ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Πέμπτη, 31/5/2012**
8:30 – 11:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται **τυπολόγιο**
που αποτελείται από δυο (2) σελίδες.

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int\left(5\chi^4 + e^{2\chi} - 3\right)d\chi$

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα: $\Gamma = A \cdot B - 2A$

3. Να βρείτε την θέση των δύο κύκλων:
$(K): \chi^2 + \psi^2 = 4$ και $(\Lambda): \chi^2 + \psi^2 - 6\chi - 8\psi + 16 = 0$

4. Η συνάρτηση: $\psi = \chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + 5,\ \alpha, \beta \in R$, έχει σημείο καμπής το σημείο $\Sigma(1, -21)$. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

5. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν Α, Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα με $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $P(B)$, $P(A' \cap B)$ και $P(A' / B)$.

6. Δίνεται παραβολή $\psi^2 = \kappa\chi$, $\kappa > 0$, και σημείο $P(\chi_0,\psi_0)$ της παραβολής στο πρώτο τεταρτημόριο. Από το P φέρνουμε τις κάθετες προς τους άξονες των χ και ψ και σχηματίζεται ορθογώνιο. Το ορθογώνιο χωρίζεται από την παραβολή σε δυο χωρία τα οποία περιστρέφονται πλήρως γύρω από τον άξονα των ψ. Να δείξετε ότι ο λόγος των όγκων των δυο στερεών που σχηματίζονται είναι 4:1.

7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi) = \int_{\chi}^{0} t^2 e^t \, dt$

   α) Να δείξετε ότι: $f(\chi) = 2 - (\chi^2 - 2\chi + 2)e^{\chi}$

   β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{\chi \to -\infty} f(\chi)$

8. Δίνονται η υπερβολή: $\chi\psi = 1$ και η παράσταση: $A \equiv \chi + \psi + \dfrac{1}{\chi+1} + \dfrac{1}{\psi+1}$

   Να δείξετε ότι: $A \geq 3$, για κάθε σημείο $\Sigma(\chi,\psi)$ της υπερβολής στο πρώτο τεταρτημόριο.

9. Δίνεται συνάρτηση $f: R \to (0,1)$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, στο πεδίο ορισμού της, και ικανοποιεί τη σχέση: $f^2(\chi) + f'(\chi) = 1, \ \forall \chi \in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο πεδίο ορισμού της.

10. Με ψηφία από το σύνολο $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ σχηματίζουμε τριψήφιους φυσικούς αριθμούς χωρίς επανάληψη ψηφίου. Να βρείτε:

    α) το πλήθος των τριψήφιων φυσικών αριθμών που σχηματίζονται και

    β) το άθροισμα όλων των τριψήφιων φυσικών αριθμών που σχηματίζονται.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(\chi) = \dfrac{\chi^2+3}{\chi+1}$

   α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(\chi)$, να την παραστήσετε γραφικά στο πεδίο ορισμού της.

   β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = f(\chi)$, και τις ευθείες $\psi = \chi - 1$, $\chi = 0$ και $\chi = \lambda$, $\lambda > 0$, είναι ίσο με $4\tau\mu$.
   Να υπολογίσετε την τιμή του λ.

2. Σε ένα διαγώνισμα Ιστορίας το οποίο έχει 5 ερωτήσεις, η πιθανότητα ένας μαθητής να απαντήσει σωστά σε μια οποιανδήποτε ερώτηση είναι $\dfrac{4}{5}$.

   α) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
   Α: Ο μαθητής να απαντήσει σωστά σε 2 ακριβώς ερωτήσεις.
   Β: Ο μαθητής να απαντήσει σωστά σε 2 ακριβώς ερωτήσεις που να είναι συνεχόμενες.

   β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να απάντησε σωστά σε μια τουλάχιστον ερώτηση.

3. Δίνονται η έλλειψη: $\dfrac{\chi^2}{\alpha^2} + \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και Α τυχαίο σημείο της. Από την αρχή Ο των αξόνων φέρνουμε ημιευθεία (ε) παράλληλη προς την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Α, η οποία τέμνει την έλλειψη στο σημείο Β.

   α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ της χορδής ΑΒ και να τον χαρακτηρίσετε.

   β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ είναι σταθερό, καθώς το σημείο Α κινείται πάνω στην έλλειψη.

4. Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A=\int_0^{\alpha}\frac{f(\chi)}{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}d\chi \quad \text{και} \quad B=\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-\chi)}{f(\chi)+f(\alpha-\chi)}d\chi$$

α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό: $u=\alpha-\chi$, να δείξετε ότι $A=B$.

β) Να υπολογίσετε το A.

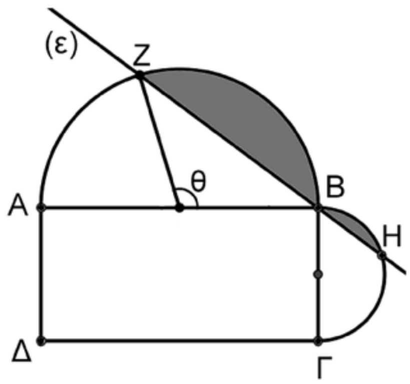
γ) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\Gamma=\int_0^{1}\frac{e^{2\chi}+e^{\chi}}{e^{2\chi}+2e^{\chi}+e}d\chi$$

5. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AB=2\alpha$ και $B\Gamma=2\beta$. Με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ φτιάχνουμε ημικύκλια εκτός του ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Μεταβλητή ευθεία (ε) που περνά από το Β τέμνει τα δυο ημικύκλια και σχηματίζει δυο κυκλικά τμήματα (τα σκιασμένα μέρη).

α) Να βρείτε την τιμή $\theta_{\varepsilon\lambda}$ της γωνίας θ για την οποία το άθροισμα των εμβαδών των δυο κυκλικών τμημάτων να είναι ελάχιστον.

β) Αν $AB=B\Gamma$ να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta_{\varepsilon\lambda}$.



Υπενθύμιση:

Το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας θ (ακτίνια) και ακτίνας R είναι $E=\frac{1}{2}R^2\theta$

------ Τ Ε Λ Ο Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ ------