**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

## ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Πέμπτη, 31/5/2012**
**8:30 – 11:30**

# ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

**ΜΕΡΟΣ Α΄**

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int\left(5\chi^4+e^{2\chi}-3\right)d\chi$

ΛΥΣΗ:

$$\int\left(5\chi^4+e^{2\chi}-3\right)d\chi=\frac{5\chi^5}{5}+\frac{e^{2\chi}}{2}-3\chi+c=\chi^5+\frac{e^{2\chi}}{2}-3\chi+c$$

2. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα: $\Gamma=A\cdot B-2A$

ΛΥΣΗ:

$$\Gamma=A\cdot B-2A=A\cdot(B-2\cdot I)=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3&-1\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3\\0&-1\end{pmatrix}$$

3. Να βρείτε την θέση των δύο κύκλων:

$(K): \chi^2+\psi^2=4$ και $(\Lambda): \chi^2+\psi^2-6\chi-8\psi+16=0$

ΛΥΣΗ:

$(K): \chi^2+\psi^2=4 \Rightarrow K(0,0)$ και $R_1=2$

$(\Lambda): \chi^2+\psi^2-6\chi-8\psi+16=0 \Rightarrow$
$g=-3,\ f=-4,\ c=16$
$\Lambda(-g,-f) \Rightarrow \Lambda(3,4)$

$R_2=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{9+16-16}=\sqrt{9}=3$

$(K\Lambda)=\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Παρατηρούμε ότι:

$R_1+R_2=2+3=5$
$\Rightarrow (K\Lambda)=R_1+R_2$

Άρα οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

4. Η συνάρτηση: $\psi=\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+5,\ \alpha,\beta\in R$, έχει σημείο καμπής το σημείο $\Sigma(1,-21)$. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

ΛΥΣΗ:

$\psi=\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+5$

$\Rightarrow \psi'=3\chi^2+2\alpha\chi+\beta$
$\Rightarrow \psi''=6\chi+2\alpha$

Το σημείο $\Sigma(1,-21)$ είναι σημείο καμπής $\Rightarrow$ για $\chi=1 \quad \psi''=0$

$\Rightarrow 6+2\alpha=0$
$\Rightarrow \boxed{\alpha=-3}$

Το σημείο $\Sigma(1,-21)$ είναι σημείο της καμπύλης $\Rightarrow$ για $\chi=1 \quad \psi=-21$

$\Rightarrow -21=1+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1+5$
$\Rightarrow -21=1-3+\beta+5$
$\Rightarrow \boxed{\beta=-24}$

5. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν Α, Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα με $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $P(B)$, $P(A'\cap B)$ και $P(A'/B)$.

ΛΥΣΗ:

Τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$P(A\cap B)=\frac{1}{5}\Rightarrow P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{5}$$

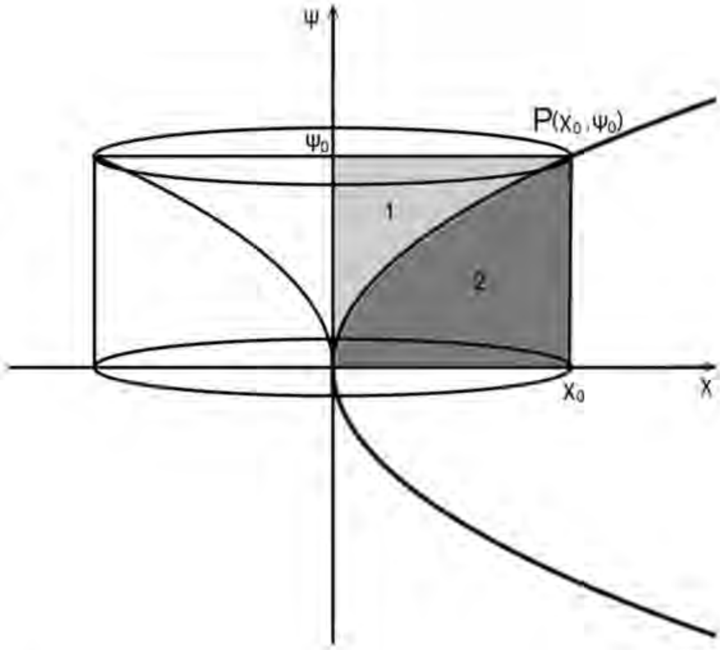
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot P(B)=\frac{1}{5}\Rightarrow P(B)=\frac{4}{5}$$

