

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (I) ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : ΤΡΙΤΗ, 21 ΜΑΪΟΥ 2013

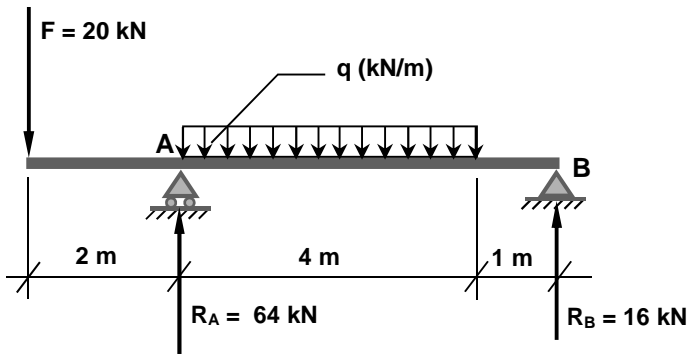
ΩΡΑ : 11:00 – 13:30

ΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄ (48 μονάδες)

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το μέγεθος του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου q (kN/m) που καταπονεί την προέχουσα δοκό του σχήματος 1.



$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B - F - q \cdot 4 = 0$$

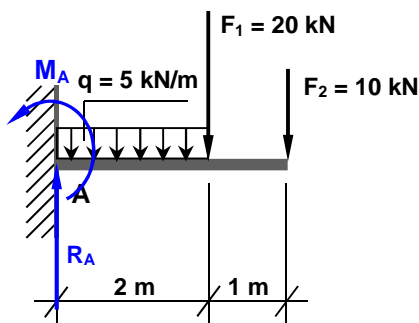
$$64 + 16 - 20 - q \cdot 4 = 0$$

$$60 = 4q$$

$$\underline{q = 15 \text{ kN/m}}$$

ΣΧΗΜΑ 1

2. Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στη στήριξη της δοκού προβόλου του σχήματος 2 και να τις σχεδιάσετε στο σχήμα.



$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - q \cdot 2 - F_1 - F_2 = 0$$

$$R_A - 5 \cdot 2 - 20 - 10 = 0$$

$$\underline{R_A = 40 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

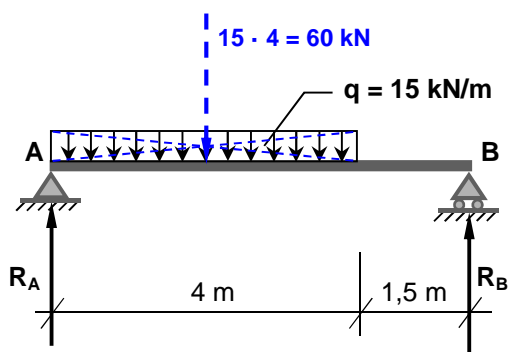
$$-M_A + q \cdot 2 \cdot 1 + F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 3 = 0$$

$$-M_A + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 0$$

$$\underline{M_A = 80 \text{ kNm}}$$

ΣΧΗΜΑ 2

3. Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης ροπής κάμψης που αναπτύσσεται στη δοκό του σχήματος 3.



ΣΧΗΜΑ 3

Υπολογισμός αντιδράσεων:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & & \sum M_B = 0 \\ 15 \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 5,5 = 0 & & R_A \cdot 5,5 - 15 \cdot 4 \cdot 3,5 = 0 \\ R_B = 21,82 \text{ kN} & & R_A = 38,18 \text{ kN} \end{aligned}$$

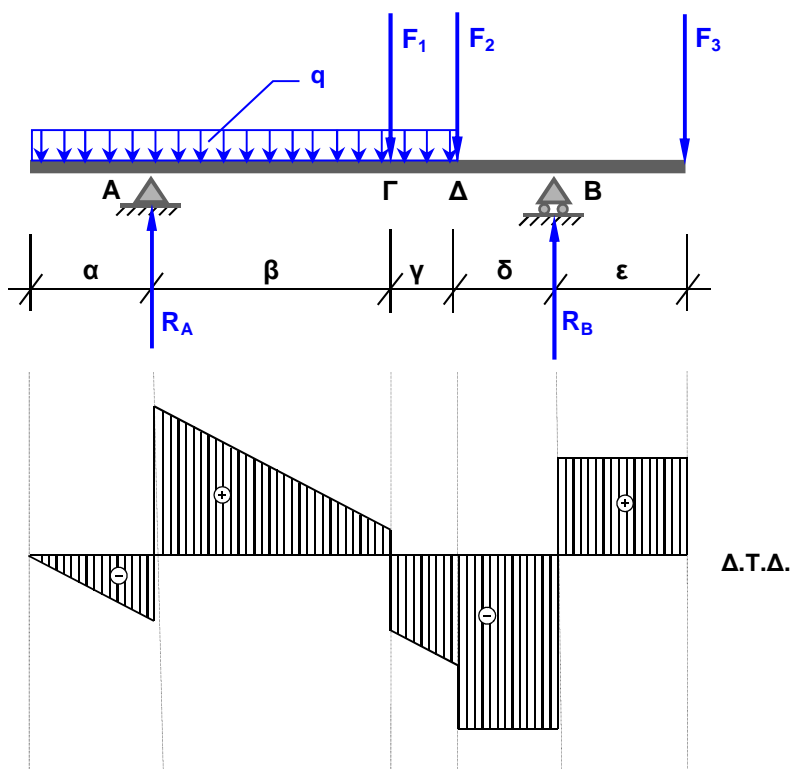
Σημείο μηδενικής τιμής τέμνουσας δύναμης:

$$\begin{aligned} 38,18 - 15 \cdot x = 0 \\ x = 2,55 \text{ m} \end{aligned}$$

Μέγιστη ροπή κάμψης:

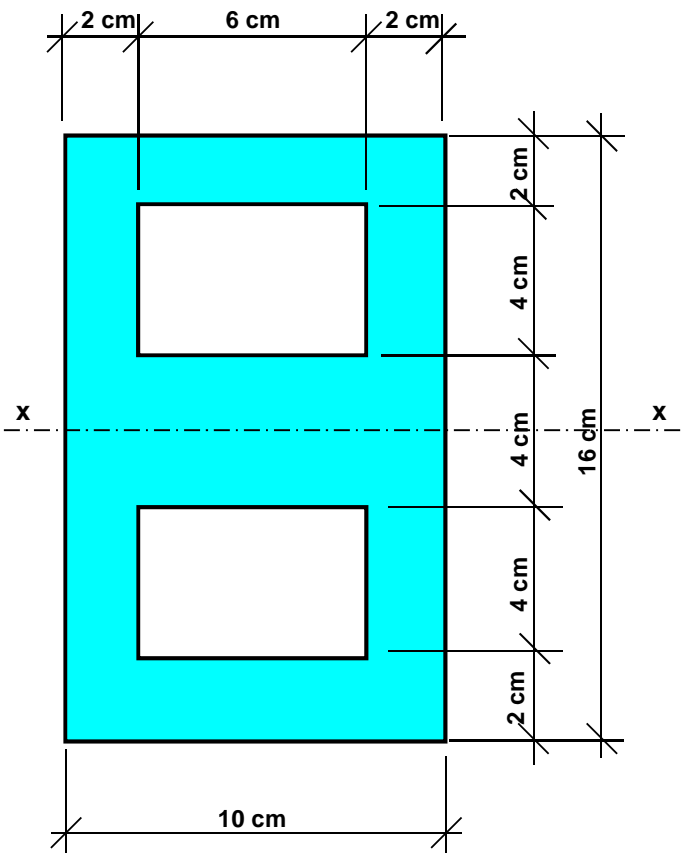
$$M_{\text{μεγ.}} = 38,18 \cdot 2,55 - 15 \cdot 2,55 \cdot 1,275 = \underline{48,59 \text{ kNm}}$$

4. Στο σχήμα 4 δίνονται η αμφιπροέχουσα δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.). Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και τα φορτία που καταπονούν τη δοκό, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο Δ.Τ.Δ.



ΣΧΗΜΑ 4

5. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα x-x της σύνθετης διατομής (με δύο κενά) που φαίνεται στο σχήμα 5.



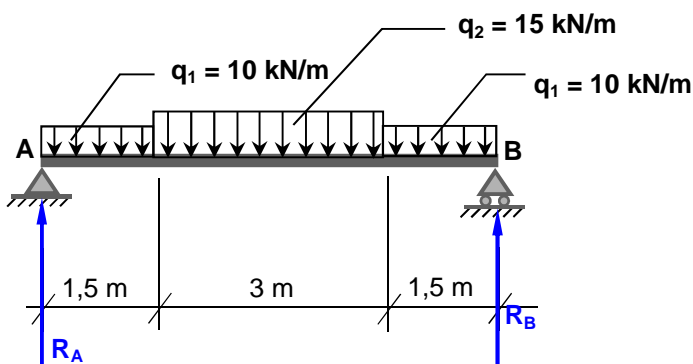
ΣΧΗΜΑ 5

$$I_{x-x} = \frac{10 \cdot 16^3}{12} - 2 \left(\frac{6 \cdot 4^3}{12} + 24 \cdot 4^2 \right) =$$

$$I_{x-x} = 3413,33 + 2 (32 + 384)$$

$$\underline{I_{x-x} = 2581,33 \text{ cm}^4}$$

6. Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στις στηρίξεις **A** και **B** της αμφιέρειστης δοκού που φαίνεται στο σχήμα 6.



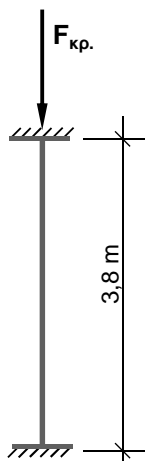
ΣΧΗΜΑ 6

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1,5 + 15 \cdot 3}{2} = \frac{75}{2}$$

$$\underline{R_A = R_B = 37,5 \text{ kN}}$$

7. Ράβδος ορθογωνικής κοίλης διατομής και με πραγματικό μήκος **3,8 m** στηρίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 7. Αν το μέτρο ελαστικότητας είναι **190 kN/mm²** και οι ροπές αδράνειας της διατομής **I_x = 124000 mm⁴** και **I_y = 54500 mm⁴**, να υπολογίσετε το μέγιστο (κρίσιμο) φορτίο που μπορεί να μεταφέρει χωρίς να εκδηλώνεται σε αυτή λυγισμός.



ΣΧΗΜΑ 7

Ελεύθερο μήκος λογισμού

$$\ell = 0,5 \cdot L = 0,5 \cdot 3,8 = 1,9 \text{ m} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

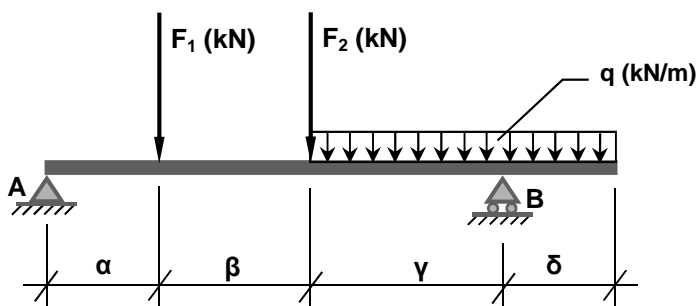
Κρίσιμο φορτίο λογισμού

$$F_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 E I_{\text{ελ.}}}{\ell^2}$$

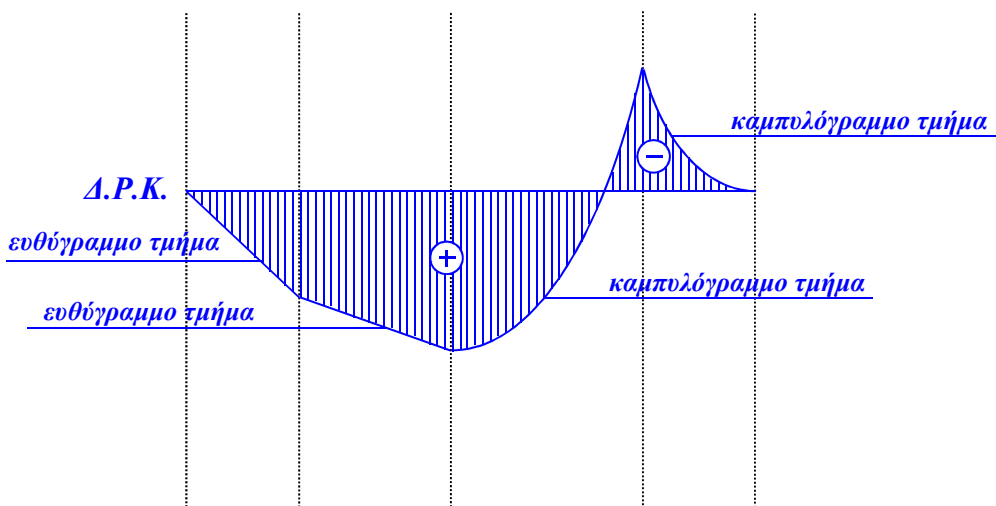
$$F_{\text{κρ}} = \frac{3,14^2 \cdot 190 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 54500 \text{ mm}^4}{(1,9 \cdot 10^3 \text{ mm})^2}$$

$$F_{\text{κρ.}} = 28281 \text{ N} = \underline{\underline{28,28 \text{ kN}}}$$

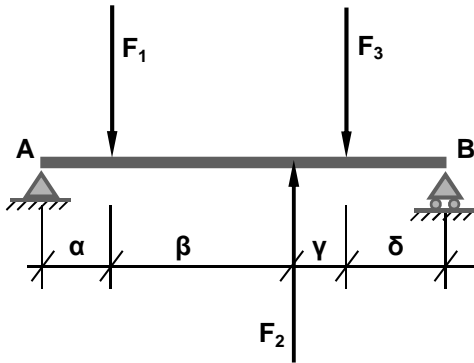
8. Να σχεδιάσετε μια πιθανή μορφή του διαγράμματος των ροπών κάμψης **Δ.Ρ.Κ.** της δοκού του σχήματος 8, χωρίς να τη λύσετε. Να σημειώσετε τα ευθύγραμμα και καμπυλόγραμμα τμήματα του διαγράμματος.



ΣΧΗΜΑ 8



9. Για τη δοκό του σχήματος 9 να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και να γράψετε τις εξισώσεις ισορροπίας των ροπών ως προς το σημείο **A** και **B**.



$$\Sigma M_A = 0$$

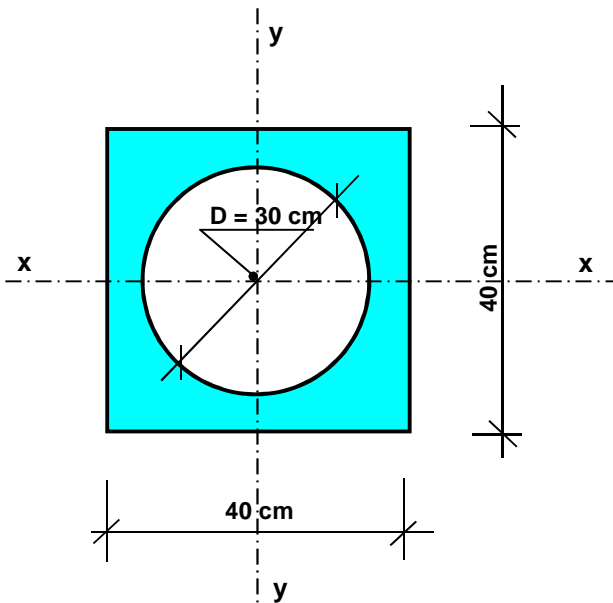
$$F_1 \cdot \alpha - F_2 \cdot (\alpha + \beta) + F_3 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) - R_B \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - F_1 \cdot (\beta + \gamma + \delta) + F_2 \cdot (\gamma + \delta) - F_3 \cdot \delta = 0$$

ΣΧΗΜΑ 9

10. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης W_x της σύνθετης διατομής που δίνεται στο σχήμα 10.



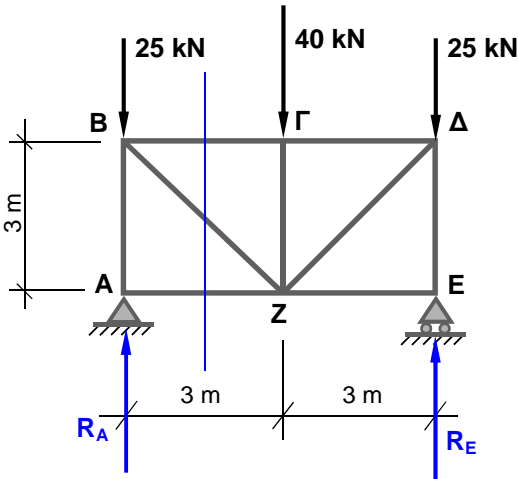
$$I_{x-x} = \frac{40 \cdot 40^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 30^4}{64}$$

$$I_{x-x} = 213333,33 - 39740,63 = 173592,7 \text{ cm}^4$$

$$W_x = \frac{I_{x-x}}{y} = \frac{173592,7}{20} = \underline{\underline{8679,6 \text{ cm}^3}}$$

ΣΧΗΜΑ 10

11. Να υπολογίσετε, με τη μέθοδο των τομών, το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης που αναπτύσσεται στη ράβδο **ΒΓ** του δικτυώματος του σχήματος 11 και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης της ράβδου.



ΣΧΗΜΑ 11

Λόγω συμμετρίας

$$R_A = R_B = \frac{40 + 2 \cdot 25}{2} = 45 \text{ kN}$$

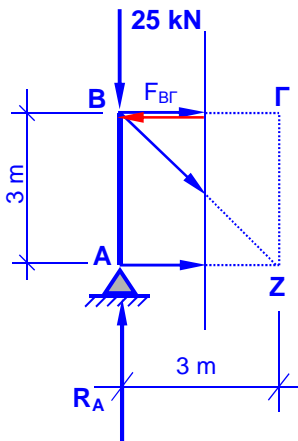
Ράβδος ΒΓ

$$\Sigma M_Z = 0$$

$$45 \cdot 3 - 25 \cdot 3 + F_{BG} \cdot 3 = 0$$

$$135 - 75 + F_{BG} \cdot 3 = 0$$

$$\underline{F_{BG} = -20 \text{ kN (θλιβόμενη)}}$$



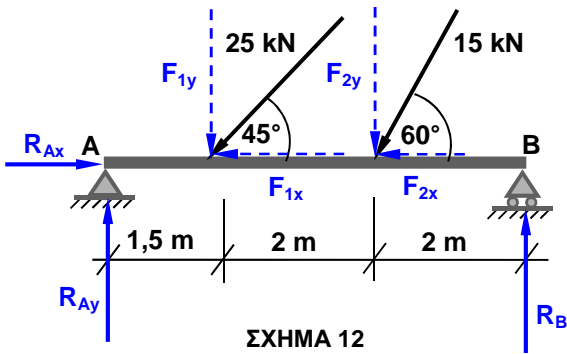
12. Σε δοκό η οποία καταπονείται σε κάμψη αναπτύσσεται μέγιστη ροπή $M_{max} = 42,75 \text{ kNm}$. Αν η ροπή αντίστασης της δοκού είναι $W = 225 \text{ cm}^3$, να υπολογίσετε τη μέγιστη τάση κάμψης (σε N/mm^2) που αναπτύσσεται στη διατομή της.

$$\sigma_{μεγ} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{42,75 \text{ kNm}}{225 \text{ cm}^3} = \frac{42,75 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm}}{225 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = \underline{190 \text{ N/mm}^2}$$

ΜΕΡΟΣ Β' (32 μονάδες)

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 8 μονάδες.

13. Για τη δοκό του σχήματος 12 να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B** και να τις σχεδιάσετε στο σχήμα.



Ανάλυση δυνάμεων

$$F_{1x} = 25 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 17,68 \text{ kN}$$

$$F_{1y} = 25 \cdot \eta\mu 45^\circ = 17,68 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = 15 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 7,5 \text{ kN}$$

$$F_{2y} = 15 \cdot \eta\mu 60^\circ = 12,99 \text{ kN}$$

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_{Ax} - 17,68 - 7,5 = 0$$

$$\underline{R_{Ax} = 25,18 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$17,68 \cdot 1,5 + 12,99 \cdot 3,5 - R_B \cdot 5,5 = 0$$

$$5,5 R_B = 71,985$$

$$\underline{R_B = 13,09 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_{Ay} \cdot 5,5 - 17,68 \cdot 4 - 12,99 \cdot 2 = 0$$

$$5,5 R_{Ay} = 96,7$$

$$\underline{R_{Ay} = 17,58 \text{ kN}}$$

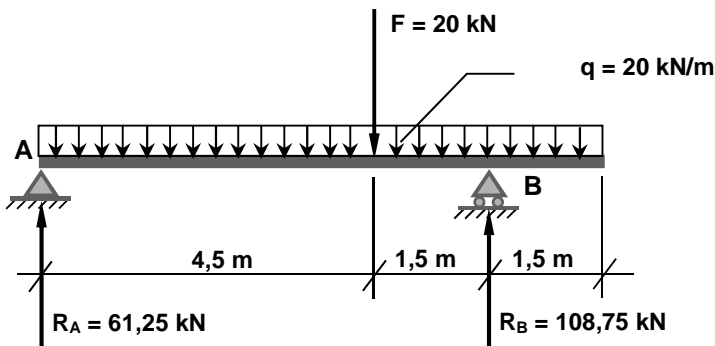
Έλεγχος:

$$R_{Ay} + R_B - F_{1y} - F_{2y} = 0$$

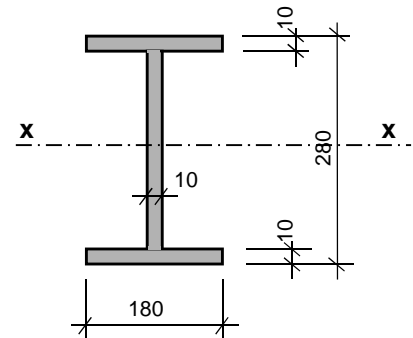
$$17,58 + 13,09 - 17,68 - 12,99 = 0$$

$$0 = 0$$

14. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τάση θλίψης και εφελκυσμού που θα αναπτυχθεί στην προέχουσα δοκό που φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 13 α και που έχει διατομή I όπως φαίνεται στο σχήμα 13 β. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε mm.



ΣΧΗΜΑ 13 α



ΣΧΗΜΑ 13 β

Θέση μηδενικής τιμής τέμνουσας δύναμης

$$R_A - q \cdot x = 0$$

$$61,25 - 20 \cdot x = 0$$

$$x = 3,06 \text{ m}$$

Ροπές κάμψης

$$M_{max} = 61,25 \cdot 3,06 - 20 \cdot 3,06 \cdot 1,53 = 93,8 \text{ kNm}$$

$$M_{min} = 61,25 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 - 20 \cdot 1,5 = -22,5 \text{ kNm}$$

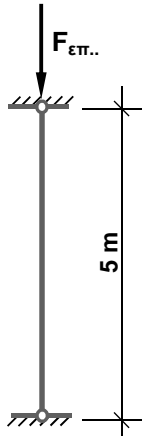
Ροπή αδράνειας

$$I_{x-x} = \frac{180 \cdot 280^3}{12} - 2 \frac{85 \cdot 260^3}{12} = 80,29 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

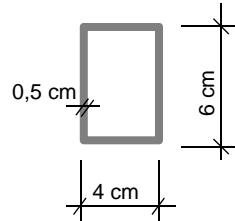
Τάση κάμψης

$$\sigma = \frac{93,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 140 \text{ mm}}{80,29 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} = 163,56 \text{ N/mm}^2 \text{ (θλιπτική και εφελκυστική)}$$

15. Μεταλλική ράβδος ορθογωνικής κοίλης διατομής με πάχος τοιχώματος 0,5 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα 14 β και μήκος 5 m στηρίζεται και στα δύο άκρα με άρθρωση όπως φαίνεται στο σχήμα 14 α. Αν το μέτρο ελαστικότητας $E = 200 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ και ο συντελεστής ασφάλειας $\gamma = 3$, να υπολογίσετε το επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού, όταν η ράβδος καταπονείται σε κεντρική θλίψη.



ΣΧΗΜΑ 14 α



ΣΧΗΜΑ 14 β

Ελεύθερο μήκος λυγισμού $\ell = L = 5 \text{ m} = 5000 \text{ mm}$

$$I_{ελ.} = I_{y-y} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} - \frac{5 \cdot 3^3}{12} = 20,75 \text{ cm}^4$$

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού

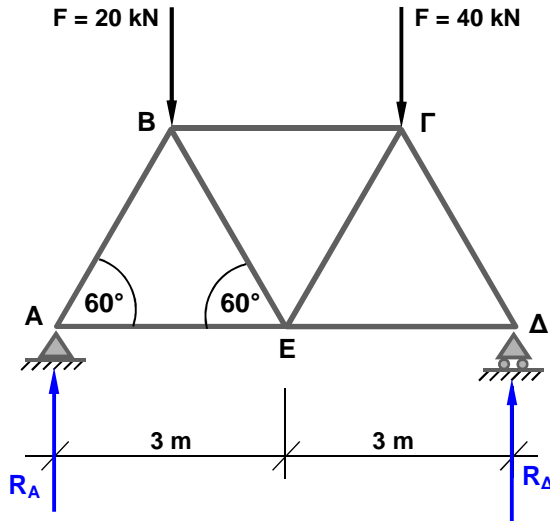
$$F_{κρ.} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ.}}{\ell^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 20,75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{5000^2 \text{ mm}^2} = 16366 \text{ N}$$

$$F_{κρ.} = 16366 \text{ N} = 16,366 \text{ kN}$$

Επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού

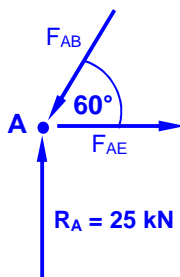
$$F_{επ.} = \frac{F_{κρ.}}{\gamma} = \frac{16,366 \text{ kN}}{3} = \underline{5,46 \text{ kN}}$$

16. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που καταπονούν τις ράβδους **AB**, **AE**, **BΓ** και **BE**, μέλη του δικτυώματος του σχήματος 15, καθώς και το είδος της καταπόνησης, **με τη μέθοδο της ανάλυσης – ισορροπίας των κόμβων**.

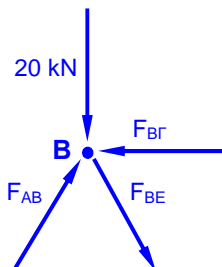


ΣΧΗΜΑ 15

Κόμβος A



Κόμβος B



$$\Sigma M_A = 0$$

$$20 \cdot 1,5 + 40 \cdot 4,5 - R_{\Delta} \cdot 6 = 0$$

$$\underline{R_{\Delta} = 35 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_{\Delta} = 0$$

$$R_A \cdot 6 - 20 \cdot 4,5 - 40 \cdot 1,5 = 0$$

$$\underline{R_A = 25 \text{ kN}}$$

Έλεγχος:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_{\Delta} - 20 - 40 = 0$$

$$25 + 35 - 20 - 40 = 0$$

Κόμβος A

$$\Sigma F_y = 0$$

$$25 - F_{AB} \cdot \eta\mu 60^{\circ} = 0$$

$$\underline{F_{AB} = 28,87 \text{ kN} \text{ θλιβόμενη}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{AE} - F_{AB} \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = 0$$

$$F_{AE} - 28,87 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = 0$$

$$\underline{F_{AE} = 14,435 \text{ kN} \text{ εφελκόμενη}}$$

Κόμβος B

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{AB} \cdot \eta\mu 60^{\circ} - 20 - F_{BE} \cdot \eta\mu 60^{\circ} = 0$$

$$28,87 \cdot \eta\mu 60^{\circ} - 20 - F_{BE} \cdot \eta\mu 60^{\circ} = 0$$

$$\underline{F_{BE} = 5,77 \text{ kN} \text{ εφελκόμενη}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{AB} \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} - F_{B\Gamma} + F_{BE} \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = 0$$

$$28,87 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} - F_{B\Gamma} + 5,77 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = 0$$

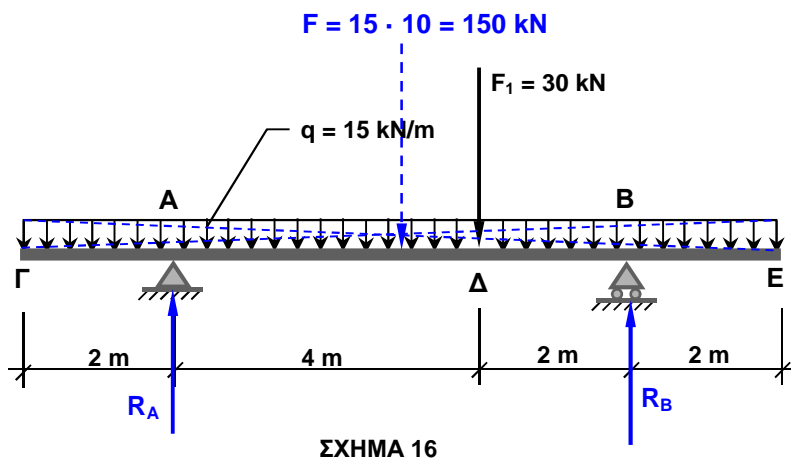
$$\underline{F_{B\Gamma} = 17,32 \text{ kN} \text{ θλιβόμενη}}$$

ΜΕΡΟΣ Γ΄

Η ορθή απάντηση βαθμολογείται με 20 μονάδες.

17. Αμφιπροέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 16.

- (α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- (β) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ**, **Δ** και **Ε**.
- (γ) Να υπολογίσετε την απόσταση από το σημείο στήριξης **A**, όπου αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης M_{max} .
- (δ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{max} .
- (ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων **Q** και των ροπών κάμψης **M** και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ**, **Δ** και **Ε**, καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{max} .



ΣΧΗΜΑ 16

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_A = 0$$

$$15 \cdot 10 \cdot 3 + 30 \cdot 4 - R_B \cdot 6 = 0$$

$$450 + 120 - 6R_B = 0$$

$$6R_B = 570$$

$$\underline{R_B = 95 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot 6 - 15 \cdot 10 \cdot 3 - 30 \cdot 2 = 0$$

