

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ  
ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ**

**2023**

**Γνωστικό Αντικείμενο: Δασκάλων (Μαθηματικά) (311)**

**Ημερομηνία Εξέτασης: 19 Νοεμβρίου 2023**

**ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**

**ΜΕΡΟΣ Α**

| <b>Ερώτημα</b> | <b>Ορθή απάντηση</b> |
|----------------|----------------------|
| 1              | Γ                    |
| 2              | Γ                    |
| 3              | Δ                    |
| 4              | Ε                    |
| 5              | Ε                    |
| 6              | Δ                    |
| 7              | Β                    |
| 8              | Α                    |
| 9              | Β                    |
| 10             | Γ                    |
| 11             | Γ                    |
| 12             | Γ                    |
| 13             | Γ                    |
| 14             | Ε                    |
| 15             | Δ                    |
| 16             | Β                    |
| 17             | Δ                    |
| 18             | Β                    |

**ΜΕΡΟΣ Β**

| Ερώτημα   | Ορθή απάντηση  |            |      |            |  |  |   |  |  |   |   |   |  |   |   |  |
|---|--|------------|------|------------|--|--|---|--|--|---|---|---|--|---|---|--|
| 1   | <table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="445 499 1043 533">Δήλωση</th> <th data-bbox="1043 499 1185 533">Ορθή</th> <th data-bbox="1185 499 1324 533">Λανθασμένη</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="445 533 1043 629">(α) Δεν υπάρχουν αρκετές πληροφορίες για να αποφασίσουμε ποια φίλη πέτυχε την καλύτερη τιμή.</td> <td data-bbox="1043 533 1185 629"></td> <td data-bbox="1185 533 1324 629">✓</td> </tr> <tr> <td data-bbox="445 629 1043 725">(β) Η τελική τιμή αγοράς του τηλεφώνου της Μαρίας υπολογίζεται διαιρώντας την αρχική τιμή διά 0,6.</td> <td data-bbox="1043 629 1185 725"></td> <td data-bbox="1185 629 1324 725">✓</td> </tr> <tr> <td data-bbox="445 725 1043 864">(γ) Η τελική τιμή αγοράς του τηλεφώνου της Ελένης υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας επί 0,9 τα <math>\frac{7}{10}</math> της αρχικής τιμής.</td> <td data-bbox="1043 725 1185 864">✓</td> <td data-bbox="1185 725 1324 864"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="445 864 1043 987">(δ) Το ποσό που πλήρωσε για την αγορά του τηλεφώνου η μια από τις δύο φίλες είναι ίσο με το 105% του ποσού που πλήρωσε η άλλη φίλη.</td> <td data-bbox="1043 864 1185 987">✓</td> <td data-bbox="1185 864 1324 987"></td> </tr> </tbody> </table>   | Δήλωση     | Ορθή | Λανθασμένη | (α) Δεν υπάρχουν αρκετές πληροφορίες για να αποφασίσουμε ποια φίλη πέτυχε την καλύτερη τιμή. |  | ✓ | (β) Η τελική τιμή αγοράς του τηλεφώνου της Μαρίας υπολογίζεται διαιρώντας την αρχική τιμή διά 0,6. |  | ✓ | (γ) Η τελική τιμή αγοράς του τηλεφώνου της Ελένης υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας επί 0,9 τα $\frac{7}{10}$ της αρχικής τιμής. | ✓ |  | (δ) Το ποσό που πλήρωσε για την αγορά του τηλεφώνου η μια από τις δύο φίλες είναι ίσο με το 105% του ποσού που πλήρωσε η άλλη φίλη. | ✓ |  |
| Δήλωση  | Ορθή   | Λανθασμένη |      |            |  |  |   |  |  |   |   |   |  |   |   |  |
| (α) Δεν υπάρχουν αρκετές πληροφορίες για να αποφασίσουμε ποια φίλη πέτυχε την καλύτερη τιμή.  |  | ✓          |      |            |  |  |   |  |  |   |   |   |  |   |   |  |
| (β) Η τελική τιμή αγοράς του τηλεφώνου της Μαρίας υπολογίζεται διαιρώντας την αρχική τιμή διά 0,6.                                  |  | ✓          |      |            |  |  |   |  |  |   |   |   |  |   |   |  |
| (γ) Η τελική τιμή αγοράς του τηλεφώνου της Ελένης υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας επί 0,9 τα $\frac{7}{10}$ της αρχικής τιμής.       | ✓  |            |      |            |  |  |   |  |  |   |   |   |  |   |   |  |
| (δ) Το ποσό που πλήρωσε για την αγορά του τηλεφώνου η μια από τις δύο φίλες είναι ίσο με το 105% του ποσού που πλήρωσε η άλλη φίλη. | ✓  |            |      |            |  |  |   |  |  |   |   |   |  |   |   |  |
| 2   | <p><i>Η διαμορφωτική αξιολόγηση στο επίπεδο της διαδικαστικής επάρκειας περιλαμβάνει δραστηριότητες:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- που απαιτούν χρήση εργαλείων (π.χ., χάρακα) για τον υπολογισμό του μήκους και του πλάτους ορθογωνίου, ώστε να υπολογιστεί η περίμετρος και το εμβαδόν του.</li> <li>- υπολογισμού της περιμέτρου ή/και του εμβαδού ορθογωνίων με βάση τους τύπους.</li> <li>- επίλυσης απλών λεκτικών προβλημάτων, τα οποία αναφέρονται σε εφαρμογές των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού, στην καθημερινή ζωή και στα οποία όλες οι πληροφορίες παρουσιάζονται και είναι ξεκάθαρες.</li> </ul> <p><b><u>Ενδεικτικές δραστηριότητες για διαδικαστική επάρκεια:</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ένα ορθογώνιο έχει μήκος 12 cm και πλάτος 4 cm. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου.</li> <li>- Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20 cm. Πόσο είναι το πλάτος του, αν το μήκος του είναι 6 cm;</li> <li>- Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 24 cm<sup>2</sup>. Πόσο είναι το πλάτος του αν το μήκος του είναι 6 cm;</li> <li>- Δίνονται ορθογώνια και τα μήκη των πλευρών τους και ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρός τους.</li> </ul> <p><i>Η διαμορφωτική αξιολόγηση στο επίπεδο της εννοιολογικής κατανόησης περιλαμβάνει δραστηριότητες:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- υπολογισμού της περιμέτρου ορθογωνίων με διαφορετικούς τρόπους.</li> <li>- υπολογισμού της περιμέτρου ορθογωνίων όταν είναι γνωστό το εμβαδόν του και το αντίστροφο.</li> </ul> |            |      |            |  |  |   |  |  |   |   |   |  |   |   |  |

