ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021 – 22

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΜΑΪΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4-ΩΡΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

(Α΄ ΣΕΙΡΑ)

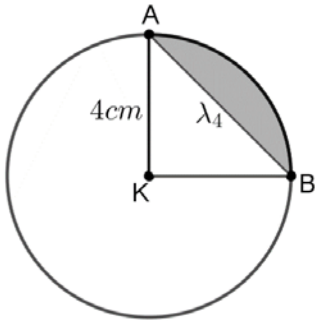
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0048

Προτεινόμενες Λύσεις

Στη λύση των ασκήσεων να δίνονται όλες οι μονάδες έστω και αν οι μαθητές δεν γράψουν τους τύπους.

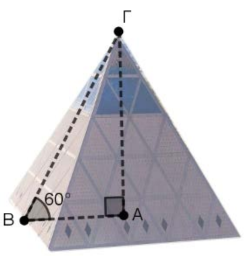
ΜΕΡΟΣ Α΄:

Α1.	Δίνεται κύκλος με ακτίνα $7cm.$ Να υπολογίσετε: **(α)** Το μήκος του κύκλου **(β)** Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου **Λύση:** **(α)** $\Gamma = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 7 = \boldsymbol{14\pi cm}$ **(β)** $E = \pi R^2 = \pi \cdot 7^2 = \boldsymbol{49\pi cm^2}$	**(α)** • Τύπος Γ **0,5** • Αντικατάσταση **1** • Αποτέλεσμα **1** **(β)** • Τύπος E **0,5** • Αντικατάσταση **1** • Αποτέλεσμα **1**
Α2.	Δίνεται η πρόοδος $10, 16, 22, 28, \ldots$ Να βρείτε: **(α)** Το είδος της προόδου **(2 μονάδες)** **(β)** Τον εικοστό τρίτο όρο της (α_{23}) **(3 μονάδες)** **Λύση:** **(α)** $A.\Pi.\, \mu\varepsilon\ \alpha_1 = 10\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \delta = 6$ **(β)** $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \delta$ $\Rightarrow \alpha_{23} = \alpha_1 + (23 - 1) \cdot \delta = 10 + 22 \cdot 6 = 10 + 132$ $= \mathbf{142}$	**(α)** • Αριθμητική Πρόοδος **2** $(\alpha_1 = 10\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \delta = 6)$ **(β)** • Τύπος α_ν **1** • Αντικατάσταση **3x0,5=1,5** • Αποτέλεσμα **0,5**

Α3.	Κύβος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = 54cm^2$. Να υπολογίσετε: **(α)** Την ακμή του **(3 μονάδες)** **(β)** Τον όγκο του **(2 μονάδες)** **<u>Λύση:</u>** **(α)** $E_{ολ} = 6 \cdot α^2 \Rightarrow 54 = 6 \cdot α^2 \Rightarrow α^2 = \frac{54}{6}$ $\Rightarrow α^2 = 9 \Rightarrow α = \pm\sqrt{9} \Rightarrow α = \pm 3$ $α > 0 \Rightarrow \boldsymbol{α = 3cm}$ $\quad (α = -3\ απορρίπτεται)$ **(β)** $V = α^3 = 3^3 = \boldsymbol{27cm^3}$	**(α)** •Τύπος $E_{ολ}$ **0,5** • Αντικατάσταση **0,5** • Επίλυση εξισωσης **1** • $α = 3cm$ **1** **(β)** • Τύπος V **1** • Αντικατάσταση **0,5** • Αποτέλεσμα **0,5**
Α4.	Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος $(K, 4cm)$ και χορδή $AB = λ_4$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου κυκλικού τμήματος.  **<u>Λύση:</u>** Αφού $AB = λ_4 \Rightarrow A\widehat{K}B = 90^\circ$ $E_{σκ.} = E_{τμήματος} = E_{τομέα} - E_{τριγώνου}$ $E_{τομέα} = \frac{πR^2 \cdot μ^\circ}{360^\circ} = \frac{π \cdot 4^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 4πcm^2$ $E_{τριγώνου} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot ημμ^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot ημ90^\circ = 8cm^2$ (το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να βρεθεί και από τον τύπο: $E_{τριγ.} = \frac{(βάση) \cdot (ύψος)}{2}$) Άρα, $\boldsymbol{E_{σκ.} = (4π - 8)cm^2}$	• $A\widehat{K}B = 90^\circ$ **1** • Τύπος $E_{κ.τμ}$ **0,5** • Τύπος $E_{κ.τομέα}$ **0,5** • Αντικατάσταση **0,5** • Αποτέλεσμα **0,5** • Τύπος $E_{τριγ}$ **0,5** • Αντικατάσταση **0,5** • Αποτέλεσμα **0,5** • Εμβαδόν σκιασμένου **0,5**
Α5.	Οι τρεις πρώτοι όροι Γεωμετρικής Προόδου είναι: $2x$, x , $x - 5$ και $x > 0$ **(α)** Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους της **(3 μονάδες)** **(β)** Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της ($Σ_\infty$) **(2 μονάδες)**	

