

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 18/05/2018

8:00 – 11:00

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**ΜΕΡΟΣ Α΄**

1. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις  $\alpha = 3\text{cm}$ ,  $\beta = 4\text{cm}$  και  $\gamma = 5\text{cm}$ . Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του **(2,5 μονάδες)**

(β) τον όγκο του **(2,5 μονάδες)**

**Λύση:**

$$\begin{aligned} \text{(α)} E_{ολ} &= 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= 2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) \\ &= 2(12 + 15 + 20) \\ &= 2 \cdot 47 \\ &= 94\text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} V &= \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 60\text{cm}^3 \end{aligned}$$

2. Σε διαγωνισμό δεξιοτήτων οι βαθμολογίες που έδωσαν οι πέντε κριτές σε ένα διαγωνιζόμενο ήταν:

8, 10, 7, 10, 5

Να υπολογίσετε:

(α) τη μέση τιμή των βαθμολογιών του διαγωνιζομένου

(2,5 μονάδες)

(β) τη διάμεσο τιμή των βαθμολογιών του διαγωνιζομένου

(2,5 μονάδες)

**Λύση:**

(α) Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 7 + 10 + 5}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

(β) 5, 7, 8, 10, 10

Η διάμεσος είναι  $x_\delta = 8$

3. Να βρείτε την παράγωγο  $\frac{dy}{dx}$  της συνάρτησης  $y = x^4 - 3x^2 + 2$

**Λύση:**

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x$$

4. Να υπολογίσετε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΑΝΑΔΟΧΟΣ**.

**Λύση:**

$$M_8^e = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080$$

5. Η μηνιαία συνδρομή σε ένα γυμναστήριο είναι €65 το άτομο. Αν ένας πελάτης με την εγγραφή του στο γυμναστήριο επιλέξει να πληρώσει ολόκληρο τον χρόνο, θα έχει έκπτωση 15%. Να υπολογίσετε πόσα θα πληρώσει ένας πελάτης, αν επιλέξει να πληρώσει για ολόκληρο τον χρόνο.

**Λύση:**

Συνδρομή για δώδεκα μήνες:  $12 \cdot 65 = €780$

Έκπτωση:  $\frac{15}{100} \cdot 780 = €117$

Θα πληρώσει για ολόκληρο τον χρόνο:  $780 - 117 = €663$

6. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 2\sin x) dx$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned} \int (5x^4 - 3x^2 + 2\sin x) dx &= \frac{5x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + 2\eta\mu x + c \\ &= x^5 - x^3 + 2\eta\mu x + c \end{aligned}$$

7. Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης  $\sin 3x = \sin 45^\circ$

**Λύση:**

$$\sin 3x = \sin 45^\circ \Rightarrow 3x = 360^\circ k \pm 45^\circ$$

$$\Rightarrow x = 120^\circ k \pm 15^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

8. Να λύσετε το σύστημα:

$$x - y = 5$$

$$xy = -6$$

**Λύση:**

$$x - y = 5 \Rightarrow$$

$$x = 5 + y \Rightarrow (5 + y)y = -6 \Rightarrow y^2 + 5y + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(y + 3)(y + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$y = -3 \quad \text{ή} \quad y = -2$$

$$x = 5 + y \Rightarrow \quad x = 5 + y \Rightarrow$$

$$5 - 3 = 2 \Rightarrow \quad x = 5 - 2 \Rightarrow$$

$$x = 2 \quad \quad \quad x = 3$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι:  $x = 2$  και  $y = -3$  ή  $x = 3$  και  $y = -2$

9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης  $16\text{cm}$  και παράπλευρο ύψος  $10\text{cm}$ . Να υπολογίσετε:

(α) το ύψος της πυραμίδας (2 μονάδες)

(β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας (1 μονάδα)

(γ) τον όγκο της πυραμίδας (2 μονάδες)

**Λύση:**

(α) Έχουμε ότι:

$$a = 16 \Rightarrow \frac{a}{2} = 8\text{cm}$$

$$\text{Π.Θ } 10^2 = 8^2 + v^2 \Rightarrow 100 = 64 + v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = 100 - 64 \Rightarrow v^2 = 36$$

$$\Rightarrow v = 6\text{cm}$$

(β) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας είναι:

$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} + a^2 = \frac{4 \cdot 16 \cdot 10}{2} + 16^2 = 320 + 256 = 576\text{cm}^2$$

(γ) Ο όγκος είναι:

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3} = \frac{256 \cdot 6}{3} = 512\text{cm}^3$$

10. Ρωτήσαμε τους μαθητές ενός Λυκείου για τις προτιμήσεις τους για δύο είδη ταινιών, ταινίες τρόμου και ταινίες κωμωδίας. Τα  $\frac{3}{5}$  των μαθητών απάντησαν ότι προτιμούν ταινίες τρόμου, το  $\frac{1}{4}$  κωμωδίες και το  $\frac{1}{20}$  και τα δύο είδη ταινιών. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του Λυκείου αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

(α) ο μαθητής να προτιμάει μόνο ταινίες τρόμου

(2,5 μονάδες)

(β) ο μαθητής να προτιμάει τουλάχιστον ένα από τα δύο είδη ταινιών

(2,5 μονάδες)

**Λύση:**

(α) Έστω  $T = \{\text{προτιμάει ταινίες τρόμου}\}$  και  $K = \{\text{προτιμάει κωμωδίες}\}$

$$P(T) = \frac{3}{5}, \quad P(K) = \frac{1}{4}, \quad P(T \cap K) = \frac{1}{20}$$

Η πιθανότητα να προτιμάει μόνο ταινίες τρόμου είναι:

$$P(T - K) = P(T) - P(T \cap K) = \frac{3}{5} - \frac{1}{20} = \frac{12}{20} - \frac{1}{20} = \frac{11}{20}$$

(β) Η πιθανότητα να προτιμάει τουλάχιστον ένα από τα δύο είδη ταινιών είναι:

$$P(T \cup K) = P(T) + P(K) - P(T \cap K) = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{12 + 5 - 1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

## ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Το δημαρχείο μιας πόλης εξετάζει ένα είδος λαμπτήρων ως προς τον χρόνο λειτουργίας τους για τη φωταγώγηση της πόλης του. Επέλεξε τυχαία 10 λαμπτήρες αυτού του είδους και κατέγραψε τις ώρες λειτουργίας τους πριν καταστραφούν. Οι μετρήσεις που καταγράφηκαν φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

Ώρες λειτουργίας ( $x_i$ )	130	140	150	160	170
Αριθμός λαμπτήρων ( $f_i$ )	1	2	2	4	1

Να υπολογίσετε:

- (α) την επικρατούσα τιμή των ωρών λειτουργίας **(2 μονάδες)**  
(β) τη διάμεσο τιμή των ωρών λειτουργίας **(2 μονάδες)**  
(γ) τη μέση τιμή των ωρών λειτουργίας **(3 μονάδες)**  
(δ) την τυπική απόκλιση των ωρών λειτουργίας με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων **(3 μονάδες)**

**Λύση:**

(α) Η επικρατούσα τιμή είναι:  $x_\varepsilon = 160$

(β) Η διάμεσος τιμή είναι:

$$x_\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{150 + 160}{2} = 155$$

(γ)

$x_i$	$f_i$	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
130	1	130	484	484
140	2	280	144	288
150	2	300	4	8
160	4	640	64	256
170	1	170	324	324
	$\Sigma f_i = 10$	$\Sigma x_i f_i = 1520$		$\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2 = 1360$

Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{1520}{10} = 152$$

(δ) Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1360}{10}} = 11,66$$

2. Δίνεται η συνάρτηση  $y = x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$

(α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $\frac{dy}{dx}$  της συνάρτησης. (3 μονάδες)

(β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο  $\frac{d^2y}{dx^2}$  της συνάρτησης. (4 μονάδες)

(γ) Να δείξετε ότι  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y + 4\eta\mu 2x = 0$  (3 μονάδες)

**Λύση:**

$$(α) \frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu 2x - 2x \cdot \eta\mu 2x$$

$$(β) \frac{d^2y}{dx^2} = -2\eta\mu 2x - 2\eta\mu 2x - 2x \cdot 2\sigma\upsilon\nu 2x \\ = -4\eta\mu 2x - 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$$

$$(γ) \frac{d^2y}{dx^2} + 4y + 4\eta\mu 2x = -4\eta\mu 2x - 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + 4\eta\mu 2x = 0$$

3. Μια εταιρεία ανταλλακτικών αυτοκινήτων δίνει στους πωλητές της βασικό μηνιαίο μισθό €800. Η εταιρεία κάθε μήνα αποκόπτει 5% από το βασικό μηνιαίο μισθό του πωλητή ως εισφορά στο ταμείο προνοίας των εργαζομένων. Επιπλέον, δίνει 9% προμήθεια επί των πωλήσεων που θα κάνει ο κάθε πωλητής. Αν κατά την περσινή χρονιά ένας πωλητής έκανε πωλήσεις συνολικής αξίας €90000, να υπολογίσετε τις απολαβές του για την περσινή χρονιά.

**Λύση:**

$$\text{Αποκοπή: } 800 \cdot \frac{5}{100} = €40$$

$$\text{Μισθός μετά από την αποκοπή: } 800 - 40 = €760.$$

$$\text{Προμήθεια επί των πωλήσεων: } 90000 \cdot \frac{9}{100} = €8100$$

$$\text{Οι απολαβές είναι: } 12 \cdot 760 + 8100 = 9120 + 8100 = €17220$$





4. Στα πλαίσια της πρακτικής εξάσκησης στο μάθημα της μαγειρικής μιας ξενοδοχειακής σχολής θα επιλεγούν 5 μάγειρες οι οποίοι θα καλύψουν τις ανάγκες της κουζίνας της σχολής τους. Η επιλογή θα γίνει από 6 μάγειρες που φοιτούν στο τρίτο έτος και 8 μάγειρες που φοιτούν στο δεύτερο έτος.

Να υπολογίσετε:

(α) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των 5 μαγείρων **(3 μονάδες)**

(β) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή, αν πρέπει να συμμετέχουν 2 μάγειρες από το δεύτερο έτος και 3 από το τρίτο έτος **(4 μονάδες)**

(γ) την πιθανότητα οι 5 μάγειρες που θα επιλεγούν να είναι όλοι τριτοετείς **(3 μονάδες)**

**Λύση:**

(α) Η επιλογή μπορεί να γίνει με

$$\binom{14}{5} = \frac{14!}{5! \cdot 9!} = 2002 \text{ τρόπους}$$

(β) Η επιλογή μπορεί να γίνει με

$$\binom{8}{2} \binom{6}{3} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 560 \text{ τρόπους}$$

(γ) Η πιθανότητα να είναι όλοι τριτοετείς είναι:

$$P(\text{όλοι τριτοετείς}) = \frac{\binom{6}{5}}{2002} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = \frac{6}{2002} = \frac{3}{1001}$$

5. Δίνεται το σχήμα  $AB\Gamma\Delta E$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 90^\circ$ ,  
 $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ,  $AB = 8\text{cm}$ ,  $B\Gamma = 6\text{cm}$ ,  
 $\Delta\Gamma = 4\text{cm}$ , και  $E\Delta = 5\text{cm}$ . Το σχήμα  $AB\Gamma\Delta E$   
 περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την  
 ευθεία  $(\varepsilon)$ , η οποία περνά από τα σημεία  
 $B$  και  $\Gamma$ .

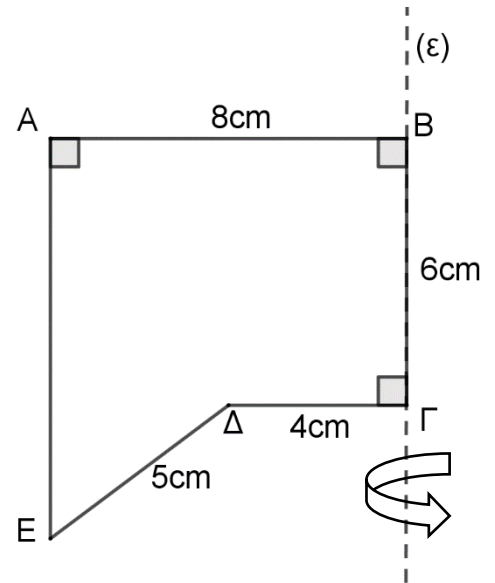
Να υπολογίσετε:

- (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του  
 στερεού που παράγεται

(5 μονάδες)

- (β) τον όγκο του στερεού που παράγεται

(5 μονάδες)



**Λύση:**

$$(Z\Delta) = (AB) - (\Delta\Gamma) = 8 - 4 = 4\text{cm}$$

$$(ZE)^2 = (E\Delta)^2 - (Z\Delta)^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$(ZE) = 3\text{cm}$$

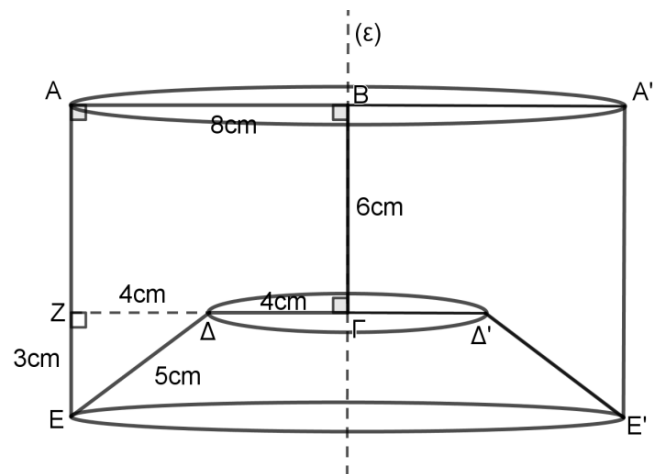
Κύλινδρος:

$$v = (AE) = 9\text{cm}, \quad R = (AB) = 8\text{cm}$$

Κόλουρος κώνος:

$$v = (ZE) = 3\text{cm}, \quad \lambda = (\Delta E) = 5\text{cm}$$

$$R = (Z\Gamma) = 8\text{cm}, \quad \rho = (\Delta\Gamma) = 4\text{cm}$$



- (α) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται είναι:

$$E_{ολ} = E_{AB} + E_{\Delta\Gamma} + E_{E\Delta} + E_{AE} = \pi 8^2 + \pi 4^2 + \pi(8 + 4)5 + 2\pi 8 \cdot 9 = 284\pi \text{ cm}^2$$

- (β) Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι:

$$V = V_{\text{κυλ}} - V_{\text{κων}} = \pi 8^2 \cdot 9 - \frac{\pi 3}{3} (8^2 + 8 \cdot 4 + 4^2) = 464\pi \text{ cm}^3$$