

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (I) ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : ΠΕΜΠΤΗ, 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

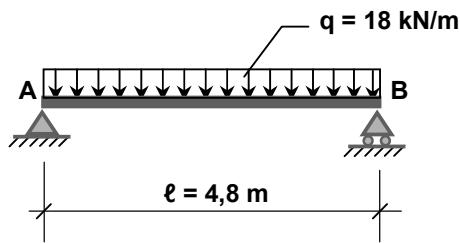
ΩΡΑ : 8:00 – 10:30

ΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄ (12 ερωτήσεις)

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ροπή κάμψης για τη δοκό του σχήματος 1 που φορτίζεται με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q = 18 \text{ kN/m}$ σε όλο το μήκος της $\ell = 4,8 \text{ m}$.

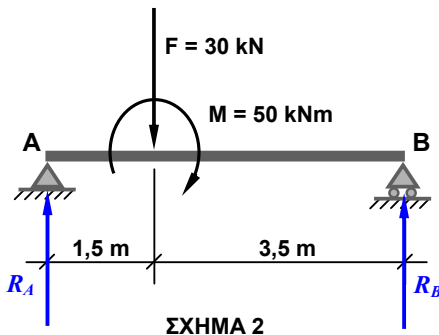


ΣΧΗΜΑ 1

Μέγιστη ροπή κάμψης

$$M_{max} = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{18 \cdot 4,8^2}{8} = \underline{51,84 \text{ kNm}}$$

2. Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στις στηρίξεις της δοκού του σχήματος 2.



ΣΧΗΜΑ 2

$$\Sigma M_A = 0$$

$$30 \cdot 1,5 + 50 - R_B \cdot 5 = 0$$

$$5R_B = 95 \rightarrow R_B = \underline{19 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot 5 + 50 - 30 \cdot 3,5 = 0$$

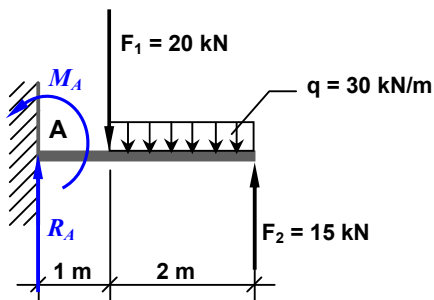
$$5R_A = 55 \rightarrow R_A = \underline{11 \text{ kN}}$$

$$\text{Έλεγχος: } \Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B - 30 = 0$$

$$11 + 19 - 30 = 0$$

3. Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στη στήριξη της δοκού προβόλου του σχήματος 3.



ΣΧΗΜΑ 3

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - F_1 - q \cdot 2 + F_2 = 0$$

$$R_A - 20 - 30 \cdot 2 + 15 = 0$$

$$\underline{R_A = 65 \text{ kN}}$$

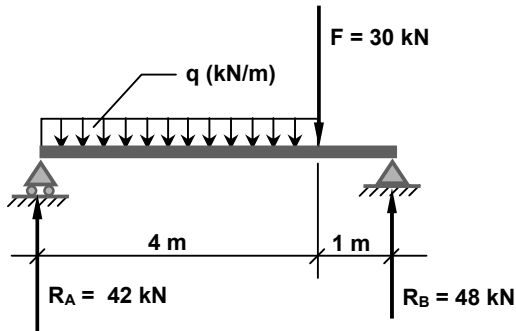
$$\Sigma M_A = 0$$

$$-M_A + F_1 \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 2 - F_2 \cdot 3 = 0$$

$$-M_A + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 2 \cdot 2 - 15 \cdot 3 = 0$$

$$\underline{M_A = 95 \text{ kNm}}$$

4. Να υπολογίσετε το μέγεθος του ομοιόμορφα καταμεμημένου φορτίου q (kN/m) που καταπονεί την αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 4.



$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 0$$

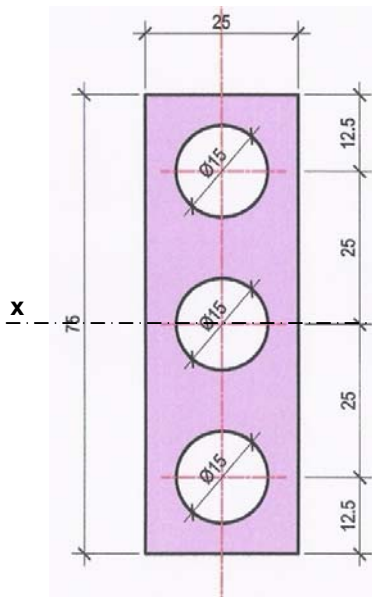
$$42 + 48 - q \cdot 4 - 30 = 0$$

$$60 = 4q$$

$$\underline{q = 15 \text{ kN/m}}$$

ΣΧΗΜΑ 4

5. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$ της διατομής με τις τρεις οπές του σχήματος 5. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm.



Ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x-x$

$$I_{x-x} = \frac{25 \cdot 76^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 15^4}{64} - 2 \left(\frac{3,14 \cdot 15^4}{64} + 3,14 \cdot 7,5^2 \cdot 25^2 \right)$$

$$I_{x-x} = 878906,25 - 2483,79 - 2 \cdot (2483,79 + 110390,63)$$

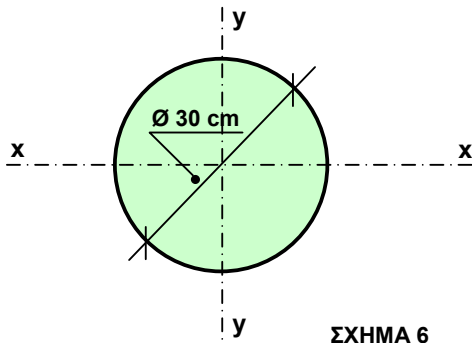
$$\underline{I_{x-x} = 650673,62 \text{ cm}^4}$$

ΣΧΗΜΑ 5

6. Σε δοκό ορθογωνικής διατομής η οποία καταπονείται σε κάμψη, αναπτύσσεται μέγιστη ροπή $M_{\max} = 120 \text{ kNm}$. Αν η ροπή αντίστασης της δοκού είναι $W = 240 \text{ cm}^3$, να υπολογίσετε τη μέγιστη τάση κάμψης που αναπτύσσεται στη διατομή της.

$$\sigma_{\text{μεγ}} = \frac{M_{\max} \cdot y}{I} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{120 \text{ kNm}}{240 \text{ cm}^3} = \frac{120 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm}}{240 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = \underline{500 \text{ N/mm}^2}$$

7. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης W και την ακτίνα αδράνειας i της κυκλικής διατομής του σχήματος 6.



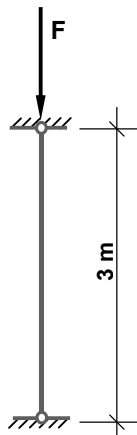
Ροπή αντίστασης

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 30^3}{32} = \underline{2649,38 \text{ cm}^3}$$

Ακτίνα αδράνειας

$$i_x = i_y = 0,25D = 0,25 \cdot 30 = \underline{7,5 \text{ cm}}$$

8. Κολόνα κυκλικής διατομής με διάμετρο **12 cm** και μήκος **3 m** είναι στερεωμένη και στα δύο άκρα, όπως φαίνεται στο σχήμα 7. Να υπολογίσετε τη λυγιρότητα λ της ράβδου.