	Λύση: **(α)** $\underbrace{2x}_{\alpha}\ ,\ \underbrace{x}_{\beta}\ ,\ \underbrace{x-5}_{\gamma}$ $\beta^2=\alpha\cdot\gamma \ \Longrightarrow\ x^2=2x\cdot(x-5)\Longrightarrow\ x^2=2x^2-10x$ $\Longrightarrow\ x^2-2x^2+10x=0$ $\Longrightarrow -x^2+10x=0\ \Longrightarrow\ -x\cdot(x-10)=0$ $\Longrightarrow \begin{cases} -x=0\ \Longrightarrow x=0\ απορρ.(x>0) \\ \ x-10=0\ \Longrightarrow \boldsymbol{x=10\ δεκτ}ή \end{cases}$ Άρα, $\alpha=2x=2\cdot10=20=a_1$, $\ \beta=x=10=\alpha_2$ και $\gamma=x-5=10-5=5=a_3$, $\boldsymbol{Γ.Π.\ 20,10,5,\ldots\ \ ,\alpha_1=20\ \ και\ \ \lambda=\frac{1}{2}}$ **(β)** $\Sigma_\infty=\frac{\alpha_1}{1-\lambda}=\frac{20}{1-\frac{1}{2}}\ =\ \frac{\frac{20}{1}}{\frac{1}{2}}=\frac{20\cdot2}{1\cdot1}=\mathbf{40}$	**(α)** • Τύπος $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$ **0,5** • Αντικατάσταση **0,5** • Επίλυση εξισωσης **1** • Αποτέλεσμα και χαρακτηρισμός **0,5** • Υπολογισμός α,β,γ **0,5** **(β)** • Τύπος Σ_∞ **0,5** • $\boldsymbol{\alpha_1}$ και $\boldsymbol{\lambda}$ **2x0,5=1** • Αποτέλεσμα **0,5**
Α6.	Στη διπλανή φωτογραφία, η σκηνή έχει σχήμα κανονικού τριγωνικού πρίσματος με ακμή βάσης $\alpha=2m$ και όγκο $V=3\sqrt{3}\,m^3$. Η ολική της επιφάνεια έχει κατασκευαστεί από ύφασμα που στοιχίζει €$20/m^2$. Να υπολογίσετε το κόστος κατασκευής της σκηνής.  **Λύση:** $V=E_\beta\cdot\upsilon\ \ \Leftrightarrow\ \ 3\sqrt{3}=\frac{\alpha^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\upsilon\ \Leftrightarrow\ 3\sqrt{3}=\frac{2^2\cdot\sqrt{3}\cdot\upsilon}{2}$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\upsilon \Leftrightarrow\ \boldsymbol{\upsilon=3\ m}$ $E_{o\lambda}=E_\pi+2\cdot E_\beta$ $E_\pi=\Pi_\beta\cdot\upsilon=3\alpha\cdot\upsilon=3\cdot2\cdot3=\mathbf{18}\boldsymbol{m^2}$ $E_\beta=\frac{\alpha^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{2^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\sqrt{3}m^2}$ Άρα, $\boldsymbol{E_{o\lambda}=(18+2\sqrt{3})m^2}$ $\boldsymbol{(18+2\sqrt{3})\cdot20\cong21,46\cdot20=€429,20}$ το κόστος κατασκευής της σκηνής	•Τύπος V **0,5** • Αντικατάσταση **0,5** • Επίλυση εξισωσης **1** • Τύπος $E_{o\lambda}$ **0,5** • Τύπος E_π **0,5** • Αποτέλεσμα E_π **0,5** • Εύρεση E_β **0,5** • Αποτέλεσμα $E_{o\lambda}$ **0,5** • Κόστος **0,5**

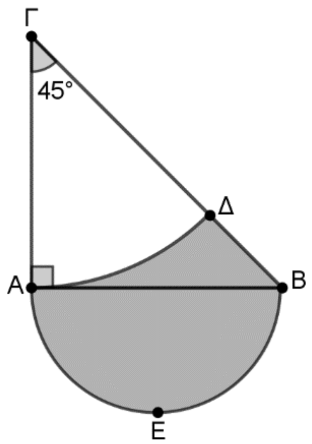
ΜΕΡΟΣ Β΄:

Β1.	Δίνεται Αριθμητική Πρόοδος της οποίας το άθροισμα του δεύτερου και του όγδοου όρου της είναι 26, ενώ το άθροισμα του τρίτου και του πέμπτου όρου της είναι 22. **(α)** Να σχηματίσετε την πρόοδο. **(6 μονάδες)** **(β)** Να υπολογίσετε το άθροισμα των 32 πρώτων όρων της (Σ_{32}). **(4 μονάδες)** **<u>Λύση:</u>** **(α)** $\alpha_2+\alpha_8=26 \Rightarrow \alpha_1+\delta+\alpha_1+7\delta=26$ $\Rightarrow 2\alpha_1+8\delta=26$ $\alpha_3+\alpha_5=22 \Rightarrow \alpha_1+2\delta+\alpha_1+4\delta=22$ $\Rightarrow 2\alpha_1+6\delta=22$ $\begin{matrix} 2\alpha_1+8\delta=26 \\ 2\alpha_1+6\delta=22 \end{matrix}\left\vert \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\vert \Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha_1+8\delta=26 \\ \underline{-2\alpha_1-6\delta=-22} \end{matrix}+$ $2\delta=4 \Rightarrow \boldsymbol{\delta=2}$ $2\alpha_1+8\delta=26 \Longrightarrow 2\alpha_1+8\cdot 2=26$ $\Longrightarrow 2\alpha_1=26-16=10 \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha_1=5}$ ***Αριθμητική Πρόοδος***: $\mathbf{5,7,9,11,13},\ldots$ **(β)** $\Sigma_\nu=\dfrac{[2\alpha_1+(\nu-1)\delta]\cdot\nu}{2}$ $\Rightarrow \Sigma_{32}=\dfrac{[2\cdot5+(32-1)\cdot2]\cdot32}{2}=\dfrac{[10+31\cdot2]\cdot32}{2}=$ $=(10+62)\cdot16=72\cdot16=\mathbf{1152}$	**(α)** • $\alpha_2+\alpha_8=26$ **0,5** • $\alpha_3+\alpha_5=22$ **0,5** • Πράξεις **2x1=2** • Επίλυση συστήματος με οποιαδήποτε μέθοδο ($\boldsymbol{\alpha_1}$ και $\boldsymbol{\delta}$) **2** • Σχηματισμός Α.Π **1** **(β)** • Τύπος Σ_ν **1** • Αντικατάσταση **4x0,5=2** • Πράξεις **0,5** • Αποτέλεσμα **0,5**
Β2.	Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται το ΄΄παλάτι της Ειρήνης΄΄ στην πόλη Αστάνα στο Καζακστάν. Πρόκειται για μια γυάλινη κανονική τετραγωνική πυραμίδα της οποίας οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν με τη βάση γωνιά 60^o. Αν η περίμετρος της βάσης της είναι $320m$, να υπολογίσετε: 	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
(α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της
(β) Τον όγκο της πυραμίδας της

<u>Λύση:</u>
(α) $\Pi_\beta = 4\alpha \iff 320 = 4\alpha \iff \alpha = \frac{\mathbf{320}}{\mathbf{4}} \iff \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{80m}$ $\left((AB) = \frac{\alpha}{2} = 40m\right)$
$\textit{Στο τρίγωνο } AB\Gamma$:
$\hat{A} = 90^o,\ \hat{B} = 60^o \implies \hat{\Gamma} = 30^o \iff (AB) = \frac{(B\Gamma)}{2}$
$\implies (B\Gamma) = 80m \implies \boldsymbol{h = 80m}$
$E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} = \frac{4\alpha \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 80 \cdot 80}{2} = \mathbf{12800m^2}$
(β) $\Pi.\Theta.\ (B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$
$\iff 80^2 = 40^2 + \upsilon^2 \iff 6400 = 1600 + \upsilon^2$
$\iff \upsilon^2 = 6400 - 1600 \iff \upsilon^2 = 4800$
$\implies \upsilon = \sqrt{4800} \implies \boldsymbol{\upsilon = 40\sqrt{3}m} \quad (\upsilon > 0)$
$V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3} = \frac{\alpha^2 \cdot \upsilon}{3} = \frac{80^2 \cdot 40\sqrt{3}}{3} = \frac{\mathbf{256000\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{m^3}$
</td>
<td>
(α)
• Τύπος Π_β 0,5
• Υπολογισμός α 1
• $(AB) = \frac{\alpha}{2}$ 0,5
• Θεώρημα $\mathbf{30}^\circ$ 1
• Τύπος E_π 0,5
• Αντικατάσταση 1
• Αποτέλεσμα 0,5

(β)
• Π.Θ. 1
• Αντικατάσταση 0,5
• Πράξεις 1
• ευρεση ύψους 0,5

• Τύπος V 0,5
• Αντικατάσταση 2x 0,5=1
•Αποτέλεσμα 0,5
</td>
</tr>
<tr>
<td>Β3.</td>
<td>
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) με πλευρά $B\Gamma = 10\sqrt{2}cm$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. Με κέντρο το Γ και ακτίνα ίση με την πλευρά ΓA γράφουμε το τόξο $A\Delta$ και με διάμετρο την AB γράφουμε το ημικύκλιο AEB.


(α) Να δείξετε ότι $AB = 10cm$. (μονάδες 2)
(β) Να υπολογίσετε:
(i) Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής (μονάδες 4)
(ii) Την περίμετρο της σκιασμένης περιοχής (μονάδες 4)
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	Λύση:	
	(α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$: $\hat{A} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 45^\circ \Longrightarrow \hat{B} = 45^\circ \Longrightarrow$ $ορθογώνιο\ και\ ισοσκελές \Longrightarrow (A\Gamma) = (AB) = xcm$	**(α)**
	$Π.Θ.\ (B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$	• $(A\Gamma) = (AB)$ **0,5** • $Π.Θ$ **0,5**
	$\Leftrightarrow\ \left(10\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 \ \Leftrightarrow 200 = 2x^2$	• Αντικατάσταση **0,5**
	$\Leftrightarrow x^2 = 100 \ \Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{100} \ \Longrightarrow\ x = 10cm\ (x > 0)$ Άρα, $(\boldsymbol{A\Gamma}) = (\boldsymbol{AB}) = \mathbf{10}\boldsymbol{cm}$	• Αποτέλεσμα **0,5**
	(β) (i) $E_{σκ.} = E_{τριγ.} + E_{ημικ.} - E_{τομέα}$	**(β) (i)**
	$E_{τριγ.} = \frac{(βάση)\cdot(ύψος)}{2} = \frac{(AB)\cdot(A\Gamma)}{2} = \frac{10\cdot10}{2} = \mathbf{50}\boldsymbol{cm^2}$	• $E_{σκ.}$ **0,5** • $E_{τριγ.}$ **1**
	$E_{ημικ.} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi\cdot5^2}{2} = \boldsymbol{\frac{25\pi}{2}}\boldsymbol{cm^2}$ $\left(ακτίνα\ ημικυκλίου\ R = \frac{1}{2}(AB) = 5cm\right)$	• R ημικυκλιου **0,5** • $E_{ημικ.}$ **0,5**
	$E_{τομέα} = \frac{\pi\rho^2\cdot\mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\cdot10^2\cdot45^\circ}{360^\circ} = \boldsymbol{\frac{25\pi}{2}}\boldsymbol{cm}^2$ $(ακτίνα\ τομέα\ \rho = (A\Gamma) = 10cm)$	• ρ κυκλικου τομέα **0,5** • $E_{τομέα}$ **0,5**
	Άρα, $E_{σκ.} = 50 + \frac{25\pi}{2} - \frac{25\pi}{2} = \mathbf{50}\boldsymbol{cm^2}$	• Αποτέλεσμα **0,5**
	(ii) $Π_{σκ.} = \gamma_{ημικ.} + \gamma_{τομέα} + (B\Delta)$	**(ii)** • $Π_{σκ.}$ **1**
	$\gamma_{ημικ.} = \frac{2\pi R}{2} = \frac{2\cdot\pi\cdot5}{2} = \mathbf{5}\boldsymbol{\pi cm}$	• $\gamma_{ημικ.}$ **1**
	$\gamma_{τομέα} = \frac{2\pi\rho\cdot\mu^\circ}{360^\circ} = \frac{2\cdot\pi\cdot10\cdot45^\circ}{360^\circ} = \boldsymbol{\frac{5\pi}{2}}\boldsymbol{cm}$	• $\gamma_{τομέα}$ **1**
	$(B\Delta) = (B\Gamma) - (\Gamma\Delta) = 10\sqrt{2} - \rho = 10\sqrt{2} - 10$ $= \mathbf{10}\cdot\left(\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}\right)\boldsymbol{cm}$	• $(B\Delta) = (B\Gamma) - (\Gamma\Delta)$ **0,5**
	Άρα, $Π_{σκ.} = 5\pi + \frac{5\pi}{2} + 10\cdot\left(\sqrt{2} - 1\right)$ $= \left[\frac{\mathbf{15}\boldsymbol{\pi} + \mathbf{20}\cdot\left(\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}\right)}{\mathbf{2}}\right]\boldsymbol{cm}$	• Αποτέλεσμα **0,5**