

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ  
ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ 2021

Εξεταζόμενο Αντικείμενο (κωδικός): ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (517)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: 18 Νοεμβρίου 2021, 15:30 – 18:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δέκα (10) ερωτήσεις.

Απαντήστε και στις δέκα (10) ερωτήσεις.

Η κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Όλες οι απαντήσεις να καταγραφούν στο **Τετράδιο Απαντήσεων**.

Σε κάθε απάντηση να αναγράφεται **τον αριθμό της ερώτησης**.

Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

Μόνο τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**Ερώτηση 1.**

1.1. Μαθητής παρατηρεί ότι  $3^2 - 1 = 4 \cdot 2$  ,  $5^2 - 1 = 4 \cdot 6$  ,  $7^2 - 1 = 4 \cdot 12$   
και υποθέτει ότι το αποτέλεσμα ισχύει γενικά.

α) Διατυπώστε την υπόθεση του μαθητή ως μαθηματική πρόταση.

(μονάδες 2)

β) Εξετάστε αν η εν λόγω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής.

(μονάδες 3)

1.2. Αν ένας φυσικός αριθμός  $n > 1$  έχει περιττό διαιρέτη  $k > 1$ , να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $2^n + 1$  είναι σύνθετος.

(μονάδες 5)

## Ερώτηση 2.

Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου:

- α) είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου
- β) έχει μήκος ίσο με το μισό του μήκους της τρίτης πλευράς

Να δώσετε **δύο διαφορετικές** λύσεις, **μία** με χρήση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και **μία** με χρήση του Διανυσματικού Λογισμού.

(μονάδες 10)

## Ερώτηση 3.

Σε τάξη δόθηκε η άσκηση: «Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιεί τη σχέση:  $xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2 + 1}$ . Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης»

Μαθήτριά πρότεινε την πιο κάτω λύση:

$$\begin{aligned}xf(x) - 2 &= f(x) - \sqrt{3x^2 + 1} \Rightarrow xf(x) - f(x) = 2 - \sqrt{3x^2 + 1} \\ \Rightarrow (x - 1)f(x) &= 2 - \sqrt{3x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \frac{2 - \sqrt{3x^2 + 1}}{x - 1}\end{aligned}$$

**3.1.** Να εξετάσετε αν η προτεινόμενη λύση είναι πλήρης. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(μονάδες 3)

**3.2.** Σε περίπτωση που δεν είναι πλήρης δώστε μια ολοκληρωμένη λύση.

(μονάδες 7)

## Ερώτηση 4.

Στις πιο κάτω περιπτώσεις υπολογίστε το όριο όπου υπάρχει, διαφορετικά να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει:

**4.1.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \eta\mu x}{x}$  (μονάδες 2,5)

**4.2.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x\eta\mu x$  (μονάδες 2,5)

**4.3.**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , όπου  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + 1, & x < 1 \\ \sqrt{x-1} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  (μονάδες 2,5)

**4.4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2(x-1)(x+1)}$  (μονάδες 2,5)

### Ερώτηση 5.

5.1. Δύο άτομα ρίχνουν ένα αμερόληπτο νόμισμα  $n$  φορές το κάθε άτομο. Να δείξετε ότι η πιθανότητα να φέρουν ίσο αριθμό ρίψεων με ένδειξη «κεφαλή» είναι:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

(μονάδες 4)

5.2. Τα  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Να αποδείξετε την ορθότητα ή όχι των ισχυρισμών:

5.2.1. Αν  $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$ , τότε τα ενδεχόμενα  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  είναι ανά δύο ανεξάρτητα

(μονάδες 3)

5.2.2. Αν  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ,  $P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$  και  $P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$ , τότε  $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$

(μονάδες 3)

### Ερώτηση 6.

Μια διμελής σχέση  $R$  λέγεται σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο  $A$ , αν ισχύουν τα εξής:

- i)  $(x, x) \in R$ ,  $\forall x \in A$
- ii) Αν  $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ , όπου  $x, y \in A$
- iii) Αν  $(x, y) \in R$  και  $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ , όπου  $x, y, z \in A$

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό  $n$ , ορίζουμε την ακόλουθη διμελή σχέση  $R_n$  στο σύνολο των ακεραίων  $\mathbb{Z}$ :

$$(x, y) \in R_n \Leftrightarrow n|(x - y)$$

6.1. Να δείξετε ότι η  $R_n$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

(μονάδες 3)

6.2. Για  $x \in \mathbb{Z}$ , ορίζουμε το σύνολο  $[x] := \{y \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R_5\}$ . Να γράψετε τέσσερα στοιχεία, δύο θετικά και δύο αρνητικά, που περιέχονται στο σύνολο  $[-7]$ . Να δικαιολογήσετε κάθε φορά την απάντησή σας.

(μονάδες 4)

6.3. Αν  $(x, y) \in R_7$ , να βρείτε όλα τα  $k \in \mathbb{Z}$ , έτσι ώστε  $(-x + k, -y + 2k) \in R_7$ .

(μονάδες 3)

### Ερώτηση 7.

Ένας ηλεκτρονικός γραφέας σημειώνει τυχαία σημεία σε τετράγωνο με κορυφές τα σημεία  $A(-4,4)$ ,  $B(4,4)$ ,  $\Gamma(4,-4)$  και  $\Delta(-4,-4)$ . Η πιθανότητα ο γραφέας να σημειώσει σε οποιοσδήποτε δύο ισεμβαδικές περιοχές του τετραγώνου είναι η ίδια.

Αποτυπώνοντας γραφικά το πρόβλημα, σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις, να υπολογίσετε την πιθανότητα το επόμενο σημείο που θα σημειώσει ο γραφέας:

7.1. Να απέχει απόσταση μεγαλύτερη των 2 μονάδων από το σημείο  $(0,0)$ .  
(μονάδες 2,5)

7.2. Να απέχει απόσταση μεγαλύτερη ή ίση των 2 μονάδων από την ευθεία  $x = 3$ .  
(μονάδες 2,5)

7.3. Να απέχει απόσταση ίση με μία μονάδα από το σημείο  $(3,3)$ .  
(μονάδες 2,5)

7.4. Οι συντεταγμένες του  $(x, y)$  να ικανοποιούν την ανίσωση  $|x| + |y| \leq 3$ .  
(μονάδες 2,5)

### Ερώτηση 8.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και τυχαίο σημείο του  $\Gamma$  ανάμεσα στα σημεία  $A$  και  $B$ . Σχηματίζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $\Gamma BE$ , προς το ίδιο ημιεπίπεδο, σε σχέση με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου  $M$  στο οποίο τέμνονται τα ευθύγραμμα τμήματα  $AE$  και  $B\Delta$ .

(μονάδες 10)

### Ερώτηση 9.

Έστω  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε  $f \neq g$ . Ορίζουμε την συνάρτηση  $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ ,  $x \in (a, b)$ .

Να προσδιορίσετε τα σημεία του διαστήματος  $(a, b)$  στα οποία η συνάρτηση  $h(x)$  είναι παραγωγίσιμη.

(μονάδες 10)

### Ερώτηση 10.

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και έστω  $A\Delta$  η εσωτερική διχοτόμος.

Να δείξετε ότι:

10.1.  $(B\Delta) = \frac{(B\Gamma)(AB)}{(AB)+(A\Gamma)}$  (μονάδες 3)

10.2.  $(A\Delta)^2 = (AB)(A\Gamma) - (A\Delta)(\Delta\Gamma)$   
(μονάδες 7)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