ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ 2021

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (517)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ερώτηση 1.

1.1. Μαθητής παρατηρεί ότι $3^2-1=4\cdot 2$, $5^2-1=4\cdot 6$, $7^2-1=4\cdot 12$ και υποθέτει ότι το αποτέλεσμα ισχύει γενικά.

α) Διατυπώστε την υπόθεση του μαθητή ως μαθηματική πρόταση.

(μονάδες 2)

β) Εξετάστε αν η εν λόγω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής.

(μονάδες 3)

1.2. Αν ένας φυσικός αριθμός $\nu>1$ έχει περιττό διαιρέτη $k>1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^\nu+1$ είναι σύνθετος.

(μονάδες 5)

Λύση

1.1

α) Για κάθε φυσικό περιττό αριθμό $n>1$, ισχύει: $n^2-1=4\cdot k$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}$

β) Κάθε φυσικός αριθμός n όταν διαιρεθεί με το 4, δίνει υπόλοιπο $0,1,2$ ή 3. Δηλαδή $n=4l+j$, $j=0,1,2,3$, $l\in\mathbb{N}$. Όμως n περιττός, άρα $n=4k+1$ ή $n=4k+3$.
Συνεπώς $n^2=16k^2+8k+1$, ή $n^2=16k^2+24k+9$.
Επομένως, σε κάθε περίπτωση, $n^2-1=4k$

1.2

Αν $\nu=k\cdot\lambda$, $k,\lambda\in\mathbb{Z}$ και $k>1$ περιττός, τότε $k-1\geq 2$

$$2^\nu+1=\left(2^\lambda\right)^k-(-1)=\left(2^\lambda+1\right)\cdot\left[\left(2^\lambda\right)^{k-1}-\left(2^\lambda\right)^{k-2}+\cdots+\left(2^\lambda\right)^2-2^\lambda+1\right]$$

Η ποσότητα στην αγκύλη είναι φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1.

Επομένως $2^\nu+1$ σύνθετος

Ερώτηση 2.

Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι:

1. παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου
2. το μήκος του είναι ίσο με το μισό του μήκους της τρίτης πλευράς.

Να δώσετε **δύο διαφορετικές** λύσεις, **μία** με χρήση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας **και μία** με χρήση του Διανυσματικού Λογισμού.

(μονάδες 10)

Λύση(1) Προέκταση Σχήματος

Συμβολίζουμε με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Έστω EZ προέκταση της ΔE έτσι ώστε Δ, E και Z συνευθειακά και $\Delta E = EZ$

Τότε, $AE = E\Gamma$ και $\Delta E = EZ$, επομένως $A\Delta\Gamma Z$ παραλληλόγραμμο.

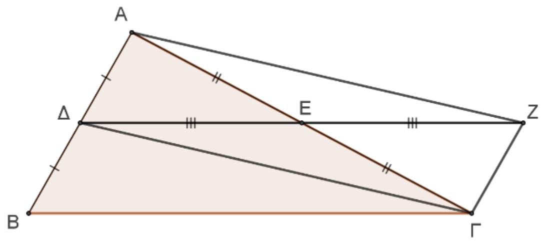
Άρα, $A\Delta = || Z\Gamma$ και επομένως,

$Z\Gamma = || \Delta B$

Επομένως, $\Delta Z\Gamma B$ παραλληλόγραμμο

Άρα, $\Delta Z = || B\Gamma \Rightarrow \Delta E || B\Gamma$

Όμως, οι $A\Gamma$ και ΔZ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου $A\Delta\Gamma Z$.



Συνεπώς, διχοτομούνται, άρα

$$\Delta E = \frac{\Delta Z}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$$

Λύση(2) Με διανύσματα

Συμβολίζουμε με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Έστω $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AE} = \vec{\beta}$.

Τότε, $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AE} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$ (1)

Και $\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{2\alpha} + \overrightarrow{2\beta} = 2(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$

Επομένως από την (1), $\overrightarrow{\Gamma B} || \overrightarrow{\Delta E}$

Επίσης, $|\overrightarrow{\Gamma B}| = 2|\overrightarrow{\Delta E}| \Rightarrow (\Gamma B) = 2(\Delta E)$

Ερώτηση 3.

