ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021–22

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΜΑΪΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4-ΩΡΟ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ (Α΄ΣΕΙΡΑ)

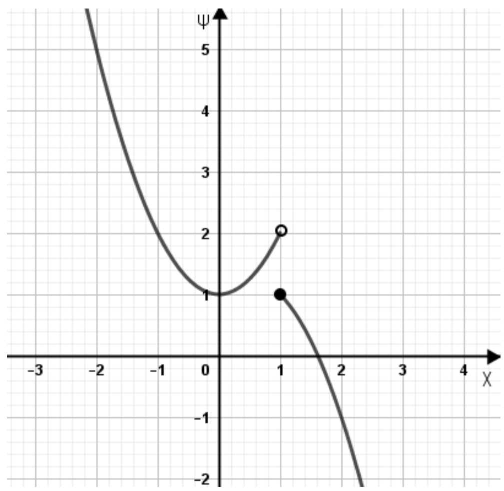
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0049

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 4-ΩΡΟ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΕΣΕΚ: 90΄ λεπτά

Προτεινόμενες λύσεις – οδηγός διόρθωσης

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1.	Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων: **(α)** $f(x) = x^3 - 4x + 8$ **(β)** $g(x) = \frac{x^2+x-3}{x-2}$ **ΛΥΣΗ:** **(α)** $x\epsilon\mathbb{R}$ **(β)** $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \Leftrightarrow x\epsilon\mathbb{R} - \{2\}$	**(α)** $(x\epsilon\mathbb{R})$ 2,5 μον. **(β)** $(x\epsilon\mathbb{R} - \{2\})$ 2,5 μον.

Α2.	Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις: **(α)** $5^x = 25$ **(2 μονάδες)** **(β)** $3 \cdot 4^x \cdot 2^{3x-1} = 48$ **(3 μονάδες)** **<u>ΛΥΣΗ</u>:** **(α)** $5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$ **(β)** $3 \cdot 4^x \cdot 2^{3x-1} = 48 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{3x-1} = 48$ $3 \cdot 2^{5x-1} = 48 \Leftrightarrow$ $2^{5x-1} = \frac{48}{3} \Leftrightarrow 2^{5x-1} = 16 \Leftrightarrow$ $2^{5x-1} = 2^4 \Leftrightarrow$ $5x - 1 = 4 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$	**(α)** (Έκφραση $25 = 5^2$) **1 μον.** ($x = 2$) **1 μον.** **(β)** ($4^x = 2^{2x}$) **0,5 μον.** ($2^{2x} \cdot 2^{3x-1} = 2^{5x-1}$) **0,5 μον.** (Ορθότητα πράξεων) **0,5μον.** (16= 2^4) **0,5 μον.** (υπολογισμός του x) **1 μον.**
Α3.	Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:  **(α)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **(β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **(γ)** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ **(δ)** $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ **(ε)** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ **<u>ΛΥΣΗ</u>:** **(α)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **(β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **(γ)** $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$ **(δ)** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2$ επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ δεν υπάρχει **(ε)** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1$	**(α)** $-\infty$ **1 μον.** **(β)** $+\infty$ **1 μον.** **(γ)** 1 **1 μον.** **(δ)** Αν από το σχήμα γράψει κατευθείαν πως δεν υπάρχει το όριο παίρνει τη μον. **1 μον.** **(ε)** 1 **1 μον.**

Α4.	Αν $log_2 x = a$ και $log_2 y = \beta$, να εκφράσετε συναρτήσει των α και β τις ακόλουθες παραστάσεις : **(α)** $log_2(x^{\mathbf{3}} \cdot y^4)$ **(β)** $log_2 \left(\frac{y^2}{x^6}\right)^3$ **<u>ΛΥΣΗ</u>:** **(α)** $log_2(x^3 \cdot y^4) = log_2(x^3) + log_2(y^4) =$ $= 3 \cdot log_2 x + 4 \cdot log_2 y = 3a + 4\beta$ **(β)** $log_2 \left(\frac{y^2}{x^6}\right)^3 = 3 \cdot log_2 \left(\frac{y^2}{x^6}\right) =$ $= 3 \cdot [log_2(y^2) - log_2(x^6)] =$ $= 3 \cdot [2 \cdot log_2 y - 6 \cdot log_2 x] =$ $= 3 \cdot (2\beta - 6\alpha) = 6\beta - 18\alpha$	(α) Ιδιότητα λογαρίθμων **1μον.** Ιδιότητα λογαρίθμων **1 μον.** Αποτέλεσμα **0,5 μον.** (β) Ιδιότητα λογαρίθμων **0,5μον.** Ιδιότητα λογαρίθμων **1μον.** Ιδιότητα λογαρίθμων **0,5μον.** Αποτέλεσμα **0,5 μον.**
Α5.	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - \sqrt{7}$ και $g(x) = (x - 2)\ (3x + 1)$. **(α)** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$. **(1,5 μονάδες)** **(β)** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)$. **(2 μονάδες)** **(γ)** Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $xg'(x) - f'(x) - 3x = 0$. **(1,5 μονάδες)** **<u>ΛΥΣΗ</u>:** **(α)** $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - \sqrt{7}$ $\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 8x$ **(β)** $g(x) = (x - 2)\ (3x + 1)$ $\Rightarrow g'(x) = 1 \cdot (3x + 1) + (x - 2) \cdot 3 =$ $= 3x + 1 + 3x - 6 = 6x - 5$ **(γ)** $A'\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = xg'(x) - f'(x) - 3x =$ $= x \cdot (6x - 5) - (6x^2 - 8x) - 3x =$ $=6x^2 - 5x - 6x^2 + 8x - 3x = 0 = B'\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma$	(α) 3x0,5 **1,5 μον.** (β) (Κανόνας γινομένου ή επιμεριστική) **1 μον.** (Ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα) **1 μον.** **(γ)** Αντικαταστάσεις **0,5 μον.** Επιμεριστική ιδιότητα **0,5μον.** Αναγωγή ομοίων όρων **0,5μον.**

Α6.	Να εξετάσετε αν οι πραγματικές συναρτήσεις με τύπους $f(x)=\frac{3x^3-27x}{x^2-9}$ και $g(x)=3x$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που ισχύει $f\neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f=g$.	
	<u>ΛΥΣΗ</u>:	
	$f: A \longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad A=\mathbb{R}-\{-3,3\}$ $g: B \longrightarrow \mathbb{R},\quad B=\mathbb{R}$	(Π.Ο. της f) **0,5 μον.** (Π.Ο. της g) **0,5 μον.**
	Οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίσες, γιατί έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού.	Συμπέρασμα $f\neq g$ **0,5 μον.**
	Παρατηρούμε ότι $A\cap B=\mathbb{R}-\{-3,3\}$ και	Εύρεση κατάλληλου κοινού υποσυνόλου **1 μον.**
	$f(x)=\frac{3x^3-27x}{x^2-9}=\frac{3x(x^2-9)}{x^2-9}=3x=g(x),\ \forall x\epsilon\mathbb{R}-\{-3,3\}$	Παραγοντοποίηση και απλοποίηση **2 μον.**
	Επομένως, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες στο $\mathbb{R}-\{-3,3\}$.	Συμπέρασμα $f=g$ **0,5 μον.**

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄:</u> Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

<table>
<tr>
<td>Β1.</td>
<td>
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - Ax^2 + 4x - 5$.

(α) Αν $f(2) = 7$, να υπολογίσετε την τιμή του A.
(3 μονάδες)
(β) Αν $A = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με $x = 1$.
(7 μονάδες)

<u>ΛΥΣΗ</u>:

(α)
$f(2) = 7 \Rightarrow 7 = 2 \cdot 2^3 - A \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 5$
$\Rightarrow 7 = 16 - 4A + 8 - 5 \Rightarrow 4A = 12$
$\Rightarrow A = 3$

(β) Αν $A = 3$

$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \Rightarrow$

$f(1) = 2 - 3 + 4 - 5 = -2$

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 4 \Rightarrow$
$\lambda_{\varepsilon\varphi}\big|_{(1,-2)} = 6 - 6 + 4 = 4$

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$
$y - (-2) = 4(x - 1)$
$y + 2 = 4x - 4 \Rightarrow \; y = 4x - 6$ εξ. εφαπτομένης
</td>
<td>
(α)

Αντικαταστάσεις 1 μον.
Ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα 2 μον.

(β)

Υπολογισμός $f(1)$ 1 μον.

Εύρεση $f'(x)$ 2 μον.

Υπολογισμός $\lambda_{\varepsilon\varphi}$ 1 μον.

$y - y_1 = \lambda(x - x_1)$ 1 μον.
Αν δεν γράψει τον τύπο, τότε τα επόμενα βήματα παίρνουν 3 μονάδες
Αντικαταστάσεις, ορθότητα πράξεων, αποτέλεσμα 2 μον.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Β2.</td><td>Σ' έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) $\Theta(t)$ του ασθενούς, σε βαθμούς Κελσίου (℃), t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου, δίνεται από τον τύπο $\Theta(t) = 36 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$.
(α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο. (3 μονάδες)
(β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει φυσιολογική τιμή (36,5 ℃). (4 μονάδες)
(γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες, πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου; (3 μονάδες)
<u>ΛΥΣΗ</u>:
(α) $\Theta(t) = 36 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ και t=0
$\Rightarrow \Theta(0) = 36 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 40℃$
(β) $\Theta(t) = 36{,}5$
$\Rightarrow 36 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = 36{,}5$
$\Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0{,}5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{0{,}5}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{8} \Rightarrow$
$\left(\frac{1}{2}\right)^t = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow t = 3$ ώρες
(γ) t = 4
$\Theta(t) = 36 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$
$\Rightarrow \Theta(4) = 36 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 36 + 4 \cdot \frac{1}{16}$
$= 36 + \frac{1}{4} = 36{,}25℃$</td><td>(α)
Αντικατάσταση 1 μον.
Ορθότητα πράξεων 1 μον.
Αποτέλεσμα 1 μον.

(β)
$(\Theta(t) = 36{,}5)$ 1 μον.
Ορθότητα πράξεων 1 μον.
$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ 1 μον.
Αποτέλεσμα 1 μον.
(γ)
Αντικατάσταση t=4 1 μον.
Ορθότητα πράξεων 1 μον.
Αποτέλεσμα 1 μον.</td></tr>
</table>

B3.	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2x^2+6}{x+3}$ και $g(x)=\frac{6x-6}{x+3}$. **(α)** Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f+g$ και $\frac{f}{g}$ (Να γίνουν όλες οι δυνατές πράξεις) **(β)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f+g$ είναι $1-1$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.	
	<u>ΛΥΣΗ</u>: **(α)** $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A=\mathbb{R}-\{-3\}$ $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$, $B=\mathbb{R}-\{-3\}$	(α) (Π.Ο. της f) **0,5 μον.** (Π.Ο. της g) **0,5 μον.**
	Η συνάρτηση $f+g$ ορίζεται στο $A \cap B=\mathbb{R}-\{-3\}$	(Π.Ο. της $f+g$) **0,5 μον.**
	Και $(f+g)(x)=\frac{2x^2+6}{x+3}+\frac{6x-6}{x+3}=\frac{2x^2+6x}{x+3}=\frac{2x(x+3)}{x+3}=2x$	Τύπος της $f+g$ **1 μον.**
	Για τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ πρέπει $\{x\epsilon\mathbb{R}: g(x) \neq 0\}$	
	Συνεπώς, $g(x)=\frac{6x-6}{x+3} \neq 0 \Leftrightarrow 6x-6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$	Π.Ο. της $\frac{f}{g}$ **0,5 μον.**
	Άρα το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι $\mathbb{R}-\{-3,1\}$	
	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{2x^2+6}{x+3}}{\frac{6x-6}{x+3}}=\frac{2x^2+6}{6x-6}=\frac{2(x^2+3)}{6(x-1)}=\frac{x^2+3}{3(x-1)}$	Τύπος της $\frac{f}{g}$ **2 μον.**
	(β) Έστω $h(x)=(f+g)(x)=2x\ \forall x \in \mathbb{R}-\{-3\}$	(β)
	Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow$ $h(x_1) \neq h(x_2)$ (ή $h(x_1)=h(x_2) \rightarrow 2x_1=2x_2 \rightarrow x_1=x_2$)	Υπόθεση $x_1 \neq x_2$ **1,5 μον.** Απόδειξη $h(x_1) \neq h(x_2)$ **1,5 μον.**
	Επομένως διαφορετικά πρότυπα αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές που μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση είναι 1-1.	Συμπέρασμα **2 μον.**
	(Εναλλακτικά, μπορεί να λύσει, ως προς x, την y=2x, να αναφέρει ότι για κάθε τιμή του y αντιστοιχεί μια μόνο τιμή του x και να συμπεράνει ότι η h είναι 1-1.)	Αν χρησιμοποιήσει αυτή τη λύση παίρνει όλες τις μονάδες του (β) ερωτήματος.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