$$6R_A - 450 - 60 = 0$$

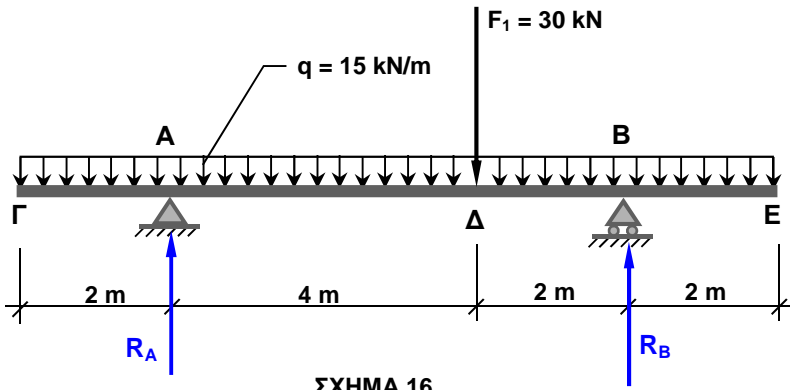
$$6R_A = 510$$

$$\underline{R_A = 85 \text{ kN}}$$

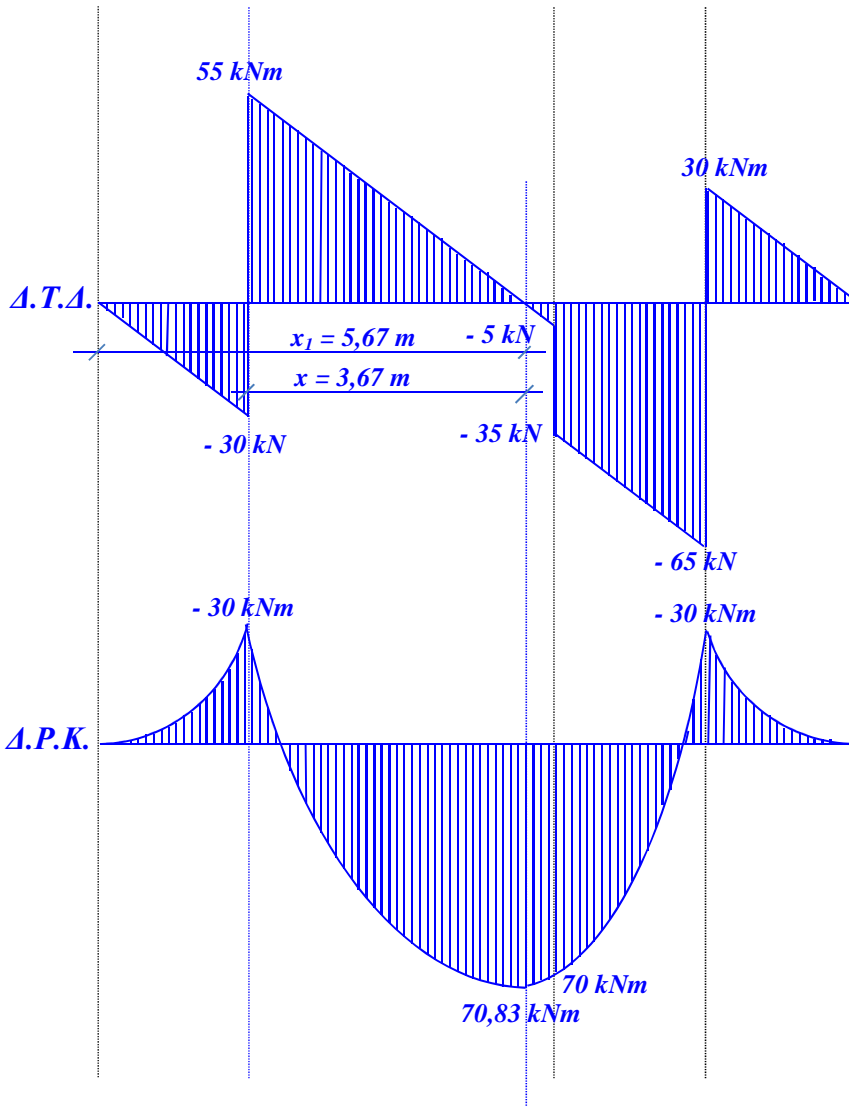
Έλεγχος

$$\Sigma F_y = 0$$

$$85 + 95 - 15 \cdot 10 - 30 = 0$$



ΣΧΗΜΑ 16



Τέμνουσες δυνάμεις

$$Q_{\Gamma} = 0$$

$$Q_A^{ap.} = -15 \cdot 2 = \underline{-30 \text{ kN}}$$

$$Q_A^{δεξ.} = -15 \cdot 2 + 85 = \underline{55 \text{ kN}}$$

$$Q_{\Delta}^{ap.} = 85 - 15 \cdot 6 = \underline{-5 \text{ kN}}$$

$$Q_{\Delta}^{δεξ.} = 85 - 15 \cdot 6 - 30 = \underline{-35 \text{ kN}}$$

$$Q_B^{ap.} = 85 - 15 \cdot 8 - 30 = \underline{-65 \text{ kN}}$$

$$Q_B^{δεξ.} = 85 - 15 \cdot 8 - 30 + 95 = \underline{30 \text{ kN}}$$

$$Q_E = 85 - 15 \cdot 10 - 30 + 95 = 0 \text{ kN}$$

Ροπές κάμψης

$$M_A = 0$$

$$M_A = -15 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{-30 \text{ kNm}}$$

$$M_{\Delta} = -15 \cdot 6 \cdot 3 + 85 \cdot 4 = \underline{70 \text{ kNm}}$$

$$M_B = -15 \cdot 8 \cdot 4 + 85 \cdot 6 - 30 \cdot 2 = \underline{-30 \text{ kNm}}$$

$$M_E = -15 \cdot 10 \cdot 5 + 85 \cdot 8 - 30 \cdot 4 + 95 \cdot 2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{max} = 85 \cdot 3,67 - 15 \cdot 5,67 \cdot 2,835 = \underline{70,83 \text{ kNm}}$$

Θέση μηδενικής τιμής τέμνουσας δύναμης

$$85 - 15 \cdot x_1 = 0$$

$$x_1 = 5,67 \text{ m (απόσταση από το } \Gamma)$$

$$\text{απόσταση από το A: } x = 5,67 - 2 = \underline{3,67 \text{ m}}$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

<i>Ανάλυση δυνάμεων</i>	$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ $F_y = F \cdot \eta\mu\varphi$
<i>Ροπή δύναμης</i>	$M = F \cdot \alpha$
<i>Συνθήκες ισορροπίας</i>	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M = 0$
<i>Ροπές αδράνειας</i>	$I_{x-x} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x-x} = I_{y-y} = \frac{\pi D^4}{64}$
<i>Ακτίνα αδράνειας</i>	$i_x = \sqrt{\frac{I_{x-x}}{A}}$ $i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$
<i>Ροπές αντίστασης</i>	$W_x = \frac{I_{x-x}}{y}$
<i>Απλή κάμψη</i>	$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$
<i>Λογισμός</i>	$F_{κρ.} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ.}}{\ell^2}$ $F_{επ.} = \frac{F_{κρ.}}{\gamma}$