

Μαθηματικά

Γ'
ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ



ΟΜΑΔΑ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΝΕΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά είναι ένα συστηματικό, συνεκτικό, συνεπές και συνεχώς αναπτυσσόμενο σύνολο εννοιών και μεθόδων. Ως επιστήμη, τα μαθηματικά χρησιμοποιούν δική τους γλώσσα και σύμβολα με στόχο τη μοντελοποίηση, την ανάλυση και την ερμηνεία του κόσμου. Τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα εμπεριέχουν δημιουργικότητα και φαντασία που είναι απαραίτητα στοιχεία για την ανακάλυψη μοτίβων σχημάτων και αριθμών, την κατανόηση και απόδειξη σχέσεων, την κατασκευή μοντέλων, την ερμηνεία δεδομένων και την επικοινωνία ιδεών και εννοιών. Το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών εδράζεται σε τέσσερις αρχές:

ΑΡΧΗ 1:

Οι μαθηματικές έννοιες διερευνούνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών.

ΑΡΧΗ 2:

Το αναλυτικό πρόγραμμα δίνει έμφαση στη λύση προβλήματος.

ΑΡΧΗ 3:

Η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΑΡΧΗ 4:

Όλοι οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν εμπειρίες μέσα από ένα ποιοτικό πρόγραμμα μαθηματικών.

Οι γενικοί σκοποί της μαθηματικής παιδείας, όπως αναπτύσσονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

Οι μαθητές, μέσω της διδασκαλίας των μαθηματικών:

- Εκτιμούν την αξία των μαθηματικών και τη χρησιμότητά τους σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας.
- Αναπτύσσουν την αυτοπεποίθησή τους ότι είναι ικανοί να «κάνουν» μαθηματικά και να αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά ως μια δημιουργική απασχόληση.
- Αναπτύσσουν τις στάσεις, γνώσεις και δεξιότητες και κατανοούν έννοιες που θα τους βοηθήσουν να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή τους ζωή και απασχόληση και στην ερμηνεία προβλημάτων από διάφορα γνωστικά αντικείμενα.
- Αναπτύσσουν την ικανότητα να επιλύουν προβλήματα με πολλαπλούς τρόπους και την ικανότητα να σκέφτονται και να αποφασίζουν με δημιουργικό και λογικό τρόπο.
- Αναπτύσσουν τις απαραίτητες γνώσεις που απαιτούνται στη σύγχρονη κοινωνία της πληροφορίας.



- Αναπτύσσουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες που είναι απαραίτητες στο χώρο της εργασίας.
- Αναπτύσσουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες, για να συνεχίσουν σπουδές σε αντικείμενα στα οποία η χρήση των μαθηματικών είναι απαραίτητη.

Κάθε νέα ενότητα είναι δομημένη ως εξής:

➤ Τι θα μάθουμε

Στην αρχή κάθε ενότητας παρατίθενται οι στόχοι οι οποίοι είναι συγκεκριμένοι και μετρήσιμοι. Οι στόχοι κάθε ενότητας προκύπτουν από τους δείκτες επιτυχίας του Αναλυτικού Προγράμματος. Οι καθηγητές με βάση τους στόχους αυτούς θα προγραμματίσουν και θα σχεδιάσουν τη διδασκαλία της κάθε ενότητας. Με το τέλος της ενότητας οι μαθητές και οι καθηγητές μπορούν να επανέλθουν στους στόχους και να ελέγξουν ποιους από αυτούς έχουν πετύχει και σε ποιο βαθμό.

➤ Έχουμε Μάθει

Στην αρχή κάθε ενότητας είναι συγκεντρωμένη η προαπαιτούμενη γνώση την οποία πρέπει να έχουν οι μαθητές για τη νέα ενότητα.

➤ Εξερεύνηση

Στις εξερευνήσεις υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές εξερευνούν ελεύθερα μαθηματικές έννοιες. Οι δραστηριότητες αυτές συμβάλλουν:

- στη διαφοροποίηση και εξατομίκευση της διδασκαλίας,
- στην παροχή κινήτρων και στη χαρά της μάθησης,
- στην εννοιολογική διασύνδεση εννοιών,
- στην ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, της δημιουργικότητας και της φαντασίας στα μαθηματικά.

Είναι ανοικτού τύπου.

- Ικανοποιούν τις ανάγκες των μαθητών ανάλογα με το επίπεδό τους.
- Αναπτύσσει την αποκλίνουσα σκέψη.

Διαμέσου των εξερευνήσεων επιτυγχάνεται η σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με άλλα αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος, αναπτύσσεται η ικανότητα των μαθητών για λύση προβλήματος, επεκτείνεται και ολοκληρώνεται η έννοια, παρατίθενται ιστορικά στοιχεία και δίνονται εφαρμογές μαθηματικών εννοιών.



➤ Διερεύνηση

Οι διερευνήσεις περιλαμβάνουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές διερευνούν μαθηματικές ιδέες σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και στις οποίες έχουν τη δυνατότητα:

- να διατυπώσουν υποθέσεις,
- να ελέγξουν την εγκυρότητα των υποθέσεών τους και
- να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με παραδείγματα, με εποπτικά μέσα ή και ψηφιακά εποπτικά μέσα και με προβλήματα. Οι μαθητές οδηγούνται να κάνουν υποθέσεις, να επαληθεύουν και να καταλήγουν σε συμπεράσματα.

➤ Μαθαίνω

Στο «Μαθαίνω» παρατίθεται η νέα γνώση που πρέπει να κατακτήσει ο μαθητής με το πέρας της μαθησιακής διαδικασίας της κάθε υποενότητας.

➤ Παραδείγματα

Τα παραδείγματα που περιέχονται στο διδακτικό βιβλίο έχουν ως σκοπό την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση της έννοιας στην οποία αναφέρονται.

➤ Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες που προτείνονται απευθύνονται σε διαφορετικά επίπεδα μαθητών και αντιστοιχούν, ως επί το πλείστον, στη διδακτέα ύλη της συγκεκριμένης ενότητας. Αποφεύγουν τις πολύπλοκες διαδικασίες υπολογισμών, οι οποίες επιβραδύνουν τον ρυθμό της διδασκαλίας και δεν συμβάλλουν στην επίτευξη των σκοπών της διδασκαλίας. Οι καθηγητές πρέπει κατά τη διδασκαλία μιας ενότητας να λαμβάνουν υπόψη τις ατομικές διαφορές των μαθητών και τα ιδιαίτερα γνωρίσματα που μπορεί να έχει η τάξη τους και κάθε φορά να επιλέγουν τις κατάλληλες δραστηριότητες τόσο για την κατανόηση της ενότητας, όσο και για την περαιτέρω εμπάθυνσή της.

Οι δραστηριότητες των υποενότητων, όπως και οι δραστηριότητες Ενότητας, δεν περιορίζονται σε απλούς υπολογισμούς, αλλά περιλαμβάνουν διάφορα είδη δραστηριοτήτων.

Υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές καλούνται να αποφανθούν κατά πόσο οι προτάσεις είναι ορθές ή ακόμη κατά πόσο οι προτάσεις αυτές είναι κάποτε ορθές. Πολλές δραστηριότητες, επίσης, επιδέχονται περισσότερες από μία λύσεις,



οπότε είναι αναγκαίο οι μαθητές να εξετάζουν κατά πόσο υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις πριν δώσουν την τελική τους απάντηση.

Οι δραστηριότητες είναι ενδεικτικές και αντιστοιχούν στους δείκτες επιτυχίας και αποτελούν παραδείγματα εμπειριών που οι μαθητές αναμένεται να αποκτήσουν από την καθημερινή επαφή τους με τις μαθηματικές έννοιες. Στόχος των ενδεικτικών δραστηριοτήτων είναι από τη μια η αποσαφήνιση των δεικτών επιτυχίας και από την άλλη αποτελούν εισηγήσεις προς τους εκπαιδευτικούς για έννοιες και προβλήματα που είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων τους. Τονίζεται ότι η αντιστοίχιση των ενδεικτικών δραστηριοτήτων με τους δείκτες επιτυχίας δεν είναι αποκλειστική ή μοναδική, με την έννοια ότι οι ίδιες δραστηριότητες είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη πολλαπλών δεικτών επιτυχίας. Σε καμιά όμως περίπτωση οι ενδεικτικές δραστηριότητες δεν πρέπει να θεωρηθούν ότι περιορίζουν τους εκπαιδευτικούς στη διαδικασία της διδασκαλίας - μάθησης. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί παροτρύνονται να σχεδιάζουν και να εφαρμόζουν δραστηριότητες που πιστεύουν ότι εξυπηρετούν τις ανάγκες των μαθητών τους.

➤ Δραστηριότητες Ενότητας

Οι δραστηριότητες Ενότητας έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε όλοι οι μαθητές να έχουν μία ακόμη ευκαιρία να εφαρμόσουν τις έννοιες που έχουν διδαχθεί.

Οι δραστηριότητες ενότητας αποτελούν παραδείγματα δραστηριοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας τους. Οι δραστηριότητες αυτές μπορούν να διαφοροποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς και να χρησιμοποιηθούν με πολλούς άλλους τρόπους. Επιπρόσθετα, οι δραστηριότητες ενότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για την αξιολόγηση ενός εύρους ικανοτήτων των μαθητών τους, όπως η ικανότητα των μαθητών να συλλέγουν δεδομένα, η ικανότητα να παρουσιάζουν τα επιχειρήματά τους, η ικανότητα να προσεγγίζουν διαισθητικά τη λύση προβλημάτων. Πολλές από τις δραστηριότητες συνδυάζουν διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών (π.χ. Γεωμετρία – Άλγεβρα). Υπάρχουν, επίσης, θέματα τα οποία απευθύνονται σε διαφορετικά επίπεδα μαθητών, καθώς η προαγωγή της διαφοροποίησης αποτελεί στόχο του Α.Π..

Με βάση τις δραστηριότητες αυτές οι εκπαιδευτικοί αναμένεται να κατασκευάσουν τις δικές τους δραστηριότητες για συντρέχουσα και τελική αξιολόγηση των μαθητών τους.



➤ Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Οι δραστηριότητες εμπλουτισμού περιλαμβάνουν όχι μόνο επέκταση ενός συγκεκριμένου θέματος, αλλά κυρίως αναφέρονται σε ευκαιρίες που δίνονται στους μαθητές να εμβαθύνουν σε θέματα που τους ενδιαφέρουν. Στις δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνεται, επίσης, η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με πρότζεκτ διαφορετικής θεματολογίας ανάλογα με τα ενδιαφέροντα των μαθητών. Ο κατάλογος των θεμάτων που προτείνονται στις δραστηριότητες εμπλουτισμού είναι ενδεικτικός και επομένως οι εκπαιδευτικοί, κάνοντας χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας, μπορούν να προτείνουν τόσο δραστηριότητες όσο και άλλα θέματα για πρότζεκτ στους μαθητές τους.

Επιπρόσθετα, οι δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να ασχοληθούν με δραστηριότητες και ευρύτερα θέματα σχετικά με τις υπό ανάπτυξη μαθηματικές έννοιες. Για το σκοπό αυτό, οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται σε πολλές περιπτώσεις να χρησιμοποιήσουν τις δραστηριότητες εμπλουτισμού, για να παροτρύνουν τους μαθητές τους στη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Τέλος, πολλές από τις δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνουν τη δυνατότητα στους χαρισματικούς μαθητές να επιλύσουν πιο ελκυστικά προβλήματα, συμβάλλοντας με αυτό τον τρόπο στην περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών τους ικανοτήτων.



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ: Από την Α΄ και Β΄ Γυμνασίου

Εισηγήσεις:

Οι μαθητές θα ανακαλέσουν προαπαιτούμενες γνώσεις από την Α΄ και Β΄ Γυμνασίου, αναγκαίες για την οικοδόμηση των Μαθηματικών εννοιών της Γ΄ Γυμνασίου. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες περιορίζονται στις πιο βασικές πυρηνικές γνώσεις.

- Μέσα από τις δραστηριότητες 1 και 3, οι μαθητές μπορούν να ανακαλέσουν τις βασικές πράξεις των πραγματικών αριθμών. Οι δραστηριότητες υπενθυμίζουν στους μαθητές έννοιες όπως οι δυνάμεις, η προτεραιότητα πράξεων και οι ρίζες.

Στη δραστηριότητα 2, οι μαθητές καλούνται να διαχωρίσουν τους πραγματικούς σε ρητούς και άρρητους.

Μέσα από την δραστηριότητα 4, θα ανακαλέσουν βασικές πράξεις μεταξύ μονωνύμων.

Στις δραστηριότητες 5, 8 και 9, θα εκτελέσουν απλές πράξεις πολυωνύμων, ενώ στις δραστηριότητες 6 και 10, θα κληθούν επιπλέον να υπολογίσουν την αριθμητική τιμή κάποιων πολυωνύμων.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές, μέσα από το πρόβλημα που τους δίνεται, καλούνται να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής και γενικότερα της αλγεβρικής παράστασης. Συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουν και θα απλοποιήσουν μια αλγεβρική παράσταση και στη συνέχεια θα υπολογίσουν την αριθμητική τιμή της για συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής.

Οι δραστηριότητες 11, 12 και 13 διαπραγματεύονται την επίλυση εξισώσεων καθώς και συστημάτων δύο εξισώσεων.

Οι δραστηριότητες 14, 15 και 16 εστιάζονται στις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και ειδικών παραλληλογράμμων.

Οι δραστηριότητες 17, 18, 19 και 20 έχουν στόχο την ανάκληση της έννοιας της συνάρτησης και τη μελέτη της ευθείας, δίνοντας έμφαση στην κατασκευή της γραφικής της παράστασης. Ταυτόχρονα, οι μαθητές ανακαλούν την έννοια της κλίσης ευθείας και της εύρεσης των σημείων τομής της ευθείας με τους άξονες.



Οι δραστηριότητες 21 και 22 ανακαλούν βασικές γνώσεις Στατιστικής, όπως τον υπολογισμό μέτρων θέσης, είτε μέσα από απλά αριθμητικά δεδομένα είτε μέσα από τη γραφική παράσταση ενός ραβδογράμματος.

Τέλος, στη δραστηριότητα 23 ζητείται από τους μαθητές να ανακαλέσουν έννοιες όπως ο δειγματικός χώρος και ο υπολογισμός πιθανότητας ενδεχομένων.



ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

Δείκτες επιτυχίας:

- Κατανοούν και εφαρμόζουν αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουν αναγωγή ομοίων όρων, απλοποιούν ή αναλύουν αλγεβρικές εκφράσεις και διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ των εννοιών «εξίσωση», «τύπος», «ταυτότητα» και «παράσταση».A4.10.
- Συνδυάζουν αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, για την εξαγωγή συμπερασμάτων.A4.11.
- Εκτελούν πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων και αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά βασικές αλγεβρικές ταυτότητες.A5.13.

Θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να εφαρμόζουμε τις ταυτότητες:
 - $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 - $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
 - $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
 - $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
 - $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- Να αποδεικνύουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά (όπου είναι δυνατόν) τις ταυτότητες.
- Να μοντελοποιούμε και να επιλύουμε προβλήματα με χρήση ταυτοτήτων.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Αξιοσημείωτες Ταυτότητες** $(\alpha + \beta)^2$ και $(\alpha - \beta)^2$
- **Αξιοσημείωτη Ταυτότητα** $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
- **Αξιοσημείωτες Ταυτότητες** $(\alpha + \beta)^3$ και $(\alpha - \beta)^3$

Εισηγήσεις:

Στόχος της ενότητας είναι η ανάκληση των γνώσεων στις αλγεβρικές παραστάσεις και η περαιτέρω ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να εκτελούν πράξεις πολυωνύμων. Οι αξιοσημείωτες ταυτότητες θα προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις γινομένου πολυωνύμων, δίνοντας περισσότερη έμφαση στην αλγεβρική απόδειξη και στη γεωμετρική αναπαράστασή τους. Ο ορισμός και η εφαρμογή των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων πρέπει να αποτελέσει ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων.



Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Αξιοσημείωτες Ταυτότητες $(\alpha + \beta)^2$ και $(\alpha - \beta)^2$**

- Οι μαθητές μέσα από τη πρώτη διερεύνηση ανακαλύπτουν τις ταυτότητες $(\alpha \pm \beta)^2$ ως ειδικές περιπτώσεις γινομένου πολυωνύμου. Αρχικά, διατυπώνουν μια σχετική εικασία για το ανάπτυγμα των πιο πάνω ταυτοτήτων, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα δυνάμεων. Μετατρέπουν τη βάση της δύναμης σε άθροισμα ή διαφορά δύο αριθμών και εκτελούν τον πολλαπλασιασμό. Στη συνέχεια, οι μαθητές γενικεύουν την παρατήρησή τους σε οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών. Η χρήση του προτεινόμενου εφαρμογιδίου βοηθά τους μαθητές να διερευνήσουν γεωμετρικά το συμπέρασμά τους.

Στη δεύτερη διερεύνηση, οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα πίνακα με αριθμητικά δεδομένα και να διατυπώσουν μια εικασία για τον κανόνα που υπολογίζει την αύξηση του εμβαδού ενός τετραγώνου, όταν η πλευρά του αυξηθεί κατά μία μονάδα. Ακολούθως, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν ένα γεωμετρικό μοντέλο για τον υπολογισμό της αύξησης του εμβαδού. Τέλος, ο διδάσκων μπορεί με επιπλέον ερωτήματα να καθοδηγήσει τους μαθητές να ανακαλύψουν τη σχέση που συνδέει την αύξηση του εμβαδού με το ανάπτυγμα του $(x + 1)^2$ και να το γενικεύσει στην περίπτωση που η πλευρά του τετραγώνου αυξηθεί κατά α μονάδες.

- Η δραστηριότητα 1 είναι σημαντική για την κατανόηση της έννοιας της αλγεβρικής ταυτότητας. Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν ποιες από τις αλγεβρικές ισότητες είναι ταυτότητες.

Οι δραστηριότητες 2, 3 και 4 είναι απλές εφαρμογές των συγκεκριμένων ταυτοτήτων.

Οι δραστηριότητες 5, 6 και 7 βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν την αντίστροφη διαδικασία. Συγκεκριμένα, οι μαθητές θα κληθούν να αναγνωρίσουν και να συμπληρώσουν αναπτύγματα ταυτοτήτων, ώστε να καταστεί πιο εύκολη η κατανόηση της παραγοντοποίησης.

Η ενότητα αυτή προσφέρεται για την εξάσκηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία. Οι μαθητές αποδεικνύουν ταυτότητες (δραστηριότητα 8), είτε



αναπτύσσοντας το ένα μέλος μιας ταυτότητας και καταλήγοντας στο άλλο, είτε αναπτύσσοντας και τα δύο μέλη. Η ταυτότητα $(\alpha + \beta + \gamma)^2$ θα προκύψει ως ειδική περίπτωση της $(\alpha + (\beta + \gamma))^2$ και δεν προτείνεται η απομνημόνευση του τύπου.

Τέλος, οι δραστηριότητες 9 και 10 είναι εφαρμογές ταυτοτήτων για την επίλυση προβλήματος.

➤ **Αξιοσημείωτη Ταυτότητα** $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

- Στόχος της διερεύνησης σε αυτή την υποενότητα, είναι να βοηθήσει τους μαθητές να ανακαλύψουν και να αποδείξουν την αξιοσημείωτη ταυτότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$, υπολογίζοντας με διαφορετικούς τρόπους το εμβαδόν του «νέου» οικοπέδου. Στη συνέχεια, εξετάζουν κατά πόσο η ισότητα ισχύει για διαφορετικές τιμές των α και β με τη χρήση ενός εφαρμογιδίου και αποδεικνύουν την ταυτότητα αλγεβρικά.
- Οι δραστηριότητες 1 και 2 είναι εφαρμογές της συγκεκριμένης ταυτότητας. Στη δραστηριότητα 2 αναγνωρίζουν και συμπληρώνουν το ανάπτυγμά της.

Στις δραστηριότητες 3 και 8, οι μαθητές εφαρμόζουν ταυτότητες και προχωρούν σε απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων, ενώ στη δραστηριότητα 4 εφαρμόζουν ταυτότητες σε αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία απαιτούν εκτέλεση «δύσκολων» πολλαπλασιασμών.

Η δραστηριότητα 5 καλεί τους μαθητές να αποδείξουν ταυτότητες, χρησιμοποιώντας αξιοσημείωτες ταυτότητες.

Η δραστηριότητα 6 δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία της απόδειξης της $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$.

Οι μαθητές κάνουν χρήση των ταυτοτήτων για την επίλυση προβλήματος στις δραστηριότητες 7 και 9.

➤ **Αξιοσημείωτες Ταυτότητες** $(\alpha + \beta)^3$ και $(\alpha - \beta)^3$

- Η προτεινόμενη διερεύνηση έχει ως στόχο οι μαθητές να ανακαλύψουν το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^3$ γεωμετρικά, αφού πρώτα διατυπώσουν μια σχετική εικασία. Το προτεινόμενο εφαρμογίδιο προσφέρει την οπτικοποίηση και



προσθέτει στην εννοιολογική κατανόηση του αναπτύγματος. Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν το ανάπτυγμα της προαναφερθείσας ταυτότητας, εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις. Τέλος, θα πρέπει να ανακαλύψουν και να αποδείξουν το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha - \beta)^3$.

- Η δραστηριότητα 1 είναι απλή εφαρμογή των συγκεκριμένων ταυτοτήτων, ενώ στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν όλες τις ταυτότητες της ενότητας.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές θα αποδείξουν ταυτότητες με τη χρήση των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων της ενότητας.

Οι δραστηριότητες 4 και 5 απαιτούν την εφαρμογή ταυτοτήτων είτε για την απόδειξη κάποιων άλλων, είτε για τον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής αλγεβρικών παραστάσεων που εντοπίζονται σε αναπτύγματα αξιοσημείωτων ταυτοτήτων.

Στις δραστηριότητες 6 και 7 οι μαθητές θα εφαρμόσουν ταυτότητες για τον υπολογισμό άγνωστων ποσοτήτων.

Στόχος της δραστηριότητα 8 είναι η εφαρμογή ταυτοτήτων για την πιο εύκολη εκτέλεση πράξεων.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Οι δραστηριότητες 1 και 2 είναι απλές εφαρμογές των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων της ενότητας.

Οι δραστηριότητες 3, 13 και 14 προτρέπουν τους μαθητές να εφαρμόσουν τις ταυτότητες για να αποδείξουν άλλες πιο σύνθετες ταυτότητες.

Μέσα από τη διαδικασία που περιγράφει η δραστηριότητα 4, οι μαθητές εφαρμόζουν αξιοσημείωτες ταυτότητες.

Η δραστηριότητα 5 απαιτεί την εφαρμογή ταυτοτήτων για τον υπολογισμό παραστάσεων.



Οι δραστηριότητες 6, 9 και 15 είναι προβλήματα αποδείξεων με βάση τις ταυτότητες που έχουν διδαχθεί οι μαθητές.

Στη δραστηριότητα 7, οι μαθητές ανακαλούν την έννοια του πολυωνύμου, αποδεικνύουν αλγεβρικά μια σχέση για ένα δοσμένο πολυώνυμο και υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας παράστασης.

Στη δραστηριότητα 8, οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν την αριθμητική τιμή παραστάσεων που εμφανίζονται σε αναπτύγματα αξιοσημείωτων ταυτοτήτων.

Η δραστηριότητα 10 απαιτεί την εφαρμογή ταυτοτήτων για την απλοποίηση μιας αλγεβρικής παράστασης και την αναγνώριση του αναπτύγματος μιας αξιοσημείωτης ταυτότητας.

Η δραστηριότητα 11 καλεί τους μαθητές να υπολογίσουν αριθμητικές τιμές αλγεβρικών παραστάσεων με την εφαρμογή ταυτοτήτων.

Τέλος, η δραστηριότητα 12 ζητά από τους μαθητές να επιλύσουν εξισώσεις, εφαρμόζοντας και πάλι αξιοσημείωτες ταυτότητες.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Οι δραστηριότητες 1, 2 και 3 ανακαλούν αρχικά έννοιες, όπως ο βαθμός ενός πολυωνύμου, το μηδενικό πολυώνυμο και το πότε δύο πραγματικοί αριθμοί είναι αντίστροφοι. Στη συνέχεια, οι μαθητές υπολογίζουν την αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης, αποδεικνύουν σχέσεις και υπολογίζουν το βαθμό ενός πολυωνύμου.

Η δραστηριότητα 4 προκαλεί τους μαθητές να παρατηρήσουν το τρίγωνο του Πασκάλ, με στόχο την ανακάλυψη του αναπτύγματος αλγεβρικών παραστάσεων της μορφής $(\alpha + \beta)^n$, όπου $n \in \mathbb{N}_0$, αλλά και άλλων ιδιοτήτων που κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου του Πασκάλ.

Οι δραστηριότητες 5 και 6 είναι προβλήματα που δόθηκαν στα πλαίσια της PISA και στόχο έχουν την εξοικείωση των μαθητών με τέτοιου είδους δραστηριότητες.

Στη δραστηριότητα 5, οι μαθητές καλούνται στην αρχή να υπολογίσουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης, αφού πρώτα μελετήσουν τα



αριθμητικά δεδομένα ενός πίνακα. Στη συνέχεια, καλούνται να κατασκευάσουν μια παρόμοιου τύπου αλγεβρική παράσταση, συμπληρώνοντας με θετικούς συντελεστές τις υπάρχουσες μεταβλητές.

Στη δραστηριότητα 6, οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τον τύπο που δίνεται, για να υπολογίσουν τις τιμές μεταβλητών και χρησιμοποιούν μονάδες μέτρησης.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Παραγοντοποίηση/Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις**Δείκτες επιτυχίας:**

- Συνδυάζουν αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, για την εξαγωγή συμπερασμάτων.A4.11.
- Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά, χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων, με ή χωρίς τεχνολογία και χρησιμοποιούν τις εξισώσεις και ανισώσεις στην επίλυση προβλημάτων.A4.12.
- Παραγοντοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις και επιλύουν εξισώσεις με παραγοντοποίηση.A5.14.
- Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις α' και β' βαθμού καθώς και συστήματα δύο και τριών εξισώσεων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.A6.12.
- Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις ανωτέρου του β' βαθμού.A6.15.

Θα μάθουμε:

- Να εξετάζουμε κατά πόσο ένα πολυώνυμο είναι παράγοντας ενός άλλου πολυωνύμου.
- Να υπολογίζουμε τον άλλο παράγοντα ενός πολυωνύμου, όταν δίνεται ο ένας παράγοντάς του.
- Να μετατρέπουμε αλγεβρικές παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, εφαρμόζοντας διάφορες τεχνικές.
- Να υπολογίζουμε τον Μέγιστο Κοινό Διαίρετη (ΜΚΔ) και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) αλγεβρικών παραστάσεων.
- Να επιλύουμε εξισώσεις δεύτερου και ανώτερου βαθμού.
- Να υπολογίζουμε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να εκτελούμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να επιλύουμε εξισώσεις που περιλαμβάνουν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Εισαγωγή στην Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων**



➤ **Μέθοδοι Παραγοντοποίησης:**

- Κοινός Παράγοντας - Ομαδοποίηση
- Διαφορά Δύο Τετραγώνων-Διαφορά και Άθροισμα Δύο Κύβων
- Τριώνυμο - Τέλειο Τετράγωνο

➤ **Εξισώσεις Δεύτερου και Ανώτερου Βαθμού**

➤ **Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις**

➤ **Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων**

➤ **Πρόσθεση - Αφαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων**

Εισηγήσεις:

Βασικός στόχος της ενότητας είναι η παραγοντοποίηση με διάφορες μεθόδους, ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές ευχέρεια στην επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με θέματα, όπως είναι η επίλυση εξισώσεων δεύτερου και ανώτερου βαθμού, η απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων και η επίλυση ρητών αλγεβρικών εξισώσεων. Είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι πλήρης παραγοντοποίηση θεωρείται η διαδικασία κατά την οποία μία αλγεβρική παράσταση γράφεται σε μορφή γινομένου, αλλά δεν επιδέχεται περαιτέρω ανάλυση. Επίσης, οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν την παραγοντοποίηση μιας παράστασης ως την αντίστροφη διαδικασία της ανάπτυξης ενός γινομένου, ώστε να την συνδέουν με την προηγούμενη ενότητα των ταυτοτήτων και να συνειδητοποιήσουν ότι με την παραγοντοποίηση δημιουργούνται ισοδύναμες αλγεβρικές παραστάσεις.

Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Εισαγωγή στην Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων**

- Στην προτεινόμενη διερεύνηση, οι μαθητές κατανοούν πότε ένα πολυώνυμο αποτελεί παράγοντα (διαίρετη) ενός άλλου πολυωνύμου. Στη συνέχεια, οι μαθητές κατανοούν την έννοια της ταυτότητας της Ευκλείδειας διαίρεσης και τους περιορισμούς της.
- Η δραστηριότητα 1 ζητά από τους μαθητές να σχηματίσουν πολυώνυμο, όταν είναι γνωστοί οι παράγοντές του.

Η δραστηριότητα 2 ζητά από τους μαθητές να εξετάσουν κατά πόσο ένα πολυώνυμο αποτελεί παράγοντα ενός άλλου πολυωνύμου.



Η δραστηριότητα 3 καλεί τους μαθητές να βρουν τους υπόλοιπους παράγοντες ενός πολυωνύμου, όταν είναι γνωστός ένας από τους παράγοντές του, κάνοντας χρήση είτε της διαίρεσης δύο πολυωνύμων είτε της εφαρμογής γνωστών ταυτοτήτων.

Στις δραστηριότητες 4 και 5 γίνεται αναφορά στην εύρεση του ΜΚΔ αλγεβρικών παραστάσεων, έννοια με την οποία οι μαθητές είναι ήδη εξοικειωμένοι (ΜΚΔ ακέραιων αριθμών).

➤ **Κοινός Παράγοντας - Ομαδοποίηση**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές κατανοούν σε πρώτη φάση μέσα από διάφορους τρόπους γραφής μιας αλγεβρικής παράστασης σε μορφή γινομένου, ότι η πλήρης παραγοντοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία η αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές παραγοντοποιούν μια αλγεβρική παράσταση με βάση το εμβαδόν ορθογωνίου, όταν εκφράσουν το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με δύο τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους.

Σε περίπτωση που το αρχείο «*C_En3_Paragontopoiisi1.exe*» δεν ενεργοποιηθεί μέσω του *E-Book*, τότε ακολουθήστε την εξής διαδρομή:

C_GYMNASIOU→*C_APPLETS*→ *C_En3_Paragontopoiisi1.exe*

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές παραγοντοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις με κοινό παράγοντα.

Στη δραστηριότητα 2 όλες οι εφαρμογές είναι περιπτώσεις παραγοντοποίησης με κοινό παράγοντα μονώνυμο, ενώ στη δραστηριότητα 3 ο κοινός παράγοντας είναι πολυώνυμο.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές παραγοντοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις με ομαδοποίηση. Η ομαδοποίηση φαίνεται να είναι διαδικασία που εφαρμόζεται, όταν οι όροι της αλγεβρικής παράστασης είναι τουλάχιστον 4.

Στις δραστηριότητες 5, 6, 7 και 8 οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν προβλήματα, χρησιμοποιώντας παραγοντοποίηση.



➤ **Διαφορά Δύο Τετραγώνων - Διαφορά και Άθροισμα Δύο Κύβων**

- Η διερεύνηση παρουσιάζει ένα γεωμετρικό μοντέλο υπολογισμού του εμβαδού του σκιασμένου μέρους μεταξύ δύο τετραγώνων και καλεί τους μαθητές να ελέγξουν και να διαπιστώσουν ότι οι εκφράσεις $(x + y)(x - y)$ και $x^2 - y^2$ είναι όντως ισοδύναμες. Έτσι, θα οδηγηθούν στην παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων.
- Στις δραστηριότητες 1-5 οι μαθητές εφαρμόζουν τις μεθόδους παραγοντοποίησης που έμαθαν στις προηγούμενες υποενότητες, για την πλήρη ανάλυση μιας αλγεβρικής παράστασης σε γινόμενο.

Στις δραστηριότητες 6 και 7 οι μαθητές χρησιμοποιούν μεθόδους παραγοντοποίησης για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.

Η δραστηριότητα 8 είναι αποδεικτική.

➤ **Τριώνυμο - Τέλειο Τετράγωνο**

- Η διερεύνηση (1) έχει στόχο να οδηγήσει τους μαθητές στην παραγοντοποίηση τριωνύμων της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$. Δίνεται κατάλληλο εφαρμογίδιο στο οποίο τρία πλακίδια που έχουν αντίστοιχα εμβαδά $x^2 = x \cdot x$, $x = x \cdot 1$ και $1 = 1 \cdot 1$ τετραγωνικών μονάδων, πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για να καλύψουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $x + \kappa$, $x + \lambda$. Να σημειωθεί ότι στο εφαρμογίδιο τα κ και λ είναι θετικοί ακέραιοι. Οι μαθητές παρατηρούν ότι το τριώνυμο $x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται στη μορφή $(x + \kappa) \cdot (x + \lambda)$ και στη συνέχεια ανακαλύπτουν τη σχέση μεταξύ των β , γ και κ , λ .

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές κατανοούν ότι μπορούν να παραγοντοποιούν τριώνυμα που είναι τέλεια τετράγωνα. Χρησιμοποιώντας το εμβαδόν τετραγώνου της μορφής $a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, καταλήγουν στην ισοδύναμη έκφραση $(a + \beta)(a + \beta) = (a + \beta)^2$.

- Οι δραστηριότητες 1, 2, 3 και 9 είναι εφαρμογές παραγοντοποίησης τριωνύμου της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$.

Στις δραστηριότητες 4 και 6 τα τριώνυμα είναι τέλεια τετράγωνα.

Στη δραστηριότητα 7 χρησιμοποιείται το τέλειο τετράγωνο για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.



Οι δραστηριότητες 5 και 8 είναι πιο σύνθετες παραγοντοποιήσεις κατά ομάδες.

➤ **Εξισώσεις Δεύτερου και Ανώτερου Βαθμού**

- Η διερεύνηση (1) έχει στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές κατά πόσο μια εξίσωση δεύτερου βαθμού έχει λύσεις. Η διαδικασία εύρεσης της λύσης επιτυγχάνεται σε αρχική φάση με απλές δοκιμές, τονίζοντας ότι δεν είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος υπολογισμού λύσεων εξίσωσης δεύτερου βαθμού. Με αυτό τον τρόπο εμφανίζεται η ανάγκη αναζήτησης γενικού τρόπου επίλυσης μιας εξίσωσης δεύτερου βαθμού.

Η διερεύνηση (2) έχει στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να υπολογίζουν τις λύσεις μιας εξίσωσης δεύτερου βαθμού, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συμπλήρωσης του τέλειου τετραγώνου.

- Στις δραστηριότητες 1 και 2 ζητείται η επίλυση εξισώσεων δεύτερου ή και ανώτερου βαθμού, με τη χρήση μεθόδων παραγοντοποίησης.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις δεύτερου βαθμού με τη χρήση του τύπου.

Στις δραστηριότητες 4 και 5 οι μαθητές καλούνται να κρίνουν και ανάλογα να χρησιμοποιήσουν την κατάλληλη μέθοδο παραγοντοποίησης για την επίλυση μιας εξίσωσης.

Στη δραστηριότητα 6 ζητείται από τους μαθητές να ελέγξουν την ορθότητα της επίλυσης μιας εξίσωσης, στην οποία χρησιμοποιείται η μέθοδος συμπλήρωσης του τέλειου τετραγώνου και να εξηγήσουν τυχόν λάθη στην πορεία επίλυσης.

Στις δραστηριότητες 7-14 δίνονται προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δεύτερου βαθμού.

➤ **Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις**

- Η διερεύνηση στοχεύει μέσω ενός αριθμητικού τεχνάσματος με διαδοχικές πράξεις να καταλήξει σε μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Στη συνέχεια, οι μαθητές οδηγούνται στα βασικά χαρακτηριστικά που διακρίνουν μια ρητή αλγεβρική παράσταση από μια πολυωνυμική. Επιπλέον, οι μαθητές να είναι σε θέση να βρίσκουν τυχόν τιμές που πιθανόν η παράσταση να μην ορίζεται και στη συνέχεια να μπορούν να την απλοποιήσουν.



- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές βρίσκουν τις τιμές για τις οποίες ορίζεται μια ρητή αλγεβρική παράσταση.

Στις δραστηριότητες 2, 4 και 5 οι μαθητές απλοποιούν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, δεδομένου ότι αυτές ορίζονται.

Η δραστηριότητα 3 είναι σημαντική στο να διακρίνει ο μαθητής τη σχέση που μπορεί να έχουν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις που έχουν τη μορφή:
 $\frac{A}{B}$, $-\frac{A}{B}$, $\frac{-A}{B}$, $\frac{A}{-B}$, $\frac{-A}{-B}$.

Η δραστηριότητα 6 είναι αριθμητική παράσταση σε κλασματική μορφή, η οποία μπορεί να απλοποιηθεί με διαδικασίες απλοποίησης που οι μαθητές ήδη γνωρίζουν.

Τέλος, στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους στις μεθόδους παραγοντοποίησης, για να δικαιολογήσουν την απάντησή τους.

➤ **Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων**

- Στη διερεύνηση οι μαθητές ερμηνεύουν τον κάθε όρο ενός γινομένου που αποτελείται από κλασματικές παραστάσεις και στη συνέχεια απλοποιούν όλους τους δυνατούς όρους του γινομένου.
- Στις δραστηριότητες 1, 2, 3, 4 και 8 οι μαθητές εκτελούν απλές πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μεταξύ αλγεβρικών παραστάσεων.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές διακρίνουν πότε μια πράξη είναι ορθή ή όχι, κατανοώντας έτσι τις επιτρεπτές πράξεις κατά την απλοποίηση κλασματικών παραστάσεων.