$$P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

$$P(A'/B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

6. Δίνεται παραβολή $\psi^2 = \kappa\chi$, $\kappa > 0$, και σημείο $P(\chi_0, \psi_0)$ της παραβολής στο πρώτο τεταρτημόριο. Από το P φέρνουμε τις κάθετες προς τους άξονες των χ και ψ και σχηματίζεται ορθογώνιο. Το ορθογώνιο χωρίζεται από την παραβολή σε δυο χωρία τα οποία περιστρέφονται πλήρως γύρω από τον άξονα των ψ. Να δείξετε ότι ο λόγος των όγκων των δυο στερεών που σχηματίζονται είναι 4:1.

ΛΥΣΗ:




$$\psi^2 = \kappa\chi \Rightarrow \chi = \frac{\psi^2}{\kappa}$$

$$V_1 = \pi\int_0^{\psi_0} \chi^2\, d\psi = \pi\int_0^{\psi_0} \left(\frac{\psi^2}{\kappa}\right)^2 d\psi$$

$$= \pi\int_0^{\psi_0} \frac{\psi^4}{\kappa^2}\, d\psi = \pi\left[\frac{\psi^5}{5\kappa^2}\right]_0^{\psi_0}$$

$$= \pi\frac{\psi_0^5}{5\kappa^2}$$

$$V_2 = V_{\kappa\upsilon\lambda} - V_1 = \pi R^2 \upsilon - \pi\frac{\psi_0^5}{5\kappa^2}$$

$$= \pi\chi_0^2\psi_0 - \pi\frac{\psi_0^5}{5\kappa^2} = \pi\frac{\psi_0^4}{\kappa^2}\psi_0 - \pi\frac{\psi_0^5}{5\kappa^2}$$

$$= \pi\frac{\psi_0^5}{\kappa^2} - \pi\frac{\psi_0^5}{5\kappa^2} = \pi\frac{4\psi_0^5}{5\kappa^2}$$

$$\Rightarrow V_2 = 4V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{4}{1}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi)=\int_{\chi}^{0} t^2e^t\,dt$

α) Να δείξετε ότι: $f(\chi)=2-(\chi^2-2\chi+2)e^{\chi}$

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)$

<u>ΛΥΣΗ:</u>

α)

$$
\begin{aligned}
f(\chi) &= \int_{\chi}^{0} t^2e^t\,dt=\int_{\chi}^{0} t^2\,d(e^t)\\
&=\left[t^2e^t\right]_x^0-\int_{\chi}^{0} e^t 2tdt\\
&=\left[t^2e^t\right]_x^0-\left[2\int_{\chi}^{0} td(e^t)\right]\\
&=\left[t^2e^t\right]_x^0-2\left[\left[te^t\right]_x^0-\int_{\chi}^{0} e^t dt\right]\\
&=\left[t^2e^t\right]_x^0-2\left[te^t\right]_x^0+2\left[e^t\right]_x^0\\
&=-x^2e^x-2(-xe^x)+2e^0-2e^x\\
&=2-(x^2-2x+2)e^x
\end{aligned}
$$

β)

$$\lim_{\chi\to-\infty} f(\chi)=\lim_{\chi\to-\infty}\left[2-e^{\chi}(\chi^2-2\chi+2)\right]=2-\lim_{\chi\to-\infty}\left[e^{\chi}(\chi^2-2\chi+2)\right]$$

Για το όριο:

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left[e^x(x^2-2x+2)\right]=\left[e^{-\infty}\cdot(+\infty)=0\cdot(+\infty)\text{ A.M.}\right]=$$

$$=\lim_{\chi\to-\infty}\left[\frac{(\chi^2-2\chi+2)}{e^{-\chi}}\right]=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\text{ A.M.}\right]$$

$$\overset{(DLH)}{=}\lim_{\chi\to-\infty}\left[\frac{(2\chi-2)}{-e^{-\chi}}\right]=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\text{ A.M.}\right]$$

$$\overset{(DLH)}{=}\lim_{\chi\to-\infty}\left[\frac{2}{e^{-\chi}}\right]=\frac{2}{+\infty}=0$$

$$\lim_{\chi\to-\infty} f(\chi)=2$$

8. Δίνονται η υπερβολή: $\chi\psi = 1$ και η παράσταση: $A \equiv \chi + \psi + \dfrac{1}{\chi+1} + \dfrac{1}{\psi+1}$

