ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

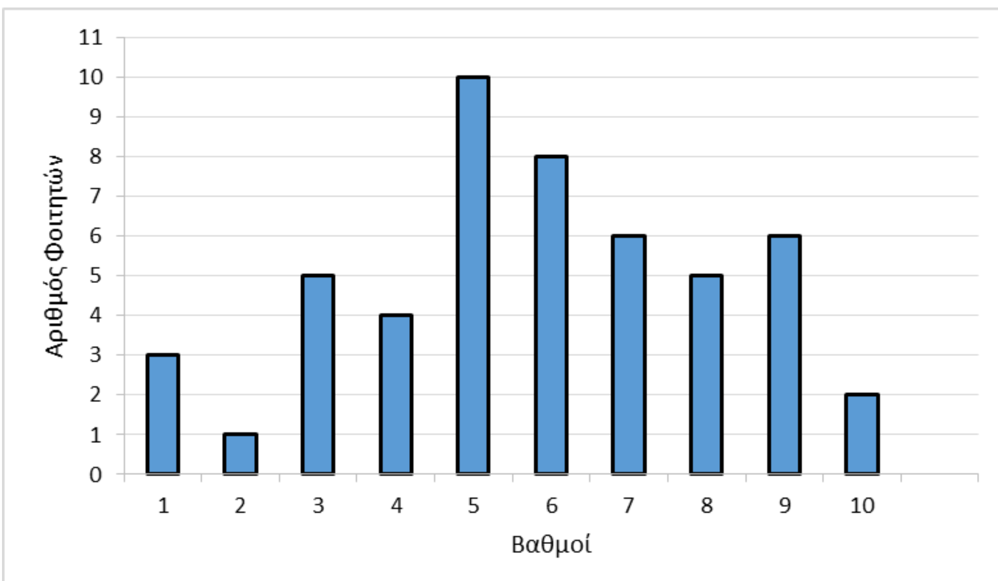
ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 24 Μαΐου 2016
8:00 – 11:00

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> **ΛΥΣΕΙΣ**

1. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζονται οι βαθμοί, σε ακέραιες μονάδες, που πήραν οι φοιτητές ενός τμήματος του ΤΕΠΑΚ, στην εξέταση του μαθήματος της Τεχνολογίας.



Με βάση το πιο πάνω ραβδόγραμμα:

(α) Να βρείτε πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό 9.

(β) Να βρείτε τον συνολικό αριθμό των φοιτητών που παρακάθισαν στην εξέταση.

(γ) Αν ένας φοιτητής για να περάσει το μάθημα πρέπει να πάρει στην εξέταση βαθμό τουλάχιστον 5, να βρείτε πόσοι φοιτητές πέρασαν το μάθημα.

Λύση:

(α) 6 φοιτητές πήραν βαθμό 9

(β) $3+1+5+4+10+8+6+5+6+2=50$ παρακάθισαν στην εξέταση.

(γ) $10+8+6+5+6+2=37$ μαθητές πέρασαν το μάθημα.

2.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = x^5 + 5x^2 - 1$ όπου $x \in \mathrm{R}$. **Λύση:** $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 10x$	
3.	Ένας μαθητής της Θεωρητικής Κατεύθυνσης, στο μάθημα των Μαθηματικών, πήρε σε πέντε διαγωνίσματα τους εξής βαθμούς: 15, 17, 14, 18 και 16. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του. **Λύση:** $\overline{x} = \frac{15+17+14+18+16}{5} = \frac{80}{5} = 16$	
4.	Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 5}$ **Λύση:** $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^2 - 3\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 5\right) = +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Απροσδιόριστη Μορφή $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ De L΄Hospital $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(2x^2 - 3\right)'}{\left(x^2 - 5\right)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$	
5.	Δίνεται η λέξη **ΜΕΤΑΝΑΣΤΗΣ**. Να βρείτε: (α) Το πλήθος των αναγραμματισμών της. (β) Το πλήθος των αναγραμματισμών που αρχίζουν και τελειώνουν σε **Α**. **Λύση:** (α) $M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{2!2!2!} = 453600$ (β) $M_8^{\varepsilon} = \frac{8!}{2!2!} = 10080$	

6.	Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int(\sigma\upsilon\nu x - 2x)dx$ **Λύση:** $\int(\sigma\upsilon\nu x - 2x)dx = \eta\mu x - x^2 + c$	
7.	Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου που έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ **Λύση:** $\left.\begin{array}{l} 2g = 2 \Rightarrow g = 1 \\ 2f = -4 \Rightarrow f = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow K(-1,2)$ $c = -20$ $R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-20)} = \sqrt{25} = 5$	
8.	Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + 8x + 11$ όπου $x \in R$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(-2, \beta)$. Να βρείτε τις τιμές των α και β. **Λύση:** $\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 8$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=-2} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha(-2) + 8 = 0$ $\Leftrightarrow -4\alpha = -8$ $\Leftrightarrow \alpha = 2$ $f(x) = 2x^2 + 8x + 11$ $f(-2) = \beta \Leftrightarrow 2(-2)^2 + 8(-2) + 11 = \beta$ $\Leftrightarrow 8 - 16 + 11 = \beta$ $\Leftrightarrow \beta = 3$	

