλλά ας υποθέσουμε επίσης ότι γνωρίζουμε ότι (α) κερασιές φυτρώνουν μόνο σε μέρη που είναι κοντά στο επίπεδο της θάλασσας, και (β) ότι η κορυφή του Ολύμπου είναι 2900 μέτρα από το επίπεδο της θάλασσας. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι από τις (α) και (β) συνάγεται λογικά ότι (γ) κερασιές δεν φυτρώνουν στην κορυφή του Ολύμπου. Αυτό είναι εντυπωσιακό γιατί, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι η αλήθεια της (γ) μπορεί να διαπιστωθεί μόνο εμπειρικά. Αλλά, εκ πρώτης όψεως επίσης, φαίνεται ότι την αποδείξαμε χωρίς εμπειρική έρευνα. Τι συμβαίνει εδώ; Ας το εξετάσουμε καλύτερα.

Σημειώστε εκ νέου αυτό που τονίστηκε παραπάνω: η λογική είναι δισθενής. Κάθε πρόταση επιδέχεται μία εκ των δύο τιμών–αληθείας: αληθής ή ψευδής. Ένα ευρύτερο φιλοσοφικό πρόβλημα το οποίο προκύπτει εδώ είναι το εξής: Πως

γνωρίζουμε αν μια πρόταση είναι αληθής; Το ερώτημα ανήκει στην Θεωρία της Γνώσης (ή Γνωσιολογία, ή Επιστημολογία), αλλά κάπως απλουστευτικά ως υποθέσουμε ότι είναι εμπειρικό ερώτημα. Δεν απασχολεί, επομένως, την Λογική. Αυτό που απασχολεί την Λογική είναι το υποθετικό ερώτημα: αν οι προκειμένες είναι αληθείς, τότε είναι και το συμπέρασμα αληθές; Ακριβέστερα, το ερώτημα που απασχολεί την Λογική είναι: υπάρχει περίπτωση οι προκειμένες ενός επιχειρήματος να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές; Φυσικά, όταν συμβαίνει να γνωρίζουμε ότι οι προκειμένες είναι αληθείς, τότε μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα έγκυρο επιχείρημα ως ορθό. Αλλά, όπως τονίστηκε παραπάνω, δεν είναι πάντα εύκολο να γνωρίζουμε αν οι προκειμένες είναι αληθείς. Όπως φαίνεται από τον ακόλουθο συλλογισμό: «Αν οι γυναίκες είναι πιο έξυπνες από τους άνδρες, τότε το ποσοστό εισαγωγής τους στα πανεπιστήμια θα είναι μεγαλύτερο από αυτό των ανδρών. Αλλά το ποσοστό εισαγωγής των γυναικών στα πανεπιστήμια δεν είναι μεγαλύτερο από αυτό των ανδρών. Συνεπώς, οι γυναίκες δεν είναι πιο έξυπνες από τους άνδρες.»

Αυτό είναι ένα έγκυρο επιχείρημα. Είναι ορθό; Ποιος ξέρει; Εξαρτάται από το αν οι προκειμένες είναι αληθείς. Αλλά αυτό χρειάζεται εμπειρική έρευνα. Το επιχείρημα, αν και έγκυρο, μπορεί να είναι λανθασμένο (μη-ορθό). Για παράδειγμα, ακόμα και αν η προκειμένη «Το ποσοστό εισαγωγής των γυναικών στα πανεπιστήμια, δεν είναι μεγαλύτερο από αυτό των ανδρών» είναι αληθής, δεν γνωρίζουμε (χωρίς παραπέρα έρευνα) το αν η προκειμένη «Αν οι γυναίκες είναι πιο έξυπνες από τους άνδρες, τότε το ποσοστό εισαγωγής τους στα πανεπιστήμια θα είναι μεγαλύτερο από αυτό των ανδρών» είναι αληθής. Μπορεί, για παράδειγμα, οι γυναίκες να είναι πιο έξυπνες από τους άνδρες, αλλά το ποσοστό εισαγωγής τους στα πανεπιστήμια να είναι μικρότερο από αυτό των ανδρών λόγω διαφόρων διακρίσεων. Συνεπώς, η Λογική δεν μπορεί να υποκαταστήσει την εμπειρική έρευνα για την αλήθεια των προκειμένων των επιχειρημάτων. Μπορεί κανείς δικαίως να ρωτήσει: Το τάδε επιχείρημα είναι μεν έγκυρο, αλλά είναι ορθό; Η απάντηση σε αυτό έρχεται όχι από την λογική ανάλυση αλλά από την επιστημονική (ενδεχομένως εμπειρική) έρευνα. Μια τέτοια επιτυχής έρευνα αποδίδει το απαραίτητο πληροφοριακό περιεχόμενο στις προκειμένες που τις καθιστά αληθείς ή ψευδείς πάντα σε αντιστοιχία και σε σχέση με την ισχύουσα κατάσταση πραγμάτων. Αυτό που ωστόσο ανακύπτει από τον ορισμό της έννοιας της εγκυρότητας και καθίσταται προφανές από το παράδειγμα (5) είναι ότι η Λογική μπορεί να βοηθήσει στην εξαγωγή συμπερασμάτων από επιστημονικά αποδεκτές (αληθείς) πεποιθήσεις.

1.4 Λογικές Πλάνες

Μέχρι εδώ έχουμε τονίσει ότι βασισμένοι αποκλειστικά στην εγκυρότητα ενός επιχειρήματος, δεν μπορούμε να συναγάγουμε τίποτε για την ορθότητα του. Όμως δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι η ορθότητα ενός επιχειρήματος είναι εξαρτημένη από την εγκυρότητά του. Ας εξετάσουμε περιληπτικά κάτι διαφορετικό για να τονίσουμε την σχέση εγκυρότητας και ορθότητας. Αν έχουμε ένα άκυρο επιχείρημα, υπάρχει οποιοσδήποτε περιορισμός στην κατανομή τιμών-αληθείας μεταξύ των προκειμένων και του συμπεράσματος; Ανακαλέστε ότι ένα έγκυρο επιχείρημα αποκλείει μόνο μια κατανομή τιμών-αληθείας. Τι συμβαίνει με ένα άκυρο επιχείρημα; Η απάντηση είναι απλή: Όλα επιτρέπονται. Εξ ου και η αδυναμία του. Στην παρακάτω ταξινόμηση ο Πίτσης είναι πράγματι γάτος και ο Αλέξανδρος άνθρωπος.

	ΕΓΚΥΡΟ	ΑΚΥΡΟ
Αληθείς Προκείμενες Αληθές Συμπέρασμα	Παράδειγμα: Όλες οι γάτες είναι θηλαστικά. Ο Πίτσης είναι γάτος. Επομένως, Ο Πίτσης είναι θηλαστικό. ΟΡΘΟ	Παράδειγμα: Όλες οι γάτες είναι θηλαστικά. Ο Πίτσης είναι θηλαστικό. Επομένως, Ο Πίτσης είναι γάτος. ΜΗ-ΟΡΘΟ
Αληθείς Προκείμενες Ψευδές Συμπέρασμα	Δεν Υπάρχει ΜΗ-ΟΡΘΟ	Παράδειγμα: Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί. Ο Πίτσης είναι θνητός. Επομένως, Ο Πίτσης είναι άνθρωπος. ΜΗ-ΟΡΘΟ
Τουλάχιστον μια Ψευδής Προκείμενη Αληθές Συμπέρασμα	Παράδειγμα: Όλα τα πτηνά είναι γάτες. Ο Πίτσης είναι πτηνό. Επομένως, ο Πίτσης είναι γάτος. ΜΗ-ΟΡΘΟ	Παράδειγμα: Όλοι οι άνθρωποι είναι αθάνατοι. Ο Αλέξανδρος είναι αθάνατος. Επομένως, ο Αλέξανδρος είναι άνθρωπος. ΜΗ-ΟΡΘΟ
Τουλάχιστον μια Ψευδής Προκείμενη Ψευδές Συμπέρασμα	Παράδειγμα: Όλες οι γάτες είναι ψάρια. Ο Πίτσης είναι γάτος. Επομένως, ο Πίτσης είναι ψάρι. ΜΗ-ΟΡΘΟ	Παράδειγμα: Όλοι οι άνθρωποι είναι αθάνατοι. Ο Πίτσης είναι αθάνατος. Επομένως, ο Πίτσης είναι άνθρωπος. ΜΗ-ΟΡΘΟ

Συνεπώς, τα άκυρα επιχειρήματα δεν μπορούν να είναι ορθά. Ακόμα και όταν τυχαίνει να έχουν αληθείς προκείμενες και αληθές συμπέρασμα, δεν είναι ορθά, ακριβώς επειδή είναι άκυρα. Τα άκυρα επιχειρήματα αποτελούν τις *παραγωγικές* ή *λογικές πλάνες*. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα επιχειρήμα που έχει αληθείς προκείμενες και αληθές συμπέρασμα. Δεν είναι αρκετό αυτό για να μας ικανοποιήσει; Όχι, γιατί ένα επιχειρήμα σαν και αυτό δεν είναι απαραίτητα έγκυρο. Και αν δεν είναι έγκυρο, δεν μπορεί να είναι ορθό. Συνεπώς πρέπει να εξετάσουμε αν το επιχειρήμα είναι έγκυρο. Μόνο τα έγκυρα επιχειρήματα είναι τέτοια ώστε η αλήθεια των προκειμένων να οδηγεί αναγκαία στην αλήθεια του συμπεράσματος (ή αλλιώς, η αλήθεια των προκειμένων να εγγυάται την αλήθεια του συμπεράσματος).

Παράδειγμα 1:

«Αν η χρήση προφυλακτικού στον έρωτα προστατεύει από το AIDS, τότε πρέπει να φοράμε προφυλακτικά, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις εφήμερων σχέσεων. Πρέπει να φοράμε προφυλακτικά, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις εφήμερων σχέσεων. *Επομένως*, η χρήση προφυλακτικού στον έρωτα προστατεύει από το AIDS.»

Το επιχείρημα (1) είναι άκυρο, παρ' όλο που τόσο οι προκείμενες, όσο και το συμπέρασμα είναι αληθή. Γιατί οι προκείμενες δεν οδηγούν *αναγκαία* στο συμπέρασμα, δηλαδή δεν *εγγυώνται* την αλήθεια του συμπεράσματος. Το (1) είναι μια πλάνη. Γιατί; Σκεφτείτε μια κατάσταση στην οποία όλες οι προκείμενες του (1) είναι αληθείς. Σε αυτή τη δυνατή κατάσταση, θα είναι το συμπέρασμα *αναγκαία* αληθές; Όχι. Σκεφτείτε απλά την περίπτωση που ενώ και οι δυο προκείμενες είναι αληθείς, η χρήση προφυλακτικού στον έρωτα δεν προστατεύει από το AIDS, ας πούμε γιατί ο ιός του AIDS διαπερνά το προφυλακτικό. Από όσο γνωρίζουμε αυτό δεν συμβαίνει. Αλλά αυτή η διαπίστωση είναι άσχετη με την εγκυρότητα ή όχι του (1). Το θέμα είναι ότι ακόμα αν και το (1) έχει αληθείς προκείμενες και αληθές συμπέρασμα, ο συλλογισμός με τον οποίο το συμπέρασμα παρήχθη από τις προκείμενες δεν είναι έγκυρος.

Η Λογική από μόνη της δεν μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε την αλήθεια. Χρειαζόμαστε επιστημονική έρευνα, κλπ. Αλλά η Λογική από μόνη της διασφαλίζει δομικά την ανθρώπινη σκέψη με την έννοια ότι λειτουργεί ως ασφαλής μάντλας μεταφοράς της αλήθειας. Μας υποδεικνύει πως να συλλογίζομαστε σωστά, πως να είμαστε ικανοί να βγάζουμε τα σωστά συμπεράσματα που έπονται των πεποιθήσεων μας, πως να κρίνουμε επιχειρήματα και πεποιθήσεις, πως αν ξεκινήσουμε από αλήθειες μπορούμε να οδηγηθούμε σε νέες αλήθειες.

1.5 Η Έννοια του Αντιπαραδείγματος

Το παράδειγμα με το AIDS εισάγει μια θεμελιώδη μέθοδο διάγνωσης άκυρων επιχειρημάτων. Ένα επιχείρημα είναι άκυρο αν, χωρίς να υποθέσουμε σε λογική αντίφαση, μπορούμε να συλλάβουμε μια δυνατή κατάσταση στην οποία όλες οι προκείμενες είναι αληθείς, αλλά το συμπέρασμα ψευδές. Αντίστροφα, ένα επιχείρημα είναι έγκυρο αν δεν μπορούμε να συλλάβουμε μια δυνατή κατάσταση στην οποία όλες οι προκείμενες είναι αληθείς, αλλά το συμπέρασμα ψευδές. Συνεπώς η διαπίστωση μιας δυνατής κατάστασης στην οποία καθίστανται όλες οι προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές είναι απόδειξη ότι το εν λόγω επιχείρημα είναι άκυρο. Αν και στα επόμενα κεφάλαια θα δώσουμε ακριβείς και συστηματικές μεθόδους διαπίστωσης, είναι χρήσιμο –μεταξύ άλλων, και για την κατανόηση της έννοιας της εγκυρότητας– να δείξουμε ότι υπάρχουν κάποιοι διαισθητικοί τρόποι να διαπιστώσουμε την ακυρότητα. Στην ουσία προχωρούμε με δύο βήματα. Πρώτον, αναδεικνύουμε την λογική μορφή του επιχειρήματος. Δεύτερον, προσπαθούμε να βρούμε έναν συνδυασμό αληθών προκειμένων και ψευδούς συμπεράσματος ο οποίος έχει ακριβώς την λογική μορφή του επιχειρήματος. Αν δείξουμε ότι ένας τέτοιος συνδυασμός είναι δυνατός, τότε το επιχείρημα είναι άκυρο.

Παράδειγμα 1:

Αν ο Τάσος είναι φτωχός, τότε δεν περνάει καλά.

Ο Τάσος δεν περνάει καλά.

Επομένως, ο Τάσος είναι φτωχός.

Είναι δύσκολο από το περιεχόμενο των προτάσεων του επιχειρήματος αυτού, να διαπιστώσουμε αν οι προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς για να αποφανθούμε αν είναι έγκυρο ή άκυρο. Θυμηθείτε ωστόσο ότι η λογική δομή αυτού του επιχειρήματος είναι η εξής:

(1') Αν p , τότε q .

q .

Επομένως, p .

Το επόμενο βήμα, είναι να ψάξουμε για προτάσεις που μπορούν να πάρουν τις θέσεις των προτασιακών μεταβλητών p και q , έτσι ώστε οι προκείμενες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Έστω ότι, p : «Ο κ. Ταδόπουλος είναι πρωθυπουργός», q : «Ο κ. Ταδόπουλος είναι Έλληνας πολίτης». Είναι φανερό ότι αντικαθιστώντας τα p και q με τις προτάσεις αυτές καταλήγουμε στο επιχείρημα (1''): «Αν ο κ. Ταδόπουλος είναι πρωθυπουργός, τότε ο κ. Ταδόπουλος είναι Έλληνας πολίτης. Ο κ. Ταδόπουλος είναι Έλληνας πολίτης. Επομένως, ο κ. Ταδόπουλος είναι πρωθυπουργός.» Το επιχείρημα αυτό είναι άκυρο. Όλες οι προκείμενες είναι αληθείς (προφανώς, για να είναι κάποιος πρωθυπουργός της χώρας, πρέπει να είναι Έλληνας πολίτης), αλλά το συμπέρασμα ψευδές. Και αφού το (1'') είναι άκυρο, και το (1) έχει την ίδια λογική δομή με το (1''), δηλαδή την (1'), έπεται ότι και το (1) είναι άκυρο. Το (1'') καλείται *αντιπαράδειγμα του επιχειρηματικού σχήματος* ή της *επιχειρηματικής δομής* του επιχειρήματος (1).

Γενικότερα, για να δείξουμε ότι ένα επιχείρημα είναι άκυρο, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα αντιπαράδειγμα. Το οποίο σημαίνει ότι ένα επιχείρημα είναι έγκυρο, αν και μόνο αν *δεν υπάρχει* αντιπαράδειγμα σε αυτό. Δηλαδή, δεν υπάρχει επιχείρημα της ίδιας επιχειρηματικής δομής, τέτοιο ώστε όλες οι προκείμενες του να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Ορισμός 1: Έστω ότι A είναι ένα επιχείρημα. Ένα επιχείρημα A' με επιχειρηματικό σχήμα ίδιο με αυτό του A τέτοιο ώστε να αναδεικνύει ότι όλες οι προκείμενες του είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές λέγεται *αντιπαράδειγμα* στο A .

Ορισμός 2: Ένα επιχειρηματικό σχήμα ονομάζεται *έγκυρο* αν δεν έχει αντιπαράδειγμα και *άκυρο* αν έχει τουλάχιστον ένα αντιπαράδειγμα.

Από άποψη ευκολίας πειθούς έχει σημασία το αντιπαράδειγμα να είναι τέτοιο ώστε οι προκείμενες του να είναι προφανώς αληθείς και το συμπέρασμα προφανώς ψευδές. Αυτό βοηθά γιατί έτσι ο καθένας μπορεί να δει καθαρά ότι το επιχείρημα είναι άκυρο. Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε στηρίζεται στην δυνατότητα να επινοήσουμε μια ανάλογη κατάσταση με αυτήν που περιγράφεται στο επιχείρημα. Αλλά η αναλογία δεν είναι ουσιαστική (τα θέματα των επιχειρημάτων μπορεί να είναι εντελώς άσχετα μεταξύ τους). Η αναλογία είναι δομική: αφορά στην λογική δομή των επιχειρημάτων.

Παράδειγμα 2:

«Οι γάτες έχουν σπονδυλική στήλη. Τα περισσότερα κατοικίδια ζώα έχουν σπονδυλική στήλη. *Επομένως*, τα περισσότερα κατοικίδια ζώα είναι γάτες.»

Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα του (2) είναι αληθές (από στατιστικές κατοικίδιων ζώων). Είναι το επιχείρημα έγκυρο; Αν ναι, τότε δεν επιδέχεται αντιπαράδειγμα. Αλλά μπορούμε να σκεφτούμε ένα αντιπαράδειγμα :

(2') «Οι πλούσιοι έχουν αυτοκίνητα. Οι περισσότεροι άνθρωποι έχουν αυτοκίνητα. *Επομένως*, οι περισσότεροι άνθρωποι είναι πλούσιοι.»

Το (2') είναι προφανώς άκυρο. (Όλες οι προκείμενες είναι αληθείς αλλά το συμπέρασμα ψευδές.) Και αφού το (2') έχει το ίδιο επιχειρηματικό σχήμα με το (2), τότε και το (2) είναι άκυρο. Το (2) και το (2') διαφέρουν στο θέμα τους όσο η μέρα με τη νύχτα. Αλλά είναι ανάλογα, γιατί έχουν την ίδια λογική δομή. Προφανώς, αυτή είναι η ακόλουθη:

(2'') «Όλα τα Α είναι Β. Τα περισσότερα Γ είναι Β. *Επομένως*, τα περισσότερα Γ είναι Α.»

Αφού έχουμε ήδη βρει ένα αντιπαράδειγμα στην (2''), η τελευταία είναι άκυρη. Με άλλα λόγια, η (2'') δεν μπορεί να δώσει έγκυρα επιχειρήματα. Ακόμα και αν τύχει ένα συγκεκριμένο επιχείρημα της να έχει αληθείς προκείμενες και αληθές (στον ενεργειακό κόσμο) συμπέρασμα (όπως το (2)), το επιχείρημα αυτό είναι άκυρο.

Παράδειγμα 3:

Μερικά Α είναι Β.

Μερικά Β είναι Γ.

Επομένως, μερικά Α είναι Γ.

Είναι αυτό το επιχειρηματικό σχήμα έγκυρο ή άκυρο; Ας ψάξουμε για ένα αντιπαράδειγμα.

Αντιπαράδειγμα (3'):

«Μερικά αυτοκίνητα είναι κόκκινα (πράγματα). Μερικά κόκκινα (πράγματα) είναι ντομάτες. *Επομένως*, μερικά αυτοκίνητα είναι ντομάτες.»

Το (3') είναι προφανώς άκυρο. Άρα το επιχειρηματικό σχήμα (3) είναι άκυρο. Και είναι άκυρο, ακόμα και αν μπορεί να δώσει ένα επιχείρημα που τυγχάνει να έχει αληθείς προκείμενες και αληθές συμπέρασμα, όπως το ακόλουθο:

(3'') «Μερικά θηλαστικά είναι ζώα που ζουν στην θάλασσα. Μερικά ζώα που ζουν στην θάλασσα, έχουν ουρά. *Επομένως*, μερικά θηλαστικά έχουν ουρά.»

Το (3'') είναι ένα άκυρο επιχείρημα αν και αυτό δεν είναι τόσο προφανές όπως στην περίπτωση του (3').

Η μέθοδος που έχουμε περιγράψει βασίζεται σε μια διαισθητική προσέγγιση και συνεπώς έχει τους περιορισμούς της. Μια διαπίστωση που έχουμε τονίσει είναι ότι η εγκυρότητα και η ακυρότητα είναι χαρακτηριστικά της λογικής δομής των επιχειρημάτων και όχι συγκεκριμένων επιχειρημάτων με συγκεκριμένο περιεχόμενο. Η διαισθητική προσέγγιση στην μέθοδο που μόλις περιγράψαμε δεν το αναδεικνύει αυτό με σαφήνεια και συνεπώς μπορεί να δημιουργεί εσφαλμένη εντύπωση. Αργότερα θα αναπτύξουμε μια πιο γενική μέθοδο που θα διασαφηνίζει πλήρως αυτό το χαρακτηριστικό. Ένα άλλο κύριο πρόβλημα με την διαισθητική προσέγγιση είναι ότι έχουμε μέχρι στιγμής περιοριστεί σε απλά επιχειρήματα και απλές επιχειρηματικές δομές. Αν αρχίσουμε να μιλάμε για πιο σύνθετα επιχειρήματα, τότε δεν είναι πάντα προφανές ότι μπορούμε να συλλάβουμε αμέσως είτε την επιχειρηματική τους δομή, είτε ένα αντιπαράδειγμα σε αυτά. Η τυποποίηση, όπως έχουμε επισημάνει, βοηθάει γιατί μας αναδεικνύει την επιχειρηματική δομή. Και αργότερα θα δούμε ότι, με δεδομένη την επιχειρηματική δομή, υπάρχουν αυστηρές

μέθοδοι για την αναζήτηση αντιπαραδειγμάτων. Ακολουθεί ένα παράδειγμα περίπλοκου επιχειρήματος του οποίου τα αντιπαραδείγματα δεν είναι προφανή.

Παράδειγμα 4: Είναι το ακόλουθο επιχείρημα, άκυρο ή έγκυρο;

«Αν οι τιμές των υπολογιστών πέφτουν συνεχώς, το κόστος παραγωγής τους πρέπει επίσης να πέφτει. Αλλά, αν το κόστος παραγωγής δεν πέφτει, τότε οι εταιρείες κατασκευής υπολογιστών θα είναι ζημιωμένες. Όμως οι εταιρείες κατασκευής υπολογιστών έχουν συνεχή αύξηση των κερδών και συνεχή παραγωγή νέων μοντέλων. Επομένως, και το κόστος παραγωγής υπολογιστών πέφτει συνεχώς και συνεχώς παράγονται νέα μοντέλα.»

Είναι φανερό ότι με την μέθοδο της αναλογίας που έχουμε εισαγάγει μέχρι τώρα δεν μπορούμε να πούμε με ακρίβεια αν το εν λόγω επιχείρημα είναι έγκυρο ή άκυρο. Δεν είναι εύκολη υπόθεση να σκεφτούμε ένα άλλο επιχείρημα με την ίδια επιχειρηματική δομή που έχει αληθείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα. Όταν αργότερα εισάγουμε ακριβείς μεθόδους τυποποίησης και διαπίστωσης της εγκυρότητας, θα μπορέσουμε να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα και να διαπιστώσουμε αν το εν λόγω επιχείρημα είναι όντως έγκυρο. Τέλος σημειώστε τη διαφορά μεταξύ του ‘δεν έχουμε σκεφτεί ένα αντιπαραδειγμα’ και του ‘δεν υπάρχει αντιπαραδειγμα’. Σε κάθε περίπτωση, ας κρατήσουμε το κύριο: *αν βρούμε αντιπαραδειγμα, τότε το επιχείρημα είναι άκυρο. Αν δεν υπάρχει αντιπαραδειγμα, τότε το επιχείρημα είναι έγκυρο.*

1.6 Πειστικά Επιχειρήματα

Μέχρι τώρα έχουμε μιλήσει για έγκυρα και άκυρα επιχειρήματα. Έχουμε επίσης μιλήσει για ορθά και μη-ορθά επιχειρήματα. Αλλά στην καθημερινή χρήση των επιχειρημάτων, μιλούμε επίσης για πειστικά και μη πειστικά επιχειρήματα. Και όταν λέμε ότι ένα επιχείρημα είναι καλό (ή επαρκές) εννοούμε ότι είναι πειστικό. Μπορούμε όμως να χαρακτηρίσουμε επαρκώς την έννοια της πειστικότητας; Ας υποθέσουμε ότι ορίζουμε ένα επιχείρημα ως πειστικό αν ικανοποιεί τον ακόλουθο ορισμό:

P_1 : Ένα επιχείρημα είναι καλό (ή επαρκές, ή πειστικό) αν είναι ικανό να πείσει κάποιον για την αλήθεια του συμπεράσματος.

Αλλά πώς ακριβώς να κατανοήσουμε την έννοια P_1 της πειστικότητας; Ας εξετάσουμε μερικά χαρακτηριστικά της:

(1) Υποκειμενικότητα

Η έννοια της πειστικότητας είναι υποκειμενική. Κάποιοι μπορούν να βρουν ένα επιχείρημα πειστικό αλλά κάποιοι άλλοι μπορεί να μείνουν παγερά αδιάφοροι.

(2) Ευπιστία

Αν στηριχτούμε στην πειστικότητα, τότε πρέπει να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ότι κάποιοι είναι πιο εύπιστοι από άλλους και κάποιοι άλλοι λιγότερο εύπιστοι.

(3) Προκατάληψη (οφειλόμενη σε πεποιθήσεις, ιδεολογικές παραδοχές, συνήθειες, κλπ.)

Πολλές φορές το πόσο πειστικό είναι ένα επιχείρημα είναι συνάρτηση των συγκεκριμένων πεποιθήσεων, προκαταλήψεων, ιδεολογικών παραδοχών, κλπ. που έχουν οι αποδέκτες του επιχειρήματος.

Αφού διαπιστώνουμε ότι ο ορισμός Π_1 είναι δυνατόν να απονεμίσει τα χαρακτηριστικά της υποκειμενικότητας, της ευπιστίας και της προκατάληψης στην έννοια της πειστικότητας, συμπεραίνουμε ότι δεν συνιστά ένα ακριβή και επαρκή ορισμό του καλού επιχειρήματος, και ούτε μπορεί να μετατραπεί σε τέτοιο εκτός αν από αυτόν αφαιρεθούν τα υποκειμενικά χαρακτηριστικά.

Παράδειγμα 1:

«Από την στιγμή που η θανατική ποινή καταργήθηκε, η εγκληματικότητα έχει αυξηθεί. *Επομένως*, η απειλή της θανατικής ποινής οδηγεί στην μείωση της εγκληματικότητας.»

Είναι το επιχείρημα αυτό πειστικό; Για άλλους ναι, και για άλλους όχι. Αυτό εξαρτάται από τις ευρύτερες παραδοχές αυτών που συζητούν αυτό το επιχείρημα. Παρατηρείστε όμως, ότι ανεξαρτήτως του αν κάποιοι βρίσκουν αυτό το επιχείρημα πειστικό, το (1) είναι άκυρο (και αυτό είναι μια λογική ιδιότητα, που είναι ανεξάρτητη από την ψυχολογική ιδιότητα της πειστικότητας). Το (1) είναι άκυρο γιατί είναι επιδεκτικό αντιπαραδείγματος. Μπορούμε να φανταστούμε την περίπτωση στην οποία η εγκληματικότητα αυξάνεται για μια σειρά λόγους που δεν έχουν σε τίποτα να κάνουν με το αν ισχύει ή όχι η ποινή του θανάτου. Ή μπορούμε να φανταστούμε ότι η εγκληματικότητα θα αυξανόταν, ακόμα και αν υπήρχε η θανατική ποινή. Συνεπώς, ακριβώς επειδή το (1) είναι άκυρο, *οφείλει* να μην είναι πειστικό.

Αντιστρόφως, φανταστείτε κάποιον ο οποίος αρνείται να πειστεί από ένα επιχείρημα παρότι το επιχείρημα είναι έγκυρο και ορθό. Πρέπει τότε να θεωρήσουμε το επιχείρημα άχρηστο επειδή δεν μπορεί να πείσει αυτόν τον άνθρωπο; Συνεπώς, η πειστικότητα όπως ορίζεται από τον Π_1 (ή η έλλειψη αυτής) δεν είναι ιδιότητα που κάνει ένα επιχείρημα καλό ή κακό. Ας προσπαθήσουμε τότε να ισχυροποιήσουμε τον προηγούμενο ορισμό Π_1 :

Π_2 : Ένα επιχείρημα είναι καλό (ή επαρκές, ή πειστικό) αν είναι ικανό να πείσει ένα ορθολογικό άτομο για την αλήθεια του συμπεράσματος.

Αλλά πότε είναι ένα άτομο ορθολογικό; Σίγουρα ένα ορθολογικό άτομο πρέπει να πείθεται μόνο από καλά επιχειρήματα, αλλά αυτό και μόνο δεν μας βοηθά να κατανοήσουμε με σαφήνεια και ακρίβεια την έννοια του ορθολογικού ατόμου αφού ακόμα δεν έχουμε κατανοήσει τι είναι αυτό που κάνει ένα επιχείρημα καλό. Συνεπώς, ούτε ο ορισμός Π_2 βοηθά αφού ορίζει το καλό επιχείρημα με βάση μια άλλη προβληματική έννοια που οφείλει και αυτή να ορισθεί. Μήπως πρέπει απλά να εξισώσουμε το καλό (πειστικό) επιχείρημα με το έγκυρο επιχείρημα; Σίγουρα, ένα ορθολογικό άτομο πρέπει να πείθεται μόνο από έγκυρα επιχειρήματα, αλλά, όπως έχουμε τονίσει, έγκυρα επιχειρήματα μπορούν να έχουν ψευδείς προκείμενες. Μπορεί να χαρακτηρίσουμε ένα έγκυρο επιχείρημα ως καλό, αν έχει ψευδείς προκείμενες;

Παράδειγμα 2:

Αν είμαι ο ψηλότερος άνθρωπος στον κόσμο, τότε είμαι ψηλότερος από την γάτα μου. Είμαι ο ψηλότερος άνθρωπος στον κόσμο. *Επομένως*, είμαι ψηλότερος από την γάτα μου.

Προφανώς το (2) είναι έγκυρο επιχείρημα. Αλλά είναι πειστικό; Σίγουρα όχι, αφού μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι δεν είναι ορθό.

Ας δοκιμάσουμε λοιπόν να εξισώσουμε το καλό (πειστικό) επιχείρημα με το ορθό επιχείρημα. Μπορούμε να πούμε ότι ένα επιχείρημα είναι πειστικό αν και μόνο αν είναι ορθό; Διερευνώντας αυτή την ερώτηση, ας δούμε λίγη από την αξία της Λογικής στην πράξη. Το ερώτημα μας είναι: Είναι η θέση ότι «Ένα επιχείρημα είναι πειστικό αν και μόνο αν είναι ορθό» σωστή;

P_3 : Ένα επιχείρημα είναι πειστικό αν και μόνο αν είναι ορθό.

Για να είναι ο P_3 σωστός ορισμός πρέπει να ισχύουν και τα δύο από τα ακόλουθα:

(i) Όλα τα πειστικά επιχειρήματα είναι ορθά.

(ii) Όλα τα ορθά επιχειρήματα είναι πειστικά.

Το (i) είναι σωστό μόνο αν το θέσουμε εξ' ορισμού. Αν ερμηνεύσουμε την πειστικότητα υποκειμενικά, τότε το (i) είναι λάθος. Είναι το (ii) σωστό; Ας το εξετάσουμε μέσω του ακόλουθου παραδείγματος.

Παράδειγμα 3:

«Το χρήμα δεν είναι το παν. Επομένως, το χρήμα δεν είναι το παν.»

Το (3) είναι προφανώς έγκυρο. Μπορεί επίσης να θεωρηθεί ορθό. Αλλά είναι διυποκειμενικά πειστικό; Μπορεί να πείσει κάποιον ο οποίος πεισματικά δεν αποδέχεται την προκειμένη; Μάλλον όχι. Το (3) συγκρούεται με την θέση (ii). Υπάρχουν επιχειρήματα τα οποία είναι ορθά, αλλά δεν θεωρούνται πειστικά. Συνεπώς, η (ii) δεν είναι σωστή. Και άρα ούτε ο P_3 μπορεί να είναι σωστός. Που μας οδηγούν όλα αυτά σε σχέση με την *πειστικότητα*; Μπορούμε (και οφείλουμε) να πούμε ότι ένα επιχείρημα δεν πρέπει να θεωρείται πειστικό, αν δεν είναι ορθό. Αλλά, αυστηρά μιλώντας, δεν μπορούμε να πούμε τίποτα άλλο για την έννοια αυτή χωρίς να υπεισέλθουμε στο πεδίο της ψυχολογίας. Σε κάθε περίπτωση, η Λογική ενδιαφέρεται μόνο για την εγκυρότητα. Η πειστικότητα είναι *ψυχολογική* έννοια. Αλλά η Λογική είναι διαφορετική από την Ψυχολογία. Η Ψυχολογία είναι *περιγραφική* επιστήμη, ενώ η Λογική είναι *επιστήμη κανονιστικού* χαρακτήρα. Δεν περιγράφει το πώς σκεπτόμαστε αλλά το πώς οφείλουμε να σκεπτόμαστε. Αυτό που καμιά φορά λέγεται, ότι δηλαδή η Λογική χαρακτηρίζει και εξετάζει τους νόμους της σκέψης δεν είναι – αυστηρά μιλώντας – ορθό. Η Λογική χαρακτηρίζει και εξετάζει τους νόμους της έγκυρης σκέψης και δεν περιγράφει ακριβώς – από πραγματολογική άποψη – τους τρόπους που σκέφτεται ο άνθρωπος. Με μια έννοια, η Λογική ορίζει μερικές από τις αρχές στις οποίες οφείλει να βασίζεται η σωστή σκέψη.

Για να κατανοηθούν ορθά οι κανόνες της Λογικής, λοιπόν, οφείλουμε να διακρίνουμε την πρόταση και το περιεχόμενό της, από τον άνθρωπο που την εκφράζει, ο οποίος μπορεί να χαρακτηρίζεται από υποκειμενικές πεποιθήσεις, από δογματισμό ή από άλλες αδυναμίες που να τον συνδέουν ίσως παθιασμένα με την πρόταση που εκφράζεται. Η τιμή αληθείας της πρότασης και του περιεχομένου της μπορεί να εξεταστεί με αντικειμενικό ή διυποκειμενικό τρόπο, ενώ οι πεποιθήσεις των ανθρώπων που τις εκφράζουν έχουν και υποκειμενικό χαρακτήρα. Η έννοια της εγκυρότητας ορίζεται με βάση την τιμή αληθείας των προτάσεων του επιχειρήματος συνεπώς ανήκει στο πεδίο της Λογικής, ενώ η έννοια της πειστικότητας δεν μπορεί

να ορισθεί χωρίς υποκειμενικά, ή ψυχολογικά, ή αμφίσημα χαρακτηριστικά και συνεπώς δεν ανήκει στο πεδίο της Λογικής. Στην Λογική εξετάζουμε τις προτάσεις και το περιεχόμενό τους και όχι τους ανθρώπους που τις εκφράζουν. Η εξέταση των ανθρώπων και των πεποιθήσεών τους ανήκει στο πεδίο της Ψυχολογίας, της Κοινωνιολογίας, της Ιστορίας και των άλλων Κοινωνικών Επιστημών, και όχι σε μια λογική και φιλοσοφική ανάλυση που επιθυμεί να αγνοήσει αυτά τα στοιχεία και να προσηλωθεί στο περιεχόμενο των προτάσεων.

Ασκήσεις 1

1. Ψάξτε την εφημερίδα ή το περιοδικό της αρεσκείας σας για να βρείτε τουλάχιστον ένα παραγωγικό επιχείρημα. Διατυπώστε το στην καθαρή λογική μορφή του.

2. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του αντιπαραδείγματος, εξετάστε αν οι παρακάτω επιχειρηματικές μορφές είναι έγκυρες. Αν βρείτε αντιπάρδειγμα, διατυπώστε το καθαρά.

(α) Όλα τα Α είναι Β.

Όλα τα Γ είναι Β.

Επομένως, όλα τα Α είναι Γ.

(β) Όλα τα Α είναι Β.

Μερικά Γ δεν είναι Α.

Επομένως, μερικά Γ δεν είναι Β.

(γ) Όλα τα Α είναι Β.

Όλα τα Β είναι Γ.

Επομένως, όλα τα Γ είναι Α.

(δ) Α ή Β.

Β.

Επομένως, δεν ισχύει το Α.

3. Διατυπώστε ένα άκυρο επιχείρημα με αληθείς προκείμενες και αληθές συμπέρασμα.

4. Διατυπώστε ένα έγκυρο επιχείρημα με αληθείς προκείμενες και αληθές συμπέρασμα.

5. Ποια είναι η σχέση μεταξύ ενός έγκυρου και ενός ορθού επιχειρήματος;

6. Σχολιάστε τον ακόλουθο ισχυρισμό: Δύο ή και περισσότερα επιχειρήματα με διαφορετικές προκείμενες και συμπεράσματα μπορεί να έχουν την ίδια λογική (επιχειρηματική) δομή. Αν συμφωνείτε, δώστε παραδείγματα.

7. Απαντήστε με «σωστό» ή «λάθος» στις παρακάτω προτάσεις:

(α) Ένα παραγωγικά έγκυρο επιχείρημα είναι τέτοιο ώστε όταν οι προκείμενες είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα είναι αδύνατον να είναι ψευδές.

(β) Ένα παραγωγικά έγκυρο επιχείρημα δεν διατηρεί την αλήθεια.

(γ) Σε ένα επαγωγικό επιχείρημα, το συμπέρασμα έπεται αναγκαία από τις προκείμενες.

(δ) Αν ένα επιχείρημα φαίνεται να είναι παραγωγικό, τότε είναι όντως παραγωγικά έγκυρο.

(ε) Ένα ορθό επιχείρημα είναι και έγκυρο.

(στ) Ένα έγκυρο επιχείρημα είναι αναγκαία ορθό.

(η) Η επιχειρηματική δομή [Αν p , τότε q . q . Επομένως p .] είναι έγκυρη.

(θ) Αν και κάποια επιχειρήματα δεν είναι απολύτως έγκυρα, είναι σχεδόν έγκυρα.

- (ι) Ένα έγκυρο επιχείρημα μπορεί να έχει ψευδείς προκείμενες και ψευδές συμπέρασμα.
(κ) Ένα ορθό επιχείρημα μπορεί να έχει ψευδές συμπέρασμα.

2. Προτασιακή Σύνταξη

Η μέθοδος της Λογικής μοιάζει με αυτή των μαθηματικών επιστημών. Για την ανάλυση και την μελέτη των συλλογισμών οι λογικοί και οι φιλόσοφοι καταφεύγουν στη *τυποποίησή τους*. Αυτό επιτυγχάνεται με την μετάφραση της φυσικής (άτυπης) γλώσσας σε τυπική ή συμβολική μορφή. Ακολουθεί η εφαρμογή στα σύμβολα αυστηρά λογικών αρχών και κανόνων, από τους οποίους εξάγονται συμπεράσματα που αφορούν στη τυποποιημένη μορφή των συλλογισμών. Με δεδομένη την αντιστοιχία μεταξύ φυσικής και τυπικής γλώσσας, αν οι κανόνες που διέπουν την τυπική λογική γλώσσα διέπουν επίσης τη φυσική γλώσσα τότε τα συμπεράσματα εκτείνονται και στους συλλογισμούς όπως αυτοί διατυπώνονται στη φυσική γλώσσα.

Για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός κατασκευάζουμε μια *τυπική γλώσσα* που διέπεται από συγκεκριμένους και σαφείς κανόνες και θεωρούμε ότι αυτή η γλώσσα είναι 'μοντέλο' της φυσικής γλώσσας, δηλαδή ότι αντικατοπτρίζει κάποια σημαντικά για την Λογική χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας ή ενός πεδίου της τελευταίας. Οφείλουμε ωστόσο να τονίσουμε ότι, αυστηρά μιλώντας, μια τυπική γλώσσα κατασκευάζεται με βάση ένα επιλεγμένο σύνολο αξιωμάτων, το οποίο δυποκειμενικά θεωρείται ότι αναπαριστά ορθά μια φυσική γλώσσα. Συνεπώς η ακρίβεια και το πεδίο εφαρμογής του μοντέλου εξαρτάται από την ορθότητα και το εύρος των αξιωμάτων της γλώσσας. Στον Προτασιακό Λογισμό κατασκευάζουμε ένα μοντέλο που μεταξύ άλλων έχει σκοπό την κατανόηση ενός μικρού, αλλά πολύ σημαντικού, υποσυνόλου των χαρακτηριστικών της φυσικής γλώσσας. Θα ήταν, λοιπόν, ορθό να αποφύγουμε να ερμηνεύσουμε την λογική θεωρία μας (ή το μοντέλο λογικής για την φυσική μας γλώσσα) ως πλήρη και απόλυτη εξήγηση των χαρακτηριστικών της φυσικής γλώσσας και των κανόνων που την διέπουν. Γνωρίζουμε εξάλλου ότι η φυσική γλώσσα είναι πολυδιάστατη, π.χ. έχει ιστορική διάσταση η οποία συνεπάγεται μια συνεχή εξέλιξη και η οποία δεν μπορεί να συλληφθεί σε κατασκευασμένα αξιωματικά συστήματα.

Στην κατασκευή μιας γλώσσας της Τυπικής Λογικής εμείς θα ακολουθήσουμε μια μερικώς διαισθητική παρουσίαση και όχι την αυστηρή αξιωματική μέθοδο. Έτσι θα παρουσιάζονται παραδείγματα από την φυσική γλώσσα που ενδεχομένως να βοηθούν στη κατανόηση των στοιχείων της τυπικής γλώσσας. Αυτό σημαίνει ότι προϋποθέτουμε την ακρίβεια και επάρκεια του μοντέλου τουλάχιστον για την κατανόηση ενός υποσυνόλου των όλων χαρακτηριστικών της φυσικής γλώσσας. Αυτή η μέθοδος θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε σε βάθος τις κεντρικές έννοιες της λογικής των δηλώσεων και αργότερα των κατηγορημάτων.

2.1 Δηλωτικές Προτάσεις

Ο Προτασιακός Λογισμός ασχολείται με δηλωτικές προτάσεις (δηλώσεις). Εδώ όλες οι δηλωτικές προτάσεις, που από εδώ και στο εξής θα καλούμε προτάσεις, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις ατομικές προτάσεις και τις σύνθετες (ή μοριακές) προτάσεις οι οποίες σχηματίζονται από τις ατομικές με την βοήθεια λογικών συνδέσμων. Η μορφή των ατομικών προτάσεων δεν μας ενδιαφέρει –τουλάχιστον για την ώρα. Αν και στην φυσική γλώσσα, υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των προτάσεων: «Το γάλα είναι άσπρο», «Ο Γιάννης αγαπά την Μαρία», «Όλα τα κοράκια είναι μαύρα» κλπ., στην γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού

όλες αυτές οι προτάσεις θεωρούνται *ατομικές* διότι εμπεριέχουν μία ατομική δήλωση. Θεωρούμε ότι αυτό που χαρακτηρίζει τις ατομικές προτάσεις είναι ότι περιέχουν μία μόνο δήλωση. Ως τέτοιες, επιδέχονται μια ακριβώς από τις δύο δυνατές τιμές αληθείας: είναι αληθείς (T) ή ψευδείς (F). Οι μοριακές προτάσεις είναι συναρτήσεις των ατομικών προτάσεων. Οι μοριακές προτάσεις του Προτασιακού Λογισμού αντιστοιχούν σε σύνθετες προτάσεις της φυσικής γλώσσας, π.χ. «Ο Γιάννης αγαπά την Μαρία και ο Τάσος αγαπά το ποδόσφαιρο», «Ο Γιάννης θα πάει για κούρεμα ή θα πάει για ψάρεμα», «Αν βρέξει αύριο, τότε θα μείνω στο σπίτι», «Δεν μου αρέσει το κολύμπι», «Το 5 είναι μικρότερο από το 7 αν και μόνο αν είναι μικρότερο από το 6». Εκφράσεις όπως «και», «ή», «αν...τότε», «δεν», «αν και μόνο αν» χρησιμοποιούνται για να συνδέσουν ατομικές προτάσεις ώστε να σχηματιστούν μοριακές. Αυτές οι εκφράσεις καλούνται (ή ορθότερα, τα αντίστοιχά τους σύμβολα στη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού αποκαλούνται) *λογικοί σύνδεσμοι*. Στο βαθμό που μια πρόταση δεν περιέχει κανένα από τους λογικούς συνδέσμους είναι *ατομική*, ανεξαρτήτως του πόσο περίπλοκη είναι, π.χ. «Η ασυγκράτητη αύξηση των τιμών έχει οδηγήσει τον πληθωρισμό στα ύψη», ή «Η διάσωση των ναυαγών του πλοίου που βούλιαξε στα ανοιχτά των νησιών Φίτζι στέφτηκε με επιτυχία».

Η αντιστοιχία αυτή μας δείχνει ότι η τυπική γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού δεν είναι άσχετη με την φυσική γλώσσα. Και η τυποποίηση, στην οποία θα οδηγηθούμε, υπό μια έννοια, μεταφέρει κάποια χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας στην γλώσσα της Λογικής. Αλλά δεν πρέπει να παρασυρθούμε από τις ομοιότητες. Οι διαφορές είναι σημαντικές και σε κάθε περίπτωση, η γλώσσα της Λογικής είναι πολύ πιο αυστηρή από την φυσική γλώσσα. Ενώ για παράδειγμα στην φυσική γλώσσα συναντούμε εκφράσεις όπως: «Το ματς αναβλήθηκε εξαιτίας της βροχής», «Αν και έβρεξε, πήγα στο μάθημα», «Θα έρθω στο πάρτι μόνο αν έρθεις και συ», «Ο πατέρας μου θα βγει στην σύνταξη, εκτός αν τον παρακαλέσουν να μείνει», «Ο Γιάννης θα φύγει αλλά η Μαρία θα μείνει», στην γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού επιλέγουμε να έχουμε μόνο τέσσερις λογικούς συνδέσμους που αντιστοιχούν στους εξής συνδέσμους της φυσικής γλώσσας: «και», «ή», «δεν», «αν...τότε». Μόνο αυτοί οι σύνδεσμοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή μοριακών προτάσεων.

Αυτό μπορεί να φαίνεται ότι είναι ένας περιορισμός αλλά όπως θα δούμε στην συνέχεια, πρώτον οι σύνδεσμοι αυτοί αρκούν για να συλλάβουν τις λογικές ιδιότητες των μοριακών προτάσεων και δεύτερον πολλοί από τους συνδέσμους της φυσικής γλώσσας μπορούν να εκφραστούν από τους συνδέσμους του Προτασιακού Λογισμού. Ας υποθέσουμε ότι το λογικό «και» αντιστοιχεί στο φυσικό «και». Αξίζει να σημειωθεί ότι το φυσικό «αλλά» πολλές φορές μπορεί να συλληφθεί από το φυσικό «και». Για παράδειγμα, το λογικό περιεχόμενο των προτάσεων «Ο Γιάννης πήγε και ο Γιώργος έμεινε» και «Ο Γιάννης πήγε αλλά ο Γιώργος έμεινε» είναι το ίδιο. Ενδεχομένως να διαφέρουν στην έμφαση, αλλά η έμφαση δεν είναι μια λογική ιδιότητα των προτάσεων. Συνεπώς, αν το φυσικό «και» αντιστοιχεί στο λογικό «και», τότε –τουλάχιστον σε μερικές περιπτώσεις– το φυσικό «αλλά» αντιστοιχεί στο λογικό «και». Όμοια, το «εκτός αν» μπορεί να αντιστοιχηθεί σε ένα συνδυασμό των λογικών συνδέσμων «δεν» και «αν...τότε», π.χ. το «Θα πάω στο ματς, εκτός αν βρέχει» μπορεί να παραφραστεί ως: «Αν δεν βρέχει, τότε θα πάω στο ματς». Η παράφραση αυτή μας επιτρέπει να μετατρέψουμε την πρόταση της φυσικής γλώσσας σε μορφή που να επιτρέπει την αντιστοίχισή της με πρόταση της τυπικής γλώσσας της Λογικής.

Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό του Προτασιακού Λογισμού είναι ότι οι τιμές αληθείας (ή άλλως *αληθοτιμές*) των μοριακών προτάσεων είναι συνάρτηση των τιμών αληθείας των συστατικών τους ατομικών προτάσεων. Αυτό και μόνο δίνει μεγάλο βάρος στους λογικούς συνδέσμους που καθορίζουν τους επιτρεπτούς συνδυασμούς μεταξύ των ατομικών προτάσεων. Η ιδιότητα αυτή του Προτασιακού Λογισμού λέγεται *αληθοσυναρτησιακή* και ο Προτασιακός Λογισμός καλείται επίσης *αληθοσυναρτησιακή λογική*. Ουσιαστικά η αληθοσυναρτησιακή ιδιότητα των συνδέσμων του Προτασιακού Λογισμού πρέπει να θεωρηθεί ως μία υπόθεση που ισχύει στο μοντέλο της τυπικής γλώσσας που κατασκευάζουμε. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η *αληθοτιμή οποιασδήποτε μοριακής πρότασης που ανήκει στο μοντέλο του Προτασιακού Λογισμού εξαρτάται μόνον από τις αληθοτιμές των συστατικών της μερών* (δηλαδή αυτών που πιο κάτω θα αποκαλέσουμε προτασιακές μεταβλητές).

Έχοντας αυτά τα γενικά στοιχεία κατά νου μπορούμε τώρα να αναπτύξουμε τα στοιχεία του συντακτικού και της σημασιολογίας του Προτασιακού Λογισμού. Η κατασκευή μιας γλώσσας ξεκινάει με την κατασκευή του συντακτικού της, κατόπιν έρχεται η κατασκευή της σημασιολογίας της (ή του συστήματος ερμηνείας της), και υπάρχουν πολλοί λόγοι –οι οποίοι θα εξηγηθούν αργότερα– γιατί συντακτικό και σημασιολογία οφείλουν να διακρίνονται.

2.2 Συμβολισμός και Δομή της Γλώσσας του Προτασιακού Λογισμού

Όπως κάθε γλώσσα, έτσι και αυτή του Προτασιακού Λογισμού έχει τους βασικούς της συντακτικούς κανόνες για το τι είναι και πως σχηματίζεται μια πρόταση (που στην συνέχεια θα ονομάσουμε προτασιακό τύπο). Το βασικό λεξιλόγιο της είναι:

(1) Ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών, για τις οποίες θα χρησιμοποιούμε ως σύμβολα είτε τα μικρά γράμματα από το κέντρο του λατινικού αλφαβήτου: $\{p, q, r, s, \dots\}$, είτε την αριθμημένη γραμματοσειρά $\{p_1, p_2, p_3, p_4, \dots\}$. Αυστηρά μιλώντας, ως τιμές των προτασιακών μεταβλητών μπορούν να θεωρηθούν ατομικές προτάσεις της φυσικής γλώσσας.

(2) Τέσσερις λογικοί σύνδεσμοι: $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow\}$.

« \wedge »: σύζευξη

« \vee »: διάζευξη

« \neg »: άρνηση

« \rightarrow »: συνεπαγωγή

(3) Τις παρενθέσεις: «(», «)», οι οποίες χρησιμοποιούνται ως υποκατάστατα των σημείων στίξεως.

Μια αυθαίρετη προτασιακή γλώσσα θα συμβολίζεται ως $\Gamma[\Sigma, \Pi]$, όπου Σ είναι το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών της Γ και Π είναι το σύνολο των λογικών συνδέσμων της Γ . Η προτασιακή γλώσσα $\Gamma[\Sigma, \Pi]$ συμβολίζει το σύνολο όλων των προτάσεων που μπορούν να σχηματιστούν από τις προτασιακές μεταβλητές του Σ και τους συνδέσμους του Π . Π.χ. η γλώσσα $\Gamma[p, q, r, s, \dots, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow]$ συμβολίζει το σύνολο των προτάσεων που μπορούν να σχηματιστούν από τις προτασιακές μεταβλητές και τους συνδέσμους της. Μερικές προτάσεις αυτής της γλώσσας είναι: $p, p \wedge p, p \wedge q, p \vee r, r \rightarrow q, \neg(r \rightarrow s) \wedge q$. Είναι προφανές ότι ο αριθμός των προτασιακών τύπων που θα μπορούσαν να σχηματιστούν είναι άπειρος διότι κατ' αρχάς υπονοείται ότι στο παράδειγμά μας υπάρχει άπειρος αριθμός προτασιακών μεταβλητών, αλλά έστω και αν αυτός ο αριθμός ήταν πεπερασμένος θα συνέβαινε το ίδιο αφού το σύνολο των συνδέσμων δεν είναι κενό και ο αριθμός δυνατών συνδυασμών είναι άπειρος. Έτσι θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα απεριόριστο αριθμό προτασιακών τύπων. Π.χ. $p, \neg p, \neg\neg p, \neg\neg\neg p, \neg\neg\neg\neg p$ (ο/η αναγνώστης/ρια καλείται να προσέξει ότι οι προτάσεις p και $\neg\neg p$ αν και είναι λογικά –αληθοσυναρτησιακά– ισοδύναμες, εντούτοις είναι διαφορετικές συντακτικές οντότητες, με άλλα λόγια, είναι διαφορετικοί προτασιακοί τύποι).

2.3 Κανόνες Σχηματισμού Προτασιακών Τύπων

Κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας του Προτασιακού Λογισμού καλείται *έκφρασή* της, π.χ. $\neg(p \wedge q), \neg p \vee q, \neg\neg(p) \wedge \rightarrow, (((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \vee s), p \wedge q \rightarrow r \vee s$. Είναι προφανές ότι τα σύμβολα της Γ μπορούν να συνδυαστούν με τρόπους που οι εκφράσεις που κατασκευάζονται είτε να μην είναι δυνατόν να είναι φορείς νοήματος, όπως η $\neg\neg(p) \wedge \rightarrow$, είτε να είναι δυνατόν, όπως η $\neg(p \wedge q)$, είτε να είναι αδύνατον να προσδιοριστεί με ακρίβεια και σαφήνεια το νόημά τους, όπως η $p \wedge q \rightarrow r \vee s$. Η τελευταία έκφραση για παράδειγμα είναι αμφίσημη. Σε ποιον ακριβώς

προτασιακό τύπο αντιστοιχεί; Μήπως στον $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$, ή μήπως στον $((p \wedge q) \rightarrow r) \vee s$; Είναι προφανές ότι οι δύο τελευταίοι προτασιακοί τύποι έχουν διαφορετική συντακτική δομή (και διαφορετικό νόημα).

Οι προτασιακοί τύποι της Γ είναι το υποσύνολο των εκφράσεων της που είναι δυνατόν να έχουν σαφές νόημα. Από το σύνολο των εκφράσεων της Γ ορίζουμε το σύνολο των προτασιακών τύπων της γλώσσας που θα είναι οι φορείς νοήματος και θα επιδέχονται αληθοτιμές. Για κάθε προτασιακή γλώσσα Γ δίνουμε γενικούς συντακτικούς κανόνες οι οποίοι ορίζουν τι θα πει πρόταση της Γ και συνεπώς αποκλείουν από το σύνολο των προτάσεων εκφράσεις χωρίς νόημα ή εκφράσεις με αμφισημία στο νόημά τους. Για παράδειγμα οι γενικοί συντακτικοί κανόνες της $\Gamma[p, q, r, s, \dots, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow]$ θα μπορούσαν να διατυπωθούν ως ακολούθως:

- (1) Οι προτασιακές μεταβλητές p, q, r, s, \dots είναι προτάσεις της Γ .
- (2) Αν X είναι πρόταση της Γ τότε το $\neg X$ είναι πρόταση της Γ .
- (3) Αν X, Y είναι προτάσεις της Γ τότε $X \wedge Y$ είναι πρόταση της Γ .
- (4) Αν X, Y είναι προτάσεις της Γ τότε $X \vee Y$ είναι πρόταση της Γ .
- (5) Αν X, Y είναι προτάσεις της Γ τότε $X \rightarrow Y$ είναι πρόταση της Γ .

(Οι προτασιακές μεταβλητές της Γ καλούνται απλές ή ατομικές προτάσεις, ενώ οι υπόλοιπες καλούνται σύνθετες ή μοριακές προτάσεις.)

Οι συντακτικοί κανόνες (1)–(5) καθορίζουν επαρκώς και με ακρίβεια ποιες εκφράσεις είναι προτασιακοί τύποι της Γ . Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας τους θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η έκφραση $\neg(p \wedge q)$ είναι όντως πρόταση της $\Gamma[p, q, r, s, \dots, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow]$.

2.4 Οι Λογικοί Σύνδεσμοι και η Σχέση τους με την Φυσική Γλώσσα

Οι λογικοί σύνδεσμοι, « \wedge »: της σύζευξης, « \vee »: της διάζευξης, « \neg »: της άρνησης, « \rightarrow »: της συνεπαγωγής αντιστοιχούν στους ακόλουθους συνδέσμους της φυσικής γλώσσας και διαβάζονται ως εξής:

« \wedge »: ...και..., « \vee »: ...ή... (περιεκτικό), « \neg »: δεν... (ή δεν ισχύει ότι...), « \rightarrow »: αν...τότε...

Αν και είναι προφανές ότι αντιστοιχούν σε συνδέσμους της φυσικής γλώσσας, όπως πρόκειται να δούμε αργότερα, το νόημα τους δίδεται από αυστηρούς και αμετάβλητους κανόνες. Σε πρώτη προσέγγιση ωστόσο, μπορούμε να πούμε τα ακόλουθα για την σχέση των λογικών συνδέσμων με τους συνδέσμους της φυσικής γλώσσας.

Σύζευξη

Η πρόταση της φυσικής γλώσσας «Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία και ο Τάσος αγαπά το ποδόσφαιρο» συνίσταται από δύο ατομικές προτάσεις («Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία», «Ο Τάσος αγαπά το ποδόσφαιρο») που συνδέονται με το «και». Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα που έχουμε εισαγάγει, όπου p εκφράζει την «Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία» και q εκφράζει την «Ο Τάσος αγαπά το ποδόσφαιρο» η λογική μορφή αυτής της πρότασης είναι: $p \wedge q$. Όλες οι φυσικές προτάσεις της μορφής «...και...», αποδίδονται ως «... \wedge ...», π.χ. $p \wedge q$, και καλούνται *συζεύξεις*. Επίσης προτάσεις της μορφής «Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία *αλλά* ο Τάσος αγαπά το ποδόσφαιρο» αποδίδονται ως: «... \wedge ...» και είναι *συζεύξεις*.

Η φυσική γλώσσα μπορεί να αποκρύπτει ότι μια πρόταση είναι σύζευξη δύο προτάσεων, π.χ. «Ο Γιάννης και ο Τάκης είναι φοιτητές». Πρόκειται για σύζευξη δύο προτάσεων (και όχι δύο ονομάτων όπως ενδεχομένως να φαίνεται): «Ο Γιάννης είναι φοιτητής και ο Τάκης είναι φοιτητής». Κατά την μετάφραση στην γλώσσα της Λογικής οι συντακτικές (γραμματικές) και άλλες ιδιότητες της φυσικής γλώσσας δεν μας ενδιαφέρουν. Όπως θα δούμε στην συνέχεια πολλές φορές για να επιτύχουμε τη σύνδεση της φυσικής

γλώσσας με τη τυπική γλώσσα της Λογικής οφείλουμε να αφαιρέσουμε μεταξύ άλλων και ορισμένες ιδιότητες της γραμματικής σύνταξης της πρώτης. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μέθοδο που θα αποκαλέσουμε *παραφράση*. Η πρόταση «Ο Γιάννης και ο Ανδρέας είναι ποδοσφαιριστές» παραφράζεται ως «Ο Γιάννης είναι ποδοσφαιριστής και ο Ανδρέας είναι ποδοσφαιριστής» και ως τέτοια αποδίδεται στη γλώσσα της Λογικής ως $p \wedge q$. Γίνεται με αυτά τα παραδείγματα σαφές ότι η λογική σύνταξη διαφέρει από την γραμματική σύνταξη. Άλλες φορές πάλι η φυσική γλώσσα συντάσσεται με τρόπο όπου το «και» περιλαμβάνεται μέσα στην πρόταση χωρίς όμως να έχει την συζευκτική του ιδιότητα, όπως στη πρόταση «Σίγουρα και ο Παναγιώτης κολυμπά». Ο λογικός σύνδεσμος «...^...» αποδίδει μόνο την συζευκτική ιδιότητα του «και» της φυσικής γλώσσας.

Άρνηση

Η πρόταση της φυσικής γλώσσας «Ο Γιάννης δεν αγαπά τη Μαρία», (όπως και όλες οι προτάσεις που εμπεριέχουν *άρνηση*), συνίσταται, στην ουσία της, στην *άρνηση* της ατομικής πρότασης «Ο Γιάννης αγαπά την Μαρία». Εισάγοντας το σύμβολο p για την ατομική πρόταση «Ο Γιάννης αγαπά την Μαρία» και χρησιμοποιώντας το σύμβολο της άρνησης \neg , η πρόταση «Ο Γιάννης δεν αγαπά την Μαρία» αποδίδεται ως $\neg p$. Ένας άλλος τρόπος στη φυσική γλώσσα να εκφράσουμε την έννοια της άρνησης είναι να προσθέσουμε την έκφραση «δεν ισχύει ότι» μπροστά από μια ατομική πρόταση π.χ. η άρνηση της «Ο Γιάννης αγαπά την Μαρία» είναι «Δεν ισχύει ότι ο Γιάννης αγαπά την Μαρία». Και αυτή η πρόταση αποδίδεται ως $\neg p$. Όλες οι προτάσεις της μορφής αυτής αποδίδονται ως $\neg p$ και καλούνται *αρνήσεις*. Σημειώστε ότι η άρνηση, δηλαδή το \neg , είναι ο μοναδικός μονοθέσιος σύνδεσμος (ή μοναδιαίος τελεστής) εκ' των πέντε χρησιμοποιούμενων του Προτασιακού Λογισμού. Οι υπόλοιποι τέσσερις σύνδεσμοι είναι διθέσιοι (ή δυαδικοί τελεστές).

Διάζευξη

Η πρόταση της φυσικής γλώσσας «Η Sony είναι η καλύτερη μάρκα ηλεκτρονικών ειδών ή η Sanyo είναι η καλύτερη μάρκα ηλεκτρονικών ειδών» συνίσταται από δύο ατομικές προτάσεις, την «Η Sony είναι η καλύτερη μάρκα ηλεκτρονικών ειδών» και την «Η Sanyo είναι η καλύτερη μάρκα ηλεκτρονικών ειδών», που συνδέονται με τον σύνδεσμο «ή». Προσέξτε ότι η πρόταση «Η Sony είναι η καλύτερη μάρκα ηλεκτρονικών ειδών ή η Sanyo είναι η καλύτερη μάρκα ηλεκτρονικών ειδών» δεν είναι δόκιμη στα ελληνικά. Θα ήταν συντακτικά πιο σωστό να πούμε: «Η καλύτερη μάρκα ηλεκτρονικών ειδών είναι η Sony ή η Sanyo». Η απόδοσή της, όπως παραπάνω, δείχνει ότι στην ουσία πρόκειται για δύο αυτοτελείς προτάσεις –η κάθε μία εκ των οποίων εμπεριέχει μία αυτοτελή δήλωση– που συνδέονται με τον σύνδεσμο «ή». Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα που έχουμε εισαγάγει, η λογική μορφή αυτής της πρότασης είναι η $p \vee q$. Όλες οι φυσικές προτάσεις της μορφής «...v...», αποδίδονται ως $p \vee q$ και καλούνται *διαζεύξεις*.

Στην φυσική γλώσσα, ο σύνδεσμος «ή» είναι συχνά αποκλειστικός (αν και ο αποκλειστικός χαρακτήρας των διαζεύξεων στην φυσική γλώσσα συχνά αποδίδεται με προτάσεις της μορφής «Είτε...είτε...»). Δηλαδή –συνήθως– εννοούμε ότι από τις δύο προτάσεις που συνδέονται με τον σύνδεσμο της διάζευξης, μόνο η μία ισχύει (ή μόνο η μία εκ των δύο είναι αληθής) αλλά όχι και οι δύο. Ο λογικός σύνδεσμος «v» χρησιμοποιείται για να εκφράσει την *περιεκτική* έννοια της διάζευξης. Δηλαδή μπορεί και οι δύο προτάσεις που συνδέονται να ισχύουν. Η περιεκτική μορφή της διάζευξης συναντάται και στην φυσική γλώσσα όπως για παράδειγμα στην πρόταση «Φάρμακα μπορεί να δώσει ένας φαρμακοποιός ή ένας γιατρός», όπου η διάζευξη δεν είναι αποκλειστική. Φάρμακα μπορούν να δώσουν και οι δύο. Συνεπώς, η εν λόγω πρόταση πρέπει να θεωρηθεί ως περιεκτική διάζευξη. Η φυσική γλώσσα είναι ασαφής και καθίσταται δύσκολη η χρήση της με απόλυτη ακρίβεια, έτσι πολλές φορές αυτό που αποκαλούμε περιεκτική διάζευξη αποδίδεται στην φυσική γλώσσα με τη λέξη «και», όπως όταν λέμε «φάρμακα μπορούν να σου δώσουν οι γιατροί και οι φαρμακοποιοί», όπου εννοούμε ότι «φάρμακα μπορούν να σου δώσουν οι γιατροί ή οι φαρμακοποιοί», στη περιεκτική μορφή της διάζευξης.

Συνεπαγωγή

Η πρόταση της φυσικής γλώσσας «Αν ο Γιάννης πάρει άριστα στα Μαθηματικά τότε είναι πολύ καλός στην Λογική» συνίσταται από δύο ατομικές προτάσεις («Ο Γιάννης παίρνει άριστα στα Μαθηματικά», «Ο Γιάννης είναι πολύ καλός στην Λογική») που συνδέονται με το «Αν...τότε...». Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα που έχουμε εισαγάγει, η λογική μορφή αυτής της πρότασης είναι: $p \rightarrow q$. Όλες οι φυσικές προτάσεις της μορφής «Αν...τότε...», αποδίδονται ως $p \rightarrow q$ και καλούνται *συνεπαγωγές*. Η πρώτη συστατική τους πρόταση $\neg p$ λέγεται *ηγούμενη*. Η δεύτερη συστατική τους πρόταση $\neg q$ λέγεται *επόμενη*. Η συνεπαγωγή εκφράζει την *υλική συνεπαγωγή* δύο προτάσεων (αργότερα θα δούμε τον αληθοσυναρτησιακό ορισμό της), σε αντιδιαστολή με την *αυστηρή συνεπαγωγή* ή την αυστηρή χρήση της συνεπαγωγής. Η υλική χρήση της συνεπαγωγής αποδίδει την αληθοτιμή *αλήθεια* στην συνεπαγωγή είτε όταν η ηγούμενη είναι ψευδής είτε όταν η επόμενη είναι αληθής. Ενώ η αυστηρή συνεπαγωγή εκφράζει την σχέση που ισχύει μεταξύ της ηγούμενης και της επόμενης όταν δεν είναι δυνατόν η ηγούμενη να είναι αληθής και η επόμενη ψευδής.

Φυσικές εκφράσεις όπως «υπό τον όρο ότι», «μόνο αν», «αρκεί να», «σε περίπτωση που», καθώς και αρκετές άλλες, αποδίδονται στη γλώσσα της Λογικής με τον σύνδεσμο «αν...τότε...», π.χ. «Το ματς θα γίνει *μόνο αν* δεν βρέξει» αποδίδεται ως «Αν βρέξει, τότε το ματς δεν θα γίνει». «Θα πάω, υπό τον όρο ότι θα έρθεις και συ» αποδίδεται ως «Αν δεν έρθεις και εσύ, τότε δεν θα πάω» (το 'και' εδώ δεν έχει λογικά-συντακτική ιδιότητα, αλλά χρησιμοποιείται κυρίως για απόδοση έμφασης στο περιεχόμενο της πρότασης). «Θα περάσεις το μάθημα, αρκεί να παρακολουθείς» αποδίδεται ως «Αν παρακολουθείς, τότε θα περάσεις το μάθημα». «Σε περίπτωση που πας στη συναυλία, θα έρθω και εγώ» αποδίδεται ως «Αν πας στη συναυλία, τότε θα έρθω και εγώ».

Σημειώστε ότι η λειτουργία του «μόνο αν» είναι η αντίστροφη της λειτουργίας του «αν», π.χ.

(α) «Θα πάω στο γήπεδο *μόνο αν* πας και συ».

(β) «Θα πάω στο γήπεδο *αν* πας και συ».

Έστω ότι, p : «Θα πάω στο γήπεδο», και q : «Εσύ θα πας στο γήπεδο». Η (β) αποδίδεται ως: «Αν πας και συ, τότε θα πάω στο γήπεδο», δηλαδή «Αν q τότε p », δηλαδή $q \rightarrow p$. Η (α) αποδίδεται ως: «Αν πάω στο γήπεδο, τότε θα πας και συ», δηλαδή «Αν p τότε q », δηλαδή $p \rightarrow q$. Συνεπώς, η « p αν q » αποδίδεται ως: $q \rightarrow p$, ενώ η « p μόνο αν q » αποδίδεται ως $p \rightarrow q$. Για παράδειγμα, «Ο ασθενής θα επιζήσει μόνο αν γίνει εγχείρηση» δεν σημαίνει ότι «Αν γίνει εγχείρηση, τότε ο ασθενής θα επιζήσει». Σημαίνει ότι «Αν δεν γίνει εγχείρηση, τότε ο ασθενής δεν θα επιζήσει». Τυποποιημένα αυτή εκφράζεται ως $\neg q \rightarrow \neg p$ που είναι λογικά ισοδύναμος (αργότερα θα δούμε γιατί) προτασιακός τύπος με τον $p \rightarrow q$. Επομένως η πρόταση «Ο ασθενής θα επιζήσει μόνο αν γίνει εγχείρηση» ισοδυναμεί λογικά με την «Αν θέλουμε ο ασθενής να επιζήσει, τότε πρέπει να γίνει εγχείρηση», όπου οι επιπρόσθετες λέξεις στην τελευταία προσδίδουν απλά την επιθυμητή έμφαση που φέρει η πρώτη.

Αναγκαίες και ικανές συνθήκες

Το « \rightarrow » χρησιμοποιείται επίσης για την απόδοση προτάσεων που αναφέρονται σε *αναγκαίες και ικανές συνθήκες*. Στην φυσική γλώσσα, αυτές οι προτάσεις αποδίδονται με τους όρους «αν» και «μόνο αν». Όταν λέμε ότι ένα γεγονός X είναι ικανή συνθήκη για το γεγονός Y , εννοούμε ότι το X από μόνο του είναι αρκετό για να συμβεί το Y . Όταν λέμε ότι ένα γεγονός X είναι αναγκαία συνθήκη για το γεγονός Y , εννοούμε ότι αν δεν συμβεί το X τότε δεν μπορεί να συμβεί το Y . (Με άλλα λόγια, η προϋπόθεση για να συμβεί το Y είναι να συμβεί το X . Ή, ισοδύναμα, το Y δεν μπορεί να συμβεί χωρίς το X). «Το X είναι ικανή συνθήκη για το Y » αποδίδεται ως «Αν X , τότε Y », $X \rightarrow Y$. «Το X είναι αναγκαία συνθήκη για το Y » αποδίδεται ως «Αν Y , τότε X », $Y \rightarrow X$, (ή ισοδύναμα, ως: « Y μόνο αν X »).

Παράδειγμα 1:

Μια ικανή συνθήκη για να ανάψει φωτιά στο δάσος είναι να πέσει ένα αναμμένο τσιγάρο: «Αν τσιγάρο, τότε φωτιά»: (τσιγάρο→φωτιά). Αλλά το αναμμένο τσιγάρο δεν είναι αναγκαία συνθήκη για την φωτιά. Μια αναγκαία συνθήκη για να ανάψει φωτιά στο δάσος είναι να υπάρχουν ξερά κλαδιά. «Αν φωτιά, τότε ξερά κλαδιά» (φωτιά→ξερά κλαδιά), (Ισοδύναμα, «Αν δεν υπάρχουν ξερά κλαδιά, τότε δεν ανάβει φωτιά»). Αλλά τα ξερά κλαδιά δεν είναι ικανή συνθήκη για την φωτιά.