Να δείξετε ότι: $A \geq 3$, για κάθε σημείο $\Sigma(\chi,\psi)$ της υπερβολής στο πρώτο τεταρτημόριο.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Από την $\chi\psi = 1 \Rightarrow \psi = \dfrac{1}{\chi}$

$$A = \chi + \psi + \frac{1}{\chi+1} + \frac{1}{\psi+1} \Rightarrow A = \chi + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi+1} + \frac{1}{\frac{1}{\chi}+1}$$

$$\Rightarrow A = \chi + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi+1} + \frac{\chi}{\chi+1} \Rightarrow \boxed{A = \chi + \frac{1}{\chi} + 1}$$

Μονοτονία και ακρότατα του A.

$$A'(\chi) = 1 - \frac{1}{\chi^2} \Rightarrow \boxed{A'(\chi) = \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2}}$$

$$A'(\chi) = 0 \Rightarrow \frac{\chi^2-1}{\chi^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\chi^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\chi-1)\cdot(\chi+1) = 0 \Rightarrow \chi = 1 \text{ ή } \chi = -1$$

Από το $\chi^2 = 0 \Rightarrow \chi = 0''$

| $\chi$ | $-\infty$ | | -1 | | 0'' | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A' | | + | 0 | - | ‖ | - | 0 | + | |
| A | | ↗ | max | ↘ | ‖ | ↘ | min | ↗ | |

$$A_{min} = 1 + \frac{1}{1} + 1 \Rightarrow A_{min} = 3$$

Για κάθε σημείο Σ στο πρώτο τεταρτημόριο $\Rightarrow A \geq 3$

9. Δίνεται συνάρτηση $f:R\to(0,1)$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, στο πεδίο ορισμού της, και ικανοποιεί τη σχέση: $f^2(x)+f'(x)=1,\ \forall x\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο πεδίο ορισμού της.

ΛΥΣΗ:

Από $f:R\to(0,1)\Rightarrow 0<f(x)<1$.

Για την μελέτη των κοίλων της συνάρτησης πρέπει να βρούμε το πρόσημο της $f''(x)$.

$$f^2(x)+f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=1-f^2(x)\Rightarrow$$

$$f''(x)=-2f(x)f'(x)$$

$$f''(x)=-2f(x)\left(1-f^2(x)\right)\Rightarrow$$

$$f''(x)=-2f(x)\left(1-f(x)\right)\left(1+f(x)\right)\Rightarrow$$

Όμως, $0<f(x)<1\Rightarrow 1-f(x)>0$ και $\left(1+f(x)\right)>0$

$$\Rightarrow f''(x)<0$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $R$.

10. Με ψηφία από το σύνολο $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ σχηματίζουμε τριψήφιους φυσικούς αριθμούς χωρίς επανάληψη ψηφίου. Να βρείτε:

α) το πλήθος των τριψήφιων φυσικών αριθμών που σχηματίζονται και

β) το άθροισμα όλων των τριψήφιων φυσικών αριθμών που σχηματίζονται.

ΛΥΣΗ:

α) Μπορούν να σχηματιστούν $\Delta_3^5 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$ τριψήφιοι αριθμοί.

β) Ένα οποιονδήποτε ψηφίο του συνόλου εμφανίζεται στη θέση των μονάδων σε $4\cdot 3\cdot 1 = 12$ τριψήφιους αριθμούς.

Ομοίως

Ένα οποιονδήποτε ψηφίο του συνόλου εμφανίζεται στη θέση των δεκάδων σε $4\cdot 1\cdot 3 = 12$ τριψήφιους αριθμούς.

και

Ένα οποιονδήποτε ψηφίο του συνόλου εμφανίζεται στη θέση των εκατοντάδων σε $1\cdot 4\cdot 3 = 12$ τριψήφιους αριθμούς.

Αξία μονάδων: $12(4+5+6+7+8)\cdot 1 = 12\cdot 30 = 360$

Αξία δεκάδων: $12(4+5+6+7+8)\cdot 10 = 12\cdot 30\cdot 10 = 3600$

Αξία εκατοντάδων: $12(4+5+6+7+8)\cdot 100 = 12\cdot 30\cdot 100 = 36000$

Συνολικά το άθροισμα όλων των τριψήφιων αριθμών που σχηματίζονται είναι: $360 + 3600 + 36000 = \boxed{39960}$

**<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>  Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+3}{\chi+1}$

   α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(\chi)$, να την παραστήσετε γραφικά στο πεδίο ορισμού της.

   β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi=f(\chi)$, και τις ευθείες $\psi=\chi-1$, $\chi=0$ και $\chi=\lambda,\ \lambda>0$, είναι ίσο με $4\tau\mu$.
   Να υπολογίσετε την τιμή του λ.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

α) $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+3}{\chi+1}$

<u>Πεδίο ορισμού:</u> $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \Pi.O.=R-\{-1\}$

<u>Σημεία τομής με τους άξονες:</u>

Αν $\chi=0 \Rightarrow \psi=3 \Rightarrow (0,3)$

$f(\chi)=0 \Rightarrow \dfrac{\chi^2+3}{\chi+1}=0 \Rightarrow \chi^2+3=0$ αδύνατη εξίσωση.

<u>Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:</u>

$$f'(\chi)=\frac{2\chi\cdot(\chi+1)-(\chi^2+3)}{(\chi+1)^2}=\frac{\chi^2+2\chi-3}{(\chi+1)^2}=\frac{(\chi+3)(\chi-1)}{(\chi+1)^2}$$

$f'(\chi)=0 \Rightarrow \chi=-3$ ή $\chi=1$

και $(\chi+1)^2=0 \Rightarrow \chi=-1''$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |

Για $\chi = 1 \Rightarrow f(1) = \dfrac{1^2+3}{1+1} = 2 \Rightarrow (1,2)\min$ και για

$\chi = -3 \Rightarrow f(1) = \dfrac{(-3)^2+3}{-3+1} = -6 \Rightarrow (-3,-6)\max$

Ασύμπτωτες:

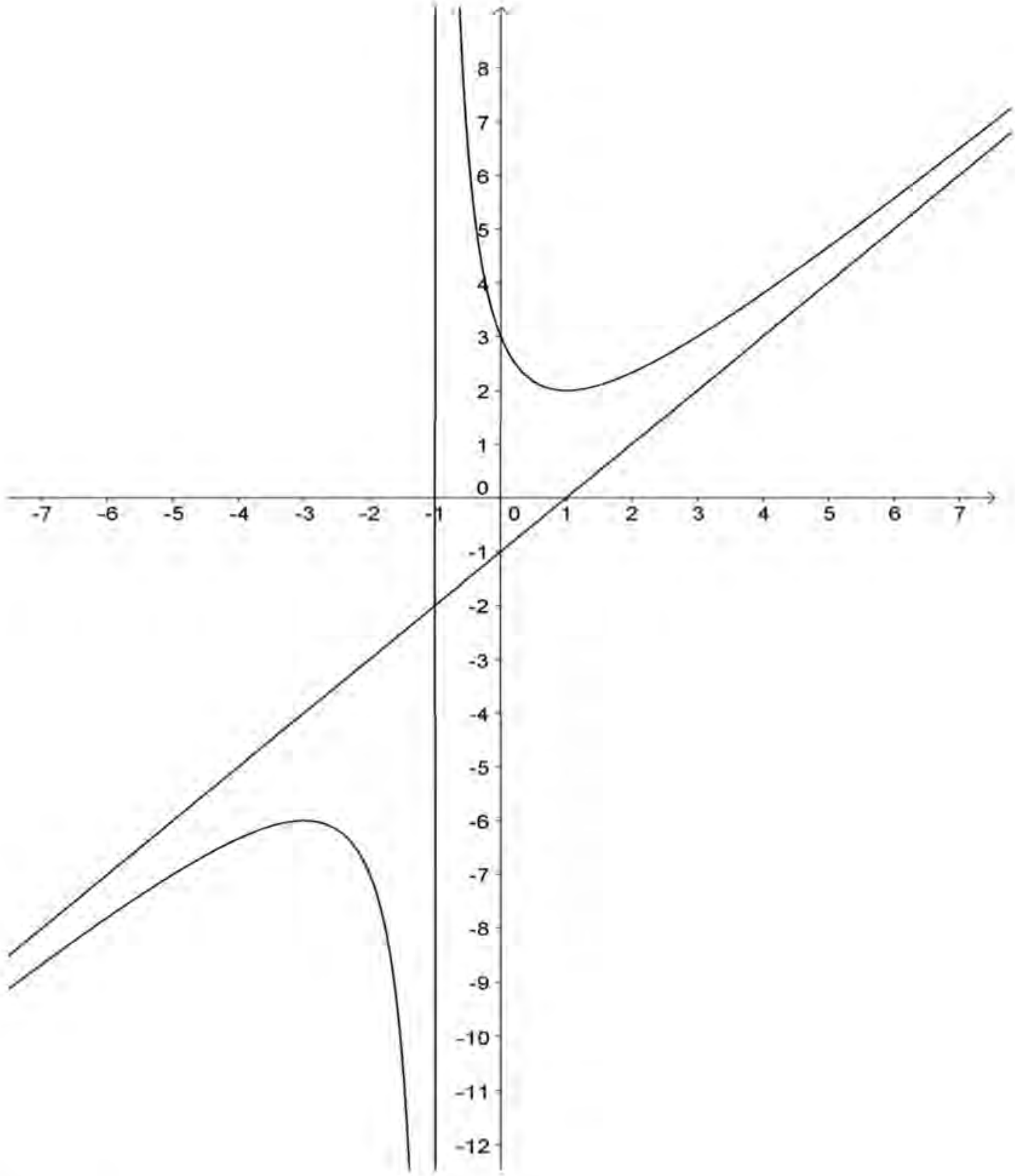
Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+3}{x+1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ &\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+3}{x+1} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi = -1 \text{ K.A.}$$

Από την διαίρεση:

$$\begin{array}{rr|l} \chi^2 & +\;3 & \chi+1 \\ \cline{3-3} -\chi^2-x & & \chi-1 \\ \cline{1-2} & -\chi+3 & \\ & +\chi+1 & \\ \cline{2-2} & +4 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ η ευθεία $\psi = \chi - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f.




β) $E = 4$ τμ

$$\Rightarrow \int_0^{\lambda} \left( \frac{\chi^2+3}{\chi+1} - (\chi-1) \right) d\chi = 4$$

$$\Rightarrow \int_0^{\lambda} \frac{4}{\chi+1}\, d\chi = 4 \Rightarrow 4\left[\ln(\chi+1)\right]_0^{\lambda} = 4$$

$$\Rightarrow \ln|\lambda+1| - \ln 1 = 1 \Rightarrow \ln|\lambda+1| = 1$$

$$\Rightarrow \lambda + 1 = e^1 \Rightarrow \boxed{\lambda = e - 1}$$

2. Σε ένα διαγώνισμα Ιστορίας το οποίο έχει 5 ερωτήσεις, η πιθανότητα ένας μαθητής να απαντήσει σωστά σε μια οποιανδήποτε ερώτηση είναι $\frac{4}{5}$.

α) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: Ο μαθητής να απαντήσει σωστά σε 2 ακριβώς ερωτήσεις.

Β: Ο μαθητής να απαντήσει σωστά σε 2 ακριβώς ερωτήσεις που να είναι συνεχόμενες.

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να απάντησε σωστά σε μια τουλάχιστον ερώτηση.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

α)

$$P(\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda\Lambda)=\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$\begin{aligned}P(A)&=M_5^{\varepsilon}\cdot P(\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda\Lambda)\\&=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^3=10\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{125}=\frac{32}{625}\end{aligned}$$

$$P(B)=4\cdot P(\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda\Lambda)=4\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{64}{3125}$$

β)

$$P(\text{μια τουλάχιστον ερώτηση σωστή})=1-P(\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda)=1-\left(\frac{1}{5}\right)^5=\frac{3124}{3125}$$

3. Δίνονται η έλλειψη: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ και Α τυχαίο σημείο της. Από την αρχή Ο των αξόνων φέρνουμε ημιευθεία $(\varepsilon)$ παράλληλη προς την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Α, η οποία τέμνει την έλλειψη στο σημείο Β.

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ της χορδής ΑΒ και να τον χαρακτηρίσετε.

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ είναι σταθερό, καθώς το σημείο Α κινείται πάνω στην έλλειψη.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \Rightarrow \frac{2x}{\alpha^2}+\frac{2\psi\psi'}{\beta^2}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\psi\psi'}{\beta^2}=-\frac{x}{\alpha^2} \Rightarrow \psi'=-\frac{\beta^2 x}{\alpha^2\psi}$$

$$\lambda\varepsilon\varphi=\psi'\Big|_A=-\frac{\beta^2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha^2\beta\eta\mu\theta}=-\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta}$$

Εξίσωση της ΟΒ: $\psi=-\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta}x$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1\\ \psi=-\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta}x\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\frac{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\alpha^2\eta\mu^2\theta}x^2}{\beta^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta\, x^2}{\alpha^2\eta\mu^2\theta}=1$$

$$\eta\mu^2\theta\, x^2+\sigma\upsilon\nu^2\theta\, x^2=\alpha^2\eta\mu^2\theta \Rightarrow x^2=\alpha^2\eta\mu^2\theta \Rightarrow$$

$$x=\pm\alpha\eta\mu\theta \Rightarrow \psi=\mp\beta\sigma\upsilon\nu\theta$$

$B(-\alpha\eta\mu\theta, \beta\sigma\upsilon\nu\theta)$ ή $B(\alpha\eta\mu\theta, -\beta\sigma\upsilon\nu\theta)$

Θα χρησιμοποιήσουμε το $B(-\alpha\eta\mu\theta, \beta\sigma\upsilon\nu\theta)$ (για το άλλο σημείο B <u>ομοίως</u>)

$$\chi_M = \frac{\chi_A + \chi_B}{2} = \frac{\alpha(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)}{2} \Rightarrow (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta) = \frac{2\chi_M}{\alpha} \Rightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 = \left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu^2\theta = \left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow 1 - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2$$

$$\psi_M = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} = \frac{\beta(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)}{2} \Rightarrow (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta) = \frac{2\psi_M}{\beta} \Rightarrow$$

$$(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2 \Rightarrow \eta\mu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2 \Rightarrow 1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2$$

$$\left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{\chi_M{}^2}{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\psi_M{}^2}{\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η έλλειψη: $\dfrac{\chi^2}{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2} + \dfrac{\psi^2}{\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

β)

$$D = \begin{vmatrix} \alpha\sigma\upsilon\nu\theta & \beta\eta\mu\theta & 1 \\ -\alpha\eta\mu\theta & \beta\sigma\upsilon\nu\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2\theta + \alpha\beta\eta\mu^2\theta = \alpha\beta$$

$E = \dfrac{1}{2}|D| = \dfrac{1}{2}|\alpha\beta| = \dfrac{1}{2}\alpha\beta$ σταθερό.

4. Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A=\int_0^{\alpha}\frac{f(\chi)}{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}d\chi \quad \text{και} \quad B=\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-\chi)}{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}d\chi$$

α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό: $u=\alpha-\chi$, να δείξετε ότι $A=B$.

β) Να υπολογίσετε το $A$.

γ) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\Gamma=\int_0^1\frac{e^{2\chi}+e^{\chi}}{e^{2\chi}+2e^{\chi}+e}d\chi$$

<u>ΛΥΣΗ:</u>

α)

$u=\alpha-\chi\Rightarrow\chi=\alpha-u\Rightarrow d\chi=-du$

$\chi=0\Rightarrow u=\alpha$

$\chi=\alpha\Rightarrow u=0$

$$A=\int_0^{\alpha}\frac{f(\chi)}{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}d\chi=\int_{\alpha}^{0}\frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)}(-du)=\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)}du=B$$

$$A+B=\int_0^{\alpha}\frac{f(\chi)}{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}d\chi+\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-\chi)}{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}d\chi$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}d\chi=\int_0^{\alpha}1d\chi=[\chi]_0^{\alpha}=\alpha$$

$$2A=\alpha\Rightarrow\boxed{A=\frac{\alpha}{2}}$$

β) $$\Gamma=\int_0^1\frac{e^{2\chi}+e^{\chi}}{e^{2\chi}+2e^{\chi}+e}d\chi=\int_0^1\frac{e^{\chi}\left(e^{\chi}+1\right)}{e^{\chi}\left(e^{\chi}+2+e^{1-\chi}\right)}d\chi=\int_0^1\frac{\left(e^{\chi}+1\right)}{\left(e^{\chi}+2+e^{1-\chi}\right)}d\chi$$

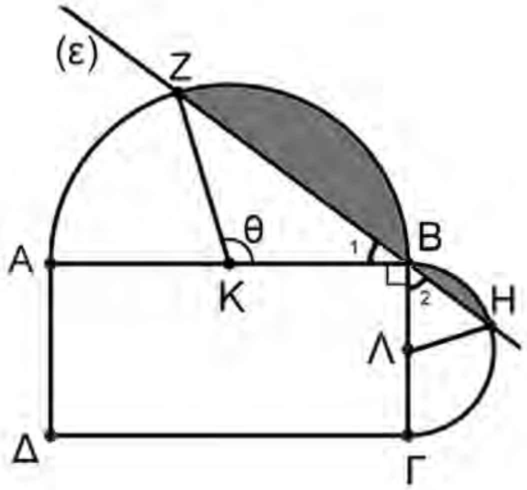
Θέτουμε $f(\chi)=e^{\chi}+1$. Τότε $f(1-\chi)=e^{1-\chi}+1$ και

$$\Gamma=\int_0^1\frac{f(\chi)}{f(\chi)+f(1-\chi)}d\chi=\frac{1}{2}$$

5. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AB = 2\alpha$ και $B\Gamma = 2\beta$. Με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ φτιάχνουμε ημικύκλια εκτός του ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Μεταβλητή ευθεία (ε) που περνά από το Β τέμνει τα δυο ημικύκλια και σχηματίζει δυο κυκλικά τμήματα (τα σκιασμένα μέρη).

   α) Να βρείτε την τιμή $\theta_{\varepsilon\lambda}$ της γωνίας θ για την οποία το άθροισμα των εμβαδών των δυο κυκλικών τμημάτων να είναι ελάχιστον.

   β) Αν $AB = B\Gamma$ να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta_{\varepsilon\lambda}$.




Υπενθύμιση:
Το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας θ (ακτίνια) και ακτίνας R είναι $E = \frac{1}{2}R^2\theta$

ΛΥΣΗ:

Από το τρίγωνο ΚΒΖ $\Rightarrow B_1 = \frac{\pi - \theta}{2}$

Επίσης $B_1 + B_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \Lambda = \pi - \theta$

$$E = E_{\kappa.\tau\mu.BZ} + E_{\kappa.\tau\mu.BH} = E_{\kappa.\tau o\mu.BKZ} - E_{\tau\rho\iota\gamma.BKZ} + E_{\kappa.\tau o\mu.B\Lambda H} - E_{\tau\rho\iota\gamma.B\Lambda H} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}\alpha^2\theta - \frac{1}{2}\alpha^2\eta\mu\theta + \frac{1}{2}\beta^2(\pi - \theta) - \frac{1}{2}\beta^2\eta\mu(\pi - \theta)$$

$$E = \frac{1}{2}\alpha^2\theta - \frac{1}{2}\alpha^2\eta\mu\theta + \frac{1}{2}\beta^2(\pi - \theta) - \frac{1}{2}\beta^2\eta\mu\theta$$

$$\frac{dE}{d\theta}=\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha^2\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\beta^2\sigma\upsilon\nu\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\frac{dE}{d\theta}=0\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta=0$$
$$\Rightarrow\boxed{\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\Rightarrow\boxed{\theta=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)}\ \text{διότι}\ 0<\theta<\pi$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική γιατί $0<\theta<\pi$.

$$\frac{d^2E}{d\theta^2}=\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\eta\mu\theta>0\ \ \forall\ 0<\theta<\pi\Rightarrow\exists\min\ \ \text{για}\ \theta=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right).$$

β) Αν $AB=B\Gamma\Rightarrow\alpha=\beta\Rightarrow\theta=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$