ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ 2023

Εξεταζόμενο Αντικείμενο (Κωδικός): ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (517)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: 15 Νοεμβρίου 2023, 15:30 – 18:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δέκα (10) ερωτήσεις.
3. **Να απαντήσετε και στις δέκα (10) ερωτήσεις.**
4. Η κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κλπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής η οποία φέρει την σφραγίδα σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία διαδικασία.

Ερώτηση 1.

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Σχηματίστε το τετράπλευρο με κορυφές τα μέσα $Ε, Ζ, Η, Θ$ των πλευρών του $ΑΒΓΔ$.

α) Να βρείτε τις αναγκαίες ιδιότητες του $ΑΒΓΔ$, ώστε το τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$ να είναι:

i. Ορθογώνιο
ii. Ρόμβος
iii. Τετράγωνο

Για κάθε περίπτωση να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

(μονάδες 8)

β) Ποια η διδακτική αξία του πιο πάνω προβλήματος;

(μονάδες 2)

Ερώτηση 2.

α) Αν $A \triangle B \coloneqq (A-B) \cup (B-A)$ όπου A, B σύνολα, να αποδείξετε ότι,

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

(μονάδες 4)

β) Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται ανοικτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $\pi(x) \subset A$.

i. Να δείξετε ότι η άπειρη ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.
ii. Να εξετάσετε αν η άπειρη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

(μονάδες 6)

Ερώτηση 3.

α) Ζητήθηκε από μαθητές να βρουν το εμβαδόν E ορθογωνίου τρίγωνου $AB\Gamma$ με στοιχεία $\hat{B} = 90^o$, $(A\Gamma) = 6$, $(B\Gamma) = 5$ και ύψος $(B\Delta) = 4$.

Η λύση ενός μαθητή περιλαμβάνει τα πιο κάτω:

$$(AB) = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11} \quad \text{και} \quad (B\Gamma)(AB) = (A\Gamma)(B\Delta) = 2E$$

Επομένως,

$$5\sqrt{11} = 6 \cdot 4 \;\Rightarrow\; \sqrt{11} = \frac{24}{5}$$

Να εξηγήσετε και να τεκμηριώσετε γιατί προέκυψε αυτό το λάθος.

(μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα λάθη στον επόμενο ισχυρισμό, αιτιολογώντας πλήρως την απάντηση σας.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \text{ημ}x &\overset{x=u+\pi}{=} \lim_{u\to+\infty} \text{ημ}(u+\pi) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \text{ημ}(x+\pi) \\
&= \lim_{x\to+\infty} (-\text{ημ}x) \\
&= -\lim_{x\to+\infty} \text{ημ}x
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$2\lim_{x\to+\infty} \text{ημ}x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \text{ημ}x = 0$$

(μονάδες 5)

Ερώτηση 4.

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha_\nu = \frac{1}{12} \cdot 36^\nu + 10 \cdot 3^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ διαιρείται με το 33.

(μονάδες 4)

β) i. Να δείξετε ότι

$$\binom{\nu}{2} = \binom{\kappa}{2} + \kappa(\nu - \kappa) + \binom{\nu - \kappa}{2} \ , \ 2 \le \kappa \le \nu - 2 \qquad \nu, \kappa \in \mathbb{N}$$

ii. Να διατυπώσετε ένα συνδυαστικό πρόβλημα του οποίου η λύση να εκφράζεται από την πιο πάνω ταυτότητα.

(μονάδες 6)

Ερώτηση 5.

α) i. Έστω $\beta > \alpha$ και $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

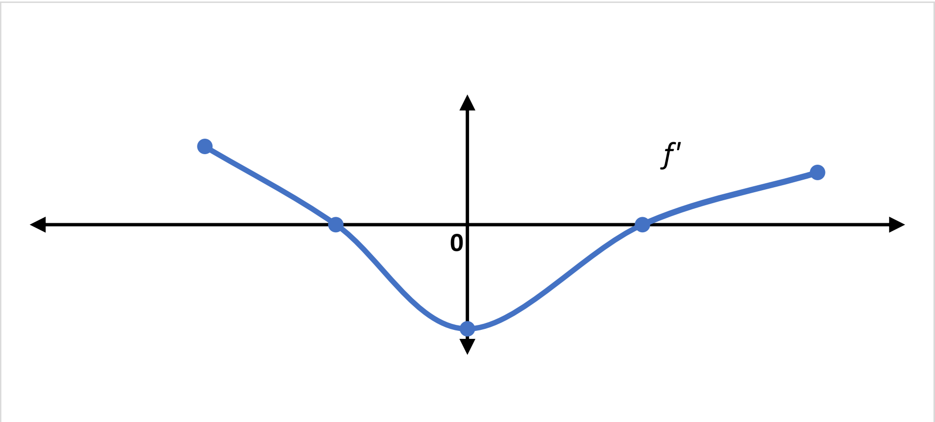
(μονάδες 3)