|    |  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|    | <ul style="list-style-type: none"> <li>- επίλυσης προβλημάτων που απαιτούν διασύνδεση εννοιών σχετικά με την έννοια της περιμέτρου και του εμβαδού.</li> </ul> <p><b>Ενδεικτικές δραστηριότητες για εννοιολογική κατανόηση:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο ίση με 16 cm. Ποιο είναι το εμβαδόν του;</li> <li>- Ένα τετράγωνο υπνοδωμάτιο έχει εμβαδόν ίσο με <math>36 m^2</math>. Ποια είναι η περίμετρός του υπνοδωματίου;</li> <li>- Να σχεδιάσεις ένα ορθογώνιο με περίμετρο 18 cm και εμβαδόν ίσο με <math>18 cm^2</math>.</li> <li>- Να σχεδιάσεις διαφορετικά ορθογώνια με περίμετρο 24 cm.</li> </ul>  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3  | <p><b>Ενδεικτική απάντηση:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Η απάντηση της Ιωάννας δεν είναι ολοκληρωμένη. Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι το ύψος με μήκος 4 cm αντιστοιχεί στη βάση με μήκος 5 cm. Επιπρόσθετα, στο παραλληλόγραμμο υπάρχει και δεύτερο ύψος που αντιστοιχεί στη δεύτερη βάση. Επομένως, το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση με μήκος 8 cm είναι 2,5 cm.</li> </ul>   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 4  | <p><b>Ενδεικτικοί τρόποι υπολογισμού της διαφοράς:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Αξιοποίηση γνωστού αθροίσματος/διαφοράς.</b> Για παράδειγμα, το παιδί ξεκινά από τον αριθμό 28 και προσθέτει 5 δεκάδες (5 βήματα προς τα κάτω). Στη συνέχεια, μετακινείται 3 βήματα στα αριστερά, για να αφαιρέσει 3. Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι η διαφορά των βημάτων που έκανε (<math>50-3=47</math>).</li> </ul> <table border="1" data-bbox="774 1164 981 1400"> <tr><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td></tr> <tr><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td></tr> <tr><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td></tr> <tr><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td></tr> <tr><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td></tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Συμπληρωματική πρόσθεση.</b> Για παράδειγμα, το παιδί ξεκινά από τον αριθμό 28 και προσθέτει 2 μονάδες (2 βήματα προς τα δεξιά). Στη συνέχεια, μετακινείται 4 βήματα προς τα κάτω, για να προσθέσει 40. Ακολούθως, μετακινείται 5 βήματα προς τα δεξιά, για να προσθέσει 5. Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι το άθροισμα των βημάτων μετακίνησης (<math>2 + 40 + 5 = 47</math>).</li> </ul> <table border="1" data-bbox="718 1624 1029 1848"> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr> <tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td></tr> <tr><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td><td>50</td></tr> <tr><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td></tr> <tr><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td>70</td></tr> <tr><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td><td>80</td></tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Ανάλυση αφαιρετέου.</b> Για παράδειγμα το παιδί ξεκινά από τον αριθμό 75 και αφαιρεί 5 μονάδες (5 βήματα προς τα αριστερά). Στη συνέχεια μετακινείται 2 βήματα προς τα πάνω, για να αφαιρέσει 20. Στη συνέχεια μετακινείται 3 βήματα αριστερά για</li> </ul> | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 24 | 25   | 26 | 27 | 28 | 29 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 34 | 35   | 36 | 37 | 38 | 39 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 44 | 45   | 46 | 47 | 48 | 49 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 54 | 55   | 56 | 57 | 58 | 59 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 64 | 65   | 66 | 67 | 68 | 69 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 74 | 75   | 76 | 77 | 78 | 79 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 11 | 12   | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 21 | 22   | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 31 | 32   | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 41 | 42   | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 51 | 52   | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 61 | 62   | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 71 | 72   | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

να αφαιρέσει 3. Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι ο αριθμός που καταλήγουμε (47).

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |

Annotations: A box around 38-39 with '-3' and an arrow from 39 to 38. A box around 49-50 with '-20' and an arrow from 50 to 49. A box around 62-63 with '-5' and an arrow from 63 to 62. A box around 74-75 with an arrow from 75 to 74.

5

**Ενδεικτική απάντηση:**

(α) Η ενέργεια της εκπαιδευτικού επιδιώκει να επισημάνει στη Μαρία ότι οι πρώτες ενέργειες συμπεριελάμβαναν ανταλλαγή των χιλιάδων με εκατοντάδες και συνεπώς, μοίρασμα εκατοντάδων. Έτσι, η Μαρία θα αντιληφθεί ότι το αποτέλεσμα της είναι λανθασμένο, αφού στο πρώτο στάδιο του αλγόριθμου μοίρασε εκατοντάδες και το πηλίκο θα έπρεπε να ήταν τριψήφιος αριθμός.

(β) Η Μαρία μπορεί να σχηματίσει τον αριθμό 4032, με υλικό Dienes ( $4X+0E+3\Delta+2M$ ) και στη συνέχεια να τον μοιράσει στα ίσα σε 8 ομάδες. Για τον σκοπό αυτό, χρειάζεται να έχει μπροστά της 8 κουτιά ή 8 χαρτόνια, μέσα/πάνω στα οποία θα τοποθετεί το υλικό που μοιράζει.

