

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014**

**Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ**

**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 22 Μαΐου 2014**  
**8:00 – 11:00**

**ΜΕΡΟΣ Α΄**

**ΛΥΣΕΙΣ**

<b>1.</b>	<p>Να βρείτε τον όγκο ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με μήκος 4 m, πλάτος 2 m και ύψος 6 m.</p> <p><b>Λύση:</b> <math>V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 48 \text{ m}^3</math></p>											
<b>2.</b>	<p>Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα φαίνονται τα μηνιαία έξοδα μιας οικογένειας.</p> <div style="text-align: center;"><table border="1"><caption>ΕΞΟΔΑ</caption><thead><tr><th>Κατηγορία</th><th>Εξόδα (ΕΥΡΩ)</th></tr></thead><tbody><tr><td>Ενοίκιο</td><td>400</td></tr><tr><td>Ρεύμα</td><td>200</td></tr><tr><td>Δάνεια</td><td>600</td></tr><tr><td>Διάφορα</td><td>800</td></tr></tbody></table></div> <p>Να βρείτε:</p> <p>(α) Το ποσό που πληρώνει μηνιαίως η οικογένεια σε δάνεια.</p> <p>(β) Τα συνολικά μηνιαία έξοδα της οικογένειας.</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p>(α) Η οικογένεια θα πληρώσει €600.</p> <p>(β) Τα συνολικά έξοδα της οικογένειας είναι <math>(400+200+600+800)=€2000</math>.</p>	Κατηγορία	Εξόδα (ΕΥΡΩ)	Ενοίκιο	400	Ρεύμα	200	Δάνεια	600	Διάφορα	800	
Κατηγορία	Εξόδα (ΕΥΡΩ)											
Ενοίκιο	400											
Ρεύμα	200											
Δάνεια	600											
Διάφορα	800											

3.	<p>Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης <b>ΑΕΡΙΟ</b>.</p> <p><b>Λύση:</b></p> $M_5 = 5! = 120$	
4.	<p>Ένας κτηματομεσίτης αμείβεται με προμήθεια 4% επί των πωλήσεων. Πόση προμήθεια θα πάρει για πωλήσεις €120000;</p> <p><b>Λύση:</b></p> $\text{Προμήθεια} = 120000 \cdot \frac{4}{100} = \text{€}4800$	
5.	<p>Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης: <math>\epsilon\phi 3x = \epsilon\phi 45^\circ</math></p> <p><b>Λύση:</b></p> $3x = 180^\circ \kappa + 45^\circ \Rightarrow x = 60^\circ \kappa + 15^\circ \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	
6.	<p>Να βρείτε την παράγωγο <math>\frac{dy}{dx}</math> της συνάρτησης: <math>y = x^2 - 3\sigma\upsilon\nu x + 5</math></p> <p><b>Λύση:</b></p> $y = x^2 - 3\sigma\upsilon\nu x + 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + 3\eta\mu x$	
7.	<p>Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου: <math>x^2 + (y - 3)^2 = 49</math></p> <p><b>Λύση:</b></p> $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad x^2 + (y - 3)^2 = 49$ <p>Οι συντεταγμένες του κέντρου είναι <math>K(0,3)</math>.</p> <p>Το μήκος της ακτίνας του κύκλου είναι <math>R=7</math></p>	

**8.** Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 5, 6, 7, 8, 9 αν

(α) επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;  
 (β) δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;

**Λύση:**

(α) Επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου:

Φάσεις	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
Τρόποι	5	5	

Μπορούν να σχηματιστούν  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$  τριψήφιοι αριθμοί

(β) Δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου:

Φάσεις	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
Τρόποι	5	4	3

Μπορούν να σχηματιστούν  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  τριψήφιοι αριθμοί

**9.** Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$$

**Λύση:**

$$x - y = -1 \Rightarrow x = y - 1$$

$$\Rightarrow y(y - 1) = 2$$

$$\Rightarrow y^2 - y = 2$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 2)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ και } y = -1$$

Για  $y = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$  (1, 2)  
 Για  $y = -1 \Rightarrow x = -1 - 1 = -2$  (-2, -1)

**10.** Δίνεται κώνος με γενέτειρα 13 cm και ακτίνα βάσης 5 cm.  
 Να βρείτε:

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.

(β) Τον όγκο του.

**Λύση:**

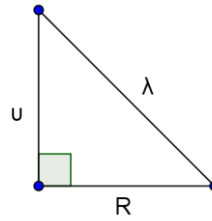
$$\lambda^2 = u^2 + R^2$$

$$\Rightarrow 13^2 = u^2 + 5^2$$

$$\Rightarrow u^2 = 169 - 25$$

$$\Rightarrow u^2 = 144$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{144} = 12\text{cm}$$



$$E_{\kappa} = \pi R \lambda = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\kappa} + E_{\beta} = 65\pi + \pi \cdot 5^2 = 65\pi + 25\pi = 90\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi R^2 u}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$$

## ΜΕΡΟΣ Β΄:

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών που καταμετρήθηκαν μέσα σε κάθε αυτοκίνητο κατά τη διάβαση 40 αυτοκινήτων από μια διασταύρωση.