Σε τάξη δόθηκε η άσκηση: «Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί την σχέση: $xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2+1}$»

Μαθήτρια πρότεινε την πιο κάτω λύση:

$$xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2+1} \Rightarrow xf(x) - f(x) = 2 - \sqrt{3x^2+1}$$
$$\Rightarrow (x-1)f(x) = 2 - \sqrt{3x^2+1} \Rightarrow f(x) = \frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1}$$

3.1. Να εξετάσετε αν η προτεινόμενη λύση είναι πλήρης. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
(μονάδες 3)

3.2. Σε περίπτωση που δεν είναι πλήρης δώστε μια ολοκληρωμένη απάντηση.
(μονάδες 7)

Λύση

3.1

Η απάντηση δεν είναι πλήρης διότι η συνάρτηση $\frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$ (το οποίο δεν ανάφερε η μαθήτρια) και επομένως η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.
Επομένως, για να ολοκληρωθεί η άσκηση θα έπρεπε να ορίσει την τιμή της συνάρτησης στο $x = 1$ με τέτοιο τρόπο ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3.2

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x = 1$.
Επομένως θα πρέπει, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(2-\sqrt{3x^2+1})(2+\sqrt{3x^2+1})}{(x-1)(2+\sqrt{3x^2+1})}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{4-(3x^2+1)}{(x-1)(2+\sqrt{3x^2+1})} = \lim_{x\to 1}\frac{-3x^2+3}{(x-1)\left(2+\sqrt{3x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)(2+\sqrt{3x^2+1})} = \lim_{x\to 1}\frac{-3(x+1)}{2+\sqrt{3x^2+1}} = -\frac{3}{2}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{3}{2}$$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1}, & \alpha\nu\ x \neq 1 \\ -\dfrac{3}{2}, & \alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$$

Ερώτηση 4.

Στις πιο κάτω περιπτώσεις όπου το όριο υπάρχει να το υπολογίσετε, διαφορετικά να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει:

4.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\eta\mu x}{x}$ **(μονάδες 2.5)**

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\eta\mu x$ **(μονάδες 2.5)**

4.3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όπου $f(x) := \begin{cases} \sqrt{1-x}+1 \ , \ x<1 \\ \sqrt{x-1}+1 \ , \ x \geq 1 \end{cases}$ **(μονάδες 2.5)**

4.4. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2(x-1)(x+1)}$ **(μονάδες 2.5)**

Λύση

4.1 Για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

Παρατηρώ ότι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$

Πράγματι, $0 \leq |\eta\mu x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$

Όμως, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και από το θεώρημα παρεμβολής,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

4.2

Έστω ότι υπάρχει $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \eta\mu x = l \, , l \in \mathbb{R}$. Τότε για $\varepsilon = 1$,

$\exists\ M(1) > 0 : |f(x) - l| < 1$, όταν $x > M(1)$. Συνεπώς $|f(x)| < l + 1$

όταν $x > M(1)$. Όμως για $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$ έχω

$|f(x_k)| = |x_k \cdot \eta\mu x_\kappa| = x_k \to +\infty$, για $k \longrightarrow \infty$. Άτοπο

4.3

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{1-x}+1\right) = 1$, αφού $(1-x) > 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x-1}+1\right) = 1$, αφού $x-1 \geq 0$

Επομένως το όριο υπάρχει και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

4.4

Παρατηρώ ότι πρέπει $x^2(x-1)(x+1) \geq 0$, για να ορίζεται η $\sqrt{x^2(x-1)(x+1)}$.

Η έκφραση ισούται με μηδέν αν και μόνο αν $x=0$, $x=1$ και $x=-1$.

Εξετάζω το πρόσημο της παράστασης.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^2(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο,

$$(-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty)$$

Το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της $\sqrt{x^2(x-1)(x+1)}$ και συνεπώς, το όριο της στο 0 δεν έχει νόημα.