Ελεύθερο μήκος λογισμού

$$\ell = L = 3 \text{ m}$$

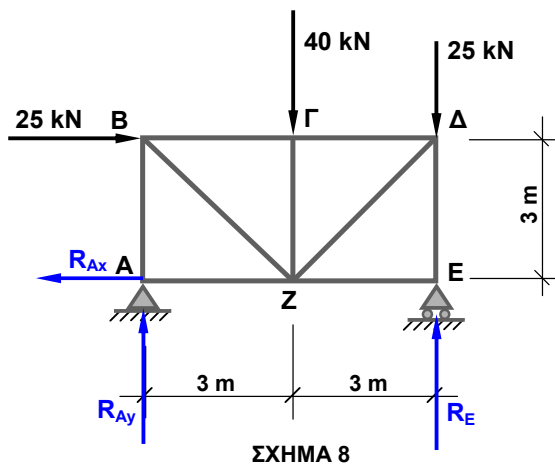
Ακτίνα αδράνειας

$$i_x = i_y = 0,25D = 0,25 \cdot 12 = 3 \text{ cm}$$

Λυγιρότητα

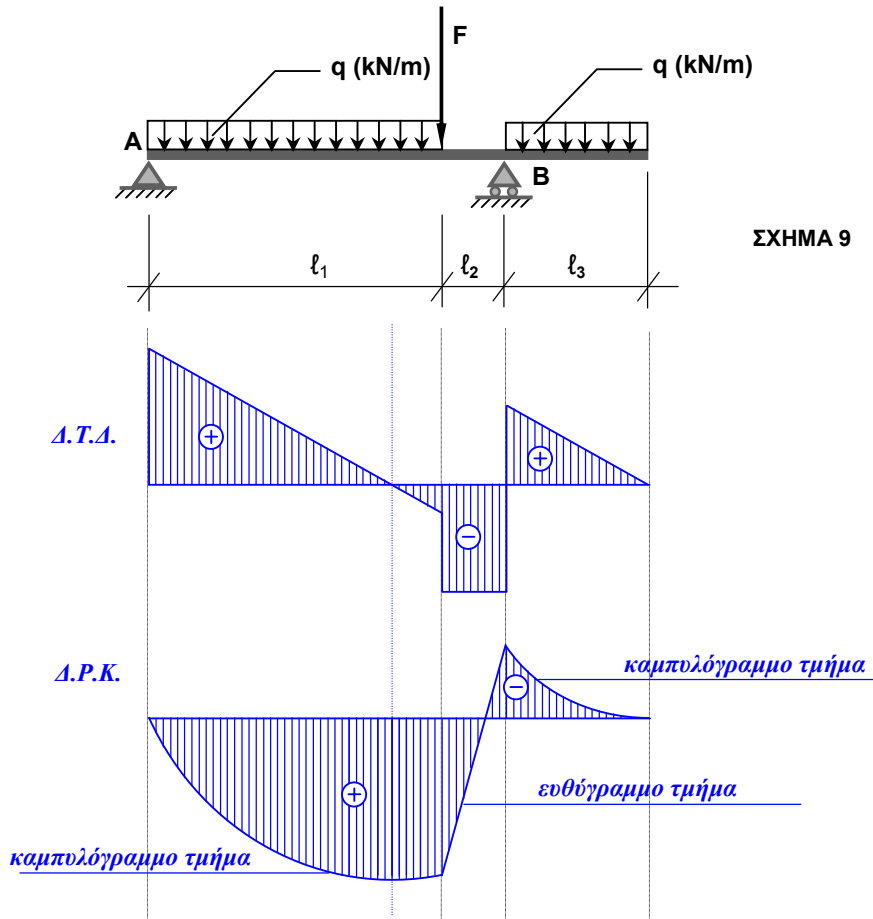
$$\lambda = \frac{\ell}{i} = \frac{300}{3} = \underline{100}$$

9. Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις του δικτυώματος του σχήματος 8 και να αναφέρετε σε ποια ράβδο δεν αναπτύσσεται εσωτερική δύναμη.



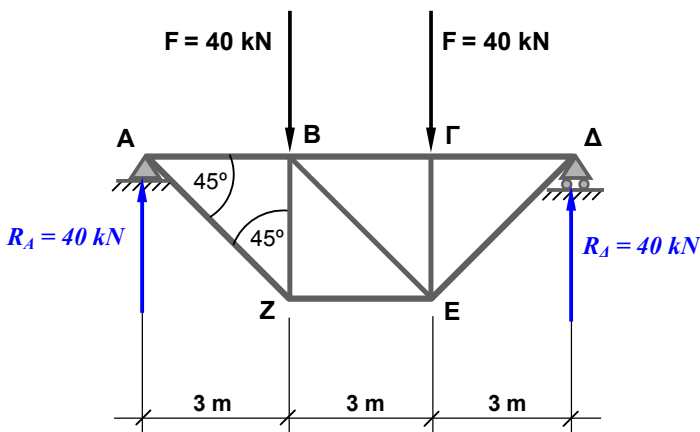
Εσωτερική δύναμη δεν αναπτύσσεται στη ράβδο ZE.

10. Να σχεδιάσετε τη μορφή των διαγραμμάτων των τεμνουσών δυνάμεων Q και των ροπών κάμψης M , της δοκού του σχήματος 9, χωρίς να τη λύσετε. Στο διάγραμμα των ροπών κάμψης να σημειώσετε τα ευθύγραμμο και τα καμπυλόγραμμα τμήματά του.



ΣΧΗΜΑ 9

11. Να υπολογίσετε το μέγεθος και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **AB** και **AZ** του δικτύωματος του σχήματος 10, με τη μέθοδο ανάλυσης – ισορροπίας των κόμβων.