2.5 Τυποποίηση: Μετάφραση προτάσεων στην Γ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο Προτασιακός Λογισμός δεν είναι παρά μόνο ένα μοντέλο Λογικής ικανό για την εξήγηση ενός μικρού υποσυνόλου των συλλογισμών μας, αυτών που μπορούν να αναλυθούν με μόνο εφόδιο την έννοια της ατομικής δηλωτικής πρότασης. Για να αποκτήσουμε μια διαίσθηση της σχέσης του Προτασιακού Λογισμού με την φυσική μας γλώσσα οφείλουμε να εξασκηθούμε στην μεταφορά προτάσεων της τελευταίας σε προτάσεις ή τύπους του Προτασιακού Λογισμού. Η μεταφορά στη γλώσσα οποιασδήποτε θεωρίας Λογικής καλείται *τυποποίηση*. Σ' αυτή την ενότητα δίνουμε μερικές κατευθυντήριες γραμμές για τον τρόπο με τον οποίο ο/η αναγνώστης/ρια οφείλει να προσεγγίζει την τυποποίηση προτάσεων της φυσικής γλώσσας στον Προτασιακό Λογισμό.

Μέχρι τώρα έχουμε μιλήσει για σχετικά απλούς προτασιακούς τύπους. Αλλά, στο βαθμό που σεβόμαστε τους συντακτικούς κανόνες σχηματισμού προτασιακών τύπων, δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο σύνθετοι μπορεί να είναι οι προτασιακοί τύποι του Προτασιακού Λογισμού. Γι αυτό οι σύνθετες προτάσεις της φυσικής γλώσσας μπορούν να αντιστοιχηθούν με σύνθετους προτασιακούς τύπους του Προτασιακού Λογισμού, μέσω της τυποποίησής τους. Επίσης, με βάση τους πίνακες αληθείας που θα κατασκευάσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο, μπορούμε να ορίσουμε την τιμή αληθείας κάθε προτασιακού τύπου ως συνάρτηση των τιμών αληθείας των συστατικών του προτασιακών μεταβλητών. Επομένως η τυποποίηση μιας πρότασης της φυσικής γλώσσας είναι το πρώτο βήμα στην αληθοσυναρτησιακή της ανάλυση.

Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα τυποποίησης:

Παράδειγμα 1:

«Αν η Κύπρος μπει στην ΟΝΕ, τότε θα παραμείνει σε επαφή με τα υπόλοιπα αναπτυγμένα κράτη της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Αλλά, αν η Κύπρος δεν μπει στην ΟΝΕ, τότε θα καταλήξει να είναι μια περιθωριακή Ευρωπαϊκή χώρα».

Υποθέτοντας, φυσικά, ότι η πρόταση «Η Κύπρος θα παραμείνει σε επαφή με τα υπόλοιπα αναπτυγμένα κράτη της Ε.Ε.» και η πρόταση «Η Κύπρος θα καταλήξει να είναι μια περιθωριακή Ευρωπαϊκή χώρα» είναι η μια άρνηση της άλλης, γίνεται εμφανές ότι η λογική μορφή αυτής της πρότασης είναι: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$

Παράδειγμα 2:

«Αν ο Γιώργος ή ο Γιάννης πάρει το βραβείο, τότε ένα παιδί από την τάξη μας θα διακριθεί».
 $(p \vee q) \rightarrow r$

Παράδειγμα 3:

«Ο Γιάννης, ο Γιώργος και ο Βαγγέλης είναι φοιτητές»
 $p \wedge (q \wedge r)$

Παράδειγμα 4:

«Θα πάμε στη συναυλία αν και μόνο αν βρούμε εισιτήρια και δεν βρέξει».
 $p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$

Παράδειγμα 5:

«Αν δεν περάσεις το μάθημα στην πρώτη εξεταστική, τότε αν μελετήσεις πολύ, μπορεί να το περάσεις στην δεύτερη εξεταστική».

$\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Μερικά γενικά στοιχεία που οφείλουμε να προσέξουμε στη προσπάθεια μεταφοράς (ή μετάφρασης) σύνθετων προτάσεων στη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού είναι τα ακόλουθα:

- (1) Απομονώνουμε τις ατομικές προτάσεις (αυτό το στοιχείο συχνά συνεπάγεται την παράφραση της σύνθετης πρότασης στο σύνολό της, ή επιμέρους συστατικών της στοιχείων).
- (2) Προσέχουμε αν κάποιες από τις ατομικές προτάσεις είναι ταυτόσημες.
- (3) Αντικαθιστούμε διακριτές ατομικές προτάσεις με διακριτές προτασιακές μεταβλητές (p, q, r, s, κλπ).
- (4) Εντοπίζουμε όλους τους λογικούς συνδέσμους (συχνά αυτό απαιτεί τη απόδοση των συνδέσμων της φυσικής γλώσσας σε αντίστοιχους της τυπικής).
- (5) Παρατηρούμε από ποιες μικρότερες σύνθετες προτάσεις αποτελείται η σύνθετη πρόταση.
- (6) Εντοπίζουμε όλες τις σύνθετες προτάσεις χρησιμοποιώντας παρενθέσεις.
- (7) Εντοπίζουμε τον *κύριο λογικό σύνδεσμο* που συνδέει τις σύνθετες προτάσεις μεταξύ τους (ή σύνθετες προτάσεις με ατομικές) και προχωρούμε απ' αυτόν στους επιμέρους συνδέσμους.
- (8) Αποδίδουμε την πρόταση χρησιμοποιώντας τα σχετικά λογικά σύμβολα και παρενθέσεις.

Παραθέτουμε με αναλυτικό τρόπο δυο παραδείγματα για να δώσουμε την έννοια της ανάλυσης μιας πρότασης με βάση το λεξιλόγιο μιας προτασιακής γλώσσας.

Παράδειγμα 6:

«Αν η τιμή του πετρελαίου ανέβει, τότε θα ανέβει ο πληθωρισμός ή θα ανέβουν τα επιτόκια».

Ατομικές προτάσεις:

p: Η τιμή του πετρελαίου ανεβαίνει.

q: Ο πληθωρισμός ανεβαίνει

r: Τα επιτόκια ανεβαίνουν.

Λογικοί σύνδεσμοι:

«αν...τότε»

«ή»

Πρώτη προσέγγιση της λογικής μορφής:

Αν p τότε (q ή r).

Κύριος σύνδεσμος:

«Αν...τότε...»

Λογική μορφή:

$p \rightarrow (q \vee r)$

Σημείωση: οι προτάσεις $p \rightarrow (q \vee r)$ και $(p \rightarrow q) \vee r$ είναι διαφορετικές. Συνεπώς, οι παρενθέσεις είναι απαραίτητες για την διάκρισή τους.

Παράδειγμα 7:

«Αν δεν πέσει ο πληθωρισμός και ανέβουν τα επιτόκια, τότε το δημόσιο χρέος θα πέσει μόνο αν καταφύγουμε σε εξωτερικό δανεισμό».

Ατομικές προτάσεις:

p: Ο πληθωρισμός πέφτει.

q: Τα επιτόκια ανεβαίνουν.

r: Το δημόσιο χρέος πέφτει.

s: Καταφεύγουμε σε εξωτερικό δανεισμό.

Λογικοί σύνδεσμοι:

«Αν...τότε»

«δεν»

«και»
«αν και μόνο αν»
Πρώτη προσέγγιση της λογικής μορφής:
Αν (δεν-p και q), τότε (r μόνο αν s).

Κύριος σύνδεσμος:
«αν...τότε...»
Λογική μορφή:
 $(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow s)$

Ασκήσεις 2

1. Ποιοι από τους ακόλουθους προτασιακούς τύπους είναι απλοί και ποιοι σύνθετοι;
(α) p
(β) $p \wedge q$
(γ) r
(δ) $(p \rightarrow r) \vee (p \wedge \neg s)$
(ε) $\neg r$
(στ) $\neg \neg t$
(ζ) $(t \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
2. Ποιες από τις ακόλουθες εκφράσεις είναι προτασιακοί τύποι;
(α) pq
(β) $p \neg$
(γ) $\neg(p \wedge q)$
(δ) $\vee p$
(ε) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r)$
(στ) $\wedge pq$
(η) $p \rightarrow q \rightarrow p \wedge r$
(θ) $\neg \neg \neg p$
(ι) $(p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(r \vee t)$
3. Χρησιμοποιώντας την έκφραση $p \rightarrow q \wedge r \vee s$ και με την χρήση παρενθέσεων, να δείξετε ποιους διαφορετικούς προτασιακούς τύπους είναι δυνατόν να σχηματίσουμε.
4. Τυποποιήστε τις ακόλουθες προτάσεις στη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού.
(α) «Ο γείτονας μου δεν φροντίζει τον κήπο του.»
(β) «Η Ολυμπιακή παρέχει πολύ καλό φαγητό αλλά η Easyjet έχει φτηνότερα εισιτήρια.»
(γ) «Η κατοχή ενσήμων για τριάντα πέντε χρόνια είναι ικανή συνθήκη για την συνταξιοδότηση.»
(δ) «Αν τα λαχανικά δεν μπουν στο ψυγείο, θα χαλάσουν.»
(ε) «Μια αναγκαία συνθήκη για να γίνει κανείς ιερωμένος είναι να είναι άντρας.»
(στ) «Η IBM φέρνει την νέα τεχνολογία στο σπίτι ή είτε η Sanyo κατασκευάζει εξαιρετικά προϊόντα είτε η Sony ανοίγει το δρόμο του μέλλοντος στα ηλεκτρονικά.»
(η) «Δεν ανάβει φωτιά εκτός αν υπάρχει οξυγόνο.»
(θ) «Αρκεί να γράψεις μέσο όρο 18, για να περάσεις στο πανεπιστήμιο.»
(ι) «Η ΑΕΚ δεν πήρε το πρωτάθλημα πέρυσι.»

- (κ) «Δεν ισχύει ότι αν περάσεις όλα τα μαθήματα του πρώτου έτους, θα πάρεις φοιτητικό δάνειο.»
- (λ) «Αν περάσεις όλα τα μαθήματα του πρώτου έτους, τότε θα πάρεις υποτροφία μόνο αν ο μέσος όρος είναι τουλάχιστον 8.»
- (μ) «Όπου υπάρχει καπνός, υπάρχει φωτιά.»
- (ν) «Αν οι γυναίκες είχαν ίσες ευκαιρίες στην κοινωνία, τότε και η παρουσία τους στην πολιτική ζωή θα ήταν μεγαλύτερη αλλά και θα είχαν καλύτερη αντιμετώπιση από τους άνδρες.»
- (ξ) «Εκτός αν ληφθούν μέτρα ενάντια στην ανεργία, οι νέοι θα είναι δύσκολο να βρουν δουλειά.»
- (π) «Ο νέος πρόεδρος της δημοκρατίας θα είναι άνδρας.»

5. Τυποποιήστε το ακόλουθο σύνολο προτάσεων στη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού.

«Αν ο Μενέλαος είναι κατσοφιασμένος και η Ελένη κεφάτη τότε είτε ο Αγαμέμνων είτε ο Αχιλλέας θλίβονται, αν ωστόσο ο Μενέλαος είναι κεφάτος και η Ελένη κατσοφιασμένη τότε ο Αγαμέμνων χαίρεται και ο Αχιλλέας μένει ανέκφραστος.»

6. Εξασκηθείτε στη μετάφραση από την φυσική γλώσσα στη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού τυποποιώντας μια παράγραφο της δικής σας επιλογής παρμένη από ένα περιοδικό ή εφημερίδα στο οποίο φαίνεται να διατυπώνεται ένα επιχείρημα.

3. Προτασιακή Σημασιολογία

Ας θυμηθούμε αυτά που είπαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, ότι οι προτασιακές μεταβλητές της Γ επιδέχονται δύο δυνατές αληθοτιμές, T και F, και ότι οι αληθοτιμές των προτασιακών τύπων της Γ εξαρτώνται πάντα από τις αληθοτιμές των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται σ' αυτές. Μαζί με την σύμβαση ότι $\Gamma[p, q, r, s, \dots, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow]$ συμβολίζει το σύνολο των προτάσεων που είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τις προτασιακές μεταβλητές, τους συνδέσμους και τις παρενθέσεις, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι *όλες οι προτάσεις (ατομικές και σύνθετες) της Γ έχουν δύο δυνατές τιμές αληθείας*. Αυτό το χαρακτηριστικό της Γ ονομάζεται αρχή της *δισθένειας*.

3.1 Πίνακες Αληθείας

Είμαστε τώρα εφοδιασμένοι με μερικές ουσιώδεις έννοιες όπως: (1) των προτασιακών μεταβλητών: p, q, r, s, \dots , (2) των λογικών συνδέσμων: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, (3) των σύνθετων προτάσεων: $p \vee q, p \rightarrow r, \neg r$, (4) των παρενθέσεων. Μας υπολείπεται άλλη μία έννοια για να μπορέσουμε να ορίσουμε όλες τις βασικές έννοιες της Λογικής, αυτή των πινάκων αληθείας για κάθε λογικό σύνδεσμο.

Με βάση το ότι ο Προτασιακός Λογισμός είναι δισθενής (δίτιμος), κάθε προτασιακή μεταβλητή της Γ θα είναι είτε αληθής είτε ψευδής κάτω από μια αποτίμηση σ . Επομένως, κάθε προτασιακή μεταβλητή αντιστοιχίζεται είτε στην τιμή αληθείας T είτε στην τιμή αληθείας F. Για να καθορίσουμε τώρα τις τιμές αληθείας των σύνθετων προτάσεων, χρειάζεται να ορίσουμε το νόημα των λογικών συνδέσμων. Αυτό έπεται λογικά από *αρχές αληθείας* οι οποίες οδηγούν στην κατασκευή *πινάκων αληθείας* που αντιστοιχούν για κάθε σύνδεσμο. Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες αληθείας, που ακολουθούν, ορίζονται με τη χρήση αρχών αληθείας, ωστόσο εμείς παραθέτουμε ακόμη μερικούς λόγους γιατί αυτοί οι συγκεκριμένοι ορισμοί εξυπηρετούν και τη διαισθητική μας αντίληψη όπως αυτή εκφράζεται μέσα από την φυσική μας γλώσσα.

Άρνηση

Ο πίνακας αληθείας για την άρνηση μας δείχνει πως η τιμή αληθείας ενός προτασιακού τύπου της μορφής $\neg p$ καθορίζεται από την τιμή αληθείας της προτασιακής μεταβλητής p .

p	$\neg p$
T	F
F	T

Η δήλωση της (και το περιεχόμενο της δήλωσης) p δεν έχει καμία σημασία. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι αν η p είναι αληθής, τότε η $\neg p$ είναι ψευδής και αντίστροφα. Αυτή η λογική λειτουργία της άρνησης ταιριάζει απόλυτα με την λειτουργία της άρνησης στην φυσική γλώσσα. Ο/η αναγνώστης/ρια καλείται να συσχετίσει τον πίνακα αληθείας της άρνησης με την αρχή αληθείας (1) και (1') παραπάνω.

Σύζευξη

Ο πίνακας αληθείας για τη σύζευξη είναι ο ακόλουθος:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Όπως είναι προφανές, μια σύζευξη είναι αληθής αν και μόνο αν και οι δύο προτάσεις της είναι αληθείς. Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι ψευδής. Αυτό φαίνεται να ταιριάζει καλά με την χρήση του «και» στην φυσική γλώσσα, π.χ. «Ο κ. Σημίτης είναι πολιτικός και ο κ. Πάγκαλος μαθηματικός» είναι προφανώς ψευδής, ακόμα και αν η μία συστατική πρόταση της είναι αληθής. Ο/η αναγνώστης/ρια καλείται να συσχετίσει τον πίνακα αληθείας της σύζευξης με την αρχή αληθείας (2) και (2') παραπάνω.

Διάζευξη

Όπως σημειώσαμε πιο πάνω, η λογική διάζευξη είναι περιεκτική, δηλαδή ένας διαζευκτικός προτασιακός τύπος είναι επίσης αληθής όταν και τα δύο συστατικά του μέρη είναι αληθή και συνεπώς, λόγω αυτού του χαρακτηριστικού, η διάζευξη μοιάζει με την σύζευξη. Αυτό δεν είναι ομοιόμορφο χαρακτηριστικό των διαζεύξεων στη φυσική γλώσσα, π.χ. «Το πρωτάθλημα το πήρε ο Ολυμπιακός ή η ΑΕΚ» είναι αληθής μόνο αν ένα από τα δυο συστατικά μέρη της είναι αληθές, αλλά είναι προφανές ότι αρκετές διαζεύξεις της φυσικής γλώσσας είναι περιεκτικές π.χ. «Αν βρέξει ή ρίξει χαλάζι θα καταστραφούν τα σπαρτά». Εδώ δεν δηλώνουμε ότι τα σπαρτά θα καταστραφούν μόνο αν βρέξει ή μόνο αν ρίξει χαλάζι. Προφανώς, δηλώνουμε ότι θα καταστραφούν ακόμα και αν συμβούν και τα δύο μαζί. Συνεπώς, η διάζευξη –στη Λογική, δηλαδή στην περιεκτική, της μορφή– είναι *αληθής* όταν *έστω και μια* από τις δύο συστατικές της προτάσεις είναι αληθής. Και αυτό το χαρακτηριστικό της λογικής διάζευξης συμφωνεί με τον ρόλο της διάζευξης στη φυσική γλώσσα. Συνεπώς, ο πίνακας αληθείας για την διάζευξη είναι:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Μια *αποκλειστική διάζευξη* μπορεί να δηλωθεί στη γλώσσα της Λογικής έμμεσα, με τον ακόλουθο τρόπο. Μια αποκλειστική διάζευξη δηλώνει: το p ή το q, αλλά όχι και τα δύο μαζί. Αυτή η πρόταση εύκολα ορίζεται ως: $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$, π.χ. «Ο πρωθυπουργός της Ελλάδας θα είναι ο Παπανδρέου ή ο Καραμανλής» (που υπονοεί ότι δεν θα είναι και ο Παπανδρέου και ο Καραμανλής). Ο/η αναγνώστης/ρια καλείται να συσχετίσει τον πίνακα αληθείας της διάζευξης με την αρχή αληθείας (3) και (3') παραπάνω.

Συνεπαγωγή

Οι προτάσεις της μορφής $p \rightarrow q$ είναι αμφίσημες όσον αφορά τις τιμές αληθείας τους στην φυσική γλώσσα. Για παράδειγμα, σας λέει κάποιος: «Αν δουλέψεις σκληρά, τότε θα περάσεις το μάθημα της Λογικής εύκολα». Πότε αυτή η πρόταση είναι αληθής και πότε ψευδής; Είναι φανερό ότι είναι αληθής αν δουλέψεις σκληρά και περάσεις το μάθημα, και είναι ψευδής αν δουλέψεις σκληρά αλλά δεν περάσεις το μάθημα. Συνεπώς, ο προτασιακός τύπος $p \rightarrow q$ είναι αληθής αν η ηγούμενη –το p– είναι αληθής και η επόμενη –το q– αληθής, και ψευδής αν η ηγούμενη είναι αληθής και η επόμενη είναι ψευδής. Τι συμβαίνει όμως αν η ηγούμενη είναι ψευδής, δηλαδή αν δεν δουλέψεις σκληρά; Στην φυσική γλώσσα, τα

πράγματα δεν είναι ξεκάθαρα. Αν η ηγούμενη είναι ψευδής, τότε διαισθητικά ο προτασιακός τύπος $p \rightarrow q$ θεωρείται άκυρος ή ψευδής.

Στην γλώσσα της Λογικής κάνουμε την εξής αυστηρή υπόθεση: Αν η ηγούμενη μιας συνεπαγωγής είναι ψευδής, τότε η συνολική πρόταση είναι αληθής (Το οποίο σημαίνει ότι αν η ηγούμενη είναι ψευδής και η επόμενη μιας συνεπαγωγής είναι είτε αληθής είτε ψευδής, τότε η συνολική πρόταση είναι αληθής). Συνεπώς, η μόνη περίπτωση στην οποία μια συνεπαγωγή είναι ψευδής είναι όταν έχει αληθή ηγούμενη και ψευδή επόμενη. Επομένως, ο πίνακας αληθείας μιας συνεπαγωγής είναι:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ο/η αναγνώστης/ρια καλείται να συσχετίσει τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής με την αρχή αληθείας (4) και (4') παραπάνω. Αν ο/η αναγνώστης/ρια δεν είναι ικανοποιημένος/η από την εξήγηση ότι αυτός ο πίνακας αληθείας ορίζει την λογική έννοια της συνεπαγωγής, τότε πρέπει να προσπαθήσει να προσεγγίσει διαισθητικά το γιατί οι δύο τελευταίες σειρές ισχύουν. Ακολουθεί μια τέτοια προσπάθεια.

Πάρτε μια τροποποίηση του αρχικού παραδείγματος. Φανταστείτε ότι ο δάσκαλός σας, σας λέει: «Αν πάρεις 'Άριστα' στην ενδιάμεση εξέταση, τότε θα πάρεις 'Άριστα' και στο τελικό διαγώνισμα». Κάτω από ποιες συνθήκες θα σας έχει πει ψέματα; Ένα είναι σίγουρο: Αν πάρετε 'Άριστα' στην ενδιάμεση εξέταση, αλλά δεν πάρετε 'Άριστα' στο τελικό διαγώνισμα (αυτό αντιστοιχεί στην δεύτερη σειρά του πίνακα αληθείας). Σίγουρα επίσης, δεν θα σας έχει πει ψέματα αν πάρετε 'Άριστα' στην ενδιάμεση εξέταση και επίσης πάρετε 'Άριστα' στο τελικό διαγώνισμα (αυτό αντιστοιχεί στην πρώτη σειρά του πίνακα αληθείας). Τι συμβαίνει όμως αν δεν πάρετε 'Άριστα' στην ενδιάμεση εξέταση; Αν υποθέσουμε ότι παρ' όλα αυτά, πάρετε 'Άριστα' στο τελικό διαγώνισμα, σας έχει πει ψέματα ο δάσκαλος; Προφανώς όχι, γιατί δεν σας είπε ότι θα πάρετε 'Άριστα' στο τελικό διαγώνισμα μόνο αν πάρετε 'Άριστα' στη ενδιάμεση εξέταση. Συνεπώς, αυτό που σας είπε ο δάσκαλος είναι αληθές, ακόμα και αν η ηγούμενη του είναι ψευδής και η επόμενη αληθής (αυτό αντιστοιχεί στην τρίτη σειρά του πίνακα αληθείας). Επίσης, αν δεν πάρετε 'Άριστα' στην ενδιάμεση εξέταση, και δεν πάρετε 'Άριστα' στο τελικό διαγώνισμα, σας έχει πει ψέματα ο δάσκαλος; Προφανώς όχι. Συνεπώς, αυτό που σας είπε ο δάσκαλος είναι αληθές, ακόμα και αν η ηγούμενη του είναι ψευδής και η επόμενη ψευδής (αυτό αντιστοιχεί στην τέταρτη σειρά του πίνακα αληθείας).

Συνεπώς, ο πίνακας αληθείας της συνεπαγωγής τουλάχιστον δεν αντίκειται στην διαίσθησή μας για το πότε μια πρόταση της μορφής «Αν...τότε...» είναι αληθής. Ωστόσο αυτό που πρέπει να τονίσουμε είναι ότι, όπως είχαμε εκφράσει νωρίτερα, ο άμεσος σκοπός μας δεν είναι να μεταφράσουμε την φυσική γλώσσα αλλά να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο Λογικής με συγκεκριμένες ιδιότητες, το οποίο ονομάζουμε Προτασιακό Λογισμό. Το ερώτημα κατά πόσον αυτό το μοντέλο πληροί έστω και μερικώς (ή προσεγγιστικά) τα χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας, αν και σοβαρό, ανήκει στο τομέα της επικύρωσης του μοντέλου μας και σε καμιά περίπτωση δεν καθιστά τον Προτασιακό Λογισμό άνευ ουσίας και σημασίας. Δυο από τις αρχές που πρέπει να διέπουν το μοντέλο μας, που είναι ασαφές κατά πόσον διέπουν τη φυσική γλώσσα, είναι οι αρχές της ακρίβειας και της συνέπειας. Επιθυμούμε, για παράδειγμα, οι λογικοί σύνδεσμοι να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όποια και αν είναι τα χαρακτηριστικά των συστατικών τους στοιχείων. Επιθυμούμε λοιπόν ο καθορισμός της αληθοτιμής της πρότασης $p \rightarrow q$ να γίνεται με τον ίδιο τρόπο ανεξάρτητα από τα χαρακτηριστικά του p και του q. Έτσι, για παράδειγμα, οι προτάσεις $p \rightarrow p$ και $p \rightarrow q$ που έχουν την ίδια δομή θα πρέπει να καθορίζονται αληθοσυναρτησιακά με τον ίδιο τρόπο. Για να επιτευχθεί αυτό ορίζουμε την τέταρτη και τελευταία σειρά του πίνακα ως αληθή, αφού η πρόταση $p \rightarrow p$ διαισθητικά φαίνεται ότι θα πρέπει να είναι πάντα αληθής. Επίσης για να

έχουμε δυο σαφώς διαφορετικές έννοιες, αυτές της συνεπαγωγής και της διπλής συνεπαγωγής, ορίζουμε την τρίτη σειρά του πίνακα ως αληθή. Σε κάθε περίπτωση, αυτό που πρέπει να κρατήσετε είναι ότι μια συνεπαγωγή *ορίζεται αληθής αν η ηγούμενη είναι ψευδής ή η επόμενη αληθής* (όπου η διάζευξη είναι περιεκτική).

Για όσους δεν ικανοποιούνται από τα παραπάνω επιχειρήματα για τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής παραθέτουμε άλλο ένα με σκοπό να πείσουμε ότι υπάρχουν ιδιαίτεροι λόγοι για την επιλογή (σύμβαση) αυτού του πίνακα. Έστω ότι έχουμε μια πρόταση όπως την «Αν η Ανδριανή είναι κολυμβήτρια και η Ανδριανή είναι μαθηματικός, τότε η Ανδριανή είναι μαθηματικός». Η δομή αυτής της πρότασης μπορεί να εκφραστεί με το λεξιλόγιο του Προτασιακού Λογισμού ως εξής: $(p \wedge q) \rightarrow q$. Μια τέτοια πρόταση φαίνεται διαισθητικά να είναι πάντα αληθής, ανεξάρτητα από τις αληθοτιμές των δύο συστατικών προτασιακών μεταβλητών της (ο/η αναγνώστης/ρια οφείλει να πειστεί γι' αυτό). Δηλαδή είτε το p είναι αληθές ή ψευδές είτε το q είναι αληθές ή ψευδές η $(p \wedge q) \rightarrow q$ είναι πάντα αληθής. Ας αναλύσουμε αυτό τον ισχυρισμό. Αν η ηγούμενη $(p \wedge q)$ είναι T τότε p είναι T και q είναι T , άρα η επόμενη q είναι T . Άρα αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στην *πρώτη* σειρά του πίνακα αληθείας. Αν η ηγούμενη είναι F τότε είτε (1) η p είναι F και η q είναι F , είτε (2) η p είναι T και η q είναι F , είτε (3) η p είναι F και η q είναι T . Στις περιπτώσεις (1) και (2) η επόμενη q είναι F , ενώ στην περίπτωση (3) η επόμενη είναι T . Άρα οι περιπτώσεις (1) και (2) αντιστοιχούν στην *τέταρτη* σειρά του πίνακα αληθείας, ενώ η περίπτωση (3) αντιστοιχεί στην *τρίτη* σειρά του πίνακα. Με άλλα λόγια, αν αναλυθεί ο πίνακας αληθείας (τον οποίο θα ήταν εκπαιδευτικά βοηθητικό ο/η αναγνώστης/ρια να αναλύσει) της $(p \wedge q) \rightarrow q$ διαπιστώνεται ότι ο πίνακας αυτός περιέχει μόνο την πρώτη, την τρίτη και την τέταρτη σειρά του πίνακα της συνεπαγωγής. Αφού η $(p \wedge q) \rightarrow q$ διαισθητικά οφείλει να είναι πάντα αληθής, και αφού επιθυμούμε να καθορίσουμε τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής με τέτοιο τρόπο ώστε να εφαρμόζεται γενικώς σε όλα τα είδη συνεπαγωγών, συμπεριλαμβανομένης και της δομής $(p \wedge q) \rightarrow q$, κάνουμε την σύμβαση να καθορίσουμε τον πίνακα όπως ποιο πάνω με την δεύτερη σειρά ως την μόνη που παίρνει τιμή αληθείας F .

Έχοντας επομένως ορίσει την σημασία των τεσσάρων λογικών συνδέσμων, μπορούμε να διαπιστώσουμε τα εξής: (α) Το νόημά τους στην τυπική λογική συμφωνεί σχετικά καλά με το νόημά τους στην φυσική γλώσσα. (β) Οι σύνδεσμοι έχουν την ιδιότητα να ορίζουν επακριβώς τις τιμές αληθείας των σύνθετων προτάσεων με βάση τις τιμές αληθείας των συστατικών τους προτασιακών μεταβλητών. Θα ήταν χρήσιμο για τον/ην αναγνώστη/ρια να εξετάσει και ενδεχομένως να διατυπώσει μια λογική απόδειξη της συνέπειας μεταξύ των *πίνακων αληθείας* και των *αρχών αληθείας*.

Πίνακες αληθείας σύνθετων προτάσεων

Η αληθοσυναρτησιακή ιδιότητα των σύνθετων προτάσεων υπαγορεύει ότι είναι δίτιμες. Στη κατασκευή του πίνακα αληθείας τους το πρώτο θέμα είναι ο καθορισμός του αριθμού των σειρών του πίνακα, δηλαδή ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών ή κατανομών αληθοτιμών στις εμφανιζόμενες προτασιακές μεταβλητές. Αυτό που μας ενδιαφέρει για την κατασκευή του πίνακα, και που θα καθορίσει τον αριθμό των σειρών, είναι ο *αριθμός* των προτασιακών μεταβλητών. Αν είναι *δύο* προτασιακές μεταβλητές, (δηλαδή δύο διακριτά σύμβολα) τότε είναι φανερό από το ότι κάθε μια τους είναι δίτιμη ότι υπάρχουν *τέσσερις δυνατοί συνδυασμοί τιμών αληθείας*, και επομένως τέσσερις σειρές στον πίνακα αληθείας. Είναι οι παρακάτω:

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

Αν είναι τρεις προτασιακές μεταβλητές (δηλαδή τρία διακριτά σύμβολα), τότε υπάρχουν οκτώ δυνατοί συνδυασμοί τιμών αληθείας και επομένως οκτώ σειρές στον πίνακα αληθείας. Είναι οι ακόλουθες:

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

Γενικά, αν ο αριθμός των διαφορετικών προτασιακών μεταβλητών είναι n , τότε ο αριθμός των σειρών του πίνακα είναι 2^n .

Αριθμός διαφορετικών προτασιακών μεταβλητών	Αριθμός σειρών στον πίνακα αληθείας
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
κ.ο.κ.	κ.ο.κ.

Για να αποδώσουμε τιμές αληθείας σε σύνθετες προτάσεις, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

(1) Θέτουμε τον προτασιακό τύπο σε λογική μορφή.

π.χ. $(p \wedge \neg q) \rightarrow q$.

(2) Μετράμε τον αριθμό των προτασιακών μεταβλητών (δηλαδή των διακριτών συμβόλων). Στον προηγούμενο προτασιακό τύπο, για παράδειγμα, παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 προτασιακές μεταβλητές: p και q . Άρα θα κατασκευάσουμε ένα πίνακα με 4 σειρές.

(3) Εντοπίζουμε τους λογικούς συνδέσμους και τον κύριο λογικό σύνδεσμο.

Στο παράδειγμα μας, παρατηρούμε τους \wedge , \neg , και τον κύριο σύνδεσμο \rightarrow .

(4) Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας (σε στάδια).

Στάδιο 1: Γράφουμε τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών αληθείας για τις προτασιακές μεταβλητές.

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

Στάδιο 2: Ξεκινάμε την συμπλήρωση των τιμών αληθείας από τους απλούστερους σύνθετους υπότυπους, προσθέτοντας νέες στήλες στον πίνακα, μία για κάθε συνθετότερο προτασιακό υπότυπο. Ειδικότερα ξεκινάμε από τις *αρνήσεις*, όπου απλά αντιστρέφουμε τις αληθοτιμές της πρότασης στην οποία επισυνάπτεται η άρνηση (στο παράδειγμά μας, το q).

p	q	$\neg q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	T

Στάδιο 3: Συνεχίζουμε με τους υπόλοιπους προτασιακούς υπότυπους προσθέτοντας νέες στήλες (Σε αυτή την περίπτωση είναι η $(p \wedge \neg q)$ και γράφουμε κάτω από το \wedge τις τιμές αληθείας του προτασιακού τύπου $(p \wedge \neg q)$).

p	q	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

Στάδιο 4: Αφού έχουμε ολοκληρώσει την αποτίμηση των επιμέρους προτασιακών υπότυπων του προτασιακού τύπου του οποίου την τιμή αληθείας θέλουμε να υπολογίσουμε, δηλαδή του $(p \wedge \neg q) \rightarrow q$, προχωρούμε στον τελευταίο και σημειώνουμε τις τιμές αληθείας που αντιστοιχούν στον κύριο σύνδεσμο (Προσέξτε: στην συγκεκριμένη περίπτωση, ο κύριος σύνδεσμος είναι ο \rightarrow . Ο ηγούμενος του είναι ο τύπος $(p \wedge \neg q)$ του οποίου τον πίνακα αληθείας έχουμε ήδη κατασκευάσει στο προηγούμενο στάδιο. Η επόμενη είναι η προτασιακή μεταβλητή q, της οποίας τον πίνακα αληθείας κατασκευάσαμε στο στάδιο 1. Συνεπώς στην κατασκευή της στήλης των τιμών αληθείας της $(p \wedge \neg q) \rightarrow q$ συνδυάζουμε τις στήλες του $p \wedge \neg q$ και της q.)

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow q$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

Παράδειγμα 1:

$(p \vee \neg q) \rightarrow q$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

Παράδειγμα 2:

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T

Ασκήσεις 3

1. Εντοπίστε τον κύριο λογικό σύνδεσμο στις ακόλουθες προτάσεις:

- (α) $\neg(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$
- (β) $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(r \vee s)$
- (γ) $\neg((p \wedge q) \wedge (r \vee s))$
- (δ) $\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(r \vee s)$
- (ε) $(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow \neg s$
- (στ) $p \wedge ((q \rightarrow r) \vee (\neg p \vee s))$

2. Για τις ακόλουθες προτάσεις, (α) κατασκευάστε πίνακες αληθείας, (β) διατυπώστε για ποιες κατανομές αληθοτιμών είναι αληθείς και για ποιες ψευδείς.

- (α) $\neg p \vee (q \wedge r)$
- (β) $\neg(p \vee q)$
- (γ) $\neg(p \rightarrow q)$
- (δ) $\neg(p \rightarrow \neg q)$
- (ε) $\neg \neg p \rightarrow p$
- (στ) $p \rightarrow p$
- (η) $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$
- (θ) $\neg(p \vee q) \rightarrow p$
- (ι) $p \vee \neg p$
- (κ) $\neg(p \wedge q)$
- (λ) $(p \wedge \neg q) \rightarrow p$
- (μ) $(p \wedge q) \rightarrow q$
- (ν) $(p \rightarrow q) \rightarrow q$
- (ξ) $\neg(\neg p \rightarrow p)$
- (π) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$
- (ρ) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- (τ) $\neg(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- (υ) $(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$
- (φ) $(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$
- (χ) $(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow \neg q)$

5. Το ακόλουθο σενάριο οφείλεται στον Αμερικανό Λογικό Raymond Smullyan. Στο εξωτικό νησί του Raymond Smullyan οι μισοί κάτοικοι λένε πάντα την αλήθεια και οι άλλοι μισοί λένε πάντα ψέματα. Συναντάτε δύο ανθρώπους A και B, και ο A σου λέει. «Είτε είμαι ένας από αυτούς που ψεύδεται είτε ο B είναι ένας από αυτούς που λένε την αλήθεια.» Τι είναι ο A και τι είναι ο B; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. Σε ένα από τρία κουτιά (χρυσό, ασημένιο, χάλκινο) βρίσκεται ένα διαμάντι. Σε κάθε κουτί υπάρχει μία πρόταση. Γνωρίζετε ότι μόνο μία από τις τρεις προτάσεις είναι αληθής. Που βρίσκεται το διαμάντι; Εξηγήστε το συλλογισμό σας.

Χρυσό: «Το διαμάντι είναι εδώ.»

Ασημένιο: «Το διαμάντι δεν είναι εδώ.»

Χάλκινο: «Το διαμάντι δεν είναι στο χρυσό.»

7. Ποια από τα παρακάτω σκιασμένα μέρη των τεσσάρων χαρτιών είναι απόλυτα αναγκαίο να δείτε για να απαντήσετε στο εξής ερώτημα: Για αυτά τα χαρτιά, είναι αληθές ότι αν υπάρχει X στο αριστερό μέρος τότε υπάρχει X στο δεξιό;

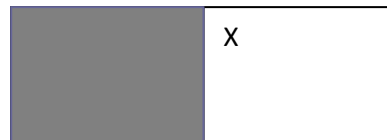
A



B



C



D



4. Ιδιότητες και Σχέσεις των Προτάσεων

Οι πίνακες αληθείας (όπως και οι αρχές αληθείας, αλλά και τα δένδροδιαγράμματα) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατανόηση και ανάδειξη μερικών θεμελιωδών λογικών ιδιοτήτων των προτάσεων, όπως η ‘ταυτολογία’, η ‘αντίφαση’, και η ‘ενδεχομενικότητα’.

4.1 Ταυτολογίες

Η πρόταση «Εξω βρέχει ή δεν βρέχει» έχει την λογική δομή $p \vee \neg p$. Αν κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας της, είναι εύκολο να δούμε ότι έχει την ακόλουθη μορφή:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Η $p \vee \neg p$ έχει την τιμή αληθείας T (αληθής) σε όλες τις σειρές (κάτω από τον κύριο σύνδεσμο). Δηλαδή, είναι αληθής για οποιαδήποτε κατανομή τιμών αληθείας στις συστατικές του προτασιακές μεταβλητές (στην συγκεκριμένη περίπτωση, υπάρχει μόνο μια προτασιακή μεταβλητή). Μια τέτοια πρόταση λέγεται *λογικά αληθής* ή καλύτερα *ταυτολογία*. Γενικότερα, *ταυτολογίες* είναι οι προτάσεις που είναι αληθείς *ανεξάρτητα* από τις τιμές αληθείας των συστατικών προτασιακών μεταβλητών τους.

Επεκτείνοντας την χρήση της έννοιας της ταυτολογίας στις φυσικές γλώσσες θα καλούμε μια πρόταση στο πλαίσιο της φυσικής γλώσσας ταυτολογία αν η μετάφρασή της στο πλαίσιο της γλώσσας του Προτασιακού Λογισμού οδηγεί σε μία πρόταση που είναι ταυτολογία. Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο (τυπωμένο σε έντονο χαρακτήρα) **T** για να αποδίδουμε την γενική έννοια της ταυτολογίας. Για να δείξουμε ότι μία πρόταση είναι ταυτολογία, αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας αληθείας της έχει την τιμή αληθείας T σε όλες τις σειρές. Είναι λοιπόν αυτονόητο ότι μόνο σύνθετες προτάσεις μπορούν να είναι ταυτολογίες, αφού οι προτασιακές μεταβλητές είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα ταυτολογιών.

Παράδειγμα 1:

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

Παράδειγμα 2:
 $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Οι ταυτολογίες έχουν το εξής σημαντικό χαρακτηριστικό: αφού είναι πάντοτε αληθείς τότε όχι μόνο δεν μπορούν να διαψευστούν αλλά επίσης, αυστηρά μιλώντας, είναι κενές πληροφοριακού περιεχομένου. Ειδικότερα, δεν αφορούν τον κόσμο. Το πως είναι ο κόσμος δεν έχει καμία συνέπεια για την αλήθεια μιας λογικά αληθούς πρότασης. Για παράδειγμα, η πρόταση «Εξω βρέχει» αφορά τον καιρό (και κατά συνέπεια τον κόσμο) και είναι αληθής αν έξω βρέχει. Αντίθετα, η πρόταση «Εξω βρέχει ή δεν βρέχει» δεν αφορά τον καιρό. Και δεν θα μπορούσε να αφορά τον καιρό, αφού όντας λογικά αληθής, είναι αληθής ανεξάρτητα του πως είναι ο καιρός έξω. Οι ταυτολογίες (ή λογικές αλήθειες) είναι τετριμμένα αληθείς. Συνηθίζεται να λέγεται ότι οι ταυτολογίες (ή λογικές αλήθειες) είναι *αναγκαία αληθείς* προτάσεις ή *αναγκαίες αλήθειες*.

4.2 Αντιφάσεις ή Λογικά Ψευδείς Προτάσεις

Η πρόταση «Εξω βρέχει και δεν βρέχει» έχει την λογική μορφή $p \wedge \neg p$. Αν κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας της, είναι εύκολο να δούμε ότι έχει την ακόλουθη μορφή:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

Η $p \wedge \neg p$ έχει την τιμή αληθείας F σε όλες τις σειρές (κάτω από τον κύριο σύνδεσμο). Δηλαδή είναι ψευδής κάτω από οποιαδήποτε κατανομή τιμών αληθείας στις συστατικές προτασιακές μεταβλητές του (στην συγκεκριμένη περίπτωση, υπάρχει μόνο μια συστατική προτασιακή μεταβλητή). Μια τέτοια πρόταση λέγεται *λογικά ψευδής* ή καλύτερα *αντίφαση*. Γενικότερα, *αντιφάσεις* είναι οι προτάσεις που είναι ψευδείς *ανεξάρτητα* από τις τιμές αληθείας των συστατικών προτασιακών μεταβλητών τους. Οι αντιφάσεις είναι *τετριμμένα ψευδείς*. Συνηθίζεται να λέγεται ότι οι αντιφάσεις (ή λογικά ψευδείς προτάσεις) είναι *αναγκαία ψευδείς* προτάσεις.

Επεκτείνοντας την χρήση της έννοιας της αντίφασης στις φυσικές γλώσσες θα καλούμε μια πρόταση στο πλαίσιο της φυσικής γλώσσας αντίφαση αν η μετάφρασή της στο πλαίσιο του Προτασιακού Λογισμού οδηγεί σε πρόταση η οποία είναι αντίφαση. Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο \perp για να αποδίδουμε την γενική έννοια της αντίφασης. Για να δείξουμε ότι μία πρόταση είναι αντίφαση, αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας αληθείας της έχει την τιμή αληθείας F σε όλες τις σειρές. Είναι λοιπόν αυτονόητο ότι μόνο σύνθετες προτάσεις μπορούν να είναι αντιφάσεις, αφού οι προτασιακές μεταβλητές είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα αντιφάσεων.

Παράδειγμα 1:

$$\neg(p \vee \neg p)$$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$\neg(p \vee \neg p)$
T	F	T	F
F	T	T	F

Παράδειγμα 2:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	F

Οι αντιφάσεις, όπως και οι ταυτολογίες έχουν το εξής σημαντικό χαρακτηριστικό, δεν αφορούν τον κόσμο. Το πως είναι ο κόσμος δεν έχει καμία συνέπεια για το αληθοτιμή μιας αντίφασης. Για παράδειγμα, η πρόταση «Εξω βρέχει» αφορά τον καιρό (και κατά συνέπεια τον κόσμο) και είναι ψευδής αν έξω δεν βρέχει. Αντίθετα, η πρόταση «Εξω βρέχει και δεν βρέχει» δεν αφορά τον καιρό. Και δεν μπορούσε να αφορά τον καιρό, αφού όντας αντίφαση, είναι ψευδής ανεξάρτητα του πως είναι ο καιρός έξω. Σημειώστε ότι οι αρνήσεις των αντιφάσεων είναι ταυτολογίες και αντίστροφα, οι αρνήσεις των ταυτολογιών είναι αντιφάσεις, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι ταυτολογίες ταυτίζονται με τις αρνήσεις των αντιφάσεων και οι αντιφάσεις με τις αρνήσεις των ταυτολογιών.

4.3 Ενδεχομενικές Προτάσεις

Η πρόταση «Εξω βρέχει ή έχει αέρα», έχει τη λογική μορφή $p \vee q$. Ο πίνακας αληθείας αυτής της πρότασης γνωρίζουμε ότι έχει την ακόλουθη μορφή:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Σε αντίθεση με τις ταυτολογίες και τις αντιφάσεις, η $p \vee q$ δεν έχει πίνακα αληθείας στον οποίο οι σειρές να είναι είτε όλες αληθείς είτε όλες ψευδείς. Κάποιες σειρές έχουν την τιμή αληθείας T και κάποιες άλλες την τιμή αληθείας F. Αυτές οι προτάσεις λέγονται ενδεχόμενα ή καλύτερα ενδεχομενικές. Μπορούμε να συνάγουμε ότι αν μια πρόταση δεν είναι ταυτολογία και δεν είναι αντίφαση τότε είναι ενδεχομενική.

Επεκτείνοντας την χρήση της έννοιας της ενδεχομενικής πρότασης στις φυσικές γλώσσες θα καλούμε μια πρόταση στο πλαίσιο της φυσικής γλώσσας ενδεχομενική αν η μετάφρασή της στο πλαίσιο του Προτασιακού Λογισμού οδηγεί σε πρόταση η οποία είναι ενδεχομενική. Για να δείξουμε ότι μία πρόταση είναι ενδεχομενική, αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας αληθείας της δεν έχει την τιμή αληθείας T σε όλες τις σειρές και δεν έχει την τιμή αληθείας F σε όλες τις σειρές. Είναι αυτονόητο ότι όλες οι προτασιακές μεταβλητές και βεβαίως όλες οι ατομικές προτάσεις είναι ενδεχομενικές.

Το αν οι ενδεχομενικές προτάσεις είναι αληθείς ή όχι εξαρτάται από το πως είναι ο κόσμος. Συνεπώς, για να διαπιστώσουμε αν μια ενδεχομενική πρόταση είναι αληθής ή όχι πρέπει να εξετάσουμε αν η κατάσταση που περιγράφει ισχύει στον κόσμο. Στο πιο πάνω συγκεκριμένο παράδειγμα, πρέπει να εξετάσουμε αν πράγματι έξω βρέχει ή έχει αέρα. Σε αντίθεση με τις ενδεχομενικές, για να διαπιστώσουμε αν μια πρόταση είναι λογικά αληθής ή λογικά ψευδής, όπως επισημίναμε, δεν χρειάζεται να κάνουμε εμπειρική έρευνα. Αρκεί να εξετάσουμε την λογική της μορφή και συνεπώς τον πίνακα αληθείας του αντίστοιχού της προτασιακού τύπου.

Ίσως, σε αυτό το σημείο να προκύπτει η ακόλουθη απορία: Γιατί χρειάζεται να κατασκευάζουμε πίνακες αληθείας αφού κάθε ενδεχομενική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής και αφού αυτό εξαρτάται από το πως είναι ο κόσμος; Η απάντηση έχει δύο σκέλη. (α) Με το να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας μπορούμε να διαπιστώσουμε αν μια πρόταση είναι ταυτολογία ή αντίφαση ή ενδεχομενική. (β) Ο πίνακας αληθείας μιας πρότασης έχει την εξής ιδιότητα: κάθε γραμμή του πίνακα αποτυπώνει μια δυνατή κατάσταση (συμβατή με την λογική μορφή της πρότασης). Έτσι, για παράδειγμα, ο πίνακας αληθείας της πρότασης «Έξω βρέχει ή έχει αέρα» (που έχει τη λογική μορφή $p \vee q$), περιγράφει τέσσερις δυνατές καταστάσεις. Αυτές είναι: *Βρέχει και έχει αέρα* (αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή), *βρέχει και δεν έχει αέρα* (αντιστοιχεί στην δεύτερη γραμμή), *δεν βρέχει και έχει αέρα* (αντιστοιχεί στην τρίτη γραμμή) και τέλος *δεν βρέχει και δεν έχει αέρα* (αντιστοιχεί στην τέταρτη γραμμή). Από αυτές τις δυνατές καταστάσεις οι τρεις πρώτες, αν ισχύουν, κάνουν την πρόταση «Έξω βρέχει ή έχει αέρα» αληθή. Η τέταρτη, αν ισχύει, κάνει την πρόταση «Έξω βρέχει ή έχει αέρα» ψευδή. Η πρόταση «Έξω βρέχει ή έχει αέρα» είναι προφανώς ενδεχομενική, αφού δεν είναι ούτε ταυτολογία αλλά ούτε και αντίφαση. Αλλά είναι αληθής ή ψευδής ανάλογα με την κατανομή αληθοτιμών; Αυτό εξαρτάται από το ποια από τις τέσσερις δυνατές καταστάσεις του πίνακα ισχύει στην πραγματικότητα. Αν είναι μια από τις τρεις πρώτες, τότε η πρόταση «Έξω βρέχει ή έχει αέρα» είναι αληθής. Αν η κατάσταση που ισχύει στην πραγματικότητα είναι η τέταρτη, τότε η πρόταση είναι ψευδής. Αλλά το ποια κατάσταση ισχύει είναι θέμα εμπειρικής έρευνας. Με αυτή την έννοια λοιπόν, ο πίνακας αληθείας που αντιστοιχεί σε μια ενδεχομενική πρόταση μας δείχνει όλες τις δυνατές καταστάσεις που είναι συμβατές με την λογική μορφή της πρότασης και αφήνει στην εμπειρική έρευνα το να δείξει ποια από όλες αυτές ισχύει και επομένως το αν η πρόταση είναι όντως αληθής ή όχι. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα ενδεχομενικών προτάσεων.

