ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τετάρτη, 24/05/2017

8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται κύβος με ακμή $8cm$. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του **(2,5 μονάδες)**

(β) τον όγκο του **(2,5 μονάδες)**

Λύση:

(α) $\mathrm{Eo\lambda} = 6\alpha^2 \Rightarrow \mathrm{Eo\lambda} = 6 \cdot 8^2 = 384\mathrm{cm}^2$

(β) $\mathrm{V} = \alpha^3 \Rightarrow \mathrm{V} = 8^3 = 512\mathrm{cm}^3$

2. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = x^5 - 2x + 7$.

Λύση:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 2$$

3. Ένα σχολείο έχει 400 μαθητές. Αν το 27% των μαθητών έρχονται στο σχολείο με λεωφορείο, να υπολογίσετε πόσοι μαθητές έρχονται με λεωφορείο.

Λύση:

$400 \cdot \frac{27}{100} = 108$ μαθητές έρχονται στο σχολείο με λεωφορείο.

4. Να υπολογίσετε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΚΥΠΕΛΛΟ**.

Λύση:

$$\mathrm{M}_7^{\varepsilon} = \frac{7!}{2!} = 2520$$

5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ιδίου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης με

$$P(A) = \tfrac{2}{3},\ P(B') = \tfrac{3}{4} \text{ και } P(A \cap B) = \tfrac{1}{12}$$

να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(B)$ **(2 μονάδες)**
(β) $P(A \cup B)$ **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) $P(B') = 1 - P(B) \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

(β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$$

6. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int (4x^3 - \eta\mu x - 5)dx$.

Λύση:

$$\int (4x^3 - \eta\mu x - 5)dx = \frac{4x^4}{4} - (-\sigma\upsilon\nu x) - 5x + c = x^4 + \sigma\upsilon\nu x - 5x + c$$

7. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$.

Λύση:

$\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \ \Rightarrow\ \sigma\upsilon\nu x(1 - 2\sigma\upsilon\nu x) = 0$
$\sigma\upsilon\nu x = 0 \ \Rightarrow\ \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 90^{\circ} \ \Rightarrow\ x = 360k \pm 90^{\circ}, \quad k \in Z$
$1 - 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \ \Rightarrow\ \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} \ \Rightarrow\ x = 360k \pm 60^{\circ},\ k \in Z$

8. Να λύσετε το σύστημα $\begin{matrix} x-y=-1 \\ y^2+2x=6 \end{matrix}$

Λύση:

$$\left.\begin{matrix} x-y=-1 \\ y^2+2x=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=y-1 \\ y^2+2x=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2+2(y-1)=6 \Rightarrow \quad y^2+2y-8=0$$

$$\Rightarrow (y+4)\cdot(y-2)=0$$

$$y=-4 \quad , \quad y=2$$

$$x=-5 \quad , \quad x=1$$

$$(-5,-4) \quad , \quad (1,2)$$

9. Η μέση τιμή του αριθμού των μαθητών πέντε Τεχνικών Σχολών (Α, Β, Γ, Δ και Ε) που επισκέφθηκαν μια έκθεση μαγειρικής και ζαχαροπλαστικής είναι 70. Ο αριθμός των μαθητών που επισκέφθηκαν την έκθεση από τις Τεχνικές Σχολές Α, Β και Γ είναι 60, 65 και 80 αντίστοιχα. Αν οι μαθητές που επισκέφθηκαν την έκθεση από την Τεχνική Σχολή Δ είναι 5 περισσότεροι από αυτούς της Τεχνικής Σχολής Ε, να υπολογίσετε τον αριθμό των μαθητών που επισκέφθηκαν την έκθεση από τις Τεχνικές Σχολές Δ και Ε.

Λύση:

$60, \ 65, \ 80, \ x+5, \ x$

$$\frac{60+65+80+x+5+x}{5}=70$$

$$\frac{210+2x}{5}=70$$

$$210+2x=350$$

$$2x=140$$

$$x=70$$

Οι μαθητές της Δ Τεχνικής Σχολής είναι 75

Οι μαθητές της Ε Τεχνικής Σχολής είναι 70

10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης $10cm$ και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $260cm^2$.
Να υπολογίσετε

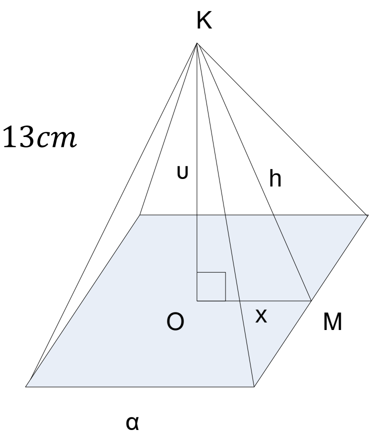
(α) το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας **(2 μονάδες)**

(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας **(1 μονάδα)**

(γ) τον όγκο της πυραμίδας **(2 μονάδες)**

Λύση:

$\alpha = 10cm,\ E_{\Pi} = 260cm^2$



(α) $E_{\Pi} = \frac{1}{2}\Pi_{\beta}h \Rightarrow 260 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10\cdot h \Rightarrow 260 = 20\cdot h \Rightarrow h = 13cm$

(β) $E_{o\lambda} = E_{\pi} + E_{\beta} \Rightarrow E_{o\lambda} = 260 + 100 = 360cm^2$

(γ) Από το Π.Θ. $\upsilon = 12cm$

$V = \frac{1}{3}E_{\beta}\cdot\upsilon = \frac{1}{3}\cdot 100\cdot 12 = 400cm^3$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των μονάδων ηλεκτρικής ενέργειας που παρήγαγε ένα οικιακό φωτοβολταϊκό σύστημα σε τριάντα ημέρες.

Μονάδες Ενέργειας (x_i)	8	10	11	15	20	26
Αριθμός Ημερών (f_i)	6	7	5	7	3	2

Να υπολογίσετε:

(α) την επικρατούσα τιμή των ενδείξεων **(2 μονάδες)**

(β) τη διάμεσο τιμή των ενδείξεων **(2 μονάδες)**

(γ) τη μέση τιμή των ενδείξεων **(3 μονάδες)**

(δ) την τυπική απόκλιση των ενδείξεων με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων **(3 μονάδες)**

Λύση:

x_ι	f_i	$x_\iota f_i$	$(x_\iota - \bar{x})^2$	$f_i(x_\iota - \bar{x})^2$
8	6	48	25	150
10	7	70	9	63
11	5	55	4	20
15	7	105	4	28
20	3	60	49	147
26	2	52	169	338
	$\sum f_i = 30$	$\sum x_\iota f_i = 390$		$\sum f_i(x_\iota - \bar{x})^2 = 746$

(α) Έχουμε δύο επικρατούσες τιμές $x_\varepsilon = 10$, $x_\varepsilon = 15$

(β) $x_\delta = \frac{11+11}{2} = 11$

(γ) $\bar{x} = \frac{390}{30} = 13$

(δ) $\sigma = \sqrt{\frac{746}{30}} \approx 4{,}99$

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = x \cdot \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x$.

(α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης. **(3 μονάδες)**

(β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης. **(4 μονάδες)**

(γ) Να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2\sigma\upsilon\nu x$ **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) $y = x \cdot \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x = x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

(β) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sigma\upsilon\nu x + x \cdot (-\eta\mu x) - \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x \cdot \eta\mu x$

(γ) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = -x \cdot \eta\mu x + x \cdot \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu x$

3. Ένα εργαστήριο που παρασκευάζει σοκολατάκια χρησιμοποιεί ως πρώτη ύλη πλάκες άσπρης και μαύρης σοκολάτας σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $8cm$, $10cm$ και $25cm$. Για να παρασκευάσει σοκολατάκια σε σχήμα κύβου ακμής $2cm$ θα χρησιμοποιήσει 12 πλάκες μαύρης και 8 πλάκες άσπρης σοκολάτας τις οποίες θα λιώσει και θα αναμείξει. Κατά τη διάρκεια της παρασκευής η απώλεια είναι 2% της πρώτης ύλης. Πόσα σοκολατάκια θα παρασκευάσει;

Λύση:

$V_{\pi\lambda άκας} = 8 \cdot 10 \cdot 25 = 2000cm^3$

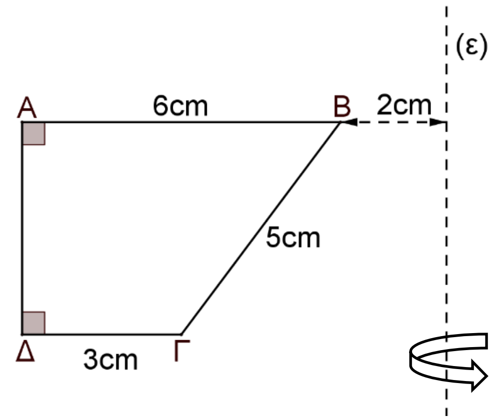
$V_{\pi\rho ώτης ύλης} = 20 \cdot 2000 = 40000cm^3$

Απώλεια: $\frac{2}{100} \cdot 40000 = 800cm^3$

$V_{\sigma o\kappa o\lambda\alpha τάκι} = 2^3 = 8cm^3$

Θα κατασκευάσει: $(40000 - 800) : 8 = 4900$ σοκολατάκια

4. Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $\hat{A} = 90°$, $\hat{Δ} = 90°$, $AB = 6cm$, $BΓ = 5cm$, και $ΓΔ = 3cm$. Το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $(ε)$ που είναι παράλληλος προς την $ΑΔ$ και απέχει $2cm$ από το σημείο Β.



Να υπολογίσετε:

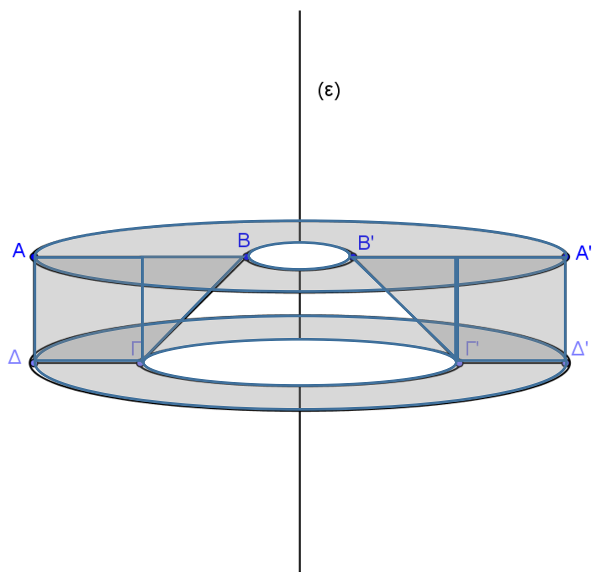
(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται

(6 μονάδες)

(β)τον όγκο του στερεού που παράγεται

(4 μονάδες)

Λύση:



<u>Στοιχεία κυλίνδρου:</u>

$R = 8cm$

$υ = 4cm$

<u>Στοιχεία κόλουρου κώνου:</u>

$R' = 5cm$

$ρ = 2cm$

$λ = 5cm$

<u>Πυθαγόρειο Θεώρημα:</u>

$λ^2 = υ^2 + (6-3)^2$

$\Rightarrow 5^2 = υ^2 + 3^2$

$\Rightarrow υ^2 = 25 - 9$

$\Rightarrow υ^2 = 16$

$\Rightarrow υ = 4$

$E_{στερεού} = E_{κ.κυλ} + E_{κ.κολ.κων} + (E_{β.κυλ} - E_{B.κολ.κων}) + (E_{β.κυλ} - E_{β.κολ.κων})$

$E_{στερεού} = 2\pi R\upsilon + \pi(R' + \rho)\lambda + (\pi R^2 - \pi R'^2) + (\pi R^2 - \pi\rho^2)$

$E_{στερεού} = 2\pi 8 \cdot 4 + \pi(5+2) \cdot 5 + (\pi \cdot 8^2 - \pi \cdot 5^2) + (\pi \cdot 8^2 - \pi \cdot 2^2)$

$E_{στερεού} = 64\pi + 35\pi + 64\pi - 25\pi + 64\pi - 4\pi = 198\pi cm^3$

$V_{στερεού} = V_{κυλ} - V_{κολ.κων} = \pi R^2 \cdot \upsilon - \frac{\pi \cdot \upsilon}{3}(R'^2 + R' \cdot \rho + \rho^2)$

$$= \pi 8^2 \cdot 4 - \frac{\pi \cdot 4}{3}(5^2 + 5 \cdot 2 + 2^2)$$

$V_{στερεού} = 256\pi - \frac{4\pi \cdot 39}{3} = 256\pi - 52\pi = 204\pi cm^3$

5. Στα πλαίσια ενός προγράμματος ανταλλαγής μαθητών θα επιλεγούν 3 μαθητές από μια Τεχνική Σχολή της Κύπρου για να μεταβούν σε ένα Τεχνικό Λύκειο της Θεσσαλονίκης. Η επιλογή των μαθητών θα γίνει ανάμεσα σε 5 μαθητές με ειδικότητα Μηχανολογία και 3 μαθητές με ειδικότητα Ηλεκτρολογία. Να υπολογίσετε:

(α) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των τριών μαθητών **(3 μονάδες)**

(β) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή, αν στην αντιπροσωπεία θα συμμετέχουν μαθητές και από τις δύο ειδικότητες **(4 μονάδες)**

(γ) την πιθανότητα η ομάδα να αποτελείται από μαθητές της ίδιας ειδικότητας **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) $\binom{8}{3} = 56$

(β) $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{2} = 10 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 45$

(γ) $P(μαθητές\ της\ ίδιας\ ειδικότητας) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{56} = \frac{10+1}{56} = \frac{11}{56}$