

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015**

**Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ**

**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 26 Μαΐου 2015**  
**8:00 – 11:00**

**ΜΕΡΟΣ Α΄**

**ΛΥΣΕΙΣ**

1.	Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών: 7, 8, 7, 9, 6, 10, 12, 9, 5, 7  <b>Λύση:</b> $\bar{x} = \frac{7+8+7+9+6+10+12+9+5+7}{10} = \frac{80}{10} = 8$	
2.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = 2x^4 - 3x^2 + 8$  <b>Λύση:</b> $\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 6x$	
3.	Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εξίσωση $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 64$  <b>Λύση:</b> $K(2, 3), \quad R = \sqrt{64} = 8$	
4.	Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16}$  <b>Λύση:</b> $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{4-4}{4^2-16} = \frac{0}{0} \text{ Απροσδιόριστη Μορφή}$  De L'Hospital $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)'}{(x^2-16)'} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2x} = \frac{1}{8}$	

<p>5.</p>	<p>Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα <math>\int_1^3 (4x^3 - 2x) dx</math></p> <p><b>Λύση:</b></p> $\int_1^3 (4x^3 - 2x) dx = \left[ \frac{4x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} \right]_1^3 = [x^4 - x^2]_1^3 = (3^4 - 3^2) - (1^4 - 1^2) = 72$													
<p>6.</p>	<p>Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης <b>ΨΕΥΔΑΙΣΘΗΣΗ</b>. Πόσοι από αυτούς έχουν τα δύο <b>Σ</b> σε συνεχόμενες θέσεις;</p> <p><b>Λύση:</b></p> $M_{11}^{\epsilon} = \frac{11!}{2!2!} = 9979200$ $M_9^{\epsilon} = \frac{10!}{2!} = 1814400$													
<p>7.</p>	<p>Να βρείτε το σημείο καμπής της συνάρτησης <math>y = 3x^3 - 9x^2 + 5x - 2</math></p> <p><b>Λύση:</b></p> $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 18x + 5$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 18x - 18$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ $18x - 18 = 0$ $x = 1$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+1</td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">y''</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">○</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">⌒</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"> </td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">⌒</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">Σ.Κ. (1, -3)</p> <p>Για <math>x=1 \Rightarrow y = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 \Rightarrow y = -3</math>    Σ.Κ. (1, -3)</p>	x	$-\infty$	+1	$+\infty$	y''	-	○	+	y	⌒		⌒	
x	$-\infty$	+1	$+\infty$											
y''	-	○	+											
y	⌒		⌒											

8. Δίνονται τα ψηφία 2, 3, 4, 5, 6.
- (α) Να βρείτε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.
- (β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω τριψήφιους αριθμούς διαιρούνται με το πέντε.

**Λύση:**

(α)

Φάσεις	Ε	Δ	Μ
Τρόποι	5	4	3

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ αριθμοί}$$

(β)

Φάσεις	Ε	Δ	Μ
Τρόποι	3	4	1

$$3 \cdot 4 \cdot 1 = 12 \text{ αριθμοί}$$

9. Το πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τις προτιμήσεις των 480 μαθητών μιας Τεχνικής Σχολής σε επιλεγόμενα μαθήματα.

Να βρείτε:

- (α) Πόσοι μαθητές επέλεξαν το μάθημα της Ξυλογλυπτικής.
- (β) Το ποσοστό (%) των μαθητών που επέλεξαν το μάθημα της Πληροφορικής.



**Λύση:**

(α)  $\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 480 = 120$

(β)  $360^\circ - (90^\circ + 75^\circ + 60^\circ) = 135^\circ$

$$\frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot 100\% = 37,5\%$$

10. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $P(A) = \frac{2}{3}$ ,

$P(B) = \frac{1}{2}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α)  $P(A')$

(β)  $P(A \cup B)$

(γ)  $P(A/B)$

**Λύση:**

(α)  $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(β)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

(γ)  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

## ΜΕΡΟΣ Β΄:

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

**Λύση:**

(α) Πεδίο ορισμού:  $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$  Π.Ο.  $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

$$\text{Αν } x=0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

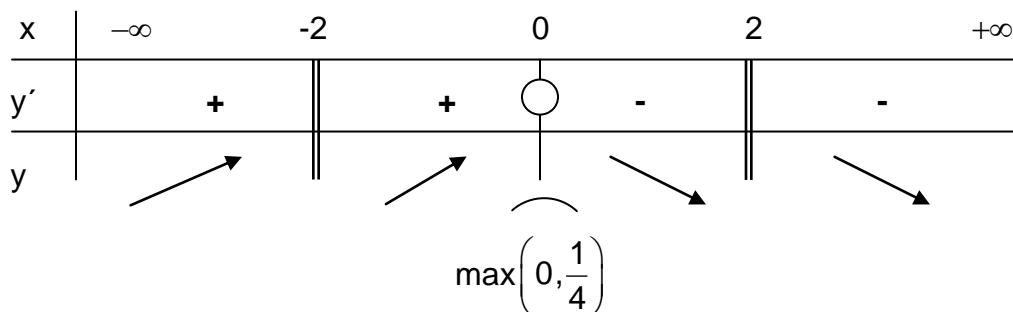
$$\text{Αν } y=0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

Άρα τέμνει τους άξονες στα σημεία  $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{4}\right)$

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y' = \frac{8x \cdot (x^2 - 4) - (4x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{8x^3 - 32x - 8x^3 + 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-30x}{(x^2 - 4)^2} \quad x \neq \pm 2$$

$$y' = 0 \Rightarrow -30x = 0 \Rightarrow x = 0$$



Αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -2)$  και  $(-2, 0]$

Φθίνουσα στα διαστήματα  $[0, 2)$  και  $(2, +\infty)$

(δ) **Ασύμπτωτες**

Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{15}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{15}{0^-} = -\infty$$

}  $\Rightarrow x = -2$  Κ.Α.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} &= \frac{15}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} &= \frac{15}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ K.A.}$$

### Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \text{A.M.}$$

### Εφαρμόζω De L'Hospital

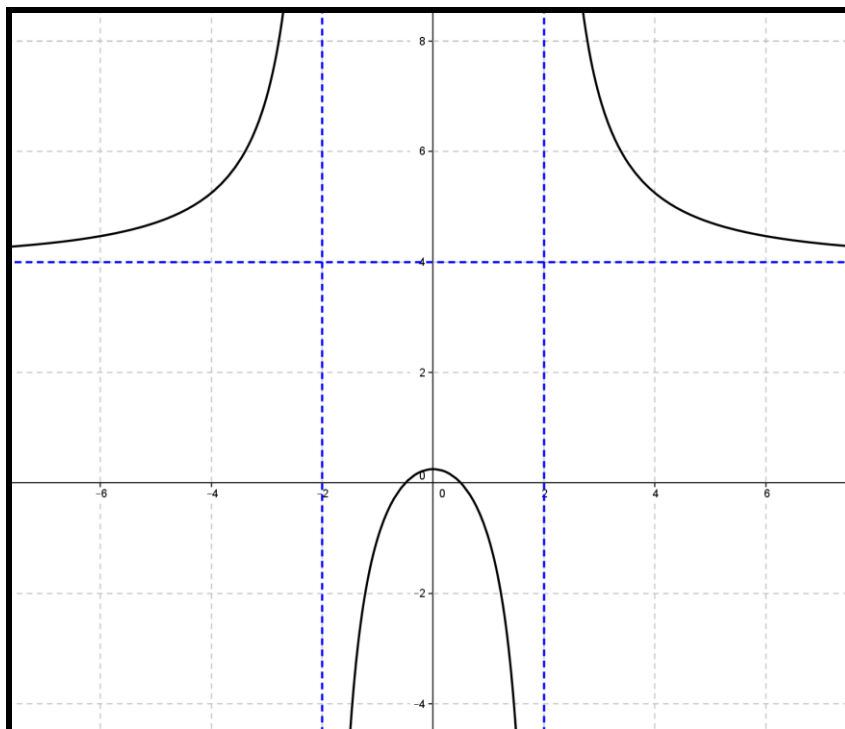
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4x^2 - 1)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \text{A.M.}$$

### Εφαρμόζω De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2 - 1)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

$\Rightarrow y = 4 \text{ O.A.}$



2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των μαθητών της Γ΄ τάξης κατά τμήμα σε μια Τεχνική Σχολή.

Αριθμός Μαθητών ( $x_i$ )	10	16	17	18	20
Αριθμός Τμημάτων ( $f_i$ )	1	2	2	3	2

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή ( $x_\varepsilon$ ) των παρατηρήσεων.
- (β) Τη διάμεσο ( $x_\delta$ ) των παρατηρήσεων.
- (γ) Τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) των παρατηρήσεων.
- (δ) Την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) των παρατηρήσεων.

**Λύση:**

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
10	1	10	-7	49	49
16	2	32	-1	1	2
17	2	34	0	0	0
18	3	54	1	1	3
20	2	40	3	9	18
	<b>10</b>	<b>170</b>			<b>72</b>

(α)  $x_\varepsilon = 18$

(β)  $x_\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{17 + 18}{2} = 17,5$

(γ)  $\bar{x} = \frac{170}{10} = 17$

(δ)  $\sigma = \sqrt{\frac{72}{10}} = \sqrt{7,2} \approx 2,683$

3. Η συνάρτηση με τύπο  $y = ax^3 - \beta x^2 + 3$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $\Sigma(-2,7)$ .

(α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών  $\alpha$  και  $\beta$ .

(β) Αν  $\alpha = 1$  και  $\beta = -3$  να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο της με  $x = -3$ .

**Λύση:**

$$(α) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = 0 \Rightarrow 3ax^2 - 2\beta x \Big|_{x=-2} = 0 \Rightarrow 3a \cdot 4 + 4\beta = 0 \Rightarrow 12a + 4\beta = 0 \Rightarrow 3a + \beta = 0 \quad (1)$$

$$y = ax^3 - \beta x^2 + 3 \text{ στο } \Sigma(-2,7) \Rightarrow 7 = -8a - 4\beta + 3 \Rightarrow -8a - 4\beta = 4 \Rightarrow 2a + \beta = -1 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2): } \left. \begin{array}{l} 3a + \beta = 0 \\ 2a + \beta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3a - \beta = 0 \\ 2a + \beta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Από (1): } 3 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -3$$

$$(β) y = x^3 + 3x^2 + 3 \Rightarrow$$

$$x = -3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (-3, 3)$$

$$\lambda_{\text{εφ}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-3} = 3x^2 + 6x \Big|_{x=-3} = 9$$

Εξίσωση Εφαπτομένης στο  $(-3, 3)$ :

$$y - 3 = 9(x + 3) \Rightarrow -9x + y = 30$$



4.

Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν δέκα αντικείμενα: 1 άσπρη μπάλα, 2 πράσινες μπάλες, 3 άσπροι κύβοι και 4 πράσινοι κύβοι. Παίρνουμε τυχαία δύο αντικείμενα.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Και τα δύο αντικείμενα να είναι μπάλες».

B: «Μόνο ένα αντικείμενο να είναι πράσινο».

Γ: «Το πολύ ένα αντικείμενο να είναι άσπρος κύβος».

**Λύση:**

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

$$P(B) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 \cdot 4}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$$P(\Gamma) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{1} + \binom{3}{0} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 \cdot 7 + 21}{45} = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$$

5.

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση  $u = \sqrt{x^2 - 5}$ , ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα  $\int 9x \cdot \sqrt{x^2 - 5} \, dx$

**Λύση:**

$$u = \sqrt{x^2 - 5} \Rightarrow u^2 = x^2 - 5 \Rightarrow 2u \, du = 2x \, dx \Rightarrow u \, du = x \, dx$$

$$\int 9x \cdot \sqrt{x^2 - 5} \, dx = \int 9u \cdot u \, du = 9 \int u^2 \, du = 9 \frac{u^3}{3} + c = 3u^3 + c = 3(\sqrt{x^2 - 5})^3 + c$$