

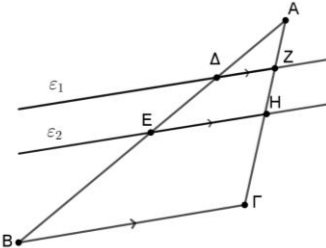
Τάξη: Α΄

Ημερομηνία εξέτασης: 20/05/2022

Οδηγός Διόρθωσης

Σημείωση: Οι μονάδες που προτείνονται σε κάθε επιμέρους βήμα των λύσεων δίνονται για πλήρη απάντηση από τον μαθητή. Επιμέρους ορθές απαντήσεις ή διαδικασίες βαθμολογούνται ανάλογα, με ελάχιστο βαθμό σε κάθε βήμα τη 0,5 μονάδα.

ΜΕΡΟΣ Α :

<p>A1.</p>	<p>Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $f(x) = (x + 4)^2 - 3$</p> <p>(α) να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της, (β) να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της, (γ) να εξετάσετε αν η παραβολή έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) Άξονας συμμετρίας $x = -4$ (β) Κορυφή $K(-4, -3)$ (γ) Η παραβολή έχει ελάχιστη τιμή διότι $a = 1 > 0$</p>	<p>(α) Εύρεση άξονα συμμετρίας 1,5μ. (β) Εύρεση κορυφής 1,5μ. (γ) Ορθή απάντηση 1μ. Αιτιολόγηση 1μ.</p>
<p>A2.</p>	<p>Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // B\Gamma$, $AD = 3 \text{ cm}$, $DE = 6 \text{ cm}$, $AB = 18 \text{ cm}$ και $AZ = 2 \text{ cm}$.</p> <p>Να υπολογίσετε:</p> <p>(α) το μήκος του τμήματος AG Μονάδες 3 (β) το μήκος του τμήματος $H\Gamma$. Μονάδες 2</p>	

Λύση:

$$\varepsilon_1 // B\Gamma \text{ τότε από θεώρημα Θαλή } \frac{AZ}{AB} = \frac{AZ}{AG} \Rightarrow \frac{3}{18} = \frac{2}{AG}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot AG = 2 \cdot 18 \Rightarrow 3AG = 36 \Rightarrow AG = 12 \text{ cm}$$

$$EB = AB - AE = 18 - 9 = 9 \text{ cm}$$

$\varepsilon_2 // B\Gamma$ τότε από το θεώρημα Θαλή

$$\frac{AZ}{EB} = \frac{AZ}{HG} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{2}{HG} \Rightarrow 3HG = 18 \Rightarrow HG = 6 \text{ cm}$$

Για το AG

Αναφορά στο Θ.Θ. **0,5μ.**

Ορθή έκφραση αναλογίας

1μ.

Αντικατάσταση και

διαδικασία

1μ.

Αποτέλεσμα

0,5μ.**Για το HG**

$$EB = AB - AE \quad \mathbf{0,5\mu}$$

Ορθή έκφραση αναλογίας

0,5μ.

Αντικατάσταση και

διαδικασία

0,5μ.

Αποτέλεσμα

0,5μ.

(να μην αφαιρεθούν μονάδες για παράληψη αναφοράς στις μονάδες μέτρησης)

A3. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

Λύση:

Βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x = 6 \text{ ή } x = 1$$

x	$-\infty$	1		6	$+\infty$
f(x)	+	∅	-	∅	+

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in [1, 6]$

Εύρεση των ορθών λύσεων εξίσωσης **2μ.**

Ορθή τοποθέτηση των λύσεων στον πίνακα

1μ.

Ορθή τοποθέτηση των προσήμων στον πίνακα

1μ.

Ορθό αποτέλεσμα **1μ.**

Αν η λύση δοθεί γραφικά ή αλγεβρικά να γίνει αποδεκτή

<p>A4.</p>	<p>Στο διπλανό σχήμα το Γ είναι το σημείο τομής των $B\Delta$ και AE και $AG = 6\text{cm}$, $GE = 2\text{cm}$, $BG = 9\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$.</p> <p>Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια.</p> <p>Λύση: Τα τρίγωνα είναι όμοια αφού ,</p> $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta\Gamma E} \text{ (κατακορυφήν γωνίες)}$ $\frac{GE}{AG} = \frac{\Gamma\Delta}{BG} = \frac{1}{3}$ <p>Άρα τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες από αυτές γωνίες τους ίσες. $AB\Gamma \simeq E\Delta\Gamma$</p>	<p>Δήλωση ότι $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ 1μ.</p> <p>Αιτιολόγηση 1μ.</p> <p>$\frac{GE}{AG} = \frac{\Gamma\Delta}{BG} = \frac{1}{3}$ 1μ.</p> <p>Ορθό κριτήριο ομοιότητας 1,5μ.</p> <p>Συμπέρασμα 0,5μ.</p>
<p>A5.</p>	<p>Να λύσετε το σύστημα : $x + 2y = 7$ $xy = 3$</p> <p>Λύση: $x = 7 - 2y$ $xy = 3 \Rightarrow (7 - 2y)y = 3 \Rightarrow 7y - 2y^2 = 3$ $\Rightarrow 2y^2 - 7y + 3 = 0$ $\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$ Άρα $y_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ή $y_2 = \frac{12}{4} = 3$ Αντίστοιχα $x_1 = 6$ ή $x_2 = 1$</p>	<p>$x = 7 - 2y$ 1μ.</p> <p>Αντικατάσταση του x 1μ.</p> <p>Υπολογισμός $y = \frac{1}{2}$ 0,5μ.</p> <p>Υπολογισμός $y = 3$ 0,5μ.</p> <p>Υπολογισμός $x = 6$ 1μ.</p> <p>Υπολογισμός $x = 1$ 1μ.</p>
<p>A6.</p>	<p>Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 1)x + 4\lambda + 2 = 0$ με πραγματικές λύσεις x_1 και x_2. Να υπολογίσετε τις τιμές του λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:</p> <p>(α) η εξίσωση να έχει λύσεις αντίθετες, (β) ο αριθμός 2 να είναι λύση της εξίσωσης.</p> <p>Λύση: (α) Λύσεις αντίθετες $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 0$</p>	<p>(α) Αναφορά στην ορθή συνθήκη $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ 1μ.</p>

$$\Rightarrow -\frac{\lambda + 1}{1} = 0 \Rightarrow -\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

(β) Η λύση $x = 2$ επαληθεύει την εξίσωση. Επομένως,

$$2^2 + (\lambda + 1) \cdot 2 + 4\lambda + 2 = 0 \Rightarrow 4 + 2\lambda + 2 + 4\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

Διαδικασία – πράξεις **1μ.**
Αποτέλεσμα **0,5μ.**

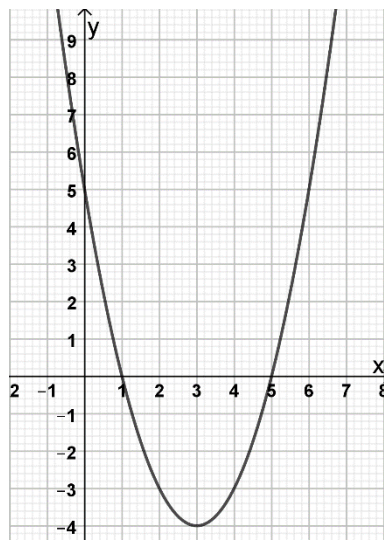
(β)
Αντικατάσταση **1μ.**
Διαδικασία – πράξεις **1μ.**
Αποτέλεσμα **0,5μ.**

ΜΕΡΟΣ Β :

B1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ είναι η παραβολή του διπλανού σχήματος.

Να βρείτε:

- (α) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής
- (β) Τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- (γ) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- (δ) Την τιμή του γ
- (ε) Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$



Λύση:

- (α) $x = 3$
- (β) $K(3, -4)$
- (γ) $x_1 = 1$ ή $x_2 = 5$
- (δ) $\gamma = 5$
- (ε) $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

- (α) $x = 3$ **2μ.**
- (β) $K(3, -4)$ **2μ.**
- (γ) $x_1 = 1$ ή $x = 5$ **2μ.**
(για κάθε σωστή λύση 1μ)
- (δ) $\gamma = 5$ **2μ.**
- (ε) $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$
Για κάθε ορθό διάστημα **1 μ.**

B2. Αν x_1, x_2 είναι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$, να βρείτε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 x_2$

(γ) $4x_1^2 x_2 + 4x_1 x_2^2$

(δ) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$

(ε) $(x_1 - x_2)^2$

Λύση:

(α) $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-3}{1} = 3$

(β) $x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-5}{1} = -5$

(γ) $4x_1^2 x_2 + 4x_1 x_2^2 = 4x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 4 \cdot (-5) \cdot 3 = -60$

(δ) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$

(ε) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 =$
 $= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = 3^2 - 4 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29$

(α) Αναγνώριση ότι

$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ **0,5μ.**

Διαδικασία - πράξεις **1 μ.**

Αποτέλεσμα **0,5μ.**

(β) Αναγνώριση ότι

$x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ **0,5μ**

Διαδικασία - πράξεις **1 μ.**

Αποτέλεσμα **0,5μ.**

(γ) Σωστή παραγοντοποίηση **0,5μ.**

Αναγνώριση ότι η έκφραση γράφεται ως $4PS$ (ή οποιαδήποτε ισοδύναμη έκφραση) **0,5μ.**

Αντικατάσταση και πράξεις **0,5μ.**

Αποτέλεσμα **0,5μ.**

(δ)

Αναγνώριση ότι η έκφραση γράφεται ως $\frac{S}{P}$ (ή οποιαδήποτε ισοδύναμη έκφραση) **1μ.**

Αντικατάσταση και πράξεις **0,5μ.**

Αποτέλεσμα **0,5μ.**

(ε)

Ορθή ανάπτυξη ταυτότητας **0,5μ.**

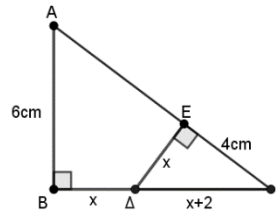
Αναγνώριση ότι η έκφραση γράφεται ως $S^2 - 4P$ (ή οποιαδήποτε ισοδύναμη έκφραση) **0,5μ.**

Αντικατάσταση και πράξεις **0,5μ.**

Αποτέλεσμα **0,5μ.**

B3.

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$) και $\Delta E \perp A\Gamma$. Αν $AB = 6\text{cm}$, $\Gamma E = 4\text{cm}$, $B\Delta = \Delta E = x\text{cm}$, $\Gamma\Delta = (x + 2)\text{cm}$, να δείξετε ότι:



- (α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma E\Delta$ είναι όμοια
(β) $(AB)(E\Gamma) = (B\Gamma)(\Delta E)$
(γ) Να υπολογίσετε το x
(δ) Αν $x = 3$ να αποδείξετε ότι το μήκος του τμήματος AE είναι ίσο με 6cm

Λύση:

(α) Για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma E\Delta$ παρατηρώ:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ και } \hat{\Gamma} \text{ (κοινή γωνία)}$$

Άρα τα τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια.

Επομένως είναι όμοια.

(β) Επειδή τρίγωνο $AB\Gamma \simeq \Delta E\Gamma$ τρίγωνο $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{E\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} \Rightarrow$

$$(AB)(E\Gamma) = (B\Gamma)(\Delta E)$$

(γ) $(AB)(E\Gamma) = (B\Gamma)(\Delta E) \Rightarrow$

$$6 \cdot 4 = (x + x + 2) \cdot x \Rightarrow$$

$$24 = (2x + 2)x \Rightarrow$$

$$2x^2 + 2x = 24 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0$$

$$x = -4 \text{ , απορρίπτεται}$$

$$x = 3 \text{ , δεκτή}$$

Άρα, $x = 3\text{ cm}$

(α) Δήλωση ότι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ **0,5μ.**

Δήλωση ότι $\hat{\Gamma}$ (κοινή γωνία) **0,5μ.**

Ορθό κριτ. Ομοιότητας **1μ.**

Συμπέρασμα **0,5μ.**

(β) Σχηματισμός λόγων ομόλογων πλευρών **1,5μ.**

Απόδειξη της σχέσης **1μ.**

(γ) Αντικατάσταση δεδομένων στη σχέση **0,5μ.**

Διαδικασία – πράξεις **1μ.**

Αποτέλεσμα **1μ.**

Να μην αποκοπούν μονάδες αν παραλειφθούν οι μονάδες μέτρησης

<p>(δ) (Α' τρόπος)</p> <p>Αφού $ABΓ \simeq ΔΕΓ$ ισχύει $\frac{AB}{ΔΕ} = \frac{BΓ}{ΕΓ} = \frac{AΓ}{ΔΓ}$</p> <p>$\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{AΓ}{5} = 2 \Rightarrow AΓ = 10 \text{ cm}$</p> <p>$\Rightarrow AE = AΓ - EΓ \Rightarrow AE = 10 - 4 = 6 \text{ cm}$</p> <p>(Β' τρόπος)</p> <p>Αφού $ABΓ$ ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές $AB = 6 \text{ cm}$, $BΓ = 8 \text{ cm}$ τότε από Πυθαγόρειο Θεώρημα $AΓ^2 = BΓ^2 + AB^2$</p> <p>$\Rightarrow AΓ^2 = 64 + 36 \Rightarrow AΓ = \sqrt{100} \Rightarrow AΓ = 10 \text{ cm}$</p> <p>(ή Πυθαγόρεια τριάδα 6,8,10)</p> <p>$\Rightarrow AE = AΓ - EΓ \Rightarrow AE = 10 - 4 = 6 \text{ cm}$</p>	<p>(δ) Αναγνώριση της ορθής αναλογίας (ή αναγνώριση για εφαρμογή Π.Θ.) 0,5μ.</p> <p>Αντικατάσταση δεδομένων στη σχέση 0,5μ.</p> <p>Διαδικασία – πράξεις 1μ.</p> <p>Αποτέλεσμα 0,5μ.</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------