9.	Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{5}{12}$, $P(B)=\frac{3}{4}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες: (α) $P(B')$ (β) $P(A\cup B)$ (γ) $P(A-B)$ (δ) $P(A/B)$ **Λύση:** (α) $P(B')=1-P(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ (β) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $=\frac{5}{12}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ (γ) $P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$ $=\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ (δ) $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{9}$	

10.	Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $3x^2 - y^2 = 1$. Να δείξετε ότι: (α) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y}$ (β) $y^3 \frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} + 3(x+1) = 0$ **Λύση:** (α) $6x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $-2y\frac{dy}{dx} = -6x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y}$ (β) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3y - 3x\frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{3y - \frac{9x}{y}}{y^2} = \frac{3y^2 - 9x^2}{y^3}$ $y^3 \frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} + 3(x+1) = y^3\left(\frac{3y^2 - 9x^2}{y^3}\right) - y\left(\frac{3x}{y}\right) + 3x + 3 =$ $= 3y^2 - 9x^2 - 3x + 3x + 3 =$ $= -3(3x^2 - y^2) + 3 =$ $= -3 + 3 = 0$	

ΜΕΡΟΣ Β΄:

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση:

(α) Πεδίο ορισμού: $x^2-4\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 2$ Π.Ο. $\mathrm{R}-\{-2,+2\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

Αν $x=0 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{4}$

Αν $y=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Άρα τέμνει τους άξονες στα σημεία $(1,0), (-1,0), \left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y'=\frac{-2x\cdot(x^2-4)-(1-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{6x}{(x^2-4)^2} \quad x\neq \pm 2$$

$y'=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y΄		-	‖	-	0	+	‖	+	
y		↘	‖	↘	$\min\left(0,-\frac{1}{4}\right)$	↗	‖	↗	

Φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(-2,0]$

Αύξουσα στα διαστήματα $[0, 2)$ και $(2,+\infty)$

(δ) **Ασύμπτωτες**

Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1-x^2}{x^2-4}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1-x^2}{x^2-4}=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2 \text{ Κατακόρυφη ασύμπτωτη}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1-x^2}{x^2-4}=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty \\[2em] \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-x^2}{x^2-4}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=2 \text{ Κατακόρυφη ασύμπτωτη}$$

Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ Απροσδιόριστη Μορφή}$$

Εφαρμόζω De L΄Hospital

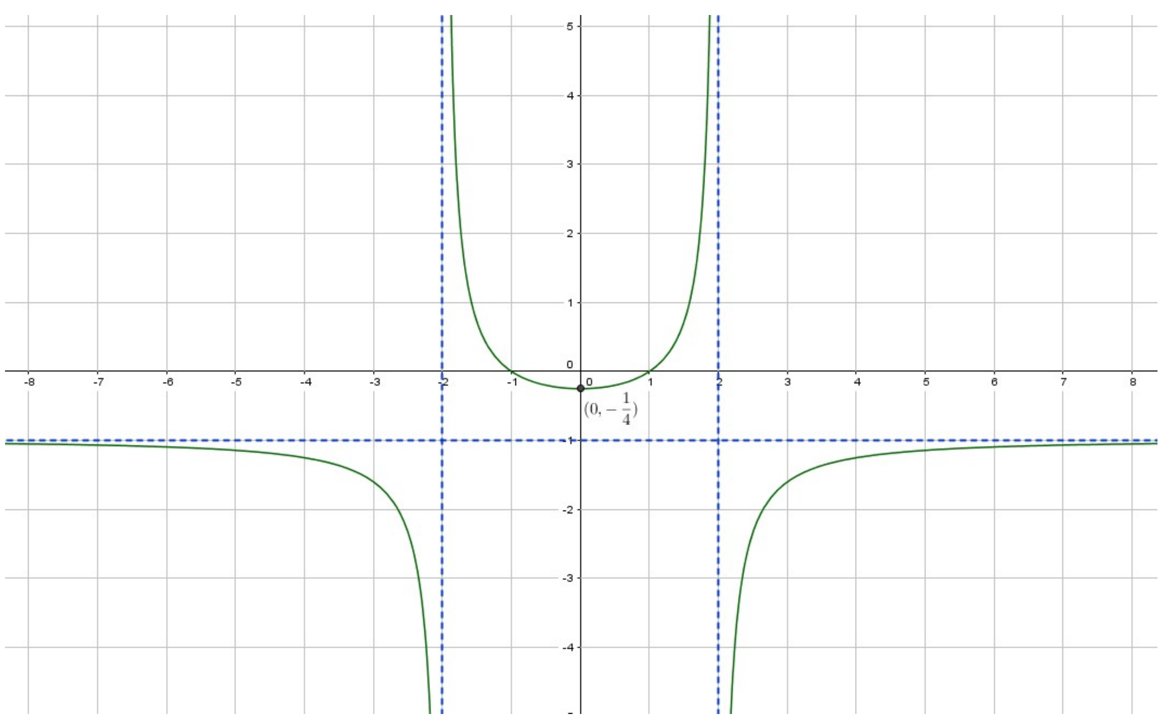
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(1-x^2)'}{(x^2-4)'}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x}{2x}=-1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ Απροσδιόριστη Μορφή}$$

Εφαρμόζω De L΄Hospital

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(1-x^2)'}{(x^2-4)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x}{2x}=-1$$

$\Rightarrow$ y = -1 Οριζόντια ασύμπτωτη



2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει την κατανομή των 56 βουλευτικών εδρών που κατέχουν 8 πολιτικές παρατάξεις του Κοινοβουλίου μιας Ευρωπαϊκής χώρας.

Αριθμός εδρών (x_i)	2	3	9	16	18
Αριθμός πολιτικών παρατάξεων (f_i)	2	3	1	1	1

Να βρείτε:

(α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των εδρών.

(β) Τη μέση τιμή $(\overline{x})$ των εδρών.

(γ) Την τυπική απόκλιση (σ) των εδρών.

Λύση:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
2	2	4	-5	26	50
3	3	9	-4	16	48
9	1	9	2	4	4
16	1	16	9	81	81
18	1	18	11	121	121
	$\sum f_i = 8$	$\sum x_i \cdot f_i = 56$			$\sum f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 = 304$

(α) $x_\varepsilon = 3$

(β) $\overline{x} = \dfrac{56}{8} = 7$

(γ) $\sigma = \sqrt{\dfrac{304}{8}} = \sqrt{38} \approx 6{,}16$

3.	Δίνεται η καμπύλη $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β, αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Σ(0,1) είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): x-3y+1=0$. **Λύση:** $\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot(\frac{1}{3})=-1\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}=-3$ **(1)** $\frac{dy}{dx}=2x+\alpha$ $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0}=2.0+\alpha=\alpha$ **(2)** Από **(1)** και **(2)**: $\alpha=-3 \quad\Rightarrow\quad f(0)=0^2+(-3)\cdot 0+\beta\Rightarrow\beta=1$	
4.	Από τους 12 μαθητές ενός τμήματος μιας Τεχνικής Σχολής, οι 4 επέλεξαν Ελεύθερο Σχέδιο και οι υπόλοιποι Διακόσμηση Εσωτερικού Χώρου. Επιλέγουμε τυχαία 2 από τους μαθητές αυτούς. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: Α: «Και οι δύο μαθητές να έχουν επιλέξει Ελεύθερο Σχέδιο». Β: «Μόνο ένας μαθητής να έχει επιλέξει Ελεύθερο Σχέδιο». Γ: «Τουλάχιστον ένας μαθητής να έχει επιλέξει Διακόσμηση Εσωτερικού Χώρου». **Λύση:** $P(A)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{0}}{\binom{12}{2}}=\frac{6}{66}=\frac{1}{11}$ $P(B)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{4\cdot 8}{66}=\frac{32}{66}=\frac{16}{33}$ $P(\Gamma)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{1}+\binom{4}{0}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{4\cdot 8+28}{66}=\frac{60}{66}=\frac{10}{11}$	

5.	Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=\sqrt{x^2+16}$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 \frac{8x^3}{\sqrt{x^2+16}}dx$ **Λύση:** $u=\sqrt{x^2+16} \Rightarrow u^2=x^2+16 \Rightarrow 2udu=2xdx \Rightarrow udu=xdx$ Για x = 0 $\Rightarrow$ u = $\sqrt{0^2+16}$ = $\sqrt{16}$ = 4 Για x = 3 $\Rightarrow$ u = $\sqrt{3^2+16}$ = $\sqrt{25}$ = 5 $\int_0^3 \frac{8x^3}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int_4^5 \frac{8u(u^2-16)}{u}du=8\int_4^5 (u^2-16)du=8[\frac{u^3}{3}-16u]_4^5=$ $=8(\frac{125}{3}-80)-8(\frac{64}{3}-64)=8(\frac{125-240}{3})-8(\frac{64-192}{3})=$ $=\frac{8}{3}(125+192-240-64)=\frac{8\cdot 13}{3}=\frac{104}{3}$	