

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ
ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021 – 22
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΜΑΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΤΕΧΝΙΚΗΣ 3ΩΡΟ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 3-ΩΡΟ
ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΕΣΕΚ: 90΄ ΛΕΠΤΑ

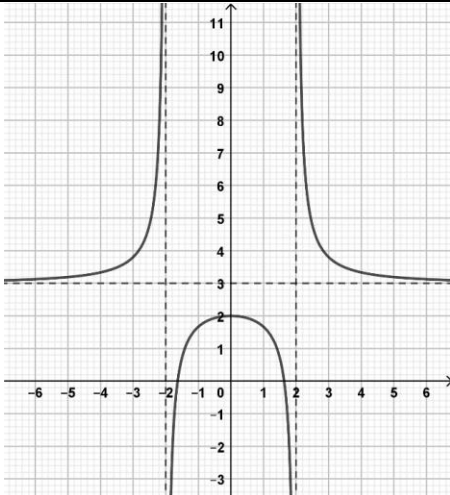
Προτεινόμενες Λύσεις

Σημείωση: Η ελάχιστη υποδιαίρεση βαθμού σε κάθε σημείο αξιολόγησης είναι 0,5 της μονάδας.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

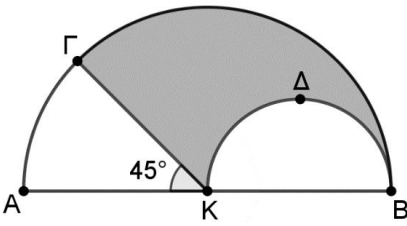
A1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:	
(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 4x - 5)$	(2 μονάδες)
(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$	(3 μονάδες)
Λύση:	
(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 4x - 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = 3 \cdot (+\infty)^2 = +\infty$	(α) 1 μον. (Εφαρμογή κανόνα) 0,5 μον. (Αντικατάσταση) 0,5 μον. (Αποτέλεσμα)
(β) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{x-2} = x - 1, x \neq 2$	(β) 1 μον. (Ανάλυση τριωνύμου) 1 μον. (Απλοποίηση τύπου συνάρτησης)
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 2 - 1 = 1$	0,5 μον. (Αντικατάσταση) 0,5 μον. (Αποτέλεσμα)

<p>A2.</p>	<p>Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης</p> $f(x) = x^3 + 4x - \sqrt{x} + \frac{1}{x} - 2$ <p>Λύση:</p> $f(x) = x^3 + 4x - x^{\frac{1}{2}} + x^{-1} - 2 \Rightarrow$ $f'(x) = 3x^2 + 4 \cdot 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + (-1) \cdot x^{-2} - 0$ $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$	<p>1 μον. (Έκφραση του \sqrt{x} ως $x^{\frac{1}{2}}$)</p> <p>1 μον. (Έκφραση του $\frac{1}{x}$ ως x^{-1})</p> <p>2,5 μον. (Εύρεση παραγώγου 5 x 0,5μον.)</p> <p>0,5 μον. (Έκφραση παραγώγου στην πιο απλή της μορφή)</p>
<p>A3.</p>	<p>(α) Να υπολογίσετε την τιμή του x, έτσι ώστε οι αριθμοί $2 - x$, $3 - 2x$, $16 + x$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους Αριθμητικής Προόδου. (3 μονάδες)</p> <p>(β) Να υπολογίσετε τη διαφορά (δ) της προόδου. (2 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\underbrace{2 - x}_\alpha, \underbrace{3 - 2x}_\beta, \underbrace{16 + x}_\gamma$ διαδοχικοί όροι Α.Π.</p> <p>Ισχύει: $2 \cdot \beta = \alpha + \gamma$</p> $\Leftrightarrow 2 \cdot (3 - 2x) = (2 - x) + (16 + x)$ $\Leftrightarrow 6 - 4x = 2 - x + 16 + x \Leftrightarrow -4x + x - x = 2 + 16 - 6$ $\Leftrightarrow -4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{-4} \Leftrightarrow x = -3$ <p>(β) Για $x = -3 \Rightarrow \alpha = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5,$ $\beta = 3 - 2(-3) = 3 + 6 = 9,$ $\gamma = 16 + (-3) = 13 \rightarrow \mathbf{ΑΠ: 5, 9, 13}$</p> $\delta = 9 - 5 = 4$	<p>(α)</p> <p>1 μον. (Τύπος Αριθμητικού μέσου)</p> <p>0,5 μον. (Αντικατάσταση)</p> <p>1,5 μον. (Ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα)</p> <p>(β)</p> <p>1 μον. (Υπολογισμός α, β, γ)</p> <p>1 μον. (Υπολογισμός δ)</p>
<p>A4.</p>	<p>Δίνεται Γεωμετρική Πρόοδος με $\alpha_1 = 20$ και $\lambda = \frac{1}{2}$.</p> <p>(α) Να βρείτε τον έβδομο όρο της Προόδου. (2 μονάδες)</p> <p>(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της. (3 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Rightarrow$</p> $\alpha_7 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 20 \cdot \frac{1}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$	<p>(α)</p> <p>0,5μον. (Τύπος n-οστού όρου)</p> <p>1,5μον. (Αντικατάσταση, ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα)</p>

	<p>(β) $\Sigma_v = \frac{\alpha_1 \cdot (1 - \lambda^v)}{1 - \lambda}$</p> $\Rightarrow \Sigma_8 = \frac{\alpha_1 \cdot (1 - \lambda^8)}{1 - \lambda} = \frac{20 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{20 \cdot \left(1 - \frac{1}{256}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{20 \cdot \frac{255}{256}}{\frac{1}{2}} = \frac{20 \cdot 255 \cdot 2}{256} = \frac{1275}{32}$	<p>(β)</p> <p>0,5μον. (Τύπος αθροίσματος)</p> <p>1μον. (Αντικατάσταση)</p> <p>1μον. (Ορθότητα πράξεων)</p> <p>0,5μον. (Αποτέλεσμα)</p>
<p>A5.</p>	<p>Κύκλος έχει περιφέρεια 16π cm. Να υπολογίσετε:</p> <p>(α) Την ακτίνα του. (2 μονάδες)</p> <p>(β) Το εμβαδόν κυκλικού τομέα του που έχει επίκεντρη γωνιά 36° (3 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\Gamma = 2\pi R \Leftrightarrow 16\pi = 2 \cdot \pi \cdot R \Leftrightarrow 2R = 16 \Leftrightarrow R = 8$ cm</p> <p>(β) $E_\tau = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 36}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 64}{10} = \frac{32\pi}{5}$ cm²</p>	<p>(α)</p> <p>0,5μον. (Τύπος Γ)</p> <p>0,5μον. (Αντικατάσταση)</p> <p>0,5μον. (Απλοποιήσεις και ορθότητα πράξεων)</p> <p>0,5μον. (Αποτέλεσμα)</p> <p>(β)</p> <p>0,5μον. (Τύπος Ετ)</p> <p>0,5μον. (Αντικατάσταση)</p> <p>1,5μον. (Απλοποιήσεις και ορθότητα πράξεων)</p> <p>0,5μον. (Αποτέλεσμα)</p>
<p>A6.</p>	<p>Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Από την γραφική παράσταση, να βρείτε τις τιμές των ορίων:</p> <p>(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$</p> <p>(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$</p> <p>(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$</p> <p>(δ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$</p> <p>(ε) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3^+$</p> <p>(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3^+$</p> <p>(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$</p> <p>(δ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$</p> <p>(ε) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$</p>	 <p>(α) 1 μον.</p> <p>(β) 1 μον.</p> <p>(γ) 1 μον.</p> <p>(δ) 1 μον.</p> <p>(ε) 1 μον.</p>

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

<p>B1. (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τύπο $f(x) = 3x^2 + 1$, στο σημείο της A με τετμημένη $x_0 = 1$ (6 μονάδες)</p> <p>(β) Τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $x = 5$ είναι $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \kappa^2 + 1$. Να υπολογίσετε τις τιμές του κ, για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ (4 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $f(x) = 3x^2 + 1$ $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 3 + 1 = 4$, το σημείο είναι $(1, 4)$ $f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$ $\lambda_{εφ} = f'(1) = 6 \cdot 1 = 6$ εξίσωση εφαπτομένης: $\psi - \psi_1 = \lambda(x - x_1) \Rightarrow$ $\psi - 4 = 6 \cdot (x - 1) \Rightarrow \psi - 4 = 6x - 6 \Rightarrow$ $\psi = 6x - 6 + 4 \Rightarrow \psi = 6x - 2$</p> <p>(β) για να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \Leftrightarrow 5 = \kappa^2 + 1 \Leftrightarrow$ $\kappa^2 = 5 - 1 \Leftrightarrow \kappa^2 = 4 \Leftrightarrow \kappa = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \kappa = \pm 2$</p>	<p>(α) 1μον. (Υπολογισμός τεταγμένης $f(1)$ του σημείου) 2μον. (Έκφραση παραγώγου) 1μον. (Υπολογισμός κλίσης) 2μον. (Εξίσωση εφαπτομένης)</p> <p>(β) 2μον. (Συνθήκη ύπαρξης ορίου) 2μον. (Αντικαταστάσεις, ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα) (αφαιρούμε 0,5μον. αν δοθεί ως λύση μόνο $\kappa=2$)</p>
<p>B2. Στο διπλανό σχήμα το $A\Gamma B$ είναι ημικύκλιο με κέντρο K και διάμετρο $AB = 8 \text{ cm}$ και το $K\Delta B$ είναι ημικύκλιο με διάμετρο την KB.</p> <p>Αν $\widehat{AK\Gamma} = 45^\circ$, να υπολογίσετε:</p> <p>(α) Το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας. (5 μονάδες)</p> <p>(β) Την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας. (5 μονάδες)</p> <p>(Η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει του π)</p>	