Ερώτηση 5.

5.1. Δυο άτομα ρίχνουν ένα αμερόληπτο νόμισμα ν φορές ο καθένας. Να δείξετε ότι η πιθανότητα να φέρουν ίσο αριθμό με ένδειξη «κεφαλή» είναι:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa}^2$$

(μονάδες 4)

5.2. Αποδείξτε την ορθότητα ή όχι των ισχυρισμών:

i. Αν $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)$, τότε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ανεξάρτητα. **(μονάδες 3)**

ii. Αν $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$, $P(A\cap \Gamma) = P(A)\cdot P(\Gamma)$ και $P(B\cap \Gamma) = P(B)\cdot P(\Gamma)$, τότε $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)$.

(μονάδες 3)

Λύση

5.1

Έστω κ, $0 \leq \kappa \leq \nu$, ο ίσος αριθμός των ρίψεων με ένδειξη κεφαλή.
Έστω A_κ το ενδεχόμενο το ένα άτομο να φέρει σε ν ρίψεις κ φορές κεφαλή.

Έστω B_k το ενδεχόμενο το άλλο άτομο να φέρει σε ν ρίψεις κ φορές κεφαλή.
Όμως, $P(A_k) = P(B_k) = \binom{\nu}{\kappa}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\kappa}$

Τότε, $P(A_\kappa \cap B_\kappa) = P(A_k) \cdot P(B_k)$ επειδή τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.
Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} P(A_\kappa \cap B_\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\nu} P(A_k) \cdot P(B_k) = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa}^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2\kappa}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(\nu-\kappa)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}^2$$

5.2(i)

Αντιπαράδειγμα: Έστω ο δειγματικός χώρος της ρίψης δυο ζαριών,

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}5 & 1{,}6 \\ 2{,}1 & 2{,}2 & 2{,}3 & 2{,}4 & 2{,}5 & 2{,}6 \\ 3{,}1 & 3{,}2 & 3{,}3 & 3{,}4 & 3{,}5 & 3{,}6 \\ 4{,}1 & 4{,}2 & 4{,}3 & 4{,}4 & 4{,}5 & 4{,}6 \\ 5{,}1 & 5{,}2 & 5{,}3 & 5{,}4 & 5{,}5 & 5{,}6 \\ 6{,}1 & 6{,}2 & 6{,}3 & 6{,}4 & 6{,}5 & 6{,}6 \end{Bmatrix}$$

Έστω τα ενδεχόμενα,

$$A = \{\textit{το πρώτο ζάρι έχει ένδειξη } 1{,}2 \text{ ή } 3\}$$
$$B = \{\textit{το πρώτο ζάρι έχει ένδειξη } 3{,}4 \text{ ή } 5\}$$
$$\Gamma = \{\textit{το άθροισμα των ενδείξεων είναι } 9\}$$

Τότε $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$ και προφανώς τα Α,Β και Γ δεν είναι ανεξάρτητα αφού για παράδειγμα τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ανεξάρτητα:
$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ και $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

5.2(ii) Αντιπαράδειγμα: Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{\alpha, \delta\}$, $B = \{\beta, \delta\}$, $\Gamma = \{\gamma, \delta\}$ υποσύνολα του δειγματικού χώρου $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, με τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα.
Τότε οι προϋποθέσεις της πρότασης ισχύουν αφού,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4},$$
$$P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{4}$$
$$\text{και } P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{4}$$

όμως, $P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{4}$ και $P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
Επομένως, τα ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα.

Ερώτηση 6.