Αριθμός παιδιών ( $x_i$ )	0	1	2	3	4
Αριθμός αυτοκινήτων ( $f_i$ )	4	10	13	8	5

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή ( $x_\varepsilon$ ) των παρατηρήσεων.  
(β) Την μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) των παρατηρήσεων.  
(γ) Την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) των παρατηρήσεων.

**Λύση:**

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
0	4	0	4	16
1	10	10	1	10
2	13	26	0	0
3	8	24	1	8
4	5	20	4	20
	<b>40</b>	<b>80</b>		<b>54</b>

(α)  $x_\varepsilon = 2$

(β)  $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{80}{40} = 2$

(γ)  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{54}{40}} = \sqrt{1,35} \approx 1,16$

2. Ένας εισαγωγέας αγόρασε από το εξωτερικό αυτοκίνητο αξίας €20000. Πλήρωσε €1200 για μεταφορικά. Επίσης πλήρωσε επιπλέον 15% πάνω στο συνολικό κόστος του αυτοκινήτου για διάφορα άλλα έξοδα.

Να υπολογίσετε:

(α) Πόσα κόστισε το αυτοκίνητο στον εισαγωγέα.

(β) Πόσα πρέπει να πωληθεί το αυτοκίνητο για να έχει κέρδος 25% ο εισαγωγέας.

**Λύση:**

$$(α) \text{ Αξία} + \text{Μεταφορικά} = 20000 + 1200 = €21200$$

$$\text{Επιπλέον έξοδα} = 21200 \cdot \frac{15}{100} = €3180$$

$$\text{Κόστος} = 21200 + 3180 = €24380$$

$$(β) \text{ Κέρδος} = 24380 \cdot \frac{25}{100} = €6095$$

$$\text{Τιμή πώλησης} = 24380 + 6095 = €30475$$

3. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B') = \frac{3}{5}$  και  $P(A \cup B) = \frac{8}{15}$ .

Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α)  $P(B)$ , (β)  $P(A \cap B)$ , (γ)  $P(A/B)$

**Λύση:**

$$(α) P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$(β) P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{8}{15} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{8}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$(γ) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

4.

(α) Δίνεται η συνάρτηση:  $y = x \cdot \eta\mu 2x$ (i) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $\frac{dy}{dx}$  της συνάρτησης.(ii) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο  $\frac{d^2y}{dx^2}$  της συνάρτησης.(β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:  $\int \left( x^4 + 2\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx$ **Λύση:**(α)  $y = x \cdot \eta\mu 2x \Rightarrow$ 

(i)  $\frac{dy}{dx} = \eta\mu 2x + 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$

(ii)  $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu 2x - 4x \cdot \eta\mu 2x = 4\sigma\upsilon\nu 2x - 4x \cdot \eta\mu 2x$

(β)  $\int \left( x^4 + 2\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx = \frac{x^5}{5} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c = \frac{x^5}{5} + \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2} + c$

5.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $AB = 4 \text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 10 \text{ cm}$  και  $\Gamma\Delta = 10 \text{ cm}$ . Το τραπέζιο ΑΒΓΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $xy$  που είναι παράλληλος προς την ΑΔ και απέχει 1 cm από αυτή.

Να βρείτε:

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

(β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.

**Λύση:**Στοιχεία κυλίνδρου:

$r = 1 \text{ cm}$

$u = 8 \text{ cm}$

Στοιχεία κώλουρου κώνου:

$R = 11 \text{ cm}$

$\rho = 5 \text{ cm}$

$\lambda = 10 \text{ cm}$

$u = 8 \text{ cm}$

$$(α) E_{ολ} = E_{\text{δακτ.μικρός}} + E_{\text{Κκολ.κων.}} + E_{\text{δακτ.μεγάλος}} + E_{\text{Κκυλ.}}$$

$$E_{ολ} = \pi R^2 - \pi r^2 + \pi(R + \rho)\lambda + \pi R^2 - \pi r^2 + 2\pi r u$$

$$E_{ολ} = \pi 5^2 - \pi 1^2 + \pi(11 + 5)10 + \pi 11^2 - \pi 1^2 + 2\pi 1 \cdot 8$$

$$E_{ολ} = 25\pi - \pi + 160\pi + 121\pi - \pi + 16\pi$$

$$E_{ολ} = 320\pi \text{ cm}^2$$

$$(β) V_{ολ} = V_{\text{κολ.κώνου}} - V_{\text{κυλ.}}$$

$$V_{ολ} = \frac{\pi u}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2) - \pi r^2 u$$

$$V_{ολ} = \frac{\pi 8}{3}(11^2 + 11 \cdot 5 + 5^2) - \pi 1^2 \cdot 8$$

$$V_{ολ} = 528\pi \text{ cm}^3$$