ΣΧΗΜΑ 10

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_\Delta - 40 - 40 = 0$$

$$R_A = R_\Delta = 40 \text{ kN}$$

Κόμβος A:

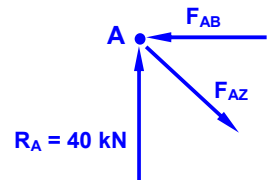
$$\Sigma F_y = 0$$

$$40 - F_{AZ} \cdot \eta\mu 45^\circ = 0$$

$$40 - F_{AZ} \cdot 0,707 = 0$$

$$\underline{F_{AZ} = 56,58 \text{ kN}}$$

→ εφελκόμενη



$$\Sigma F_x = 0$$

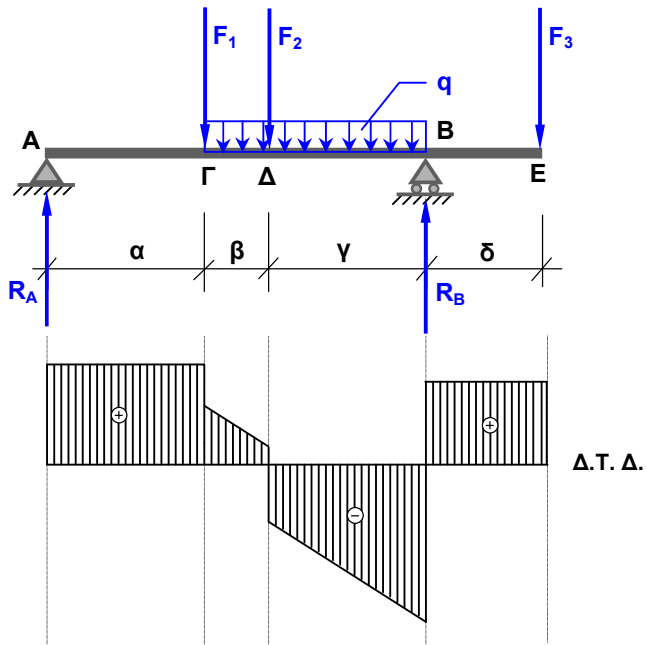
$$-F_{AB} + F_{AZ} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0$$

$$-F_{AB} + 56,58 \cdot 0,707 = 0$$

$$\underline{F_{AB} = 40 \text{ kN}}$$

→ θλιβόμενη

12. Στο σχήμα 11 δίνονται η προέχουσα δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων ($\Delta.T.\Delta.$). Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και τα φορτία που καταπονούν τη δοκό, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο $\Delta.T.\Delta.$



ΣΧΗΜΑ 11

ΜΕΡΟΣ Β' (4 ερωτήσεις)

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 8 μονάδες.

13. Να υπολογίσετε το επιτρεπόμενο φορτίο ενός αμφιαρθρωτού χαλύβδινου στύλου με κυκλική κοίλη διατομή που καταπονείται σε λυγισμό.

Δίνονται: εξωτερική διάμετρος	D = 10 cm
εσωτερική διάμετρος	d = 8 cm
μήκος στύλου	L = 4 m
μέτρο ελαστικότητας	E = 210 kN/mm²
συντελεστής ασφάλειας	γ = 5

Ελεύθερο μήκος λυγισμού $\ell = L = 4 \text{ m} = 4000 \text{ mm}$

Ροπή αδράνειας

$$I_x = I_y = \frac{3,14 \cdot 10^4}{64} - \frac{3,14 \cdot 8^4}{64} = 289,665 \text{ cm}^4 = 289,665 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού

$$F_{\text{κρ.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\ell^2} = \frac{3,14^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 289,665 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{4000^2 \text{ mm}^2}$$

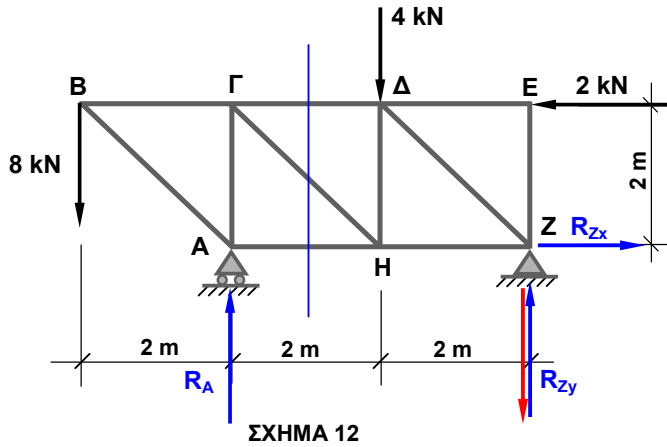
$$F_{\text{κρ.}} = 374847 \text{ N} = 374,847 \text{ kN}$$

Επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού

$$F_{\text{επ.}} = \frac{F_{\text{κρ.}}}{\gamma} = \frac{374,847 \text{ kN}}{5} = \underline{\underline{74,97 \text{ kN}}}$$

14. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο σχήμα 12.

- (α) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **Z**.
 (β) Να υπολογίσετε το μέγεθος και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **ΓΔ**, **ΓΗ** και **AH** με τη μέθοδο των τομών.



Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_{Zx} - 2 = 0 \rightarrow \underline{R_{Zx} = 2 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - R_{Zy} \cdot 4 = 0$$

$$-16 + 8 - 4 - 4R_{Zy} = 0$$

$$\underline{R_{Zy} = -3 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_Z = 0$$

$$-8 \cdot 6 + R_A \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$-48 + 4R_A - 8 - 4 = 0$$

$$\underline{R_A = 15 \text{ kN}}$$

Έλεγχος $\Sigma F_y = 0$

$$15 - 3 - 8 - 4 = 0$$

Ράβδος ΓΔ

$$\Sigma M_H = 0$$

$$-8 \cdot 4 + 15 \cdot 2 + F_{\Gamma\Delta} \cdot 2 = 0$$

$$\underline{F_{\Gamma\Delta} = 1 \text{ kN} \rightarrow \text{εφελκόμενη}}$$

Ράβδος ΓΗ

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-8 \cdot 2 + F_{\Gamma\Delta} \cdot 2 + F_{\Gamma H} \cdot x = 0$$

$$-8 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + F_{\Gamma H} \cdot 1,414 = 0$$

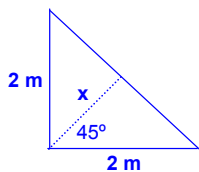
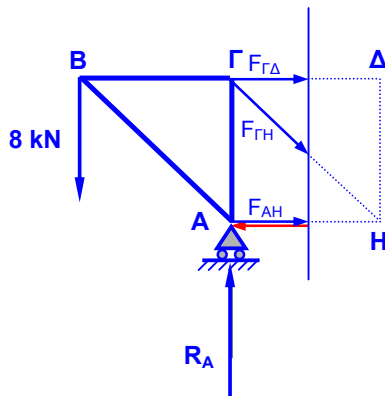
$$\underline{F_{\Gamma H} = 9,9 \text{ kN} \rightarrow \text{εφελκόμενη}}$$

Ράβδος AH

$$\Sigma M_\Gamma = 0$$

$$-8 \cdot 2 - F_{AH} \cdot 2 = 0$$

$$\underline{F_{AH} = -8 \text{ kN} \rightarrow \text{θλιβόμενη}}$$



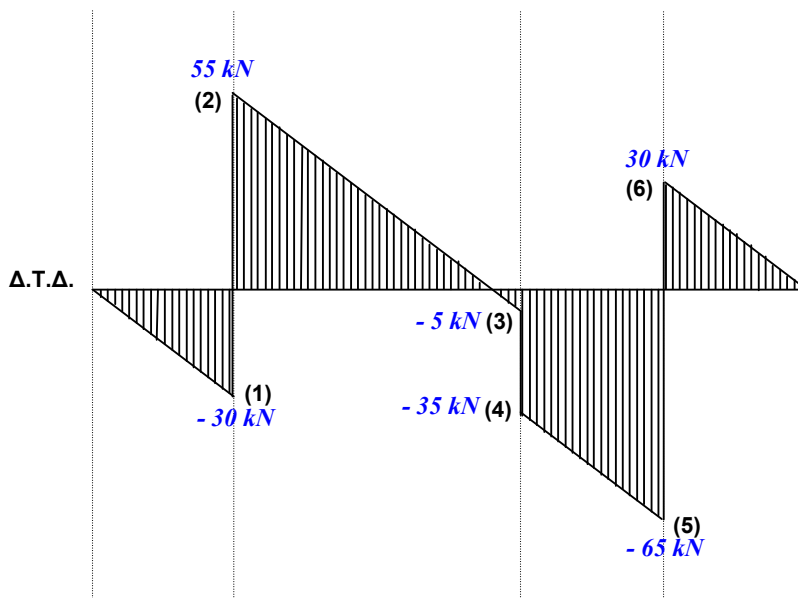
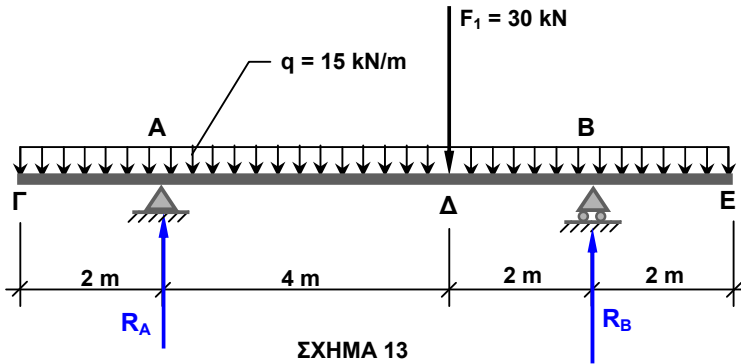
$$\text{συν } 45^\circ = \frac{x}{2}$$

$$x = 1,414 \text{ m}$$

15. Δίνεται αμφιπρόεχουσα δοκός, η οποία φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα **13**, καθώς και το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων της.

(α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.

(β) Να υπολογίσετε και να αναγράψετε στο διάγραμμα τις τιμές των τεμνουσών δυνάμεων στα σημεία **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)**, **(5)** και **(6)**.



Τέμνουσες δυνάμεις

$$Q_{\Gamma} = 0$$

$$Q_A^{ap.} = -15 \cdot 2 = \underline{-30 \text{ kN}}$$

$$Q_A^{\delta\epsilon\zeta.} = -15 \cdot 2 + 85 = \underline{55 \text{ kN}}$$

$$Q_A^{ap.} = 85 - 15 \cdot 6 = \underline{-5 \text{ kN}}$$

$$Q_A^{\delta\epsilon\zeta.} = 85 - 15 \cdot 6 - 30 = \underline{-35 \text{ kN}}$$

$$Q_B^{ap.} = 85 - 15 \cdot 8 - 30 = \underline{-65 \text{ kN}}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\zeta.} = 85 - 15 \cdot 8 - 30 + 95 = \underline{30 \text{ kN}}$$

$$Q_E = 85 - 15 \cdot 10 - 30 + 95 = \underline{0 \text{ kN}}$$

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_A = 0$$

$$15 \cdot 10 \cdot 3 + 30 \cdot 4 - R_B \cdot 6 = 0$$

$$450 + 120 - 6R_B = 0$$

$$6R_B = 570$$

$$\underline{R_B = 95 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot 6 - 15 \cdot 10 \cdot 3 - 30 \cdot 2 = 0$$

$$6R_A - 450 - 60 = 0$$

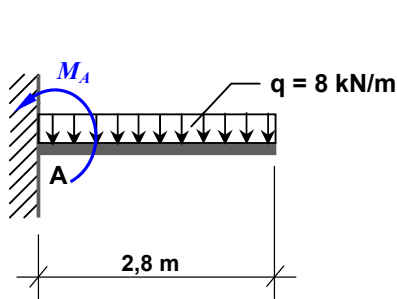
$$6R_A = 510$$

$$\underline{R_A = 85 \text{ kN}}$$

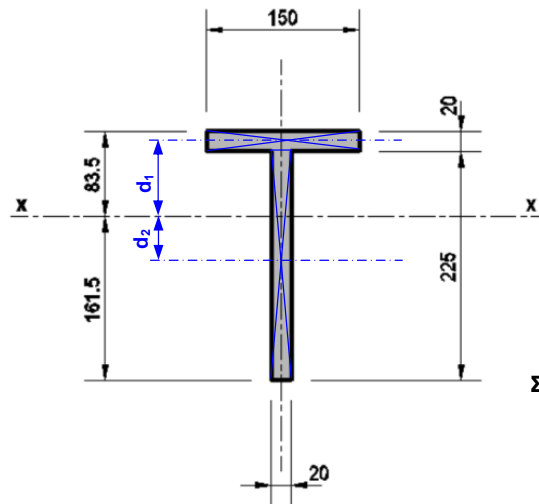
Έλεγχος $\Sigma F_y = 0$

$$85 + 95 - 15 \cdot 10 - 30 = 0$$

16. Δίνεται μεταλλική δοκός πρόβολος με φορτίο όπως φαίνεται στο σχήμα **14 α**. Η διατομή της δοκού, καθώς και η θέση του κεντροβαρικού άξονα $x - x$ δίνονται στο σχήμα **14 β**. Να υπολογίσετε τις μέγιστες τάσεις θλίψης και εφελκυσμού που αναπτύσσονται στη διατομή της. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε mm.