Μια σχέση R λέγεται σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο A, αν ισχύουν τα εξής, όπου $x, y, z \in A$:

i. $(x, x) \in R$, $\forall x \in A$
ii. Αν $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
iii. Αν $(x, y) \in R \; \kappa\alpha\iota \; (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ορίζουμε την ακόλουθη σχέση R_n, στο σύνολο των ακεραίων:

$$(x, y) \in R_n \Leftrightarrow n|(x - y), \quad \forall \, x, y \in \mathbb{Z}$$

6.1. Να δείξετε ότι η πιο πάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας

(μονάδες 3)

6.2. Αν για την πιο πάνω σχέση ισοδυναμίας το $n = 5$ και για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το σύνολο $[x] = \{y \in \mathbb{Z}: (x, y) \in R_n\}$. Να γράψετε τέσσερα στοιχεία, δύο θετικά και δύο αρνητικά, που περιέχονται στο σύνολο $[-7]$. Δικαιολογήστε κάθε φορά την απάντησή σας.

(μονάδες 4)

6.3. Αν $(x, y) \in R_7$ να βρείτε όλα τα $k \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε $(-x + k \; , -y + 2k) \in R_7$

(μονάδες 3)

Λύση:

6.1 i) Αφού για κάθε n θετικό ακέραιο, $n|0$ τότε, $n|(x - x) \; \forall \, x \in Z \Rightarrow (x, x) \in R_n$

ii) Αν $(x, y) \in R_n \Rightarrow n|(x - y) \;\; \forall \, x, y \in \mathbb{Z} \; \Rightarrow n| - (x - y) \;\; \forall \, x, y \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow n|(y - x) \;\; \forall \, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y, x) \in R_n$$

iii) Αν $(x, y) \in R_n \; \kappa\alpha\iota \; (y, z) \in R_n \Rightarrow n|(x - y) \; \kappa\alpha\iota \; n|(y - z) \; \forall \, x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow n|[(x - y) + (y - z)] \; \Rightarrow n|(x - z) \; \forall \, x, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, z) \in R_n$$

Επομένως η πιο πάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας

6.2 3 διότι $-7 - 3 = -10$ και $5| - 10$

13 διότι $-7 - 13 = -20$ και $5| - 20$

-2 διότι $-7 - (-2) = -5$ και $5| - 5$

-12 διότι $-7 - (-12) = 5$ και $5|5$

6.3 Για να ισχύει $(-x+k,-y+2k) \in R_7$ πρέπει $7|(-x+k+y-2k)$, δηλαδή $7|(-x+y-k)$ που σημαίνει $7|-(x-y+k)$ και άρα $7|(x-y+k)$.

Αφού $(x,y) \in R_7 \;\Rightarrow 7|(x-y)$ και επομένως θα πρέπει το $7|k$ δηλαδή, το $k = \pi o\lambda(7)$.

Ερώτηση 7.

Ένας ηλεκτρονικός γραφέας σημειώνει τυχαία σημεία σε τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $A(-4,4)$, $B(4,4)$, $\Gamma(4,-4)$ και $\Delta(-4,-4)$. Η πιθανότητα ο γραφέας να σημειώσει σε οποιεσδήποτε δυο ισεμβαδικές περιοχές του τετραγώνου είναι η ίδια.

Αποτυπώνοντας γραφικά το πρόβλημα, σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις, να υπολογίσετε την πιθανότητα το επόμενο σημείο που θα σημειώσει ο γραφέας:

7.1. Να απέχει απόσταση μεγαλύτερη των 2 μονάδων από το σημείο $(0,0)$.
(μονάδες 2,5)

7.2. Να απέχει απόσταση μεγαλύτερη ή ίση των 2 μονάδων από την ευθεία $x = 3$.
(μονάδες 2,5)

7.3. Να απέχει απόσταση ίση με μία μονάδα από το σημείο $(3,3)$.
(μονάδες 2,5)

7.4. Οι συντεταγμένες του να ικανοποιούν την ανίσωση $|x| + |y| \leq 3$.
(μονάδες 2,5)

Λύση

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 8 \cdot 8 = 64\ \tau.\mu.$$

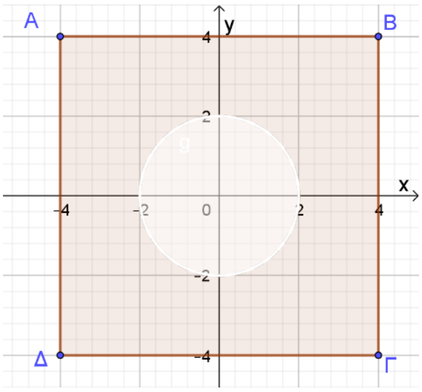
(7.1)

Έστω Α το ενδεχόμενο:

«Η απόσταση του σημείου είναι μεγαλύτερη των 2 μονάδων από το σημείο (0,0)».

$$E_A = \pi \cdot 2^2 = 4\pi\ \tau.\mu.$$

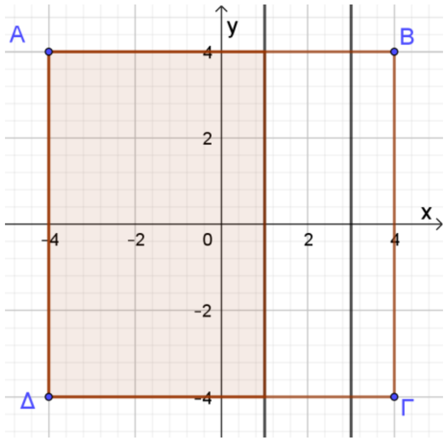
$$P(A) = \frac{E_{AB\Gamma\Delta} - E_A}{E_{AB\Gamma\Delta}} = \frac{64 - 4\pi}{64} \cong 0.80365$$



(7.2)

Έστω Β το ενδεχόμενο:

«Το σημείο απέχει απόσταση μεγαλύτερη ή ίση των 2 μονάδων από την ευθεία $x = 3$»



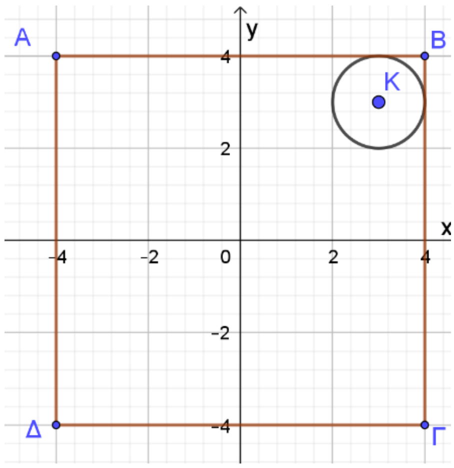
$$E_B = 5 \cdot 8 = 40\ \tau.\mu.$$

$$P(B) = \frac{E_B}{E_{AB\Gamma\Delta}} = \frac{40}{64} = 0{,}625$$

(7.3)

Έστω Γ το ενδεχόμενο:

«Το σημείο απέχει απόσταση ίση με μία μονάδα από το σημείο (3,3)».



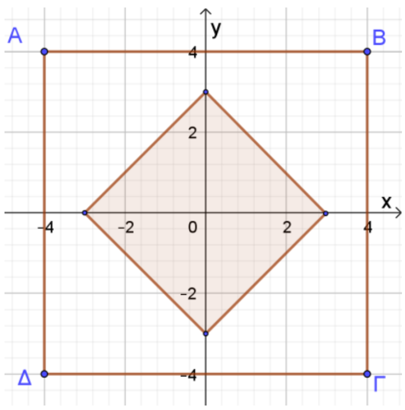
$E_\Gamma = 0$ (εμβαδόν κύκλου)

$P(\Gamma) = 0$

(7.4) Δ: το ενδεχόμενο Οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την ανίσωση $|x| + |y| \leq 3$