ii. Να εξετάσετε αν η συνέχεια της f είναι αναγκαία υπόθεση για το αποτέλεσμα $f(\xi) = 0$.

(μονάδες 2)

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-6\,, 8]$ με $f(-6) = 5$ και $f(8) = 4$. Για την παράγωγο f', η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται πιο κάτω, ισχύει:

$$f'(-6) = 3 \quad , \quad f'(-3) = 0 \quad , \quad f'(0) = -4 \quad , \quad f'(4) = 0 \quad , \quad f'(8) = 2$$



Να βρείτε όλα τα σημεία του διαστήματος $[-6\,, 8]$ στα οποία η συνάρτηση f παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 5)

Ερώτηση 6.

Δύο μη κενά σύνολα X και Y είναι ισοπληθικά, αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $f: X \to Y$ που είναι $1-1$ και επί.

α) Να δείξετε ότι τα διαστήματα $[0,1]$ και $[0,\pi]$ είναι ισοπληθικά.

(μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε αν η πιο κάτω πρόταση είναι αληθής:

«Όταν η συνάρτηση $g: [0,\pi] \to [0,1]$ είναι επί, τότε είναι και $1-1$.»

Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι τα σύνολα των εσωτερικών σημείων δύο τετραγώνων πλευράς 1 και π αντίστοιχα, είναι ισοπληθικά.

(μονάδες 2)

Ερώτηση 7.

α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

(μονάδες 4)

β) Έστω $g: [\,0\,,1\,] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x \cdot \int_x^1 \frac{g(t)}{t}\,dt\right)$$

(μονάδες 6)

Ερώτηση 8.

α) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι (κύβος) ν φορές, $\nu \geq 3$.
Ορίζουμε το ενδεχόμενο A_{ij}: «η ρίψη i και η ρίψη j φέρουν την ίδια ένδειξη»
Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα $\{A_{ij}: 1 \leq i < j \leq \nu\}$ είναι ανά δύο ανεξάρτητα, αλλά όχι ανεξάρτητα.

(μονάδες 5)

β) Για p, πρώτο αριθμό, ορίζουμε $\Omega = \{1,2,3,\ldots,p\} \subset \mathbb{N}$. Με δειγματικό χώρο το Ω ορίζουμε την πιθανότητα

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{p}, \qquad \forall A \subseteq \Omega$$

όπου $\nu(A)$ ο πληθικός αριθμός του συνόλου A. Αν τα ενδεχόμενα $B, \Gamma \subseteq \Omega$ είναι ανεξάρτητα, να δείξετε ότι ένα τουλάχιστον από αυτά ταυτίζεται με το $\emptyset$ ή το Ω.

(μονάδες 5)

Ερώτηση 9.

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και σημείο $Η$ εντός αυτού, για τα οποία ισχύουν

$$\overrightarrow{ΗΓ} - \overrightarrow{ΑΔ} = \overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΗ} \quad \text{και} \quad \left|\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ}\right| = \left|\overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΑΒ}\right|$$

α) Να δείξετε ότι το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(μονάδες 4)

β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο $Κ$: «ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο $Σ$ εντός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ βρίσκεται πιο κοντά στην κορυφή $Β$ από ότι στην $Α$ και πιο μακριά από την πλευρά $ΑΒ$ από ότι τη $ΒΓ$». Αν το εμβαδόν του $ΑΒΓΔ$ είναι $Ε = 80$ και η πιθανότητα $P(Κ) = \frac{2}{5}$, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(μονάδες 6)

Ερώτηση 10.

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ$ με $(ΑΒ) = 1$.

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $Γ$, που είναι κορυφές των τριγώνων $ΑΒΓ$, ώστε το εμβαδόν τους να είναι $Ε = 2$.

(μονάδες 6)

β) Να περιγράψετε την κατασκευή του γεωμετρικού τόπου.

(μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