Η Μαρία παρατηρεί ότι δεν μπορεί να μοιράσει τις 4X σε 8 ίσα μέρη και θα πρέπει να ανταλλάξει τις 4X με 40E και μετά να τις μοιράσει σε 8 ίσα μέρη, μέσα στα 8 κουτιά ή πάνω στα 8 χαρτόνια. Παρατηρεί ότι, σε κάθε μέρος τοποθετεί 5E. Η Μαρία σημειώνει 5 στο πηλίκο και αφαιρεί 40E στο αριστερό μέρος της διαίρεσης, καθώς δεν περισσεύει εκατοντάδα.

Ακολουθως, συνεχίζει μοιράζοντας τις 3Δ, οι οποίες δεν διαιρούνται σε 8 ίσα μέρη. Σημειώνει 0 στο πηλίκο, δίπλα από το 5. Ανταλλάζει τις 3Δ με 30M, γίνονται 32M και καταγράφει το 32 στο αριστερό μέρος. Μοιράζει τις 32M σε 8 ίσα μέρη και σε κάθε κουτί τοποθετεί 4M. Γράφει 4 στο πηλίκο. Αφαιρεί κατακόρυφα τις 32M στο αριστερό μέρος και βρίσκει υπόλοιπο 0. Σε κάθε κουτί/χαρτόνι η Μαρία έχει σχηματίσει τον αριθμό 504 (πηλίκο).

6

**Ενδεικτικοί τρόποι επίλυσης:**

- **Πολλαπλασιαστική σύγκριση:** Τα παιδιά προσθέτουν κουβάδες μέχρι να φτάσουν στο συνολικό αριθμό των 120 κουβάδων, διπλασιάζοντας, τριπλασιάζοντας κλ.π. τους κουβάδες κάθε χρώματος μπογιάς, με βάση τον δοσμένο λόγο. Για τον σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί πίνακας, όπως για παράδειγμα, ο πιο κάτω:

| Κουβάδες μπλε μπογιάς | Κουβάδες κίτρινης μπογιάς | Συνολικός αριθμός κουβάδων |
|-----------------------|---------------------------|----------------------------|
| 5                     | 3                         | 8                          |
| 10                    | 6                         | 16                         |
| 15                    | 9                         | 24                         |
| 20                    | 12                        | 32                         |
| 25                    | 15                        | 40                         |
| ...                   | ...                       | ...                        |
| 75                    | 45                        | 120                        |

- **Σύνθεση νέας μονάδας:** Με βάση τον λόγο που δίνεται, ο συνολικός αριθμός των κουβάδων, για να δημιουργηθεί το επιθυμητό χρώμα, είναι 8 (νέα μονάδα). Για να συμπληρωθούν 120 κουβάδες, πρέπει να πολλαπλασιαστεί η νέα μονάδα επί 15 φορές ( $120 \div 8$ ). Άρα, ο αριθμός των μπλε κουβάδων θα είναι ίσος με  $15 \times 5 = 75$  και ο αριθμός των κίτρινων κουβάδων θα είναι ίσος με  $15 \times 3 = 45$

- **Σχηματισμός αναλογίας και αξιοποίηση των ιδιοτήτων των αναλογιών** (το γινόμενο άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων): Π.χ., για τον υπολογισμό των κουβάδων με μπλε χρώμα σχηματίζεται η αναλογία:  $\frac{5}{8} = \frac{x}{120} \Rightarrow 8x = 5 \times 120 \Rightarrow x = 75$ .

7

**Ενδεικτικός τρόπος επίλυσης:**

Αναμένονται δραστηριότητες στις οποίες τα παιδιά θα ταξινομήσουν τρίγωνα, συνδυάζοντας το κριτήριο για το μήκος των πλευρών και το μέτρο των γωνιών. Αναμένεται να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι, τα ισόπλευρα τρίγωνα ταξινομούνται μόνο στην ομάδα ισόπλευρα-οξυγώνια, γιατί με βάση τον ορισμό του ισόπλευρου τριγώνου, όλες οι γωνίες του είναι οξείες. Συνεπώς οι 7 κατηγορίες είναι: σκαληνό – οξυγώνιο, σκαληνό – ορθογώνιο, σκαληνό – αμβλυγώνιο, ισοσκελές – οξυγώνιο, ισοσκελές – ορθογώνιο, ισοσκελές – αμβλυγώνιο και ισόπλευρο-οξυγώνιο.

Η συμπλήρωση ενός πίνακα διπλής εισόδου, όπως αυτός που ακολουθεί, μπορεί να αξιοποιηθεί σε διαφορετικές προσεγγίσεις:

|            | Ισοσκελές | Ισόπλευρο | Σκαληνό |
|------------|-----------|-----------|---------|
| Ορθογώνιο  |           |           |         |
| Αμβλυγώνιο |           |           |         |
| Οξυγώνιο   |           |           |         |

**Ενδεικτικές δραστηριότητες:**

• **Αξιοποίηση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας**

Δίνονται κατασκευασμένα τρία τρίγωνα: ένα ισόπλευρο, ένα ισοσκελές και ένα σκαληνό (τα χαρακτηριστικά του τριγώνου, ως προς τις πλευρές παραμένουν αμετάβλητα κατά το σύρσιμο). Ζητείται από τα παιδιά να σύρουν κατάλληλα τις κορυφές τους, ώστε σε κάθε περίπτωση να κατασκευάσουν τρεις οξείες, μία ορθή και μία αμβλεία γωνία. Ζητείται από τα παιδιά να συμπληρώσουν στον πίνακα διπλής εισόδου ποιο είδος τριγώνου κατασκεύασαν κάθε φορά. Εναλλακτικά, δίνεται ένα τυχαίο τρίγωνο. Ζητείται από τα παιδιά σύροντας τις κορυφές του τριγώνου, να κατασκευάσουν τρίγωνα με βάση τις 9 κατηγορίες του πίνακα. Τα παιδιά απαντούν στο ερώτημα κατά πόσον κατάφεραν να κατασκευάσουν τρίγωνα που να ταξινομούνται σε όλα τα κελιά του πίνακα.

|   |  |
|---|--|
|   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Ταξινόμηση καρτών με τρίγωνα</b><br/>Δίνονται κάρτες με τρίγωνα (2 από κάθε κατηγορία). Ζητείται από τους μαθητές να ταξινομήσουν το κάθε τρίγωνο με βάση τα κελιά του πίνακα. Τα παιδιά απαντούν στο ερώτημα κατά πόσον υπάρχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο σε κάθε κελί του πίνακα.</li> </ul> <p>(β) (i) <b><u>Ενδεικτικές δυσκολίες μαθητών στην αναγνώριση και κατασκευή του ύψους τριγώνου:</u></b></p> <p>(1) Στην περίπτωση του αμβλυγώνιου τριγώνου, το ύψος τέμνει την απέναντι πλευρά στην προέκτασή της.<br/> (2) Στην περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου, το ύψος ταυτίζεται με μία από τις κάθετες πλευρές.<br/> (3) Σε ένα τρίγωνο υπάρχουν 3 ύψη.</p> <p>(ii) Η δυναμική κατασκευή μπορεί να αξιοποιηθεί για την αντιμετώπιση και των τριών δυσκολιών. Για τις δυσκολίες 1 και 2, ο μαθητής μπορεί να σύρει την κορυφή Α του τριγώνου, ώστε η γωνία Γ να γίνει ορθή και στη συνέχεια αμβλεία και να παρατηρήσει πώς μεταβάλλεται η θέση του ύψους στο τρίγωνο, σε κάθε περίπτωση. Για τη δυσκολία 3, μπορούν να κατασκευαστούν και τα άλλα δύο ύψη του τριγώνου, ώστε ο μαθητής σύροντας μία κορυφή του τριγώνου να παρατηρήσει ότι τα τρία ευθύγραμμα τμήματα (ύψη) τέμνουν κάθετα την απέναντι πλευρά.</p>  |
| 8 | <p>(α) <b><u>Ενδεικτική εξήγηση για κάθε κλάσμα:</u></b></p> <p><math>\frac{5}{100}</math>: Το κλάσμα αυτό μετατρέπεται αμέσως σε ποσοστό, γιατί ο παρονομαστής είναι το 100. Ο αριθμητής του κλάσματος θα είναι το ποσοστό.</p> <p><math>\frac{1}{5}</math>: Το συγκεκριμένο κλάσμα δεν είναι δεκαδικό κλάσμα. Άρα, χρειάζεται να μετατραπεί σε ισοδύναμο κλάσμα, με παρονομαστή το 100.</p> <p><math>\frac{4}{80}</math>: Το συγκεκριμένο κλάσμα δεν είναι δεκαδικό και δεν μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο, με παρονομαστή το 100. Είναι δυνατόν, όμως, να απλοποιηθεί (<math>\frac{4}{80} = \frac{1}{20}</math>) και στη συνέχεια να μετατραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100.</p> <p><math>\frac{3}{8}</math>: Το συγκεκριμένο κλάσμα δεν είναι δεκαδικό, δεν μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο, με παρονομαστή το 100 και ούτε να απλοποιηθεί σε κλάσμα, που μετατρέπεται σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100. Μπορεί όμως να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο με παρονομαστή το 1000 (<math>\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 37,5\%</math>). Επομένως, το κλάσμα μετατρέπεται σε ποσοστό με δεκαδικά ψηφία.</p> <p><math>\frac{3}{17}</math>: Το συγκεκριμένο κλάσμα δεν είναι δεκαδικό, δεν μετατρέπεται σε ισοδύναμο με παρονομαστή δύναμη του 10. Συνεπώς, για να μετατραπεί σε ποσοστό, αξιοποιείται η έννοια του κλάσματος ως πηλίκου, διαιρώντας τον αριθμητή διά τον παρονομαστή, ο οποίος μπορεί στη συνέχεια να μετατραπεί σε ποσοστό κατά προσέγγιση δεκαδικών ψηφίων (17,65% με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων).</p> |

|    |  |          |   |    |    |    |          |   |   |    |
|----|--|----------|---|----|----|----|----------|---|---|----|
|    | <p>(β) Τα συμπεράσματα στα οποία αναμένεται να καταλήξουν οι μαθητές είναι: Για να μετατραπεί ένα κλάσμα σε ποσοστό πρέπει το κλάσμα αυτό να είναι δεκαδικό κλάσμα, δηλαδή ο παρονομαστής να είναι αριθμός που γράφεται ως δύναμη του 10. Για τη μετατροπή αυτή, αξιοποιείται η ισοδυναμία και η απλοποίηση κλασμάτων. Διαφορετικά, ο αριθμητής διαιρείται διά τον παρονομαστή (κλάσμα ως πηλίκο).</p>   |          |   |    |    |    |          |   |   |    |
| 9  | <p><b><u>Ενδεικτικός τρόπος επίλυσης:</u></b><br/> (α) Από τη 2η σειρά και 3η στήλη σχηματίζεται η εξίσωση:<br/> <math>21 + \Gamma + \Delta = 14 + \Delta + 22</math><br/> <math>21 + \Gamma + \Delta = 14 + \Delta + 22</math><br/> <math>\Gamma = 36 - 21</math><br/> <math>\Gamma = 15</math></p> <table border="1" data-bbox="721 667 1035 936"> <tr> <td>A</td> <td>B</td> <td>14</td> </tr> <tr> <td>21</td> <td>15</td> <td><math>\Delta</math></td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>Z</td> <td>22</td> </tr> </table> <p>Με βάση την πρώτη στήλη και τη μία διαγώνιο, σχηματίζεται η εξίσωση: <math>A + 21 + Z = E + 15 + 14</math><br/> <math>A = 8</math></p> <p>(β) Το μαγικό τετράγωνο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη Στ' τάξη, καθώς εμπλέκονται τα ακόλουθα:<br/> - σχηματισμός εξισώσεων με βάση τις ιδιότητες του μαγικού τετραγώνου<br/> - επίλυση εξισώσεων με τη μέθοδο της διαγραφής<br/> - αντικατάσταση της τιμής μίας μεταβλητής</p>  | A        | B | 14 | 21 | 15 | $\Delta$ | E | Z | 22 |
| A  | B  | 14       |   |    |    |    |          |   |   |    |
| 21 | 15   | $\Delta$ |   |    |    |    |          |   |   |    |
| E  | Z  | 22       |   |    |    |    |          |   |   |    |
| 10 | <p><b><u>Ενδεικτικός τρόπος επίλυσης:</u></b><br/> (α) ΜΚΔ (360,450,990)<br/> <math>360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5</math><br/> <math>450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5</math><br/> <math>990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11</math><br/> <math>\text{ΜΚΔ}(360,450,990) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90</math><br/> <math>360 \div 90 = 4</math>, <math>450 \div 90 = 5</math>, <math>990 \div 90 = 11</math></p> <p>Στο πρώτο τμήμα (360 m) θα φυτευτούν 3 δέντρα (4-1), με απόσταση 90 m μεταξύ τους, στο δεύτερο τμήμα (450 m) θα φυτευτούν 4 δέντρα (5-1), με απόσταση 90 m μεταξύ τους και στο τρίτο τμήμα (990 m) θα φυτευτούν 10 δέντρα (11-1) με απόσταση 90 m μεταξύ τους. Συνολικά, θα φυτευτούν 17 δέντρα.</p> <p>(β) Στο πρόβλημα εμπλέκεται η έννοια του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη (ΜΚΔ). Για να διαχωριστεί κάθε τμήμα σε ίσες αποστάσεις, πρέπει το μήκος κάθε διαστήματος να είναι διαιρέτης του μήκους κάθε τμήματος. Οι αποστάσεις πρέπει να είναι ίσες και στα τρία τμήματα, συνεπώς, ψάχνουμε κοινό διαιρέτη. Για να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός δέντρων που μπορούν να φυτευτούν στα τρία αυτά</p> |          |   |    |    |    |          |   |   |    |



|    |   |
|----|---|
|    | <p>διαστήματα, χρειάζεται οι αποστάσεις μεταξύ των δέντρων να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερες, άρα αναζητούμε τον ΜΚΔ των τριών τμημάτων. Για τον υπολογισμό του ΜΚΔ αξιοποιείται η ανάλυση των τριών αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.</p>  |
| 11 | <p><b><u>Ενδεικτικός τρόπος επίλυσης:</u></b></p> <p>Ο συλλογισμός της Άννας στηρίζεται στο γεγονός ότι, αν επιλέξουμε 5 διαδοχικούς ακεραίους, 2 από αυτούς θα είναι περιττοί και οι άλλοι 3 άρτιοι (περίπτωση 1) ή 3 περιττοί και 2 άρτιοι (περίπτωση 2). Στην περίπτωση 1 το άθροισμα τους θα είναι άρτιος αριθμός, ενώ στην περίπτωση 2 περιττός (το άθροισμα δύο άρτιων ή δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος αριθμός, το άθροισμα ενός περιττού και ενός άρτιου είναι περιττός αριθμός).</p> <p>Το άθροισμα των πέντε αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 10, άρα άρτιος αριθμός. Επομένως, ισχύει η περίπτωση 1 (άθροισμα τριών άρτιων και δύο περιττών) και ο μεσαίος όρος θα είναι οπωσδήποτε άρτιος και όχι περιττός (Επιλογή Γ).</p> |