ΣΧΗΜΑ 14 α



ΣΧΗΜΑ 14 β

$$d_1 = 83,5 - 10 = 73,5 \text{ mm}$$

$$d_2 = 161,5 - 112,5 = 49 \text{ mm}$$

Ροπή στήριξης

$$M_A = 8 \cdot 2,8 \cdot 1,4 = 31,36 \text{ kNm}$$

Μέγιστη ροπή κάμψης

$$M_{max} = -M_A = -31,36 \text{ kNm}$$

Ροπή αδράνειας

$$I_{x-x} = \left(\frac{150 \cdot 20^3}{12} + 150 \cdot 20 \cdot 73,5^2 \right) + \left(\frac{20 \cdot 225^3}{12} + 20 \cdot 225 \cdot 49^2 \right) =$$

$$I_{x-x} = (100000 + 16206750) + (18984375 + 10804500) = 46095625 \text{ mm}^4 = 46,096 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Θλιπτική τάση

$$\sigma_1 = \frac{31,36 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 161,5 \text{ mm}}{46,096 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{109,87 \text{ N/mm}^2}}$$

Εφελκυστική τάση

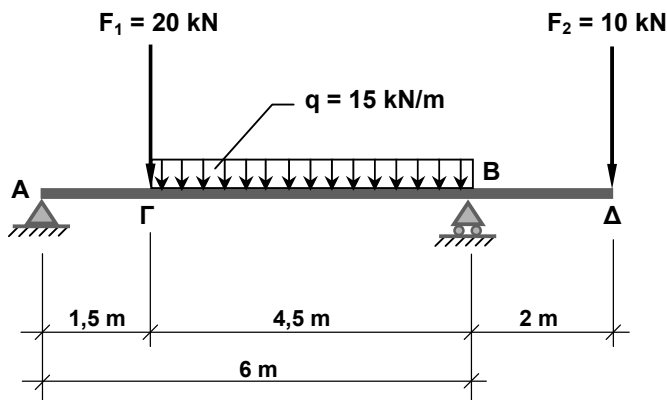
$$\sigma_2 = \frac{31,36 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 83,5 \text{ mm}}{46,096 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{56,81 \text{ N/mm}^2}}$$

ΜΕΡΟΣ Γ΄ (1 ερώτηση)

Η ορθή απάντηση βαθμολογείται με 20 μονάδες.

17. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 15.

- (α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- (β) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**.
- (γ) Να υπολογίσετε τη θέση στην οποία αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης M_{max} (σημείο μηδενικής τιμής τέμνουσας δύναμης).
- (δ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{max} .
- (ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων **Q** και των ροπών κάμψης **M** και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**, καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{max} .



ΣΧΗΜΑ 15

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_A = 0$$

$$20 \cdot 1,5 + 15 \cdot 4,5 \cdot 3,75 - R_B \cdot 6 + 10 \cdot 8 = 0$$

$$30 + 253,125 - 6R_B + 80 = 0$$

$$6R_B = 363,125$$

$$\underline{R_B = 60,52 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot 6 - 20 \cdot 4,5 - 15 \cdot 4,5 \cdot 2,25 + 10 \cdot 2 = 0$$

$$6R_A - 90 - 151,875 + 20 = 0$$

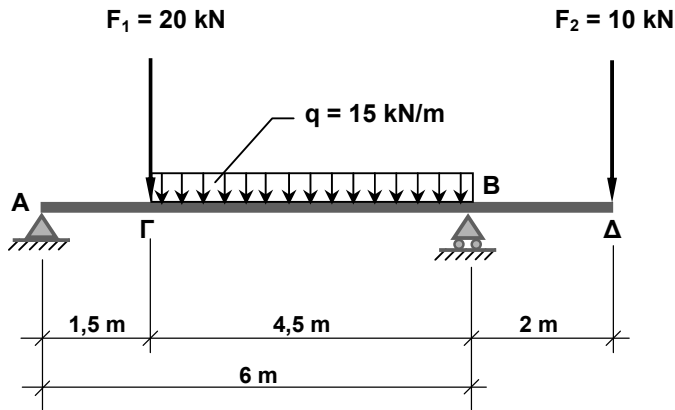
$$6R_A = 221,875$$

$$\underline{R_A = 36,98 \text{ kN}}$$

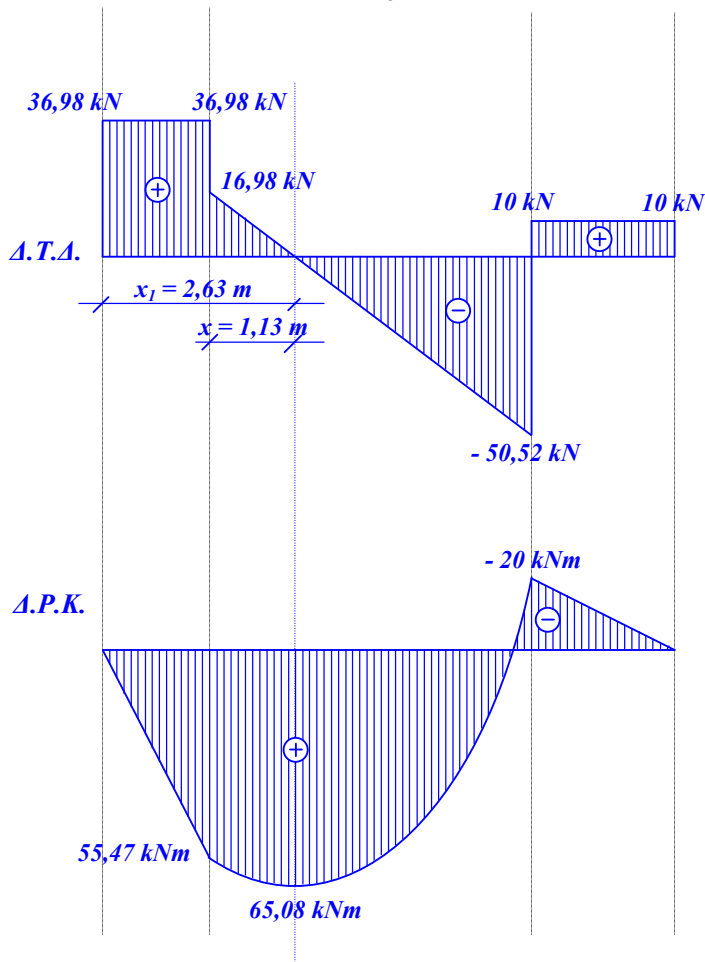
Έλεγχος

$$\Sigma F_y = 0$$

$$60,52 + 36,98 - 20 - 15 \cdot 4,5 - 10 = 0$$



ΣΧΗΜΑ 15



Τέμνουσες δυνάμεις

$$Q_A^{\delta\epsilon\zeta} = 36,98 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{ap} = 36,98 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\zeta} = 36,98 - 20 = 16,98 \text{ kN}$$

$$Q_B^{ap} = 36,98 - 20 - 15 \cdot 4,5 = -50,52 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\zeta} = 36,98 - 20 - 15 \cdot 4,5 + 60,52 = 10 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{ap} = 10 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{\delta\epsilon\zeta} = 36,98 - 20 - 15 \cdot 4,5 + 60,52 - 10 = 0$$

Θέση μέγιστης θετικής ροπής κάμψης

$$36,98 - 20 - 15 \cdot x = 0$$

$$15x = 16,98$$

$$x = 1,13 \text{ m}$$

Ροπές κάμψης

$$M_A = 0$$

$$M_{\Gamma} = 36,98 \cdot 1,5 = 55,47 \text{ kNm}$$

$$M_{max} = 36,98 \cdot 2,63 - 20 \cdot 1,13 - 15 \cdot 1,13 \cdot 0,565 = 65,08 \text{ kNm}$$

$$M_B = 36,98 \cdot 6 - 20 \cdot 4,5 - 15 \cdot 4,5 \cdot 2,25 = -20 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta} = 36,98 \cdot 8 - 20 \cdot 6,5 - 15 \cdot 4,5 \cdot 4,25 + 60,52 \cdot 2 = 0$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

<i>Συνθήκες ισορροπίας</i>	$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$
<i>Ροπές αδράνειας</i>	$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$
<i>Θεώρημα Στάινερ</i>	$I_{x-x} = I_x + Ad_y^2 \quad I_{y-y} = I_y + Ad_x^2$
<i>Ακτίνα αδράνειας</i>	$i_x = \sqrt{\frac{I_{x-x}}{A}} \quad i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad i_x = i_y = 0,25 D$
<i>Ροπές αντίστασης</i>	$W_x = \frac{I_{x-x}}{y} \quad W_x = \frac{bh^2}{6} \quad W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}$
<i>Απλή κάμψη</i>	$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$
<i>Αυγισμός</i>	$F_{κρ.} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ.}}{\ell^2} \quad \lambda = \frac{\ell}{i_{ελ.}}$