<p>Λύση:</p> <p>(α) $E_{\sigma\kappa.} = E_{\eta\mu.(AB)} - E_{\eta\mu.(KB)} - E_T$</p> $E_{\eta\mu.(AB)} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = \frac{16\pi}{2} = 8\pi \text{ cm}^2$ $E_{\eta\mu.(KB)} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \text{ cm}^2$ $E_T = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 45^\circ}{360^\circ} = 2\pi \text{ cm}^2$ <p>Άρα, $E_{\sigma\kappa.} = 8\pi - 2\pi - 2\pi = 4\pi \text{ cm}^2$</p> <p>(β) $\Pi_{\sigma\kappa.} = K\Gamma + \gamma_{K\Delta B} + \gamma_{GB} =$</p> $= R + \frac{2\pi \cdot r}{2} + \frac{2\pi \cdot R \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = 4 + \frac{2\pi \cdot 2}{2} + \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 135^\circ}{360^\circ}$ $= 4 + 2\pi + 3\pi = (4 + 5\pi) \text{ cm}$	<p>(α)</p> <p>1 μον. (Έκφραση $E_{\sigma\kappa.}$)</p> <p>1 μον. (Τύπος και υπολογισμός $E_{\eta\mu.(AB)}$)</p> <p>1 μον. (Τύπος και υπολογισμός $E_{\eta\mu.(KB)}$)</p> <p>1 μον. (Τύπος και υπολογισμός E_T)</p> <p>1 μον. (Υπολογισμός $E_{\sigma\kappa.}$)</p> <p>(β)</p> <p>1 μον. (Έκφραση $\Pi_{\sigma\kappa.}$)</p> <p>0,5 μον. (Υπολογισμός $K\Gamma$)</p> <p>1 μον. (Τύπος και υπολογισμός $\gamma_{K\Delta B}$)</p> <p>1,5 μον. (Τύπος και υπολογισμός γ_{GB})</p> <p>1 μον. (Ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα)</p>
<p>B3. Σε φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδο ο έκτος όρος της είναι 12 και ο τρίτος όρος της 96.</p> <p>Να υπολογίσετε:</p> <p>(α) Τον πέμπτο όρο της. (5 μονάδες)</p> <p>(β) Το άθροισμα των επτά πρώτων όρων της. (3 μονάδες)</p> <p>(γ) Το άθροισμα των απείρων όρων της. (2 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\alpha_6 = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^{6-1} = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 12 \quad (1)$</p> $\alpha_3 = 96 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^{3-1} = 96 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 96 \quad (2)$ $\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^5}{\alpha_1 \cdot \lambda^2} = \frac{12}{96} \Rightarrow \lambda^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ $\alpha_1 \cdot \lambda^2 = 96 \Rightarrow \alpha_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 96 \Rightarrow \alpha_1 \cdot \frac{1}{4} = 96$ $\Rightarrow \alpha_1 = 96 \div \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_1 = 384$ $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^{5-1} = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 384 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 384 \cdot \frac{1}{16} = 24$	<p>(α)</p> <p>0,5 μον. (Έκφραση α_6)</p> <p>0,5 μον. (εξίσωση (1))</p> <p>0,5 μον. (Έκφραση α_2)</p> <p>0,5 μον. (εξίσωση (2))</p> <p>1 μον. (Υπολογισμός λ)</p> <p>1 μον. (Υπολογισμός α_1)</p> <p>1 μον. (Υπολογισμός α_5)</p>

<p>(β) $\Sigma_v = \frac{\alpha_1 \cdot (1 - \lambda^v)}{1 - \lambda}$</p> <p>$\Rightarrow \Sigma_7 = \frac{\alpha_1 \cdot (1 - \lambda^7)}{1 - \lambda} = \frac{384 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{384 \cdot \left(1 - \frac{1}{128}\right)}{\frac{1}{2}} =$</p> <p>$= \frac{384 \cdot \frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{384 \cdot 127 \cdot 2}{128} = \mathbf{762}$</p> <p>(γ) $\Sigma_\infty = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda} = \frac{384}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{384}{\frac{1}{2}} = 384 \cdot 2 = \mathbf{768}$</p>	<p>(β)</p> <p>1μον. (Τύπος Σ_v)</p> <p>1μον. (Αντικαταστάσεις)</p> <p>1μον. (Ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα)</p> <p>(γ)</p> <p>1μον. (Τύπος Σ_∞)</p> <p>0,5μον. (Αντικαταστάσεις)</p> <p>0,5μον. (Ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα)</p>
---	--