$$E_\Delta = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ \tau.\mu.$$

$$P(\Delta) = \frac{E_\Delta}{E_{AB\Gamma\Delta}} = \frac{18}{64} = 0{,}375$$

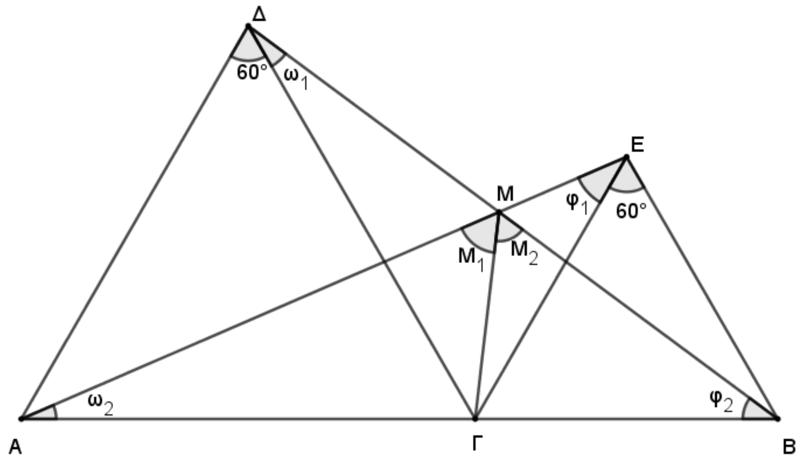


Ερώτηση 8.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ ανάμεσα στα σημεία Α και Β. Σχηματίζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΒΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο, σε σχέση με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ στο οποίο τέμνονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ.

(μονάδες 10)

Λύση



Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα $ΔΓΒ$ και $ΑΓΕ$ είναι ίσα.

$ΑΓ = ΓΔ$ και $ΓΕ = ΓΒ$ ως πλευρές ισόπλευρων τριγώνων

$\angle ΑΓΕ = \angle ΔΓΒ = 60^o + \angle ΔΓΕ$

Συνεπώς $\angle \omega_1 = \angle \omega_2$.

Άρα, το ευθύγραμμο τμήμα $ΜΓ$ φαίνεται από τις κορυφές $Α$ και $Δ$ υπό ίσες γωνίες.

Συνεπώς το τετράπλευρο $ΑΓΜΔ$ είναι εγγράψιμο. Όμοια και το $ΜΓΒΕ$.

Επομένως,

$\angle M_1 = 60^o$ και $\angle M_2 = 60^o \Rightarrow \angle M = M_1 + M_2 = 120^o$

Το σημείο $Μ$ βλέπει την πλευρά $ΑΒ$ υπό σταθερή γωνία 120^o, άρα ο γεωμετρικός τόπος ανήκει στο τόξο του κύκλου που βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο $Μ$ και βλέπει τη χορδή $ΑΒ$ υπό γωνία 120^o.

Αντίστροφα

Έστω $Μ$ σημείο του τόξου που βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ$ υπό γωνία 120^o. Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας $Μ$ και ορίζουμε $Γ$ το σημείο τομής της με το $ΑΒ$. Σχηματίζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΓΒΕ$ με τα σημεία $Α$ και

E στο ίδιο ημιεπίπεδο που ανήκει το σημείο M. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ME.

Το τετράπλευρο $EM\Gamma B$ είναι εγγράψιμο επειδή $\angle \Gamma EB = \angle \Gamma MB = 60^o$ αφού βλέπουν το ίδιο τόξο $B\Gamma$ υπό ίση γωνία. Συνεπώς, $\angle EMB = \angle E\Gamma B = 60^o$, γιατί βλέπουν το ίδιο τόξο EB.

Συνεπώς, $\angle AME = \angle A\Gamma M + \angle \Gamma MB + \angle BME = 60^o + 60^o + 60^o = 180^o$. Άρα AME είναι ευθεία.

Όμοια, από το εγγράψιμο τετράπλευρο $\Gamma M\Delta A$ έπεται ότι και $\angle BM\Delta = 180^o$, δηλαδή $BM\Delta$ ευθεία. Επομένως το M είναι σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta$ και AE.

Ερώτηση 9.

Έστω $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, $f \neq g$. Ορίζουμε την συνάρτηση $h(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ x \in (a, b)$.

