ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019

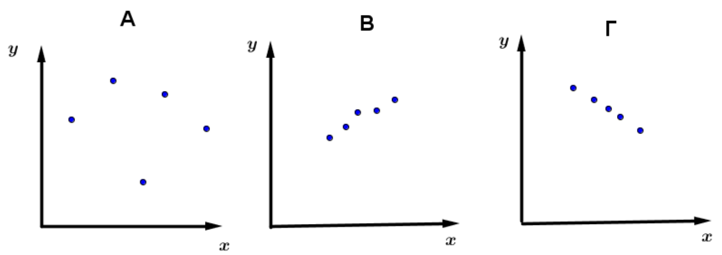
Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
8:00–11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Α1 Δίνονται τα πιο κάτω διαγράμματα διασποράς Α, Β και Γ. Να ταξινομήσετε τα διαγράμματα με βάση τη γραμμική συσχέτιση από την πιο ισχυρή στη πιο ασθενή.



Λύση:

Γ, Β, Α

Α2 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε να ισχύει:

$$\int \lambda x^{\kappa+2} dx = x^8 + c$$

Λύση:

Α΄ τρόπος

$(x^8)' = \lambda x^{\kappa+2}$

$8x^7 = \lambda x^{\kappa+2}$ τότε $\boldsymbol{\lambda = 8}$ και $\kappa + 2 = 7$ τότε $\boldsymbol{\kappa = 5}$

Β΄ τρόπος

$\int \lambda x^{\kappa+2} dx = x^8 + c$ τότε

$\int \lambda x^{\kappa+2} dx = \frac{\lambda}{\kappa+2+1} x^{\kappa+2+1} + c$, $\kappa \neq -3$ τότε

$\frac{\lambda}{\kappa+2+1} x^{\kappa+2+1} + c = x^8 + c$

$\frac{\lambda}{\kappa+3} = 1$ και $\kappa + 3 = 8$

$\kappa = 5$ και $\lambda = 8$

Α3 Δίνονται τα ψηφία $\mathbf{1, 3, 6, 7, 8, 9}$.

Να βρείτε το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία χωρίς επανάληψη ψηφίου.

Λύση:

Το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών με βάση την αρχή της απαρίθμησης είναι:

Χ	Ε	Δ	Μ
6	5	4	3

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{360}$ **αριθμοί**

Α4 Δίνονται οι μεταβλητές x, y. Με βάση τις ετήσιες μετρήσεις έντεκα χρόνων υπολογίστηκαν οι τυπικές τους αποκλίσεις $S_x = 36{,}3$, $S_y = 18{,}27$, οι μέσοι όροι $\bar{x} = 34$, $\bar{y} = 22{,}5$ και το άθροισμα των γινομένων τους $\Sigma xy = 1444{,}24$.

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης (r) μεταξύ των μεταβλητών x και y.

β) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Λύση:

α) Είναι $\nu = 11$ και

$r = \frac{\Sigma xy - \nu \bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y} = \frac{1444{,}24 - 11 \cdot 34 \cdot 22{,}5}{11 \cdot 36{,}3 \cdot 18{,}27} = -0{,}956$

β) Υπάρχει ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση (ή σχεδόν τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση).

Α5 Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\varphi''(x) = x(3-x)(x+4)^2$, $\forall x \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την κυρτότητα.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της φ παρουσιάζει σημεία καμπής.

Λύση:

α)

$\varphi''(x) = 0$

$x(3-x)(x+4)^2 = 0$

$x = 0$ ή $x = 3$ ή $x = -4$ (*διπλή ρίζα)*

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της φ''

x	$-\infty$		-4		0		3		$+\infty$
φ''		−	0	−	0	+	0	−	
φ		⌒		⌒	ΣΚ	⌣	ΣΚ	⌒	

Η συνάρτηση φ είναι :

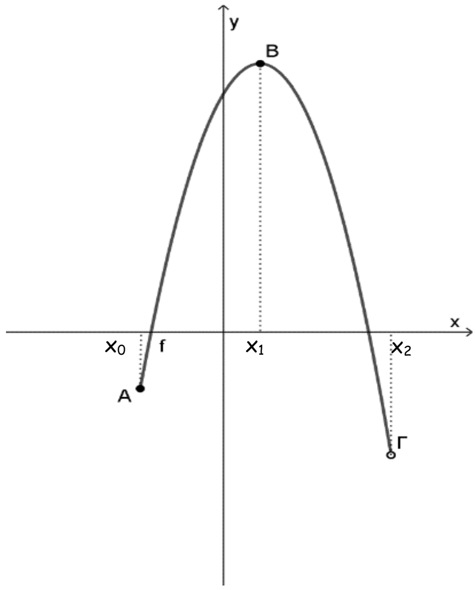
κυρτή στο διάστημα $[0,3]$

κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$

(β) Η γραφική παράσταση της φ παρουσιάζει σημεία καμπής

στο $x = 0$ ή $\sigma\tau o$ $(0, \varphi(0))$ και στο $x = 3$ ή $\sigma\tau o$ $(3, \varphi(3))$

Α6 Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[x_0, x_2)$. Τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ έχουν τετμημένες x_0, x_1, x_2 αντίστοιχα και $f'(x_1) = 0$.



α) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης f στο διάστημα $(x_{1\,,}x_2)$.

Λύση:

(α) Στο $x = x_1$ (ή $στο$ $\mathrm{B}(x_1, f(x_1))$) παρουσιάζει τοπικό και ολικό μέγιστο το $f(x_1)$.

Στο $x = x_0$ (ή $στο$ $A(x_0, f(x_0))$) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(x_0)$.

(β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_{0,}x_1]$

και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_{1,}x_2)$.

(γ) Στο διάστημα $(x_{1,}x_2)$ είναι $f'(x) < 0$

Α7 Ένα μικρό καταφύγιο σκύλων φιλοξενεί οκτώ (8) αρσενικούς και έξι (6) θηλυκούς σκύλους. Μια μέρα φτάνει στο καταφύγιο μια φιλόζωη οικογένεια η οποία θέλει να υιοθετήσει τέσσερις (4) σκύλους.

α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των σκύλων που θα υιοθετήσει η οικογένεια, χωρίς κανένα περιορισμό ως προς το φύλο.

β) Αν η οικογένεια επιλέξει τους τέσσερις (4) σκύλους στην τύχη, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

i) Α: να επιλέξει ακριβώς ένα αρσενικό σκύλο,

ii) Β: να επιλέξει το πολύ ένα θηλυκό σκύλο.

Λύση:

α) Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων επιλογής χωρίς κανένα περιορισμό είναι:

$$\binom{14}{4} = \frac{14!}{10!4!} = 1001$$

β) Αν Ω ο δειγματικός χώρος των διαφορετικών τρόπων επιλογής των σκύλων χωρίς κανένα περιορισμό, τότε είναι:

$$\nu(\Omega) = 1001$$

ι) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Α είναι:

$$\nu(A) = \binom{8}{1}\binom{6}{3} = 160$$

Τότε

$$P(A) = \frac{\binom{8}{1}\binom{6}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{160}{1001}$$

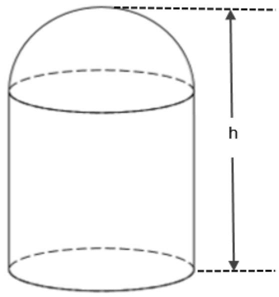
ιι) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Β είναι:

$$\nu(B) = \binom{6}{0}\binom{8}{4} + \binom{6}{1}\binom{8}{3} = 406$$

Τότε

$$P(B) = \frac{406}{1001} = \frac{58}{143}$$

A8 Στο πλαίσιο της ανοικοδόμησης του καθεδρικού ναού της Παναγίας των Παρισίων μετά την καταστροφική πυρκαγιά, πρόκειται να κατασκευαστεί καμπαναριό με όγκο 792πm^3, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το καμπαναριό θα αποτελείται από ημισφαίριο και κύλινδρο ίσης ακτίνας. Αν το ύψος του κυλίνδρου θα είναι τριπλάσιο από την ακτίνα του, να υπολογίσετε το ύψος (h) του καμπαναριού.



Λύση:

$\upsilon_{\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon} = 3R$

$V_{\kappa\upsilon\lambda} + V_{\eta\mu} = 792\pi$

$\Rightarrow \pi R^2 \upsilon + \frac{2}{3}\pi R^3 = 792\pi$

$\Rightarrow R^2 \cdot 3R + \frac{2}{3}R^3 = 792$

$\Rightarrow 3R^3 + \frac{2}{3}R^3 = 792$

$\Rightarrow \frac{11}{3}R^3 = 792$

$\Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6m$

$\Rightarrow \upsilon_{\kappa\upsilon\lambda} = 3 \cdot 6 = 18m \Rightarrow$

$h = \upsilon_{\kappa\upsilon\lambda} + R = 18 + 6 = 24m \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h = 24m}$

A9 Η Αυγή κάθε βράδυ, είτε παρακολουθεί τηλεόραση είτε διαβάζει. Η πιθανότητα να παρακολουθεί τηλεόραση είναι $\frac{4}{5}$. Όταν παρακολουθεί τηλεόραση η πιθανότητα να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα είναι $\frac{3}{4}$, ενώ όταν διαβάζει η πιθανότητα να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα είναι $\frac{1}{3}$.

α) Να βρείτε την πιθανότητα κάποιο βράδυ η Αυγή να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα.

β) Δεδομένου ότι κάποιο βράδυ η Αυγή αποκοιμήθηκε στην πολυθρόνα, να βρείτε την πιθανότητα να παρακολουθούσε τηλεόραση.

Λύση:

Ορίζουμε τα πιο κάτω ενδεχόμενα:

T : *Η Αυγή παρακολουθεί τηλεόραση*

$\varDelta$: *Η Αυγή διαβάζει*

K : *Η Αυγή να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα*

(α) $P(K) = P(T) \cdot P(K/T) + P(\varDelta) \cdot P(K/\varDelta)$

$$P(K) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(β) $P(T/K) = \frac{P(T \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$

Α10 Η ποσότητα ενός φαρμάκου (σε mg), στον οργανισμό του ανθρώπου, δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(\mathrm{t})$, όπου t είναι ο χρόνος μετά τη λήψη του φαρμάκου (σε ώρες). Δίνεται ότι $\Pi'(\mathrm{t}) = 12 - 6\mathrm{t}, \mathrm{t} \geq 0$. Μια ώρα μετά από τη λήψη του φαρμάκου υπάρχουν 9 mg φαρμάκου στον οργανισμό του ανθρώπου.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Π δίνεται από τον τύπο $\Pi(\mathrm{t}) = 12t - 3t^2, \mathrm{t} \geq 0$.

β) Να βρείτε:

i) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου η μέγιστη δόση του φαρμάκου,

ii) τη μέγιστη δόση του φαρμάκου (σε mg), που υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου,

iii) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του, το φάρμακο αυτό ΔΕΝ θα υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου.

Λύση:

(α) $\Pi(t) = \int \Pi'(t)dt = \int(12 - 6t)dt = 12t - 3t^2 + c$

$\Pi(1) = 9 \;\; \Rightarrow 12 - 3 + c = 9 \Rightarrow c = 0$

$\Pi(t) = 12t - 3t^2$

(β) i) Για να βρούμε σε πόση ώρα ο οργανισμός έχει τη μέγιστη δόση πρέπει:

$$\Pi'(t) = 0 \Rightarrow 12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2$$

Χρησιμοποιούμε το β΄κριτήριο τοπικών ακροτάτων

$\Pi''(t) = -6$ τότε $\Pi''(2) = -6 < 0$ τότε

στο $t = 2$ παρουσιάζει μέγιστο

Συνεπώς σε **2 ώρες** μετά τη λήψη του φαρμάκου θα υπάρχει στον οργανισμό η μέγιστη δόση του φαρμάκου.

ii) Μέγιστη δόση:

$\Pi(2) = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = \mathbf{12mg}$

iii) Δεν θα υπάρχει στον οργανισμό καθόλου φάρμακο αν

$\Pi(t) = 0$

$12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(4 - t) = 0$ τότε $t = 0$ ή $t = 4$

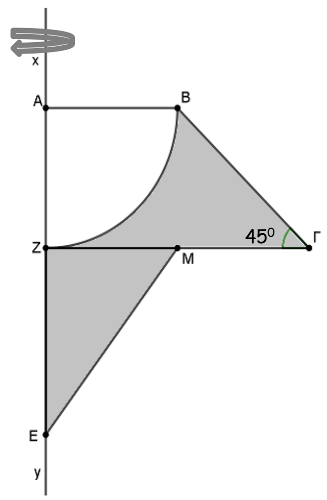
Συνεπώς **4 ώρες** μετά τη λήψη του φαρμάκου δεν θα υπάρχει καθόλου φάρμακο στον οργανισμό του ανθρώπου.

ΜΕΡΟΣ Β΄:

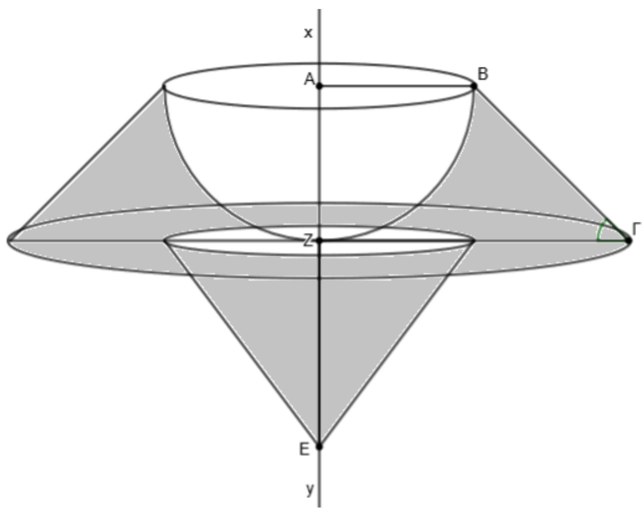
Β1 Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $\mathrm{AB\Gamma Z}$, με γωνίες $\mathrm{BAZ} = \mathrm{AZ\Gamma} = 90^0$, $\mathrm{B\Gamma Z} = 45^0$. Με κέντρο το A και ακτίνα $\mathrm{AB} = 3\mathrm{cm}$, γράφουμε τόξο BZ μέσα στο $\mathrm{AB\Gamma Z}$. Το σημείο E βρίσκεται πάνω στην ευθεία AZ (xy), έτσι ώστε το τρίγωνο ZME να είναι ορθογώνιο, με $\mathrm{ZE} = 4\mathrm{cm}$ και M μέσο της $\mathrm{Z\Gamma}$. Το σκιασμένο χωρίο $(\mathrm{B\Gamma MEZB})$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (AZ). Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν της επιφάνειας και

β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Λύση:



Από το B φέρουμε κάθετη στη $ZΓ$. Σχηματίζεται τετράγωνο $ABM'Z$ πλευράς $3cm$ και ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $BM'Γ$ ($\measuredangle BΓZ = 45^0$) με $BM' = M'Γ = 3\ cm.$ Άρα το M' είναι το μέσο της $ZΓ$ με το M' να ταυτίζεται με το M. Έτσι $ZΓ = 6\ cm$ και $ZM = 3\ cm$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{BMΓ}$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$(BM)^2 + (MΓ)^2 = (BΓ)^2$

$3^2 + 3^2 = (BΓ)^2$

$(BΓ) = 3\sqrt{2}cm$

Ημισφαίριο	**Κόλουρος Κώνος**	**Κώνος**
$R = AB = 3cm$ $V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi\cdot 3^3$ $\boldsymbol{V = 18\pi cm^3}$ $E = \frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2 = 2\pi\cdot 3^2$ $\boldsymbol{E = 18\pi\ cm^2}$	$R = AB = 3cm$ $\rho = ZΓ = 6cm$ $\lambda = BΓ = 3\sqrt{2}cm$ $\upsilon = AZ = 3cm$ $V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$ $= \frac{\pi\cdot 3}{3}(3^2 + 3\cdot 6 + 6^2)$ $= \pi(9 + 18 + 36)$ $\boldsymbol{V = 63\pi cm^3}$ $E_K = \pi(R+\rho)\lambda$ $= \pi(3+6)\cdot 3\sqrt{2}$ $\boldsymbol{E_K = 27\pi\sqrt{2}cm^2}$ **Δακτύλιος** $E_\delta = \pi 6^2 - \pi 3^2$ $\boldsymbol{E_\delta = 27\pi cm^2}$	$R = AB = 3cm$ $\upsilon = ZE = 4cm$ $\lambda^2 = \upsilon^2 + R^2$ $\lambda^2 = 9 + 16 = 25$ $\lambda = ME = 5cm$ $V = \frac{\pi R^2\upsilon}{3} = \frac{\pi\cdot 9\cdot 4}{3}$ $\boldsymbol{V = 12\pi\ cm^3}$ $E_K = \pi R\lambda = \pi\cdot 3\cdot 5$ $\boldsymbol{E_K = 15\pi\ cm^2}$

$V_{o\lambda} = V_{\kappa.\kappa\acute{\omega}\nu} + V_{\kappa\acute{\omega}\nu} - V_{\eta\mu\sigma}$

$V_{o\lambda} = 63\pi + 12\pi - 18\pi$

$\boldsymbol{V_{o\lambda} = 57\pi\ cm^3}$

$E_{o\lambda} = E_{\eta\mu\sigma} + E_{\kappa.\kappa\acute{\omega}\nu} + E_\delta + E_{\kappa\acute{\omega}\nu}$

$E_{o\lambda} = 18\pi + 27\pi\sqrt{2} + 27\pi + 15\pi = 60\pi + 27\sqrt{2}\pi$

$\boldsymbol{E_{o\lambda} = (60 + 27\sqrt{2})\pi\ cm^2}$

B2 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 6x^3 - ax^2 + \beta x + 1,\ x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των a, β, ώστε η f να έχει στη θέση $x_1 = 2$ σημείο καμπής και στη θέση $x_2 = 1$ τοπικό ακρότατο.

β) Αν $a = 36$ και $\beta = 54$, να βρείτε τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων $\alpha, \beta, f(2), f(1), 125$.

Λύση:

(α)

$f(x) = 6x^3 - ax^2 + \beta x + 1$ τότε

$f'(x) = 18x^2 - 2ax + \beta$ και $f''(x) = 36x - 2a$

Στο $x_2 = 1$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε

$f'(1) = 0 \Rightarrow 18 - 2\alpha + \beta = 0$

$-2\alpha + \beta = -18$ (1)

Στο $x_1 = 2$ η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο καμπής τότε

$f''(2) = 0 \Rightarrow 72 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 36}$ (2)

Από (1) και $(2) \Rightarrow -72 + \beta = -18 \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 54}$

Για $\alpha = 36$ και $\beta = 54$ τότε $f(x) = 6x^3 - 36 + 54x + 1$

Θα ελέγξουμε αν στο $x_2 = 1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και στο $x_1 = 2$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής.

$f'(x) = 18x^2 - 72x + 54$ και $f''(x) = 36x - 72$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$18x^2 - 72x + 54 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = 3$

Από β΄ κριτήριο

$f''(1) = 36 \cdot 1 - 54 < 0$ τότε στο $x = 1$ παρουσιάζει μέγιστο

$f''(2) = 36 \cdot 3 - 54 > 0$ τότε στο $x = 3$ παρουσιάζει ελάχιστο

$f''(x) = 0 \Rightarrow 36x - 72 = 0 \Rightarrow x = 2$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f''

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
f''	− 0 +
f	ΣΚ

Άρα στο $x = 2$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής

Συμπέρασμα: οι ζητούμενες τιμές των α, β, είναι $\boldsymbol{\alpha = 36}$ και $\boldsymbol{\beta = 54}$

β) Πρώτα υπολογίζουμε τις τιμές:

$f(1) = 6 - 36 + 54 + 1 = 25$

$f(2) = 6 \cdot 8 - 36 \cdot 4 + 54 \cdot 2 + 1 = 13$

Κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: **13, 25, 36, 54, 125**

$\nu = 5$

$\frac{\nu+1}{2} = 3 \Rightarrow$ η διάμεσος βρίσκεται στην τρίτη θέση $\boldsymbol{x_\delta = x_3 = 36}$

<u>Ενδοτεταρτημοριακό εύρος</u>

$$Q_1 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{13+25}{2} = 19$$

$$Q_3 = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{54 + 125}{2} = 89{,}5$$

Τότε

$IQR = Q_3 - Q_1 = 89{,}5 - 19 = 70{,}5$ τότε $\boldsymbol{IQR = 70{,}5}$

B3 Δίνεται η λέξη **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**

α) i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

ii) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.

β) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς της λέξης **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**,

να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

i) Α: Ο αναγραμματισμός να έχει τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.

ii) Β: Ο αναγραμματισμός να μην έχει τα **Α** σε συνεχόμενες θέσεις.

Λύση:

α) i) $\frac{9!}{3!2!} = 30240$

ii) $\boxed{\text{I I A A A}}$ Δ Μ Ν Τ

$$5! \cdot \frac{5!}{2!\,3!} = 1200$$

β) i) $P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{1200}{30240} = \frac{5}{126}$

ii) $\boxed{\text{A A A}}$ Δ Ι Ι Μ Ν Τ

$$\nu(B') = \frac{7!}{2!} = 2520$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{\nu(B')}{\nu(\Omega)} = 1 - \frac{2520}{30240} = \frac{11}{12}$$

B4 α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $(1,0)$. Αν $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \forall x \epsilon \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

β) Αφού βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης G_f της συνάρτησης f με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής της, τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Λύση:

α)$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 4x + 1)dx = x^3 - 2x^2 + x + c$

$f(1) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 1 - 2 + 1 + c \;\;\Rightarrow \boldsymbol{c = 0}$

Τότε $f(x) = x^3 - 2x^2 + x,\ \forall x \epsilon \mathbb{R}$

β) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Για $x = 0$: $f(0) = 0$, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Για $y = 0$: $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)^2 = 0$,

$x = 0$ ή $x = 1$ $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$

Μονοτονία και τοπικά ακρότατα:

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x-1) = 0$

τότε $x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f'

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	Τ.Μ	↘	Τ.Ε	↗	

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$ τότε $\text{ΤΜ}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ και

$f(1) = 0$ τότε $\text{ΤΕ}(1,0)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και $[\,1, +\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Κυρτότητα και Σημεία καμπής:

$f''(x) = 6x - 4$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f''

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f''		−	0	+	
f			ΣΚ		

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8 - 24 + 18}{27} = \frac{2}{27} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ΣΚ}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{27}}\right)$$

Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{2}{3}\,\right]$ και

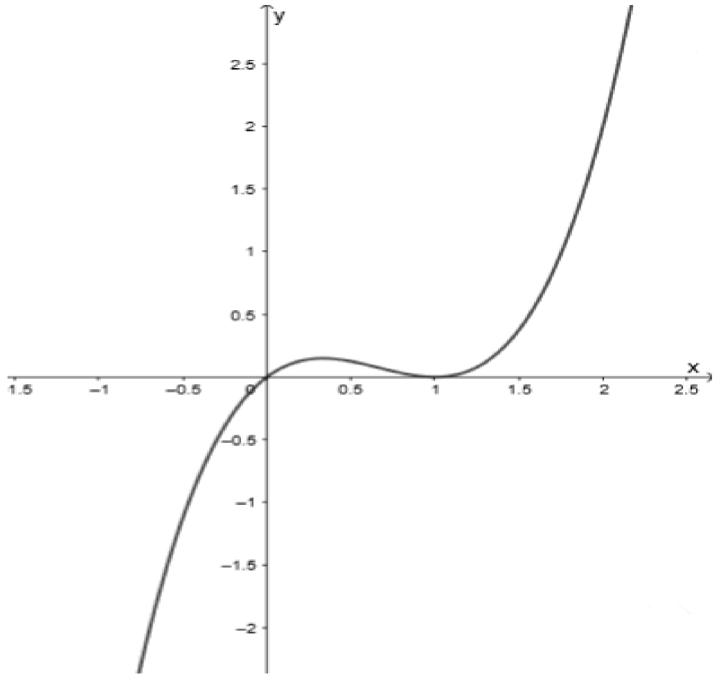
κυρτή στο διάστημα $\left[\,\frac{2}{3}, +\infty\right)$

Συμπεριφορά στα άκρα του Π.Ο.:

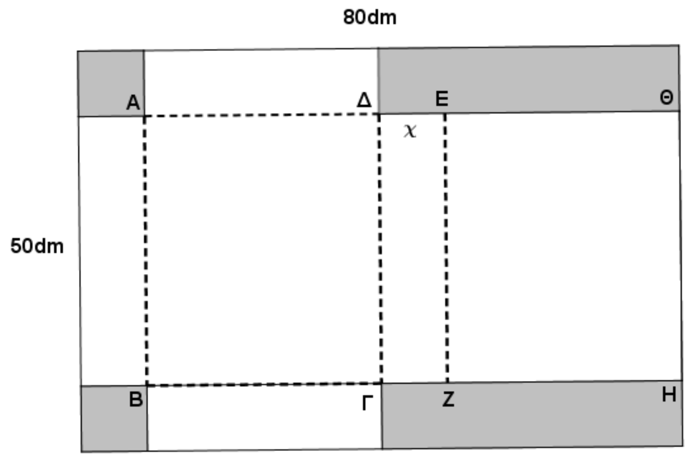
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Γραφική Παράσταση



B5 Δίνεται ένα χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων $80dm \times 50dm$. Πρόκειται να κατασκευαστεί με αυτό ένα κλειστό κουτί, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ύψους $\mathrm{\Delta E} = x\ dm$ με βάσεις τα ορθογώνια $\mathrm{EZH\Theta}$ και $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σκιασμένα μέρη του σχήματος θα αφαιρεθούν. (Οι διπλώσεις θα γίνουν κατά μήκος των τμημάτων $\mathrm{AB}, \mathrm{\Gamma\Delta}, \mathrm{EZ}, \mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{B\Gamma}$).



α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$V(x) = (2x^3 - 130x^2 + 2000x)\ dm^3$$

β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του κουτιού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.

Λύση:

α) Έστω $A\Delta = y$ και $\Delta E = x$ και $AB = 50 - 2x$, $0 < x < 25$

τότε $2x + 2y = 80$ τότε $y = 40 - x$

$$V = E_\beta \upsilon = (A\Delta)(AB)(\Delta E)$$

$$V(x) = (40 - x)(50 - 2x)x$$

$$V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2000x$$

β) $V'(x) = 6x^2 - 260x + 2000$

$V'(x) = 0$ τότε $6x^2 - 260x + 2000 = 0$

$(3x - 100)(x - 10) = 0$ τότε

$x = 10$ ή $x = \frac{100}{3}$ απορρίπτεται, εκτός Π.Ο.

Α΄ τρόπος

$V''(x) = 12x - 260$

$V''(10) = 12 \cdot 10 - 260 < 0$ τότε στο $x = 10$ ο όγκος γίνεται μέγιστος

Β΄ τρόπος

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της V'

x	0		10		25	$\frac{100}{3}$	
V'		+	0	−		0	+
V		↗	Τ.Μ	↘			

Στο $x = 10$ ο όγκος γίνεται μέγιστος

Άρα οι διαστάσεις του κουτιού είναι

$A\Delta = 40 - 10 = \mathbf{30dm}$

$AB = 50 - 2 \cdot 10 = \mathbf{30dm}$

$\Delta E = \mathbf{10dm}$

Τέλος