ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΕΤΡΑΜΗΝΩΝ 2021 – 22

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2-ΩΡΟ (Π.Κ.) ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0050

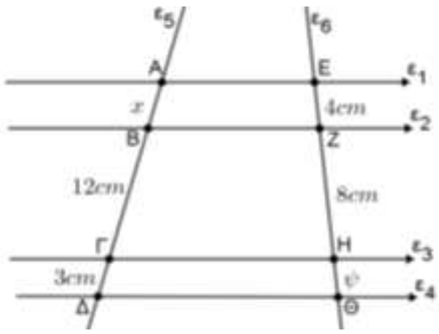
Τάξη: Β΄

Ημερομηνία εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΜΑΪΟΥ 2022

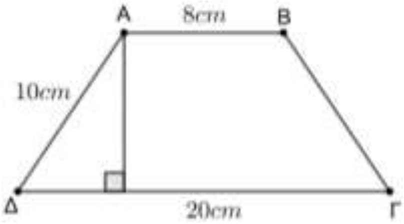
Προτεινόμενες Λύσεις

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1.	Να υπολογίσετε τις τιμές του x στις πιο κάτω αναλογίες: **(α)** $\frac{x+2}{3}=\frac{10}{5}$ **(β)** $\frac{x}{2}=\frac{8}{x}$ **Λύση:** **(α)** $\frac{x+2}{3}=\frac{10}{5} \Leftrightarrow 5\cdot(x+2)=3\cdot 10 \Leftrightarrow 5x+10=30$ $\Leftrightarrow 5x=30-10 \Leftrightarrow 5x=20 \Leftrightarrow x=\frac{20}{5} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x=4}}$ **(β)** $\frac{x}{2}=\frac{8}{x} \Leftrightarrow x\cdot x=2\cdot 8 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{16}$ $\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x=\pm 4}}$	**(α)** • Εφαρμογή ιδιότητας αναλογιών **1μ** • Ορθότητα πράξεων **1μ** • Αποτέλεσμα **0,5μ** **(β)** • Εφαρμογή ιδιότητας αναλογιών **1μ** • Ορθότητα πράξεων **1μ** • Αποτέλεσμα **0,5μ** **(Αφαιρούμε 0,5μ εάν δοθεί ως απάντηση μόνο *x*=4)**
Α2.	Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο τετραγώνου με πλευρά $\alpha=4cm$ **Λύση:** $E=\alpha^2=4^2 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{E=16\ cm^2}}$ $\Pi=4\alpha=4\cdot 4 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\Pi=16\ cm}}$	• Τύπος εμβαδού τετραγώνου **1μ** • Αντικατάσταση και ορθότητα πράξεων **1μ** • Αποτέλεσμα **0,5μ** • Τύπος περιμέτρου τετραγώνου **1μ** • Αντικατάσταση και ορθότητα πράξεων **1μ** Αποτέλεσμα **0,5μ**

Α3.	Η απόσταση μεταξύ Αθήνας και Θεσσαλονίκης πάνω στον χάρτη είναι ίση με $7cm$. Να υπολογίσετε την πραγματική απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων σε km, αν γνωρίζετε ότι η κλίμακα του χάρτη είναι $1{:}\,10000000$ **<u>Λύση:</u>** $A.\Sigma. = 7cm, \quad 1{:}\,\alpha = 1{:}\,10000000$ $\frac{A.\Sigma.}{A.\Pi.} = \frac{7}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{7cm}{A.\Pi.} = \frac{1}{10000000}$ $\Leftrightarrow A.\Pi. = 7 \cdot 10000000$ $\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{A.\Pi. = 70000000\ cm = 700000m = 700Km}}$	• Ορθή διατύπωση σχέσης Α.Σ με Α.Π **1,5μ** • Αντικαταστάσεις **1μ** • Εφαρμογή ιδιότητας αναλογιών **1,5μ** • Αποτέλεσμα **1μ**
Α4.	Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$ Να υπολογίσετε τις τιμές των x και ψ  **<u>Λύση:</u>** $\frac{x}{12} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow 8 \cdot x = 4 \cdot 12 \Leftrightarrow 8x = 48 \Leftrightarrow x = \frac{48}{8}$ $\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 6cm}}$ $\frac{8}{\psi} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow 12 \cdot \psi = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow 12\psi = 24 \Leftrightarrow \psi = \frac{24}{12}$ $\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\psi = 2cm}}$	• Εφαρμογή συμπεράσματος θεωρήματος Θαλή **1μ** • Εφαρμογή ιδιότητας αναλογιών **0,5μ** • Ορθότητα πράξεων και Αποτέλεσμα **1μ** • Εφαρμογή συμπεράσματος θεωρήματος Θαλή **1μ** • Εφαρμογή ιδιότητας αναλογιών **0,5μ** • Ορθότητα πράξεων και Αποτέλεσμα **1μ**
Α5.	Αν το μήκος της περιφέρειας του κύκλου είναι ίσο με $10\pi cm$, να υπολογίσετε, συναρτήσει του π: **(α)** την ακτίνα του κύκλου, **(β)** το εμβαδόν του κύκλου. **<u>Λύση:</u>** **(α)** $\Gamma = 2\pi R \Leftrightarrow 10\pi = 2\pi R \Leftrightarrow 2R = 10 \Leftrightarrow R = \frac{10}{2}$ $\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{R = 5cm}}$ **(β)** $E = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{E = 25\pi cm^2}}$	• Τύπος μήκους κύκλου **1μ** • Αντικατάσταση και ορθότητα πράξεων **1μ** • Αποτέλεσμα **0,5μ** • Τύπος εμβαδού κύκλου **1μ** • Αντικατάσταση, ορθότητα πράξεων **1μ** • Αποτέλεσμα **0,5μ**

<table>
<tr>
<td>Α6.</td>
<td>Ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΔ = ΒΓ)$ έχει τη μικρή του βάση ίση με $8cm$, τη μεγάλη του βάση ίση με $20cm$ και την $ΑΔ$ ίση με $10cm$. Να υπολογίσετε:



(α) την περίμετρό του τραπεζίου, (2 μονάδες)
(β) το εμβαδόν του τραπεζίου. (3 μονάδες)

<u>Λύση:</u>
(α) $Π = (ΑΒ) + (ΔΓ) + (ΑΔ) + (ΒΓ) = 8 + 20 + 10 + 10$
$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{Π = 48cm}}$

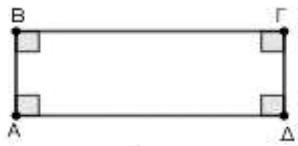
(β) $Π.Θ.\ \ (ΑΔ)^2 = (ΑΕ)^2 + (ΔΕ)^2 \iff 10^2 = υ^2 + 6^2 \iff$
$100 = υ^2 + 36 \iff 100 - 36 = υ^2 \iff υ^2 = 64 \iff$
$\iff υ = \pm\sqrt{64} = \pm 8 \Longrightarrow \boldsymbol{υ = 8cm}\ \ (υ > 0)$
$Ε = \frac{(β_1+β_2)\cdot υ}{2} = \frac{(8+20)\cdot 8}{2} = \frac{28\cdot 8}{2} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{Ε = 112cm^2}}$</td>
<td>(α)
• Έκφραση για την περίμετρο του τραπεζίου 1μ
• Αντικαταστάσεις, ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα 1μ

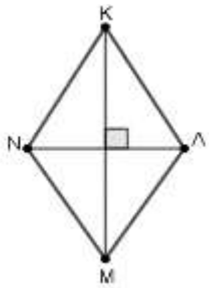
(β)
• Εφαρμογή Π.Θ υπολογισμός υ 1μ
• Τύπος εμβαδού τραπεζίου 1μ
• Αντικαταστάσεις, ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα 1μ</td>
</tr>
</table>

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄:</u> Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

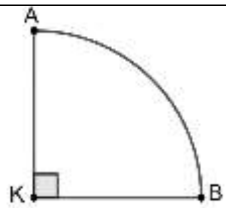
<table>
<tr>
<td>Β1.</td>
<td>Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ισεμβαδικό με ρόμβο. Η μία διαγώνιος του ρόμβου είναι ίση με $16cm$ και η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίση με $56cm$. Αν το μήκος του ορθογωνίου είναι εξαπλάσιο από το πλάτος του, να υπολογίσετε:



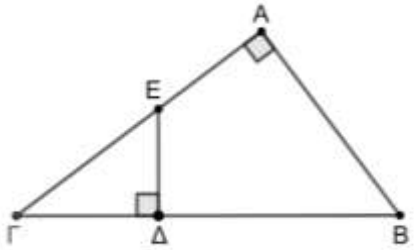


(α) το εμβαδόν του ορθογωνίου, (6 μονάδες)
(β) το μήκος της άλλης διαγώνιου του ρόμβου. (4 μονάδες)

<u>Λύση:</u>
• $Ορθογώνιο\ Παραλληλόγραμμο$: $α = 6β,\ \ Π = 56cm$
• $Ε_{ΟΡΘ.} = Ε_{Ρ.}$
• $Ρόμβος$: $δ_1 = 16cm$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	(α) $\Pi_{o\rho\theta.} = 2\alpha + 2\beta \iff 56 = 2 \cdot 6\beta + 2\beta$ $\iff 56 = 12\beta + 2\beta \iff 56 = 14\beta$ $\iff \beta = \frac{56}{14} \iff \beta = 4cm \implies \alpha = 6 \cdot 4 \implies \alpha = 24cm$ $E_{OP\Theta} = \alpha \cdot \beta = 24 \cdot 4 \iff \boxed{\boldsymbol{E_{OP\Theta.} = 96\ cm^2}}$ **(β)** $E_{OP\Theta.} = 96cm^2 \implies E_{P.} = 96cm^2$ $E_{P.} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} \iff 96 = \frac{16 \cdot \delta_2}{2} \iff 96 = 8 \cdot \delta_2$ $\iff \delta_2 = 96 \div 8 \iff \boxed{\boldsymbol{\delta_2 = 12\ cm}}$	**(α)** • Σχέση $\alpha = 6\beta$ **1μ** • Τύπος $\Pi_{OP\Theta.}$ **1μ** • Αντικαταστάσεις, ορθότητα πράξεων και υπολογισμός α, β **1,5μ** •Τύπος $E_{OP\Theta.}$ **1μ** • Αντικαταστάση, ορθότητα πράξεων και υπολογισμός $E_{OP\Theta.}$ **1,5μ** **(β)** • Σχέση $E_{OP\Theta.} = E_{P.}$ **1μ** • Τύπος $E_{P.}$ **1μ** • Αντικαταστάσεις, ορθότητα πράξεων και υπολογισμός δ_2 **2μ**
Β2.	Στο διπλανό σχήμα δίνεται τεταρτοκύκλιο με κέντρο K και ακτίνα KA, του οποίου το εμβαδό είναι ίσο με $16\pi cm^2$. Να υπολογίσετε:  **(α)** την ακτίνα του τεταρτοκύκλιου, **(3 μονάδες)** **(β)** το μήκος του τόξου AB, **(3 μονάδες)** **(γ)** το εμβαδό και την περίμετρο του τεταρτοκυκλίου KAB **(4 μονάδες)** **<u>Λύση:</u>** **(α)** $E_T = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu^o}{360^o} \iff 16\pi = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 90^o}{360^o} \iff 16 = \frac{R^2}{4}$ $\iff R^2 = 16 \cdot 4 = 64 \implies R = \pm\sqrt{64} = \pm 8$ $\implies \boxed{\boldsymbol{R = 8cm}} \quad (R > 0)$ **(β)** $\gamma_{AB} = \frac{2\pi \cdot R \cdot \mu^o}{360^o} = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 90^o}{360^o} \iff \boxed{\boldsymbol{\gamma_{AB} = 4\pi cm}}$ **(γ)** $\Pi_{KAB} = \gamma_{AB} + (KA) + (KB) = \gamma_{AB} + 2R = 4\pi + 2 \cdot 8$ $\iff \boxed{\boldsymbol{\Pi_{KAB} = (4\pi + 16)cm}}$	**(α)** • Τύπος Ετ **1μ** • Αντικαταστάσεις **1μ** • Ορθότητα πράξεων και υπολογισμός ακτίνας **1μ** **(β)** • Τύπος γ_{AB} **1μ** • Αντικαταστάσεις **1μ** • Ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα **1μ** **(γ)** • Τύπος Π_{KAB} **2μ** • Αντικαταστάσεις **1μ** • Ορθότητα πράξεων και αποτέλεσμα **1μ**

B3. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^o$) με $ΑΒ = 6cm$, $ΑΓ = 8cm$ και σημείο $Δ$ της $ΒΓ$ τέτοιο ώστε $ΓΔ = 4cm$. Η $ΔΕ$ είναι κάθετη στην $ΒΓ$ που τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$.



(α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΓΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια,

(β) να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων $ΕΔ$ και $ΓΕ$

<u>Λύση:</u>

(α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΓΔΕ$ και $ΑΒΓ$

$$\left.\begin{matrix}(\boldsymbol{i})\hat{Δ} = \hat{A} = 90^o \ ορθή\ γωνιά \\ (\boldsymbol{ii})\ \hat{Γ} = \hat{Γ}\ \ κοινή\ γωνιά\end{matrix}\right\} \Rightarrow\ ΓΔΕ \approx ΓΑΒ$$

$$αφού\ έχουν\ τρεις\ γωνίες\ αντίστοιχα\ ίσες$$

(β) Από το **(α)**: $\dfrac{ΓΕ}{ΓΒ} = \dfrac{ΓΔ}{ΓΑ} = \dfrac{ΔΕ}{ΑΒ}$

$Π.Θ.\ στο\ ΑΒΓ$: $(ΒΓ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2 \iff (ΒΓ)^2 = 8^2 + 6^2$

$\iff (ΒΓ)^2 = 100$

$\iff ΒΓ = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \Rightarrow ΒΓ = 10cm\ \ (ΒΓ > 0)$

$$\frac{ΓΕ}{ΓΒ} = \frac{ΓΔ}{ΓΑ} \iff \frac{ΓΕ}{10} = \frac{4}{8} \iff 8 \cdot (ΓΕ) = 4 \cdot 10$$

$$\iff 8 \cdot (ΓΕ) = 40 \iff (ΓΕ) = \frac{40}{8} \iff \boxed{\boldsymbol{(ΓΕ) = 5cm}}$$

$$\frac{ΓΔ}{ΓΑ} = \frac{ΔΕ}{ΑΒ} \iff \frac{4}{8} = \frac{ΔΕ}{6} \iff 8 \cdot (ΔΕ) = 4 \cdot 6$$

$$\iff 8 \cdot (ΔΕ) = 24 \iff (ΔΕ) = \frac{24}{8} \iff \boxed{\boldsymbol{(ΔΕ) = 3cm}}$$

(α)

- $\hat{Δ} = \hat{A}$ **2μ**
- $\hat{Γ} = \hat{Γ}$ **2μ**
- Συμπέρασμα ότι τα τρίγωνα είναι όμοια **1μ**

(β)

- Λόγος ομοιότητας ομόλογων πλευρών τριγώνων **1μ**
- Π.Θ και υπολογισμός ΒΓ **1μ**
- Επιλογή κατάλληλου λόγου ομοιότητας **0,5μ**
- Εφαρμογή ιδιότητας αναλογιών **0,5μ**
- Ορθότητα πράξεων και υπολογισμός ΓΕ **0,5μ**
- Επιλογή κατάλληλου λόγου ομοιότητας **0,5μ**
- Εφαρμογή ιδιότητας αναλογιών **0,5μ**
- Ορθότητα πράξεων και υπολογισμός ΔΕ **0,5μ**