Να αναφέρετε σε ποια σημεία του διαστήματος (a, b) είναι η συνάρτηση $h(x)$ παραγωγίσιμη;

(μονάδες 10)

Λύση

Αφού $f \neq g$, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$. Έστω ότι $f(x_0) > g(x_0)$. Από τη συνέχεια των συναρτήσεων στο x_0 υπάρχει διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta\ )$ τέτοιο ώστε $f(x) > g(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta\ )$, με $\delta > 0$.

Επομένως, $h(x) = f(x)\ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta\ )$ και συνεπώς, $h'(x) = f'(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta\ )$.

Άρα, η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, b)$ όπου $f(x_0) \neq g(x_0)$.

Στα σημεία $x_0 \in (a, b)$ όπου $f(x_0) = g(x_0)$ η $h(x)$ ενδέχεται να μην είναι παραγωγίσιμη και θα πρέπει να εξεταστούν κατά περίπτωση.

Παρατήρηση: Αν για $x_0 \in (a, b)$, με $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) \neq g'(x_0)$ τότε οι πλευρικές παράγωγοι της $h(x_0)$ υπάρχουν και είναι ίσες με $f'(x_0)$ ή $g'(x_0)$. Συνεπώς, η παράγωγος της $h(x) = \max{(f, g)}$ στο $x_0 \in (a, b)$ δεν υπάρχει. Στην περίπτωση όπου για $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$ τότε η παράγωγος της $h(x) = \max{(f, g)}$ στο $x_0 \in (a, b)$ υπάρχει και $h'(x) = f'(x) = g'(x)$.

Ερώτηση 10.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ η εσωτερική διχοτόμος.

Να δείξετε ότι:

10.1. $(B\Delta) = \frac{(B\Gamma)(AB)}{(AB)+(A\Gamma)}$ **(μονάδες 3)**

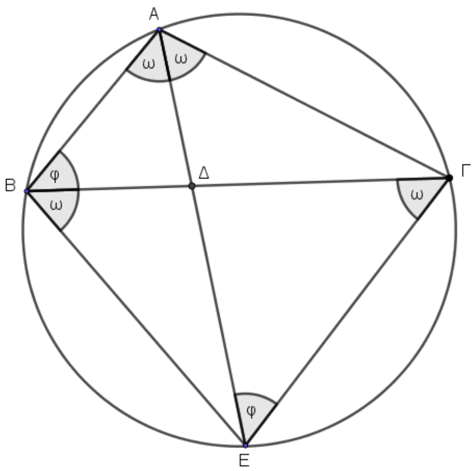
10.2. $(AB)(A\Gamma) = (A\Delta)^2 + (\Delta B)(\Delta\Gamma)$ **(μονάδες 7)**

Λύση

10.1. Από θεώρημα διχοτόμων $\frac{B\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{B\Delta+\Delta\Gamma}{AB+A\Gamma} = \frac{B\Gamma}{AB+A\Gamma} \Rightarrow B\Delta = \frac{AB \cdot B\Gamma}{AB+A\Gamma}$

10.2

Φέρουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την ΑΔ και ονομάζουμε Ε το σημείο τομής με τον κύκλο.



$\angle BAE = \angle EA\Gamma = \omega$ (ΑΔ διχοτόμος)

$\angle EB\Gamma = \angle EA\Gamma = \omega$ βλέπουν στο τόξο ΕΓ

$\angle BAE = \angle B\Gamma E = \omega$ βλέπουν στο τόξο ΕΒ

$\angle AB\Gamma = \angle AE\Gamma = \varphi$ βλέπουν στο τόξο ΑΓ.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι όμοια.

$\frac{AB}{AE} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \frac{AB}{A\Delta+\Delta E} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2 + A\Delta \cdot \Delta E$ (1)

$A\Delta . \Delta E = B\Delta . \Delta\Gamma \Rightarrow \Delta E = \frac{B\Delta \cdot \Delta\Gamma}{A\Delta}$ (2) (δύναμης σημείου ως προς κύκλο)

$(1),(2) \Rightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2 + A\Delta \cdot \frac{B\Delta \cdot \Delta\Gamma}{A\Delta} \Rightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma$