

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

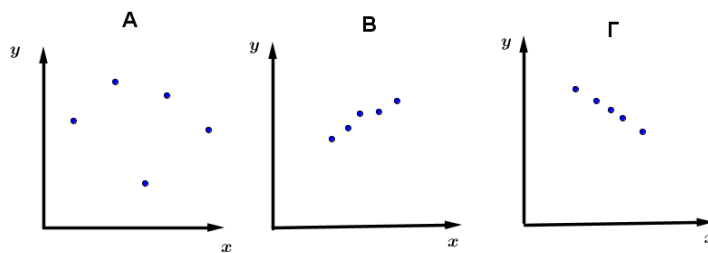
8:00–11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ **ΕΞΙ (6)** ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ, το οποίο αποτελείται
από (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1 Δίνονται τα πιο κάτω διαγράμματα διασποράς A, B και Γ. Να ταξινομήσετε τα διαγράμματα με βάση τη γραμμική συσχέτιση από την πιο ισχυρή στη πιο ασθενή.



A2 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε να ισχύει:

$$\int \lambda x^{\kappa+2} dx = x^8 + c$$

A3 Δίνονται τα ψηφία 1, 3, 6, 7, 8, 9.

Να βρείτε το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία χωρίς επανάληψη ψηφίου.

A4 Δίνονται οι μεταβλητές x, y . Με βάση τις ετήσιες μετρήσεις έντεκα χρόνων υπολογίστηκαν οι τυπικές τους αποκλίσεις $S_x = 36,3$, $S_y = 18,27$, οι μέσοι όροι $\bar{x} = 34$, $\bar{y} = 22,5$ και το άθροισμα των γινομένων τους $\Sigma xy = 1444,24$.

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης (r) μεταξύ των μεταβλητών x και y .

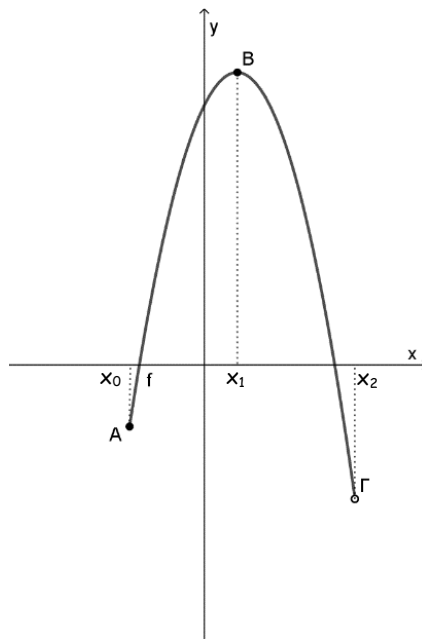
β) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

A5 Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\varphi''(x) = x(3-x)(x+4)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την κυρτότητα.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της φ παρουσιάζει σημεία καμπής.

A6 Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[x_0, x_2]$. Τα σημεία A, B, Γ έχουν τετμημένες x_0, x_1, x_2 αντίστοιχα και $f'(x_1) = 0$.



α) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης f στο διάστημα (x_1, x_2) .

A7 Ένα μικρό καταφύγιο σκύλων φιλοξενεί οκτώ (8) αρσενικούς και έξι (6) θηλυκούς σκύλους. Μια μέρα φτάνει στο καταφύγιο μια φιλόζη οικογένεια η οποία θέλει να υιοθετήσει τέσσερις (4) σκύλους.

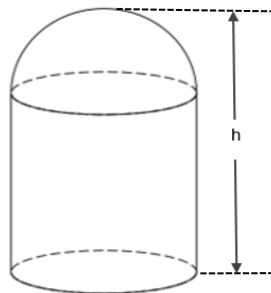
α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των σκύλων που θα υιοθετήσει η οικογένεια, χωρίς κανένα περιορισμό ως προς το φύλο.

β) Αν η οικογένεια επιλέξει τους τέσσερις (4) σκύλους στην τύχη, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

i) A: να επιλέξει ακριβώς ένα αρσενικό σκύλο,

ii) B: να επιλέξει το πολύ ένα θηλυκό σκύλο.

A8 Στο πλαίσιο της ανοικοδόμησης του καθεδρικού ναού της Παναγίας των Παρισίων μετά την καταστροφική πυρκαγιά, πρόκειται να κατασκευαστεί καμπαναριό με όγκο $792\pi m^3$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το καμπαναριό θα αποτελείται από ημισφαίριο και κύλινδρο ίσης ακτίνας. Αν το ύψος του κυλίνδρου θα είναι τριπλάσιο από την ακτίνα του, να υπολογίσετε το ύψος (h) του καμπαναριού.



A9 Η Αυγή κάθε βράδυ, είτε παρακολουθεί τηλεόραση είτε διαβάζει. Η πιθανότητα να παρακολουθεί τηλεόραση είναι $\frac{4}{5}$. Όταν παρακολουθεί τηλεόραση η πιθανότητα να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα είναι $\frac{3}{4}$, ενώ όταν διαβάζει η πιθανότητα να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα είναι $\frac{1}{3}$.

α) Να βρείτε την πιθανότητα κάποιο βράδυ η Αυγή να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα.

β) Δεδομένου ότι κάποιο βράδυ η Αυγή αποκοιμήθηκε στην πολυθρόνα, να βρείτε την πιθανότητα να παρακολουθούσε τηλεόραση.

A10 Η ποσότητα ενός φαρμάκου (σε mg), στον οργανισμό του ανθρώπου, δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(t)$, όπου t είναι ο χρόνος μετά τη λήψη του φαρμάκου (σε ώρες). Δίνεται ότι $\Pi'(t) = 12 - 6t, t \geq 0$. Μια ώρα μετά από τη λήψη του φαρμάκου υπάρχουν 9 mg φαρμάκου στον οργανισμό του ανθρώπου.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Π δίνεται από τον τύπο $\Pi(t) = 12t - 3t^2, t \geq 0$.

β) Να βρείτε:

- i) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου η μέγιστη δόση του φαρμάκου,
- ii) τη μέγιστη δόση του φαρμάκου (σε mg), που υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου,
- iii) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του, το φάρμακο αυτό ΔΕΝ θα υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου.

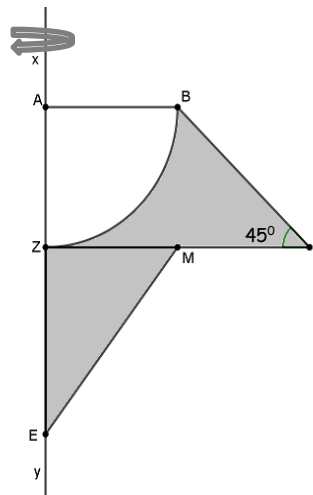
ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1 Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $ABΓΖ$, με γωνίες $BAZ = AZΓ = 90^\circ$, $BΓΖ = 45^\circ$. Με κέντρο το A και ακτίνα $AB = 3\text{cm}$, γράφουμε τόξο BZ μέσα στο $ABΓΖ$. Το σημείο E βρίσκεται πάνω στην ευθεία AZ (xy), έτσι ώστε το τρίγωνο ZME να είναι ορθογώνιο, με $ZE = 4\text{cm}$ και M μέσο της $ZΓ$. Το σκιασμένο χωρίο ($BΓMEZB$) στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (AZ).

Να υπολογίσετε:

- το εμβαδόν της επιφάνειας και
- τον όγκο του στερεού που παράγεται.



B2 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 6x^3 - ax^2 + \beta x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τις τιμές των a, β , ώστε η f να έχει στη θέση $x_1 = 2$ σημείο καμπής και στη θέση $x_2 = 1$ τοπικό ακρότατο.
- Αν $a = 36$ και $\beta = 54$, να βρείτε τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων $a, \beta, f(2), f(1), 125$.

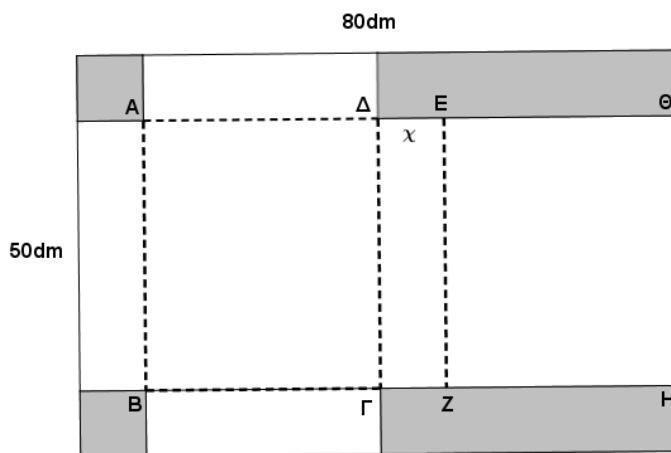
B3 Δίνεται η λέξη **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**

- Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
 - Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.
- Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς της λέξης **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
 - A: Ο αναγραμματισμός να έχει τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.
 - B: Ο αναγραμματισμός να μην έχει τα A σε συνεχόμενες θέσεις.

- B4** α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $(1,0)$. Αν $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

- β) Αφού βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης G_f της συνάρτησης f με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής της, τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε την γραφική της παράσταση.
- B5** Δίνεται ένα χαρτόνι σχήματος ορθογώνιου διαστάσεων $80dm \times 50dm$. Πρόκειται να κατασκευαστεί με αυτό ένα κλειστό κουτί, σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ύψους $\Delta E = x dm$ με βάσεις τα ορθογώνια $EZH\Theta$ και $AB\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σκιασμένα μέρη του σχήματος θα αφαιρεθούν. (Οι διπλώσεις θα γίνουν κατά μήκος των τμημάτων $AB, \Gamma\Delta, EZ, A\Delta$ και $B\Gamma$).



- α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$V(x) = (2x^3 - 130x^2 + 2000x) dm^3$$

- β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του κουτιού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