Παράδειγμα 1:

$p \rightarrow \neg q$

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

Παράδειγμα 2:

$$(p \vee q) \rightarrow q$$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

Σημειώστε ότι η άρνηση μιας ενδεχομενικής πρότασης είναι επίσης ενδεχομενική πρόταση.

Παράδειγμα 3:

$$\neg((p \vee q) \rightarrow q)$$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$	$\neg((p \vee q) \rightarrow q)$
T	T	T	T	F
T	F	T	F	T
F	T	T	T	F
F	F	F	T	F

Η διάκριση μεταξύ αναγκαία αληθών προτάσεων και ενδεχομενικά αληθών προτάσεων είναι βασική. Οι αναγκαία αληθείς προτάσεις είναι αυτές που δεν μπορούν να είναι ψευδείς. Αν θυμηθούμε ότι οι κατανομές τιμών αληθείας στις σειρές ενός πίνακα αληθείας περιγράφουν από πλευράς αληθοτιμών τις δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να είναι ο κόσμος, και αν συνυπολογίσουμε ότι μια ταυτολογία είναι τέτοια ώστε να έχει την τιμή αληθείας T σε κάθε σειρά του πίνακα αληθείας της, τότε μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι μια ταυτολογία είναι αληθής σε όλες τις δυνατές καταστάσεις. Δηλαδή μια ταυτολογία είναι αληθής όποια και αν είναι η κατανομή των τιμών αληθείας στις προτασιακές μεταβλητές που την συνιστούν. Όταν επομένως λέμε ότι μια ταυτολογία δεν μπορεί να είναι ψευδής, εννοούμε ότι *δεν υπάρχει* δυνατή κατάσταση στην οποία είναι ψευδής. Είναι λοιπόν αναγκαία αληθής. Και αφού μια ταυτολογία είναι αληθής σε όλες τις δυνατές καταστάσεις, θα είναι αληθής και στον ενεργειακό κόσμο.

Μια ενδεχομενική πρόταση ωστόσο δεν είναι αναγκαία αληθής. Δεν είναι δηλαδή αληθής σε όλες τις δυνατές καταστάσεις. Αυτό συνάγεται εύκολα από τον πίνακα αληθείας της. Γιατί αφού είναι ενδεχομενική, θα υπάρχουν κάποιες σειρές στον πίνακα, οι οποίες θα κάνουν την πρόταση ψευδή. Με αυτήν την έννοια, μια ενδεχομενική πρόταση *μπορεί* να είναι ψευδής. Δηλαδή υπάρχει *μια* τουλάχιστον δυνατή κατάσταση στην οποία η ενδεχομενική πρόταση είναι ψευδής. Ακόμα και αν τυγχάνει να είναι αληθής στον ενεργειακό κόσμο, δεν είναι αναγκαία αληθής.

Παράδειγμα 4:

«Αν βρω εισιτήριο και δεν βρέχει, τότε θα πάω στο γήπεδο», ή «Αν ο πληθωρισμός πέσει και δεν ανέβει το δημόσιο χρέος, τότε θα μπούμε στην ΟΝΕ». Και οι δυο αυτές προτάσεις τυποποιούνται ως: $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T

Οι προτάσεις μπορεί να είναι αληθείς στον ενεργειακό κόσμο, ωστόσο δεν είναι αναγκαία αληθείς, διότι ο πίνακας αληθείας του αντίστοιχου προς αυτές προτασιακού τύπου μας υποδεικνύει ότι υπάρχει μια κατανομή αληθοτιμών στα συστατικά τους που την καθιστά ψευδή. Άρα οι συγκεκριμένες προτάσεις όπως αυτές εκφράζονται στην φυσική γλώσσα είναι επίσης ενδεχομενικές.

Οφείλουμε να ομολογήσουμε ότι η μέθοδος των πινάκων αληθείας είναι αρκετά χρονοβόρος ιδιαίτερα όταν πρόκειται για την εξακρίβωση των ιδιοτήτων περίπλοκων προτάσεων (όπως για παράδειγμα, σε κάποιο βαθμό το τελευταίο μας παράδειγμα $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$). Τα πλείστα παραδείγματα που προηγήθηκαν είχαν εκπαιδευτικό χαρακτήρα και ενδεχομένως αυτό το χαρακτηριστικό να μην έγινε αντιληπτό. Ωστόσο δεν είναι δύσκολο να φανταστούμε ότι για να κατασκευαστεί ο πίνακας αληθείας ενός προτασιακού τύπου –όπως για παράδειγμα της πρότασης $(p \wedge \neg(q \rightarrow r)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow q))$ – απαιτείται αρκετός χρόνος. Εδώ μπορούμε να αναφέρουμε ότι η Λογική έχει αναπτύξει διάφορες μεθόδους για την διεκπεραίωση λογικών υπολογισμών. Οι πίνακες αληθείας είναι μία τέτοια μέθοδος, που είναι και η απλούστερη γιατί και την χρησιμοποιούμε εδώ.

4.4 Λογική Ισοδυναμία

Μέχρι στιγμής, έχουμε μιλήσει για τις αληθοσυναρτησιακές ιδιότητες των προτασιακών τύπων. Και έχουμε τονίσει ότι κάθε πρόταση είναι ταυτολογία ή αντίφαση ή ενδεχομενική (όπου το «ή» είναι αποκλειστικό). Τώρα, μπορούμε να συγκρίνουμε προτάσεις μεταξύ τους για να διακρίνουμε λογικές σχέσεις που ενδεχομένως να επικρατούν. Η σημαντικότερη λογική σχέση μεταξύ προτάσεων είναι αυτή της λογικής ισοδυναμίας.

Ορισμός της Λογικής Ισοδυναμίας:

Δύο προτάσεις λέγονται λογικά ισοδύναμες μόνο στην περίπτωση που έχουν τις ίδιες τιμές αληθείας για κάθε κατανομή αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτές.

Είναι φανερό ότι μόνο οι σύνθετες προτάσεις μπορούν να είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, αφού οι προτασιακές μεταβλητές δεν έχουν συστατικά. Μέχρι τώρα

έχουμε χρησιμοποιήσει μικρούς λατινικούς χαρακτήρες για να αναφερθούμε στις προτασιακές μεταβλητές. Για να διευκολύνουμε τα πράγματα, θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα από το τέλος του λατινικού αλφαβήτου P, Q, ..., X, Y, Z, ως ονόματα για να συμβολίζουμε οποιεσδήποτε προτάσεις, είτε σύνθετες είτε ατομικές. Δύο προτάσεις X και Y είναι *ισοδύναμες μόνο στην περίπτωση όπου έχουν τους ίδιους (ταυτόσημους) πίνακες αληθείας*. Για να μιλήσουμε για την σχέση της λογικής ισοδυναμίας, εισάγουμε το σύμβολο \Leftrightarrow . Έτσι η πρόταση «H X είναι λογικά ισοδύναμος με την Y» εκφράζεται συμβολικά ως: $X \Leftrightarrow Y$. Η έννοια της λογικής ισοδυναμίας είναι εκτός των άλλων σημαντική γιατί αποδίδει την λογική έννοια της *συνωνυμίας* μεταξύ προτάσεων.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα χρήσης των πινάκων αληθείας για την διαπίστωση αν ένα ζεύγος προτάσεων είναι αληθοσυναρτησιακά ισοδύναμο.

Παράδειγμα 1:

Ισχύει ότι, $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$;

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

$\therefore P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

Παράδειγμα 2:

Ισχύει ότι, $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$;

Ο πίνακας αληθείας της $P \rightarrow Q$ δόθηκε παραπάνω. Όσο για τον πίνακα αληθείας της $\neg P \wedge \neg Q$, αυτός είναι:

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

$\therefore P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

Είναι επίσης φανερό ότι $\neg(P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$. Εξηγείστε το γιατί.

Παράδειγμα 3:

Ισχύει ότι, $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$\therefore P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

Παράδειγμα 4:

Ισχύει ότι, $\neg(X \wedge \neg Y) \Leftrightarrow \neg X \vee Y$;

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \wedge \neg Y$	$\neg(X \wedge \neg Y)$	$\neg X \vee Y$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας αληθείας της $\neg(X \wedge \neg Y)$ είναι ταυτόσημος με αυτόν της $\neg X \vee Y$, άρα οι δυο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

4.5 Οι βασικοί Νόμοι της Λογικής

Σε αυτό το σημείο, και έχοντας εισαγάγει την σχέση της ισοδυναμίας μπορούμε να μιλήσουμε για τους βασικούς νόμους της Λογικής. Οι βασικοί νόμοι εκφράζουν βασικές ισοδυναμίες μεταξύ προτάσεων. Ήδη γνωρίζουμε αρκετά για να μπορούμε να δείξουμε αν δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες ή όχι. Συνεπώς, αφήνεται στον/ην αναγνώστη/ρια να αποδείξει ότι τα παρακάτω ζεύγη προτάσεων αποτελούν ισοδύναμα ζεύγη.

Νόμοι αυτοπάθειας:

$$P \wedge P \Leftrightarrow P$$

$$P \vee P \Leftrightarrow P$$

Νόμοι αντιμεταθετικότητας:

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

Νόμοι προσεταιριστικότητας:

$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$$

$$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

Νόμοι επιμεριστικότητας:

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Νόμοι de Morgan:

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

Νόμοι συνεπαγωγής:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

Συμβολίζοντας με **T** μια οποιαδήποτε ταυτολογία και με **⊥** μια οποιαδήποτε αντίφαση, οι ακόλουθοι νόμοι αποδεικνύονται εύκολα.

Νόμοι ταυτότητας:

$$P \wedge T \Leftrightarrow P$$

$$P \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$

$$P \vee T \Leftrightarrow T$$

$$P \vee \perp \Leftrightarrow P$$

Νόμοι συμπληρώματος:

$$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$$

$$\neg \neg P \Leftrightarrow P$$

Ασκήσεις 4

1. Χρησιμοποιήστε τόσο τους πίνακες αληθείας για να δείξετε τι είδος πρότασης είναι η κάθε μία από τις παρακάτω:

(α) $\neg(p \wedge \neg p)$

(β) $\neg(p \rightarrow (p \vee q))$

(γ) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

(δ) $\neg(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

(ε) $p \vee \neg p$

(στ) $p \wedge \neg \neg p$

(η) $(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$

(θ) $p \rightarrow (p \vee q)$

(ι) $\neg p \rightarrow (p \wedge q)$

(κ) $\neg p \rightarrow (\neg p \vee q)$

2. Να δείξετε αν ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες, χρησιμοποιώντας τους πίνακες αληθείας:

(α) $\neg q \rightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg p \vee q$

(β) $\neg(q \wedge \neg p) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

(γ) $p \vee p \Leftrightarrow p$

(δ) $q \wedge p \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$

(ε) $q \wedge p \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

(στ) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

(η) $p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

(θ) $\neg(p \wedge T) \Leftrightarrow p \vee \perp$

(ι) $p \wedge \neg(q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5. Οι Βασικές Έννοιες της Λογικής

5.1 Η Έννοια της Λογικής Συνέπειας

Έστω ότι δύο προτάσεις X και Y δεν είναι αντιφατικές μεταξύ τους, δηλαδή η σύζευξή τους δεν είναι λογική αντίφαση. Τι είναι; Υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι να είναι λογικά ισοδύναμες. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουν ταυτόσημους πίνακες αληθείας. Η άλλη περίπτωση είναι να έχουν διαφορετικούς, αλλά όχι αντίθετους πίνακες αληθείας. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, λέμε ότι οι προτάσεις είναι *συνεπείς* (ή *συμβατές*) *μεταξύ τους*. Με άλλα λόγια, δύο προτάσεις λέγονται *συνεπείς μεταξύ τους* αν οι πίνακες αληθείας τους *δεν* είναι αντίθετοι. Ακριβέστερα, δύο προτάσεις X και Y είναι συνεπείς αν και μόνο αν οι πίνακες αληθείας τους έχουν τουλάχιστον μια σειρά στην οποία και οι δύο προτάσεις έχουν την τιμή αληθείας T . Αυτό, βεβαίως, συνεπάγεται ότι ο $X \wedge Y$ δεν είναι αντίφαση.

Παράδειγμα 1:

Είναι οι $p \wedge q$ και $\neg p \vee q$ συνεπείς μεταξύ τους;

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

Οι $p \wedge q$ και $\neg p \vee q$ είναι συνεπείς (συμβατές μεταξύ τους) ακριβώς γιατί οι πίνακες αληθείας τους έχουν τουλάχιστον μια σειρά (την πρώτη σειρά) στην οποία είναι και οι δύο αληθείς. Ο/η αναγνώστης/ρια μπορεί να δείξει ότι η σχετική σύζευξη $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$ δεν είναι αντίφαση κατασκευάζοντας τον πίνακα αληθείας της.

Παράδειγμα 2:

Είναι οι $p \rightarrow q$ και $\neg p \wedge q$ συνεπείς μεταξύ τους;

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

Οι $p \rightarrow q$ και $\neg p \wedge q$ είναι συνεπείς μεταξύ τους ακριβώς γιατί οι πίνακες αληθείας τους έχουν τουλάχιστον μια σειρά (την τρίτη) στην οποία είναι και οι δύο αληθείς. Ο/η αναγνώστης/ρια μπορεί να δείξει ότι η σχετική σύζευξη $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \wedge q)$ δεν είναι αντίφαση κατασκευάζοντας τον πίνακα αληθείας της.

Η έννοια της *λογική συνέπειας* είναι σημαντική γιατί δείχνει ότι δύο προτάσεις μπορεί να είναι *ταυτόχρονα* αληθείς. Επίσης είναι σημαντικό ότι η έννοια της συνέπειας εφαρμόζεται σε περισσότερους από δύο προτάσεις. Μια ακολουθία προτάσεων είναι συνεπής (δηλαδή το σύνολο των προτάσεων είναι συνεπές, και άρα όλες οι προτάσεις που το συνιστούν μπορούν να είναι ταυτόχρονα αληθείς) αν οι πίνακες αληθείας των προτάσεων είναι τέτοιοι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον μια σειρά στην οποία *όλες* οι προτάσεις του συνόλου να έχουν την τιμή αληθείας T.

Η σημασία της συνέπειας γίνεται περισσότερο κατανοητή αν μιλήσουμε για σύνολα προτάσεων, π.χ. για θεωρίες ή σύνθετες απόψεις. Για να μπορεί μια θεωρία να θεωρηθεί *ικανή* να είναι αληθής, πρέπει να είναι τουλάχιστον συνεπής. Γιατί αν δεν είναι, τότε η θεωρία θα είναι αντιφατική. Δηλαδή θα περιέχει προτάσεις οι οποίες είναι αντιφατικές μεταξύ τους. (Σε τελική ανάλυση, θα περιέχει μια προτασιακή μεταβλητή και την άρνησή της.) Και άρα θα είναι *αναγκαία ψευδής*. Άρα δεν θα μπορεί να είναι αληθής. Συνεπώς, πριν καν προκύψει το ερώτημα αν μια θεωρία (ή μια σύνθετη άποψη) είναι αληθής, πρέπει να εξετασθεί αν είναι τουλάχιστον συνεπής, δηλαδή αν *μπορεί* να είναι αληθής.

Αν έχουμε ένα μικρό αριθμό προτάσεων, η διαπίστωση της μεταξύ τους συνέπειας (ή η διαπίστωση αν το σύνολο το οποίο συγκροτούν είναι συνεπές) είναι μια απλή διαδικασία. Συγκρίνουμε τους πίνακες αληθείας τους και βλέπουμε αν υπάρχει *τουλάχιστον μια* σειρά στην οποία όλοι οι προτασιακοί τύποι έχουν την τιμή αληθείας T. Να σημειώσουμε ότι όλα όσα έχουμε πει για την έννοια της συνέπειας συνόλων προτάσεων του Προτασιακού Λογισμού μπορούν να μεταφερθούν σε σύνολα προτάσεων της φυσικής γλώσσας.

Παράδειγμα 3:

«Αν ο υπηρέτης είναι ένοχος, τότε είναι και ο σοφέρ. Ο σοφέρ είναι ένοχος αλλά η οικονόμος δεν είναι. Ο υπηρέτης δεν είναι ένοχος ή η οικονόμος είναι.»

Είναι αυτή η ακολουθία προτάσεων συνεπής; Είναι, δηλαδή, το σύνολο που αποτελείται από τις τρεις προτάσεις συνεπές; Είναι οι προτάσεις που το συνιστούν

συμβατές μεταξύ τους; Μπορούν δηλαδή να είναι όλες ταυτόχρονα αληθείς και συνεπώς να μπορούν να περιγράψουν μια κατάσταση η οποία είναι δυνατόν να είναι αληθής;

Η μεταφορά τους στην Γ είναι απλή. Η παραπάνω άποψη αποτελείται από τρεις προτάσεις: $\Sigma = \{p \rightarrow q, q \wedge \neg r, \neg p \vee r\}$. Ο κοινός πίνακας αληθείας είναι ο ακόλουθος:

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$p \rightarrow q$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \vee r$
T	T	T	F	F	T	F	T
T	T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F	T

Είναι φανερό ότι υπάρχει μια σειρά στην οποία όλοι οι τύποι είναι αληθείς (η έκτη σειρά) και συνεπώς η σύνθετη άποψη είναι συνεπής, δηλαδή *μπορεί* να είναι αληθής. Με άλλα λόγια, η άποψη αυτή δεν περιέχει καμιά λογική αντίφαση. Συνήθως λέμε ότι το σύνολο των προτάσεων είναι συνεπές και κατ' ακολουθίαν ότι το σύνολο των αντίστοιχων προτάσεων στο πλαίσιο της φυσικής γλώσσας είναι συνεπές. Αντίθετα, το ακόλουθο σύνολο είναι ασυνεπές:

Παράδειγμα 4:

«Αν ο υπηρέτης είναι ένοχος, τότε είναι και ο σοφέρ. Ο σοφέρ δεν είναι ένοχος ή η οικονόμος είναι ένοχος. Ο υπηρέτης είναι ένοχος αλλά η οικονόμος δεν είναι.»

$\Sigma = \{p \rightarrow q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r\}$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \rightarrow q$	$\neg q \vee r$	$p \wedge \neg r$
T	T	T	F	F	T	T	F
T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	T	T	F

Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει *καμιά* σειρά στην οποία όλες οι προτάσεις είναι αληθείς, και συνεπώς η άποψη *δεν* είναι συνεπής, δηλαδή *δεν μπορεί* να είναι αληθής. Με άλλα λόγια, η άποψη αυτή είναι λογικά αντιφατική. Συνήθως, λέμε ότι το σύνολο είναι ασυνεπές.

Όπως διαπιστώνουμε από τα παραπάνω παραδείγματα, όταν ένα σύνολο προτάσεων είναι συνεπές αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον μια κατανομή αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στις σύνθετες προτάσεις του συνόλου καθιστούν τις τελευταίες ταυτόχρονα αληθείς. Θα ονομάσουμε τις κατανομές αυτές *μοντέλα* του συνόλου, οι οποίες δεν είναι τίποτα άλλο από τις κατανομές εκείνες που

ταυτόχρονα ικανοποιούν όλες τις προτάσεις του συνόλου. Στο παράδειγμα (1) πιο πάνω, το μοντέλο του συνόλου $\Sigma_1 = \{p \wedge q, \neg p \vee q\}$ είναι p είναι T , q είναι T . Με τον ίδιο τρόπο το μοντέλο του συνόλου των προτάσεων στο παράδειγμα (2), $\Sigma_2 = \{p \rightarrow q, \neg p \wedge q\}$ είναι p είναι F , q είναι T . Για το παράδειγμα (3), $\Sigma_3 = \{p \rightarrow q, q \wedge \neg r, \neg p \vee r\}$ η κατανομή p είναι F , q είναι T , r είναι F . Τέλος το παράδειγμα (4) δεν έχει καμιά κατανομή που να ικανοποιεί όλους τους προτασιακούς τύπους του συνόλου, το σύνολο δεν έχει δηλαδή κανένα μοντέλο, αφού είναι ασυνεπές.

5.2 Η Έννοια της Λογικής Εγκυρότητας

Έχοντας αναλύσει την σημασία των πινάκων αληθείας και έχοντας εξηγήσει πως κατασκευάζονται, μπορούμε τώρα να δείξουμε πως μας βοηθούν στην διάγνωση της εγκυρότητας επιχειρηματικών σχημάτων. (Θα καλούμε «επιχειρηματικά σχήματα» τα αντίστοιχα των επιχειρημάτων της φυσικής γλώσσας στη συμβολική γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού.) Στην εισαγωγή μας είχαμε αναφέρει ότι ένα επιχείρημα θεωρείται έγκυρο μόνο στην περίπτωση όπου είναι αδύνατον όλες οι προκείμενες του να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Σε λίγο θα χαρακτηρίσουμε ένα επιχείρημα έγκυρο μόνο στην περίπτωση όπου δεν επιδέχεται αντιπαράδειγμα. Οι δύο χαρακτηρισμοί είναι ισοδύναμοι. Αλλά τώρα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε αυτή την έννοια με ακρίβεια.

Ορισμός της Λογικής Εγκυρότητας:

Ένα επιχειρηματικό σχήμα είναι λογικά έγκυρο μόνο στη περίπτωση όπου δεν υπάρχει κατανομή αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές (που συνιστούν τις προτάσεις του επιχειρηματικού σχήματος) τέτοια ώστε να καθιστά όλες τις προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Η έννοια της λογικής εγκυρότητας επιχειρηματικών σχημάτων στο πλαίσιο του Προτασιακού Λογισμού μεταφέρεται και στα αντίστοιχα επιχειρήματα στο πλαίσιο της φυσικής γλώσσας. Από το ορισμό του έγκυρου επιχειρήματος συνάγεται ότι για να είναι ένα επιχείρημα άκυρο θα πρέπει να υπάρχει μια κατανομή αληθοτιμών η οποία να καθιστά τις προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Μια τέτοια κατανομή ονομάζεται αντιπαράδειγμα. Με βάση την έννοια του αντιπαραδείγματος θα μπορούσαμε επίσης να διατυπώσουμε τον ορισμό της εγκυρότητας με τον εξής τρόπο:

Ένα επιχειρηματικό σχήμα (και κατ' επέκταση ένα επιχείρημα) είναι λογικά έγκυρο μόνο στην περίπτωση όπου δεν έχει αντιπαράδειγμα.

Ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται η λογική εγκυρότητα έχει ως συνέπεια έναν αλγόριθμο (δηλαδή, μία μηχανική διαδικασία πεπερασμένης διάρκειας που θα οδηγήσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα) για την εξακρίβωση της εγκυρότητας ή ακυρότητας ενός επιχειρήματος. Εμείς στην ανάλυσή μας θα δώσουμε δύο εκδοχές αυτού του αλγόριθμου, αυτή των πινάκων αληθείας, και αυτή της έλλειψης αντιπαραδείγματος, οι οποίες όπως θα δείξουμε είναι ισοδύναμες.

Ξεκινάμε με το ακόλουθο:

Παράδειγμα 1:

Ο σκηνοθέτης του *Underground* είναι ο Κουστουρίτσα ή ο Πολάνσκι.

Δεν είναι ο Πολάνσκι.

Επομένως, είναι ο Κουστουρίτσα.

Η τυποποίηση του είναι προφανής:

$p \vee q$

$\neg q$

$\therefore p$

Αυτό το επιχειρηματικό σχήμα μπορεί να εκφράζει την δομή πολλών επιχειρημάτων της φυσικής γλώσσας (δώστε παραδείγματα). Όπως τονίσαμε στην γενική εισαγωγή μας, η εγκυρότητα είναι ιδιότητα του επιχειρηματικού σχήματος, με την έννοια ότι ένα έγκυρο επιχειρηματικό σχήμα δεν μπορεί να δώσει παρά έγκυρα επιχειρήματα και ένα άκυρο σχήμα δεν μπορεί παρά να δώσει άκυρα επιχειρήματα. Επομένως, για να δείξουμε αν ένα επιχείρημα είναι έγκυρο ή άκυρο αρκεί να βρούμε την έκφραση του σε προτασιακό σχήμα και να εξετάσουμε αν είναι έγκυρο ή άκυρο.

Ο πιο απλός τρόπος για να εξετάσουμε την εγκυρότητα ή ακυρότητα ενός επιχειρηματικού σχήματος είναι να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας όλων μαζί των προκειμένων και του συμπεράσματος του επιχειρηματικού σχήματος. Για την παραπάνω περίπτωση:

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
T	T	T	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

Έχοντας κατασκευάσει τον πίνακα αληθείας, εξετάζουμε αν υπάρχει οποιαδήποτε σειρά τέτοια ώστε όλες οι προκειμένες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. (Ψάχνουμε δηλαδή για μια αποτίμηση που να καθιστά τις προκειμένες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.) Αν δεν υπάρχει τέτοια σειρά, τότε το επιχειρηματικό σχήμα (και επομένως και το επιχείρημα) είναι έγκυρο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις: (i) όλες οι προκειμένες αληθείς και το συμπέρασμα αληθές (2^η σειρά), (ii) τουλάχιστον μια προκειμένη είναι ψευδής και το συμπέρασμα αληθές (1^η σειρά), και (iii) τουλάχιστον μια προκειμένη είναι ψευδής και το συμπέρασμα ψευδές (3^η και 4^η σειρά). Συνεπώς, δεν υπάρχει καμία σειρά στην οποία όλες οι προκειμένες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Συνεπώς, το επιχειρηματικό σχήμα $[p \vee q, \neg q, \therefore p]$ είναι *έγκυρο*. Αυτό που έχουμε στην ουσία αποδείξει είναι ότι δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα στο συγκεκριμένο επιχειρηματικό σχήμα.

Θυμηθείτε ότι η έννοια της εγκυρότητας θα πρέπει να διαχωρίζεται από την έννοια της ορθότητας του επιχειρήματος. Το προηγούμενο παράδειγμα (1) ήταν έγκυρο διότι ο επιχειρηματικό του σχήμα ήταν έγκυρο ανεξάρτητα από το περιεχόμενο των προτάσεών του, και είναι επίσης, όπως γνωρίζουμε, ορθό αφού οι προκειμένες του είναι αληθείς στον ενεργειακό κόσμο. Θυμίζουμε ότι, αυστηρά μιλώντας η έννοια της *ορθότητας* ενός επιχειρήματος δεν είναι έννοια της Λογικής. Ένα ορθό επιχείρημα είναι αυτό το οποίο είναι έγκυρο και του οποίου οι προκειμένες είναι αληθείς. Αν οι *ενδεχομενικές* προκειμένες ενός επιχειρήματος είναι αληθείς ή όχι είναι θέμα εμπειρικής και όχι λογικής εξέτασης. Το ακόλουθο παράδειγμα έχει το

ίδιο επιχειρηματικό σχήμα με το προηγούμενο, άρα είναι έγκυρο, αλλά δεν είναι, όπως γνωρίζουμε, ορθό.

Παράδειγμα 2:

Η 'Ωδή στη Χαρά' συνετέθη από τον Beethoven ή από τον Mozart.

Δεν συνετέθη από τον Beethoven.

Άρα, συνετέθη από τον Mozart.

Σημειώστε ότι το επιχειρηματικό σχήμα $[p \vee q, \neg q, \therefore p]$ και το σχήμα $[p \vee q, \neg p, \therefore q]$ είναι ίδια. Είναι και τα δύο μορφές του λεγόμενου *διαζευκτικού συλλογισμού*. Αφού αποδείξαμε στο παράδειγμα (1) ότι η πρώτη μορφή είναι έγκυρη, σημαίνει ότι και η δεύτερη μορφή είναι επίσης έγκυρη.

Έχοντας κάνει αυτές τις διευκρινίσεις, μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε πιο συστηματικά τη μέθοδο των πινάκων αληθείας στην εξακρίβωση της εγκυρότητας ή ακυρότητας μερικών επιχειρημάτων.

Παράδειγμα 3:

Αν η τηλεόραση έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα, τότε πρέπει να δείχνει πολλά ντοκιμαντέρ.

Η τηλεόραση έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα.

Επομένως, η τηλεόραση πρέπει να δείχνει πολλά ντοκιμαντέρ.

Παράδειγμα 3':

Ο Αριστοτέλης είναι φιλόσοφος.

Αν ο Αριστοτέλης είναι φιλόσοφος, τότε διαβάζει πολύ φιλοσοφία.

Επομένως, ο Αριστοτέλης διαβάζει πολύ φιλοσοφία.

Και τα δύο αυτά παραδείγματα μεταφράζονται στο προτασιακό σχήμα: $[p \rightarrow q, p, \therefore q]$

Είναι το σχήμα αυτό έγκυρο; Αναπτύσσουμε τον πίνακα αληθείας του:

p	q	$p \rightarrow q$	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Είναι προφανές, ότι δεν υπάρχει δυνατή κατάσταση (δηλαδή, σειρά του πίνακα) η οποία να έχει όλες τις προκειμένες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, και αυτό το σχήμα, το οποίο καλείται *modus ponens*, είναι έγκυρο.

Παράδειγμα 4:

Αν η Ανδριανή είναι μαθηματικός, τότε είναι φιλόσοφος. Η Ανδριανή είναι φιλόσοφος. Επομένως, η Ανδριανή είναι μαθηματικός.

Το προτασιακό του σχήμα είναι: $[p \rightarrow q, q, \therefore p]$

Είναι έγκυρο ή άκυρο; Ο πίνακας αληθείας είναι:

p	q	$p \rightarrow q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Είναι φανερό ότι η τρίτη γραμμή είναι τέτοια ώστε όλες οι προκείμενες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Συνεπώς το πιο πάνω επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο. Η τρίτη γραμμή, δηλαδή η αποτίμηση p είναι F και q είναι T, αποτελεί ένα αντιπαράδειγμα στο σχήμα αυτό.

Παράδειγμα 5:

Είναι το επιχειρηματικό σχήμα $[p \vee q, q, \therefore p]$ έγκυρο;

p	q	$p \vee q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	F
F	F	F	F	F

Και σε αυτή την περίπτωση, η τρίτη σειρά (δηλαδή στη αποτίμηση p είναι F και q είναι T), η οποία έχει όλες τις προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές, αποτελεί ένα αντιπαράδειγμα. Αυτό το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο.

Θα λέμε, λοιπόν, ότι ένα επιχείρημα εκφρασμένο στη φυσική γλώσσα (όπου στη δική μας περίπτωση είναι η Ελληνική) είναι έγκυρο αν η συμβολική ή τυπική μορφή του, δηλαδή η αναπαράσταση του σε σχήμα του Προτασιακού Λογισμού, είναι έγκυρη με την έννοια που ορίστηκε παραπάνω.

5.3 Αυστηρότερες Διαδικασίες Απόφασης Λογικής Εγκυρότητας ή Ακυρότητας

Έχοντας αναλύσει το τι σημαίνει για ένα επιχειρηματικό σχήμα να είναι έγκυρο, θα δείξουμε ότι υπάρχουν αυστηρές μέθοδοι για να αποφασίσουμε αν ένα αυθαίρετο επιχειρηματικό σχήμα, που είναι εκφρασμένο στη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού, είναι έγκυρο. Οι μέθοδοι που θα εισαγάγουμε έχουν το χαρακτηριστικό ότι είναι *αλγοριθμικοί*. Δηλαδή μπορούν να εφαρμοστούν σε πεπερασμένο χρόνο σε κάθε επιχείρημα και *εγγυώνται* ότι αν το επιχείρημα είναι έγκυρο θα δείξουν ότι είναι έγκυρο και αν είναι άκυρο θα δείξουν ότι είναι άκυρο. Οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν από ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή. Με αυτή την έννοια, τέτοιες μέθοδοι λέγονται και «μηχανικές διαδικασίες απόφασης». Παραθέτουμε δύο από αυτές τις μεθόδους με τις οποίες μπορούμε να ελέγξουμε την εγκυρότητα.

5.3.1 Η Μέθοδος των Πινάκων Αληθείας

Η μέθοδος αυτή είναι προέκταση των όσων είπαμε στην προηγούμενη ενότητα. Είδαμε ήδη ότι ένα επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο μόνο στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει κατανομή τιμών αληθείας στις προκειμένες και στο συμπέρασμα τέτοια ώστε όλες οι προκειμένες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Ο συστηματικός τρόπος για να διαπιστώσουμε την εγκυρότητα αποτελείται από τα κάτωθι βήματα:

Ξεκινάμε με ένα επιχειρηματικό σχήμα του οποίου θέλουμε να εξετάσουμε την εγκυρότητα, π.χ. $[p \rightarrow q, p, \therefore q]$.

1. Κατασκευάζουμε την *σχετική συνεπαγωγή* του επιχειρηματικού σχήματος. Αυτή είναι μία *μοναδική* συνεπαγωγή της οποίας η ηγούμενη είναι η σύζευξη όλων των προκειμένων του επιχειρηματικού σχήματος και η επόμενη είναι το συμπέρασμα του επιχειρηματικού σχήματος. Έτσι, η *σχετική συνεπαγωγή* για το παραπάνω επιχειρηματικό σχήμα είναι: $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$.
2. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας για την σχετική συνεπαγωγή:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

3. Εξετάζουμε αν η σχετική συνεπαγωγή είναι *ταυτολογία* ή όχι.

Αν η σχετική συνεπαγωγή είναι ταυτολογία τότε το επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο. Αν δεν είναι ταυτολογία, τότε το επιχείρημα είναι άκυρο. Είναι προφανές ότι η εγκυρότητα ή ακυρότητα μεταφέρεται και στο επιχείρημα από το οποίο προέκυψε το εν λόγω επιχειρηματικό σχήμα.

Συνεπώς, μελετώντας τον ανωτέρω πίνακα, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι το εν λόγω επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο, όπως αναμέναμε.

Ακολουθούν παραδείγματα επιχειρηματικών σχημάτων όπου στη προσπάθεια εξακρίβωσης της εγκυρότητας τους εφαρμόζεται ο ποιο πάνω κανόνας:

Παράδειγμα 1: $[p \rightarrow q, \neg p, \therefore \neg q]$

Σχετική συνεπαγωγή: $((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T

Αφού η $((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$ δεν είναι ταυτολογία, το επιχειρηματικό σχήμα δεν είναι έγκυρο. Πράγματι, η τρίτη σειρά του πίνακα μας δείχνει μια κατανομή τιμών αληθείας στον πίνακα τέτοια ώστε η σύζευξη των προκειμένων $((p \rightarrow q) \wedge \neg p)$ είναι αληθής και το συμπέρασμα $\neg q$ ψευδές. Το αντιπαράδειγμα είναι: $\sigma(p)=F, \sigma(q)=T$.

Είναι φανερό γιατί αυτή η διαδικασία απόφασης είναι αλγοριθμική και πάντοτε εγγυάται μια κατάληξη. Από την στιγμή που ένας πίνακας αληθείας έχει πάντοτε ένα πεπερασμένο αριθμό σειρών (ο αριθμός αυτός είναι 2^n όπου n είναι ο αριθμός των προτασιακών μεταβλητών), η διαδικασία απόφασης ενέχει μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Παράδειγμα 2:

Είναι το επιχειρηματικό σχήμα $[p, \therefore p \vee q]$ έγκυρο;

Σχετική συνεπαγωγή: $p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

Επομένως, το επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο.

Παράδειγμα 3:

Είναι το επιχειρηματικό σχήμα $[p, \neg p, \therefore q]$ έγκυρο;

Σχετική συνεπαγωγή: $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$

p	$\neg p$	q	$p \wedge \neg p$	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T

Επομένως, το επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο.

Προσέξτε ότι στο παράδειγμα (3) η σύζευξη των προκειμένων συνιστά μία λογική αντίφαση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εγκυρότητα του επιχειρηματικού σχήματος. Αυτή η διαπίστωση, για ευνόητους λόγους που σχετίζονται με τον ορισμό της εγκυρότητας, θα μπορούσε να γενικευθεί: *Αν η σύζευξη των προκειμένων συνιστά λογική αντίφαση τότε το σχετικό επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο.* Με άλλα λόγια, μια λογική αντίφαση συνεπάγεται οποιοδήποτε συμπέρασμα, π.χ. τόσο την πρόταση X όσο και την $\neg X$. Αυτή η θέση αποτελεί τον βασικό νόμο της Λογικής.

5.3.2 Η Μέθοδος της Έλλειψης Αντιπαράδειγματος

Η πρώτη μέθοδος έχει το μειονέκτημα ότι είναι πολύ χρονοβόρα, ιδιαίτερα όταν το επιχείρημα είναι σύνθετο. Γι' αυτό είναι πολλές φορές χρήσιμο να χρησιμοποιούμε μια έμμεση μέθοδο απόδειξης, την γνωστή *απαγωγή σε άτοπο*: για να αποδείξουμε ότι ισχύει το X υποθέτουμε το $\neg X$ και οδηγούμαστε σε άτοπο. Για τους δικούς μας σκοπούς στη συγκεκριμένη περίπτωση, η εις άτοπον απαγωγή εφαρμόζεται με το εξής τρόπο: υποθέτουμε ότι ένα επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο, δηλαδή ότι έχει τουλάχιστον ένα αντιπαράδειγμα. Αν αποτύχουμε να κατασκευάσουμε το αντιπαράδειγμα, τότε απορρέει λογικά ότι το αρχικό μας επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο. Η ιδέα είναι απλή. Αν ένα επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο, τότε θα υπάρχει μια κατανομή τιμών αληθείας τέτοια ώστε όλες οι

προκειμένες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Υποθέτουμε τότε ότι το συμπέρασμα είναι ψευδές. Στην συνέχεια, με συστηματικό τρόπο καταθέτουμε τιμές αληθείας στις προκειμένες. Αν ακολουθήσουμε αυτή την διαδικασία, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: Πρώτον, ανακαλύπτουμε μια κατανομή τιμών αληθείας τέτοια ώστε όλες οι προκειμένες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Σε αυτή την περίπτωση, το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο. Δεύτερον, δεν μπορούμε να καταθέτουμε τιμές αληθείας έτσι ώστε το επιχειρηματικό σχήμα να έχει ψευδές συμπέρασμα και όλες τις προκειμένες αληθείς. Σε αυτή την περίπτωση, απορρίπτουμε την αρχική μας υπόθεση, ότι δηλαδή το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο. Και αφού δεν είναι άκυρο, είναι έγκυρο.

Παράδειγμα 4:

Είναι το επιχειρηματικό σχήμα $[p \rightarrow q, q, \therefore p]$ έγκυρο;

Ας υποθέσουμε ότι το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο. Τότε το συμπέρασμα μπορεί να είναι ψευδές και όλες οι προκειμένες προτάσεις να είναι αληθείς. Αφού λοιπόν το συμπέρασμα είναι το p , το p είναι ψευδές. Μία από τις προκειμένες είναι η q . Η q είναι αληθής ή ψευδής. Αλλά αφού η q είναι μια προκειμένη –και θέλουμε να εξετάσουμε αν όλες οι προκειμένες μπορεί να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές– υποθέτουμε ότι η q είναι αληθής. Άρα η μια προκειμένη, με βάση την υπόθεσή μας, είναι αληθής. Πάμε στην άλλη προκειμένη: $p \rightarrow q$. Αφού έχουμε υποθέσει ότι το συμπέρασμα p είναι ψευδές, διατηρούμε την τιμή αληθείας F για το p (αυτό είναι στοιχειώδες θέμα συνέπειας). Αφού λοιπόν η p είναι ψευδής, τότε ότι και να είναι η q , η συνεπαγωγή $p \rightarrow q$ θα είναι αληθής (Αυτό, όπως εύκολα μπορείτε να εξακριβώσετε, έπεται από τον πίνακα αληθείας για την συνεπαγωγή). Συνεπώς και η άλλη προκειμένη είναι αληθής. Συνεπώς, το επιχειρηματικό σχήμα είναι τέτοιο ώστε να μπορεί να έχει όλες τις προκειμένες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Άρα το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο. Αυτό το αποδείξαμε κατασκευάζοντας ένα αντιπαράδειγμα. Το συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα είναι η αποτίμηση p είναι F και q είναι T .

Παράδειγμα 5:

Είναι το επιχειρηματικό σχήμα $[p \rightarrow q, p, \therefore q]$ έγκυρο;

Έχουμε ήδη αποδείξει με την μέθοδο των πινάκων αληθείας ότι αυτό το επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο. Για να το αποδείξουμε με την μέθοδο της έλλειψης αντιπαράδειγματος, υποθέτουμε ότι είναι άκυρο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι το συμπέρασμα μπορεί να είναι ψευδές και όλες οι προκειμένες είναι αληθείς. Αφού λοιπόν το συμπέρασμα είναι η q , η q είναι ψευδής. Η μια από τις προκειμένες είναι η p . Η p είναι αληθής ή ψευδής. Αλλά αφού η p είναι μια προκειμένη –και θέλουμε να εξετάσουμε αν όλες οι προκειμένες μπορεί να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές– υποθέτουμε ότι η p είναι αληθής. Άρα η μια προκειμένη p είναι αληθής. Προχωράμε στην άλλη προκειμένη την $p \rightarrow q$. Αφού έχουμε υποθέσει ότι το συμπέρασμα q είναι ψευδές, διατηρούμε την τιμή αληθείας F για το q . Αφού λοιπόν η q είναι ψευδής και αφού μόλις δεχθήκαμε ότι η p είναι αληθής, τότε η συνεπαγωγή $p \rightarrow q$ θα είναι (σύμφωνα με τον πίνακα αληθείας της) ψευδής. Συνεπώς η άλλη προκειμένη είναι ψευδής. Συνεπώς, το επιχειρηματικό σχήμα είναι τέτοιο ώστε να μην μπορεί να έχει όλες τις προκειμένες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Άρα το επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο. Αυτό το αποδείξαμε δείχνοντας ότι δεν επιδέχεται αντιπαράδειγμα.

Η μέθοδος της έλλειψης αντιπαραδείγματος δεν είναι πολύ πιο αποτελεσματική από την πρώτη μέθοδο όταν πρόκειται για προτασιακούς τύπους με συστατικά δύο μόνο προτασιακές μεταβλητές. Η μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα της φαίνεται όταν εξετάσουμε πιο σύνθετα επιχειρηματικά σχήματα και αντιστοίχως πιο σύνθετα επιχειρήματα.

Παράδειγμα 6:

«Αν θα μείνω στο σπίτι τότε είτε θα μελετήσω είτε θα έρθουν οι φίλοι μου, και αν θα μελετήσω ή θα έρθουν οι φίλοι μου τότε θα μείνω στο σπίτι. Αν θα μελετήσω, τότε θα έρθουν οι φίλοι μου. Και αν έρθουν οι φίλοι μου, τότε θα μείνω σπίτι. Αλλά ή θα μείνω σπίτι ή θα μελετήσω. Επομένως, αν μείνω στο σπίτι, τότε θα μελετήσω.»

Η τυποποιημένη μορφή αυτού του επιχειρήματος είναι:

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow (q \vee r)) \wedge ((q \vee r) \rightarrow p) \\ & \quad q \rightarrow r \\ & \quad r \rightarrow p \\ & \quad p \vee q \\ & \therefore p \rightarrow q \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα είναι *ψευδές*. Άρα $p \rightarrow q$ είναι F. Άρα (από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής) p είναι T, και q είναι F. Με βάση αυτή τη κατανομή αληθοτιμών στην p και στην q αναλύουμε τις προκείμενες. Από τον πίνακα αληθείας της διάζευξης συνάγεται ότι η τέταρτη προκείμενη του επιχειρήματος, δηλαδή ο $p \vee q$, είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι η *πρώτη* προκείμενη, ο $(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge ((q \vee r) \rightarrow p)$, είναι αληθής. Αφού η p είναι αληθής, ο $(q \vee r)$ πρέπει επίσης να είναι αληθής (από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής). Και αφού η q είναι ψευδής, τότε η r πρέπει να είναι αληθής (από τον πίνακα αληθείας της διάζευξης). Η *δεύτερη* προκείμενη, ο $q \rightarrow r$, είναι αληθής, αφού η q είναι ψευδής και η r είναι αληθής (από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής). Αν και η *τρίτη* προκείμενη, ο $r \rightarrow p$, μπορεί να είναι και αυτή αληθής, τότε το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο. Ο $r \rightarrow p$ μπορεί όντως να είναι αληθής αφού η r είναι αληθής και η p είναι αληθής όπως φαίνεται από τις κατανομές αληθοτιμών που προηγήθηκαν. Άρα, το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο (και επομένως το αντίστοιχο επιχείρημα είναι άκυρο), αφού όπως δείξαμε μπορεί να έχει όλες τις προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Το αντιπαραδείγμα που δείξαμε είναι: p είναι T, q είναι F, r είναι T. Υπάρχει μήπως άλλο αντιπαραδείγμα σε αυτό το επιχειρηματικό σχήμα; Εξετάστε το.

Παράδειγμα 7:

«Αν τα νέα αυτοκίνητα έχουν μεγαλύτερη παθητική ασφάλεια, τότε αν συμβεί ατύχημα, οι επιβαίνοντες έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να επιζήσουν. Αλλά αν συμβεί ατύχημα, τότε αν τα νέα αυτοκίνητα έχουν μεγαλύτερη παθητική ασφάλεια, οι επιβαίνοντες έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να επιζήσουν. Επομένως, αν τα νέα αυτοκίνητα έχουν μεγαλύτερη παθητική ασφάλεια ή συμβεί ατύχημα, τότε οι επιβαίνοντες έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να επιζήσουν.»

Η τυποποιημένη μορφή αυτού του επιχειρήματος είναι:

$$\begin{aligned} & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ & \quad q \rightarrow (p \rightarrow r) \\ & \therefore (p \vee q) \rightarrow r \end{aligned}$$

Είναι αυτό το επιχειρηματικό σχήμα έγκυρο;

Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα είναι ψευδές. Άρα η $(p \vee q) \rightarrow r$ είναι ψευδής. Άρα, από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής, $p \vee q$ είναι T και r είναι F. Η $p \vee q$ είναι αληθής αν η p ή η q είναι αληθείς. Συνεπώς, εδώ πρέπει να εξετάσουμε τις δυνατές περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: r είναι F, p είναι T, q είναι F

2^η περίπτωση: r είναι F, p είναι F, q είναι T

3^η περίπτωση: r είναι F, p είναι T, q είναι T

Εξετάζουμε αν σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, όλες οι προκείμενες μπορούν να είναι αληθείς.

1^η περίπτωση: r είναι F, p είναι T, q είναι F

Η πρώτη προκείμενη μπορεί να είναι αληθής. Αφού από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής βλέπουμε ότι η $(q \rightarrow r)$ είναι αληθής, και αφού η p είναι αληθής τότε και η $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ είναι αληθής.

Η δεύτερη προκείμενη μπορεί επίσης να είναι αληθής, όπως φαίνεται από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής.

Αφού έχουμε ήδη βρει ένα αντιπαράδειγμα, δηλαδή μια κατανομή τιμών αληθείας στις προτασιακές μεταβλητές η οποία είναι τέτοια ώστε όλες οι προκείμενες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές, συμπεραίνουμε ότι το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο. Με άλλα λόγια, δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τις άλλες περιπτώσεις (είναι σημαντικό όμως για εξάσκηση ο/η αναγνώστης/ρια να εξετάσει μόνος/η τις υπόλοιπες περιπτώσεις για να βρει αν υπάρχουν άλλα αντιπαράδειγματα).

Παρά το γεγονός ότι η μέθοδος της έλλειψης αντιπαράδειγματος δια της ατόπου απαγωγής είναι πιο ταχεία από την μέθοδο των πινάκων αληθείας (τουλάχιστον για πολυσύνθετους προτασιακούς τύπους), εντούτοις έχει και αυτή τις πρακτικές αδυναμίες και τα μειονεκτήματά της. Ένα τέτοιο μειονέκτημα (που βγάζει στην επιφάνεια το τελευταίο μας παράδειγμα) είναι ότι στην περίπλοκη διαδικασία εξέτασης όλων των δυνατών συνδυασμών αληθοτιμών είναι σαφώς δύσκολο να θυμάται κανείς αν όλα τα ενδεχόμενα κατανομής αληθοτιμών έχουν εξαντληθεί. Στη προσπάθεια να ξεπεραστεί και αυτό το πρόβλημα οι Λογικοί έχουν επινοήσει άλλες μεθόδους λογικών υπολογισμών τους οποίους ωστόσο δεν εξετάζουμε εδώ λόγω της πολυπλοκότητάς τους. Αν και πολύπλοκοι είναι ωστόσο πιο εύχρηστοι για σύνθετα επιχειρήματα από τους πίνακες αληθείας και τη μέθοδο του αντιπαράδειγματος.

5.5 Σχέση συνέπειας και εγκυρότητας

Υπάρχει μια βαθιά σχέση μεταξύ των εννοιών της συνέπειας και της εγκυρότητας, την οποία πρόκειται τώρα να διερευνήσουμε. Ένα επιχειρήμα, έχουμε ήδη τονίσει, είναι μια ακολουθία προτάσεων τέτοια ώστε οι προτάσεις που θεωρούνται προκείμενες του επιχειρήματος να οδηγούν λογικά στην πρόταση που θεωρείται συμπέρασμα. Ειδικότερα, ένα επιχειρήμα είναι αληθοσυναρτησιακά έγκυρο μόνο στην περίπτωση όπου δεν είναι δυνατό όλες οι προκείμενες του να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Έχουμε επίσης τονίσει ότι μια ακολουθία προτάσεων είναι λογικά συνεπής μόνο στην περίπτωση όπου όλες οι προτάσεις της ακολουθίας είναι δυνατόν να είναι ταυτόχρονα αληθείς. Τι μπορούμε να συναγάγουμε από αυτά;

Ας μιλήσουμε στο επίπεδο του Προτασιακού Λογισμού για τα αντίστοιχα των επιχειρημάτων επιχειρηματικά σχήματα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα έγκυρο

επιχειρηματικό σχήμα τέτοιο ώστε οι προκείμενες να είναι οι προτάσεις P και Q και συμπέρασμα η R (όπου οι P, Q και R μπορεί να είναι οποιοσδήποτε σύνθετες προτάσεις ή προτασιακές μεταβλητές). Όταν λέμε ότι ένα επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο, δεν εννοούμε ότι όλες οι προτάσεις του μπορούν να είναι αληθείς. Αξιωνούμε κάτι ισχυρότερο, δηλαδή ότι το συμπέρασμα έπεται *αναγκαία* από τις προκείμενες. Ισχυριζόμαστε δηλαδή ότι η σύζευξη των προκείμενων $P \wedge Q$ του επιχειρηματικού σχήματος και η άρνηση του συμπεράσματος του $\neg R$ δεν είναι συνεπείς μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, τονίζουμε ότι η ακολουθία των προκείμενων του επιχειρηματικού σχήματος και η άρνηση του συμπεράσματος του δεν είναι δυνατόν να είναι ταυτόχρονα όλες αληθείς. Συνεπώς, η σχέση μεταξύ εγκυρότητας και συνέπειας είναι η εξής:

Αν ένα επιχειρηματικό σχήμα $[P, Q, \therefore R]$ είναι έγκυρο, τότε το σύνολο των προτασιακών τύπων $\{P, Q, \neg R\}$ είναι ασυνεπές. Και αντιστρόφως, αν ένα σύνολο προτασιακών τύπων $\{P, Q, \neg R\}$ είναι ασυνεπές, τότε το επιχειρηματικό σχήμα $[P, Q, \therefore R]$ είναι έγκυρο.

Στην πραγματικότητα μπορούμε να γενικεύσουμε την σχέση που μόλις περιγράψαμε σε ένα αυθαίρετο αριθμό προκείμενων ενός επιχειρηματικού σχήματος. Η ουσία είναι ότι ένα επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο μόνο στην περίπτωση όπου το σύνολο το οποίο συνίσταται από τις προκείμενες του και την άρνηση του συμπεράσματος του είναι ασυνεπές.

προτασιακός τύπος τόσο ο οποιοσδήποτε τύπος R όσο και η άρνηση του $\neg(R)$.

5.6 Βασικά Έγκυρα Επιχειρηματικά Σχήματα και Λογικές Πλάνες

Μπορούμε τώρα να συγκεντρώσουμε μαζί (και να ονομάσουμε) τα βασικά έγκυρα επιχειρηματικά σχήματα και τις συνήθεις λογικές πλάνες. (Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι κεφαλαία γράμματα P, Q, R, κ.ο.κ. ώστε να είναι φανερό ότι αναφερόμαστε σε προτασιακές μεταβλητές ή σύνθετες προτάσεις.)

(1) Διαζευκτικός συλλογισμός: $[P \vee Q, \neg Q, \therefore P]$

Η εγκυρότητα του διαζευκτικού συλλογισμού βασίζεται στο γεγονός ότι η πρώτη προκείμενη παρουσιάζει δύο εξαντλητικές και αμοιβαία αποκλειόμενες επιλογές ενώ η δεύτερη προκείμενη αποκλείει μια από τις δύο, αφήνοντας την άλλη ως συμπέρασμα. Αυτή η λεγόμενη «μέθοδος εξάλειψης» είναι ουσιαστική για την εγκυρότητα του συλλογισμού. Ωστόσο αν η μια προκείμενη παρουσιάζει δύο επιλογές και η δεύτερη προκείμενη απλά επιβεβαιώνει την μια από τις δύο, τότε το επιχειρηματικό σχήμα είναι άκυρο. Επομένως, το επιχειρηματικό σχήμα $[P \vee Q, Q, \therefore P]$ είναι άκυρο, και το γεγονός ότι διαισθητικά συνήθως κρίνεται ως έγκυρο αποτελεί μια πλάνη.

(2) Υποθετικός συλλογισμός: $[P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \therefore P \rightarrow R]$

Η εγκυρότητα του υποθετικού συλλογισμού στηρίζεται στο γεγονός ότι οι προκείμενες σχηματίζουν μια «αλυσίδα». Η επόμενη της πρώτης προκείμενης είναι η ηγούμενη της δεύτερης. Ωστόσο αν οι προκείμενες δεν σχηματίζουν τέτοια αλυσίδα, τότε το επιχείρημα είναι άκυρο. Επομένως, το επιχειρηματικό σχήμα $[P \rightarrow Q, R \rightarrow Q,$

$\therefore P \rightarrow R$] είναι άκυρο, και το γεγονός ότι διαισθητικά συνήθως κρίνεται ως έγκυρο αποτελεί μια πλάνη.

(3) *Modus Ponens*: $[P \rightarrow Q, P, \therefore Q]$

Ο *modus ponens* (που συναντήσαμε νωρίτερα) είναι ο βασικός λογικός συμπερασματικός κανόνας. Η εγκυρότητά του είναι προφανής. Συγκρίνατε τον *modus ponens* με το ακόλουθο επιχειρηματικό σχήμα: $[P \rightarrow Q, Q, \therefore P]$ το οποίο έχουμε ήδη αποδείξει ότι είναι άκυρο, και το γεγονός ότι διαισθητικά συνήθως κρίνεται ως έγκυρο αποτελεί μια πλάνη. Συνήθως αποκαλείται *πλάνη της βεβαίωσης της επόμενης* (ή *πλάνη της βεβαίωσης του συμπεράσματος*). Στενά συνδεδεμένος με τον *modus ponens* είναι ο *modus tollens*.

(4) *Modus Tollens*: $[P \rightarrow Q, \neg Q, \therefore \neg P]$

Ο *modus tollens* είναι προφανώς έγκυρος. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο *modus tollens* ανάγεται στον *modus ponens* αν αντικαταστήσουμε την πρώτη προκειμένη του με τον ισοδύναμο προτασιακό τύπο: $\neg Q \rightarrow \neg P$. Συγκρίνατε τον *modus tollens* με το ακόλουθο επιχειρηματικό σχήμα: $[P \rightarrow Q, \neg P, \therefore \neg Q]$ το οποίο είναι άκυρο, και το γεγονός ότι διαισθητικά συνήθως κρίνεται ως έγκυρο αποτελεί μια πλάνη. Είναι η πλάνη της άρνησης της ηγούμενης.

(5) Δημιουργικό δίλημμα: $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S), P \vee R, \therefore Q \vee S]$.

Για να δείξετε ότι αυτό το επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο, χρησιμοποιείτε πίνακες αληθείας.

(6) Καταστροφικό δίλημμα: $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S), \neg Q \vee \neg S, \therefore \neg P \vee \neg R]$.

Για να δείξετε ότι αυτό το επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο, χρησιμοποιείτε πίνακες αληθείας.

Και τα δύο διλήμματα έχουν πολλές εφαρμογές στην φυσική γλώσσα.

Παράδειγμα δημιουργικού διλήμματος:

«Αν το ταξίδι του Μπους στην Ελλάδα ματαιωθεί λόγω των διαδηλώσεων τότε η Ελλάδα θα χάσει μια ευκαιρία να διαπραγματευθεί απ' ευθείας με την Αμερική. Αλλά αν επιτραπεί στον Μπους να έρθει στην Ελλάδα, τότε η Ελλάδα θα υποδεχθεί τον 'σφαγέα' του Ιράκ. Το ταξίδι του Μπους θα ματαιωθεί ή ο Μπους θα έρθει στην Ελλάδα. Άρα, η Ελλάδα θα χάσει μια ευκαιρία να διαπραγματευθεί απ' ευθείας με την Αμερική ή η Ελλάδα θα υποδεχθεί τον 'σφαγέα' του Ιράκ.»

Παράδειγμα καταστροφικού διλήμματος:

«Αν θέλουμε να αποτρέψουμε το φαινόμενο του θερμοκηπίου, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πυρηνική ενέργεια. Αλλά αν θέλουμε να μειώσουμε τον κίνδυνο πυρηνικών ατυχημάτων, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πιο συμβατικές μορφές ενέργειας. Θα αποφύγουμε την χρήση πυρηνικής ενέργειας ή θα αποφύγουμε την χρήση πιο συμβατικών μορφών ενέργειας. Επομένως, δεν θα αποτρέψουμε το φαινόμενο του θερμοκηπίου ή δεν πρέπει να χρησιμοποιούμε πιο συμβατικές μορφές ενέργειας.»

Πως αντιμετωπίζονται επιχειρήματα όπως αυτά των παραπάνω παραδειγμάτων; Αφού είναι έγκυρα, πρέπει να αμφισβητηθεί η ορθότητά τους. Και αυτό γίνεται με δύο τρόπους. Είτε με το να αμφισβητηθεί η αλήθεια της συζευκτικής προκειμένης είτε με το να αμφισβητηθεί η αλήθεια της διαζευκτικής προκειμένης. Για

να αμφισβητηθεί η αλήθεια της συζευκτικής προκείμενης, αρκεί να αμφισβητηθεί η αλήθεια τουλάχιστον ενός εκ των δύο συστατικών της σύζευξης. Για να αμφισβητηθεί η αλήθεια της διαζευκτικής προκείμενης, πρέπει να αμφισβητηθεί η αλήθεια και των δύο συστατικών της. Δηλαδή πρέπει να δειχθεί ότι η διάζευξη δεν είναι εξαντλητική, αλλά ότι υπάρχει και τρίτη εναλλακτική λύση. Ως άσκηση εφαρμόστε την παραπάνω τακτική στα παραδείγματα που προαναφέρθηκαν.

Ασκήσεις 5

1. Απαντήστε με «σωστό» ή «λάθος» στις παρακάτω προτάσεις:

- (α) Η άρνηση μιας ταυτολογίας είναι ένας ενδεχομενικός προτασιακός τύπος.
- (β) Οι ταυτολογίες είναι αναγκαία ψευδείς.
- (γ) Τα ενδεχόμενα μπορούν να είναι ψευδείς προτασιακοί τύποι.
- (δ) Η άρνηση μιας αντίφασης είναι ταυτολογία.
- (ε) Οι αντιφάσεις είναι αληθείς σε όλες τις δυνατές καταστάσεις.
- (στ) Ένα επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο, αλλά μπορεί να επιδέχεται αντιπαραδείγματα.
- (ζ) Οι ταυτολογίες είναι κενές πληροφοριακού περιεχομένου.
- (η) Το επιχειρηματικό σχήμα $[p \rightarrow q, q, \therefore p]$ είναι έγκυρο.
- (θ) Ένα επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο μόνο αν όλες οι αληθοτιμές στον πίνακά της σχετικής συνεπαγωγής του είναι T.

2. Εξετάστε τα ακόλουθα επιχειρήματα. Είναι έγκυρα;

(α) «Η Βραζιλία έχει ένα τεράστιο εξωτερικό χρέος. Επομένως, η Βραζιλία ή η Αργεντινή έχουν ένα τεράστιο εξωτερικό χρέος.»

(β) «Αν οι εθνικές εκλογές κρίνονται από το πόσο καλές εμφανίσεις κάνουν οι υποψήφιοι στα μέσα μαζικής ενημέρωσης, τότε το πολιτικό επίπεδο των εκλογικών αναμετρήσεων θα πέσει. Όμως, το πολιτικό επίπεδο των εκλογικών αναμετρήσεων δεν πέφτει. Επομένως, οι εθνικές εκλογές δεν κρίνονται από το πόσο καλές εμφανίσεις κάνουν οι υποψήφιοι στα μέσα μαζικής ενημέρωσης.»

(γ) Το επόμενο επιχείρημα είναι εμφανώς έγκυρο. Αποδείξτε το κατασκευάζοντας τον πίνακα αληθείας του.

«Αν η κατανάλωση καυσίμων συνεχιστεί με τους ίδιους ρυθμούς, τότε το φαινόμενο του θερμοκηπίου είναι αναπόφευκτο. Και αν το φαινόμενο του θερμοκηπίου συμβεί, τότε η θερμοκρασία του πλανήτη θα ανέβει κι' άλλο. Επομένως, αν η κατανάλωση καυσίμων συνεχιστεί με τους ίδιους ρυθμούς, τότε η θερμοκρασία του πλανήτη θα ανέβει κι' άλλο.»

3. Χρησιμοποιώντας πίνακες αληθείας δείξτε αν τα παρακάτω επιχειρηματικά σχήματα είναι έγκυρα ή όχι, εκεί όπου δεν είναι δώστε όλα τα αντιπαραδείγματα:

- (α) $[p \vee q, \therefore p]$
- (β) $[p, \therefore p \wedge q]$
- (γ) $[p \wedge q, \therefore p \rightarrow q]$
- (δ) $[p \rightarrow \neg p, \therefore p \vee q]$
- (ε) $[p \rightarrow (q \wedge r), p, \therefore \neg (q \rightarrow \neg r)]$

4. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του αντιπαραδείγματος ή την μέθοδο των πινάκων αληθείας δείξτε αν τα παρακάτω επιχειρήματα και επιχειρηματικά σχήματα είναι έγκυρα ή όχι.

(α) $[p \vee q, \neg q, \therefore p]$.

(β) «Αν αντιμετωπιστεί η ανεργία, τότε οι νέοι άνθρωποι θα βρίσκουν πιο εύκολα δουλειά. Και αν αντιμετωπιστεί η ανεργία και οι νέοι άνθρωποι βρίσκουν πιο εύκολα δουλειά, τότε οι νέοι άνθρωποι θα είναι πιο ευτυχισμένοι. Αν αντιμετωπιστεί η ανεργία, τότε αν οι νέοι άνθρωποι θα είναι πιο ευτυχισμένοι, θα είναι επίσης και δημιουργικοί. Επομένως, αν αντιμετωπιστεί η ανεργία, τότε οι νέοι άνθρωποι θα είναι πιο δημιουργικοί.»

5. Χρησιμοποιώντας πίνακες αληθείας δείξτε αν τα παρακάτω επιχειρηματικά σχήματα είναι έγκυρα ή όχι. Εκεί όπου δεν είναι δώστε όλα τα αντιπαραδείγματα:

(α) $[p \rightarrow q, p \vee q, \therefore q]$

(β) $[(p \wedge q) \rightarrow \neg p, p, \therefore \neg p \vee \neg q]$

(γ) $[p \rightarrow (q \wedge r), p, \therefore \neg(q \rightarrow \neg r)]$

(δ) $[\neg(p \vee q), \therefore \neg q]$

(ε) $[(p \wedge q) \rightarrow r, \therefore (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$

(στ) $[p \vee q, \therefore \neg p \rightarrow q]$

(η) $[p \wedge q, \therefore \neg(\neg p \vee \neg q)]$

(θ) $[(p \wedge q) \rightarrow r, \therefore (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$

(ι) $[\neg p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \therefore r \rightarrow p]$

(κ) $[p \rightarrow (q \wedge r), p, \therefore \neg(q \rightarrow \neg r)]$

6. Χρησιμοποιήστε την μέθοδο των πινάκων αληθείας για να εξετάσετε αν τα παρακάτω σύνολα προτάσεων είναι συνεπή ή όχι, εκεί όπου είναι δώστε όλα τα μοντέλα:

(α) $\Sigma = \{p \wedge q, \neg p \rightarrow \neg q\}$

(β) $\Sigma = \{p \wedge q, p \vee q\}$

(γ) $\Sigma = \{\neg(p \wedge r), p \rightarrow \neg q, q \vee r\}$

(δ) $\Sigma = \{p \wedge q, r\}$

(ε) $\Sigma = \{p \wedge q, p \vee q\}$

(στ) $\Sigma = \{\neg(p \wedge r), p \rightarrow \neg q, q \vee r\}$

(η) $\Sigma = \{p \rightarrow q, \neg p \wedge q, (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \wedge q)\}$

(θ) $\Sigma = \{p \vee \neg q, p \wedge q, \neg p \wedge \neg q\}$

7. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω ‘ιστορίες’ είναι συνεπείς, και εκεί όπου είναι δώστε όλα τα μοντέλα:

(α) Αν τα μαλακά ναρκωτικά πρέπει να νομιμοποιηθούν μόνο αν είναι ακίνδυνα, τότε θα αυξηθεί η χρήση τους. Αλλά αν τα μαλακά ναρκωτικά πρέπει να νομιμοποιηθούν, τότε αν είναι ακίνδυνα θα αυξηθεί η χρήση τους.

(β) Το ισοζύγιο πληρωμών θα μειωθεί αν τα επιτόκια παραμείνουν σταθερά. Όμως, δεν ισχύει ότι τα επιτόκια δεν θα παραμείνουν σταθερά ή ότι το ισοζύγιο πληρωμών θα μειωθεί.

8. Χρησιμοποιήστε πίνακες αληθείας για να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις:

(α) Η Χριστίνα και ο Γιάννης έχουν την ακόλουθη συζήτηση για το βραδινό τους πλάνο.

Χριστίνα: «Αν δεν μ' αγαπάς, τότε δεν θα κάνουμε έρωτα το βράδυ.»
Γιάννης: «Άρα, αυτό σημαίνει ότι αν σ' αγαπώ, τότε θα κάνουμε έρωτα το βράδυ.»
Έχει δίκιο ο Γιάννης; Κατάλαβε καλά τι του είπε η Χριστίνα;

(β) Ένας πολιτικός κάνει την παρακάτω δήλωση στον τύπο:
«Η μείωση των φόρων είναι εφικτή μόνο αν δεν ανέβουν οι δαπάνες για την παιδεία και καταργηθεί το κράτος πρόνοιας ή η μείωση των φόρων είναι εφικτή και είτε το κράτος πρόνοιας δεν θα καταργηθεί είτε οι δαπάνες για την παιδεία θα αυξηθούν.» Τι είναι το λογικό περιεχόμενο αυτών που μας έχει πει ο πολιτικός για την μείωση των φόρων;

(γ) Η Αλίκη και η Καίτη είναι αυτόπτες μάρτυρες σε ένα φόνο. Η Αλίκη κατέθεσε ότι αν ο Μιχάλης σκότωσε το θύμα, τότε ο Χρίστος ήταν συνένοχος και η Μαρία δεν είχε καμία ανάμειξη. Η Καίτη κατέθεσε ότι ο Χρήστος δεν ήταν συνένοχος και αν ο Μιχάλης δεν σκότωσε το θύμα, τότε η Μαρία είχε αναμειχθεί στον φόνο. Υποθέτοντας ότι και η Αλίκη και η Καίτη λένε την αλήθεια, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τον Μιχάλη, το Χρίστο και την Μαρία;

(δ) Ο Στέφανος και ο Νίκος ήταν αυτόπτες μάρτυρες σε μια ληστεία. Ο Στέφανος κατέθεσε ότι ο Μανόλης παραβίασε το παράθυρο και ο Μιχάλης ή ο Γιώργος μπήκαν στο διαμέρισμα. Ο Νίκος κατέθεσε ότι ο Μανόλης δεν παραβίασε το παράθυρο αλλά αν ο Μιχάλης μπήκε στο διαμέρισμα τότε ο Γιώργος δεν μπήκε. Μετά από εξέταση των μαρτύρων σε αντιπαράθεση, αποδείχτηκε ότι ο Στέφανος είπε την αλήθεια αλλά ο Νίκος είπε ψέματα. Με αυτή την πληροφορία, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τους Μανόλη, Μιχάλη και Γιώργο;

9. Να τυποποιήσετε τα ακόλουθα σύνολα προτάσεων και να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο των πινάκων αληθείας για να διαπιστώσετε κατά πόσον είναι λογικά συνεπή, αν είναι διατυπώστε τουλάχιστον ένα μοντέλο.

(α) «Δικαιούστε το επίδομα αν είσατε άνδρας και κλείσατε 60 χρόνια ζωής, ή γυναίκα και είτε κλείσατε 60 χρόνια ζωής είτε είσατε μητέρα ενός τουλάχιστον ανήλικου παιδιού. Αν είσατε άνδρας και όχι πάνω από 60 τότε δεν δικαιούστε το επίδομα ή δικαιούστε το επίδομα και είσατε γυναίκα.»

(β) «Η Μαρία δεν θα πάει στο πάρτι εκτός αν πάει η Ιωάννα, αλλά η Ιωάννα δεν θα πάει αν ο Αντώνης ή ο Θανάσης πάνε. Ο Θανάσης δεν θα πάει αν δεν αναρρώσει, και ο Αντώνης δεν θα πάει αν δεν πάει ο Θανάσης ή αν πάει η Μαρία. Αν ο Θανάσης αναρρώσει τότε θα πάει. Εκτός αν ο Θανάσης αναρρώσει, ούτε η Ιωάννα αλλά ούτε η Μαρία θα πάνε στο πάρτι.»

10. Να τυποποιήσετε το ακόλουθο σύνολο προτάσεων και να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο των δένδροδιαγραμμάτων για να διαπιστώσετε κατά πόσον η τελευταία πρόταση του έπεται λογικά των προηγούμενων προτάσεων του συνόλου. Αν δεν είναι διατυπώστε όλα τα αντιπαραδείγματα.

«Είτε οφείλουμε να φιλοσοφούμε είτε όχι. Αν το οφείλουμε τότε το οφείλουμε. Αν δεν το οφείλουμε τότε επίσης το οφείλουμε. Σε κάθε περίπτωση οφείλουμε να φιλοσοφούμε.»
[Αριστοτέλης]

11. Το παρακάτω κείμενο είναι απόσπασμα διαλόγου των δυο ηρώων του Arthur Conan Doyle, Sherlock Holmes και Dr. Watson. Τυποποιήστε το κείμενο και αποδείξτε με πίνακες αληθείας ότι το συμπέρασμα του Holmes είναι ορθό.

Watson: Λοιπόν Holmes ιδού τι λένε οι σημειώσεις από τη σκηνή του εγκλήματος, φαίνεται εξαιρετικά περίπλοκο:

Το διέπραξε ο μάγειρας ή ο κηπουρός εκτός αν, φυσικά, το διέπραξε η υπηρέτρια ή ο οικονόμος. Αν το έγκλημα διαπράχθηκε στο μελετητήριο τότε το περίστροφο ήταν το φονικό όπλο. Επιπλέον, αν το περίστροφο ήταν το φονικό όπλο τότε το διέπραξε ο οικονόμος. Ο μάγειρας το έκανε αν και μόνο αν το έγκλημα έγινε στη τραπεζαρία. Αλλά δεν έγινε ούτε στη τραπεζαρία ούτε στο μελετητήριο. Ο κηπουρός το διέπραξε μόνο αν ήταν ερωτευμένος με την υπηρέτρια και, αν ήταν ερωτευμένος με την υπηρέτρια τότε ο θάνατος προκλήθηκε από δηλητήριο. Αλλά απ' την άλλη, αν ο θάνατος δεν προκλήθηκε από δηλητήριο, τότε είτε το διέπραξε ο μάγειρας είτε η υπηρέτρια δεν το διέπραξε. Δεν είναι αλήθεια ότι το περίστροφο ήταν το φονικό όπλο ή ότι ο θάνατος προκλήθηκε με δηλητήριο.

Holmes: Αυτό είναι στοιχειωδώς απλό αγαπητέ Watson ... μα φυσικά, ο οικονόμος το έχει διαπράξει.