Στη δραστηριότητα 6 ζητείται η αριθμητική τιμή μιας παράστασης που είναι σε μορφή γινομένου δύο κλασματικών παραστάσεων.

Η δραστηριότητα 7 πραγματεύεται την μετατροπή σύνθετων κλασματικών παραστάσεων σε απλές.

➤ **Πρόσθεση - Αφαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων**

- Στη διερεύνηση οι μαθητές σχηματίζουν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις και στη συνέχεια υπολογίζουν το άθροισμα και τη διαφορά τους.



- Στις δραστηριότητες 1-6 οι μαθητές εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις κλασματικών παραστάσεων.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές χρησιμοποιούν την προτεραιότητα πράξεων, για να εκτελέσουν τις πράξεις.

Οι δραστηριότητες 8 και 9 πραγματεύονται ρητές εξισώσεις, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει να ελέγχουν κατά πόσο είναι αποδεκτή η λύση που υπολογίζουν ή όχι.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1, 2, 3 και 4 οι μαθητές παραγοντοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις.

Η δραστηριότητα 5 αναφέρεται σε απλοποιήσεις κλασμάτων και οι δραστηριότητες 6-9 έχουν στόχο να βοηθήσουν το μαθητή να εμπεδώσει όλες τις πράξεις μεταξύ ρητών αλγεβρικών παραστάσεων.

Στις δραστηριότητες 10 και 14 οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις.

Οι δραστηριότητες 11-13 και 16 είναι προβλήματα, στα οποία οι μαθητές να κατασκευάζουν τις αντίστοιχες εξισώσεις και στη συνέχεια τις επιλύουν. Ταυτόχρονα, οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα των λύσεών τους.

Η δραστηριότητα 15 είναι σημαντική για την κατασκευή μιας αλγεβρικής παράστασης ύστερα από μια σειρά διαδοχικών εντολών. Οι μαθητές προχωρούν σε γενίκευση και απόδειξη.

Τέλος, η δραστηριότητα 17 είναι συνδυασμός ταυτοτήτων και παραγοντοποίησης σε μια αποδεικτική σχέση.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 ζητείται η απλοποίηση μίας ρητής παράστασης με δεδομένη συνθήκη.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση ρητής συνάρτησης. Η δραστηριότητα αυτή, ενώ αρχικά φαίνεται ασυνήθιστη, ωστόσο καταλήγει με απλοποίηση σε πολυωνυμική συνάρτηση πρώτου βαθμού με πεδίο ορισμού όμως, που δεν είναι ολόκληρο το \mathbb{R} .



Στις δραστηριότητες 3 και 5 οι μαθητές εκτελούν πράξεις, εφαρμόζοντας γνωστές μεθόδους παραγοντοποίησης και πράξεις ρητών αλγεβρικών παραστάσεων.

Στις δραστηριότητες 4 και 6 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, χρησιμοποιώντας γνωστές διαδικασίες.

Οι δραστηριότητες 7 και 8 αναφέρονται σε θέματα του διαγωνισμού PISA που είναι σχετικά με την ενότητα.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Γεωμετρία

Δείκτες επιτυχίας:

- Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούν και να αποδεικνύουν σχέσεις.Μ4.8.
- Επεξηγούν τις απαραίτητες συνθήκες για την ισότητα δύο σχημάτων και αναγνωρίζουν ίσα τρίγωνα.Γ4.7.
- Διατυπώνουν υποθέσεις για σχέσεις ισότητας και ομοιότητας μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και ελέγχουν τις υποθέσεις τους, χρησιμοποιώντας επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό.Γ4.8.
- Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.Γ5.1.
- Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό.Γ5.2.
- Ορίζουν βασικές γεωμετρικές έννοιες και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (στερεά, γεωμετρικά σχήματα, επίπεδο, ημιεπίπεδο, σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, απόσταση δύο σημείων, μέσο ευθύγραμμου τμήματος, σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων, πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων, σχήματα συμμετρικά ως προς κέντρο/ευθεία, σχετικές θέσεις δύο

Θα μάθουμε:

- Να εφαρμόζουμε τις προτάσεις που αφορούν τις ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου.
- Να γνωρίζουμε πότε δύο σχήματα είναι ίσα.
- Να εξετάζουμε πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα με τη βοήθεια των κριτηρίων ισότητας τριγώνων.
- Να εφαρμόζουμε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων, για να αποδεικνύουμε ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών.



ευθειών στο επίπεδο, κάθετες ευθείες, απόσταση σημείου από ευθεία, χάραξη παράλληλων ευθειών, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος).Γ5.4.

- Ορίζουν αποδεικνύουν και εφαρμόζουν την έννοια της ισότητας επίπεδων ευθύγραμμων σχημάτων (ίσα σχήματα, ίσα τρίγωνα, κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων, κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων).Γ5.6.
- Ορίζουν το σύνολο των ρητών αριθμών, αναγνωρίζουν, συγκρίνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο (πλευρών και γωνιών).Γ6.1.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Ανισοτικές Σχέσεις Τριγώνων**
- **Ίσα Σχήματα – Ισότητα Τριγώνων**
- **Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων**
- **Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές θα γνωρίσουν τις προτάσεις που αφορούν τις ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου. Ειδικότερα, θα μάθουν να αναγνωρίζουν πότε ένα τρίγωνο είναι κατασκευάσιμο. Στη συνέχεια οι μαθητές θα μελετήσουν πότε δύο σχήματα είναι ίσα, έννοια την οποία κατέχουν εμπειρικά. Μέσα από τις διερευνήσεις θα κατανοήσουν ότι δύο σχήματα και ειδικότερα δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν είναι δυνατόν με κατάλληλη μετατόπιση του ενός να συμπέσει με το άλλο. Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων θα προκύψουν ως ανάγκη εύρεσης του ελάχιστου αριθμού στοιχείων των δύο τριγώνων που πρέπει να είναι ίσα, ώστε να διασφαλιστεί ότι αυτά είναι ίσα. Η εφαρμογή των κριτηρίων ισότητας δύο τριγώνων θα χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για την απόδειξη ισότητας ευθύγραμμων τμημάτων και γωνιών.



Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Ανισοτικές Σχέσεις Τριγώνων**

- Η προτεινόμενη διερεύνηση καλεί αρχικά τους μαθητές να διατυπώσουν υποθέσεις για το ποια προϋπόθεση πρέπει να ισχύει σε σχέση με το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου, για να μπορεί αυτό να κατασκευαστεί. Μέσα από κατάλληλα ερωτήματα και με τη χρήση του προτεινόμενου εφαρμογίδιου, οι μαθητές αναμένεται να καταλήξουν στη διατύπωση ενός κανόνα.
- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές ανακαλούν σημαντικές έννοιες ενός τριγώνου (κύρια στοιχεία, περιεχόμενες γωνίες πλευρών, προσκείμενες γωνίες πλευράς).

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο είναι δυνατό να κατασκευαστούν τρίγωνα με συγκεκριμένα μήκη πλευρών.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές εφαρμόζουν ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο, για να βρουν τις πιθανές τιμές που μπορεί να έχει το μήκος μιας πλευράς του.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές συγκρίνουν τα μέτρα δύο πλευρών ενός τριγώνου, αφού πρώτα υπολογίσουν τα μέτρα των απέναντι τους γωνιών.

Στις δραστηριότητες 5 και 6 οι μαθητές εφαρμόζουν τις ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα, για να αποδείξουν άλλες ανισοτικές σχέσεις.

➤ **Ίσα Σχήματα – Ισότητα Τριγώνων**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές χρησιμοποιούν δύο εφαρμογίδια, για να παρατηρήσουν την ισότητα δύο τριγώνων και τετραπλεύρων, αντίστοιχα. Αυτό αναμένεται να επιτευχθεί με κατάλληλες μετατοπίσεις ενός σχήματος.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές παρατηρούν ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα (πλευρές – γωνίες) και γενικεύουν το συμπέρασμα αυτό για οποιοδήποτε άλλο ζεύγος πολυγώνων. Η γενίκευση γίνεται με τη βοήθεια του προτεινόμενου εφαρμογίδιου.

- Στις δραστηριότητες 1 και 5 οι μαθητές αναγνωρίζουν τα αντίστοιχα στοιχεία ίσων σχημάτων.



Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές ασχολούνται πρακτικά με τη μετατόπιση δύο τριγώνων, για να εξετάσουν κατά πόσο αυτά είναι ίσα μεταξύ τους.

Στις δραστηριότητες 3 και 4 εξετάζεται η ορθότητα κάποιων ισχυρισμών που σχετίζονται με την έννοια της ισότητας δύο τριγώνων.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές ελέγχουν την ισότητα δύο τετραπλεύρων, λαμβάνοντας υπόψη την ισότητα κάποιων στοιχείων τους.

➤ **Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων**

- Στις διερευνήσεις (1), (3) και (4) οι μαθητές κατασκευάζουν τρίγωνα και ανακαλύπτουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, με τη βοήθεια των αντίστοιχων εφαρμογιδίων.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές αναμένεται να κατανοήσουν ότι δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, δεν είναι πάντα ίσα μεταξύ τους.

- Στις δραστηριότητες 1, 2, 5, 6 και 12 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο δύο τρίγωνα είναι ίσα, εφαρμόζοντας τα κριτήρια ισότητας.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές συμπληρώσουν τα κενά με τρόπο, ώστε τα δοσμένα τρίγωνα να είναι ίσα.

Στη δραστηριότητα 4 αναφέρουν το κριτήριο το οποίο «καθιστά» τα δύο τρίγωνα ίσα μεταξύ τους.

Στη δραστηριότητα 7, οι μαθητές αποδεικνύουν την ισότητα τριγώνων, χρησιμοποιώντας το 1^ο κριτήριο ισότητας.

Στις δραστηριότητες 8–11 και 14 εφαρμόζουν τα κριτήρια ισότητας, για να αποδείξουν ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών.

Στη δραστηριότητα 13 οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα μιας μεθόδου κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας, χρησιμοποιώντας κριτήρια ισότητας τριγώνων.



➤ **Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων**

- Στην προτεινόμενη εξερεύνηση οι μαθητές εφαρμόζουν το 3^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων σε πρόβλημα. Οι μαθητές προβληματίζονται κατά πόσο τα κριτήρια ισότητας τριγώνων διαφοροποιούνται, όταν συγκρίνουν ορθογώνια τρίγωνα.
- Στην προτεινόμενη διερεύνηση οι μαθητές παρατηρούν τα δύο ζεύγη τριγώνων και ανακαλύπτουν πώς διαφοροποιούνται τα κριτήρια ισότητας στην περίπτωση ορθογωνίων τριγώνων. Στη συνέχεια επιβεβαιώνουν τις παρατηρήσεις τους, με τη χρήση του εφαρμογιδίου.
- Στις δραστηριότητες 1 και 4 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους, εφαρμόζοντας το κατάλληλο κριτήριο ισότητας.

Στις δραστηριότητες 2 και 3 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο τα τρίγωνα που δίνονται είναι ισοσκελή, εφαρμόζοντας τα κριτήρια ισοσκελών τριγώνων.

Οι δραστηριότητες 5–13 είναι αποδεικτικές. Οι μαθητές εφαρμόζουν τα κριτήρια ισότητας δύο ορθογωνίων ή ισοσκελών τριγώνων, για να αποδείξουν ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές εφαρμόζουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, για να εξετάσουν κατά πόσο τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές εφαρμόζουν ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο, για να εξετάσουν κατά πόσο αυτό είναι κατασκευάσιμο.

Στις δραστηριότητες 3, 5, 9 και 11–15 οι μαθητές χρησιμοποιούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, για να αποδείξουν ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών. Ταυτόχρονα, επαναλαμβάνουν τις ιδιότητες ισοσκελών τριγώνων και τραπεζίων και ειδικών παραλληλογράμμων.

Στις δραστηριότητες 4 και 6 οι μαθητές εφαρμόζουν ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο, για να υπολογίσουν τις τιμές που είναι δυνατό να έχει το μήκος πλευρών ενός τριγώνου.



Τέλος, στις δραστηριότητες 7, 8 και 10 οι μαθητές εφαρμόζουν ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου, για να αποδείξουν ότι ένα συγκεκριμένο τρίγωνο είναι ορθογώνιο (δραστηριότητα 7) ή ισοσκελές (δραστηριότητες 8 και 10).

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Οι δραστηριότητες 1–3, 5, 6 και 9–12 είναι αποδεικτικές. Ειδικότερα, στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές χρησιμοποιούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και τις ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου, για την απόδειξη ισότητας ευθύγραμμων τμημάτων. Οι δραστηριότητες 2 και 3 διαπραγματεύονται την εφαρμογή ανισοτικών σχέσεων σε τρίγωνο. Στις δραστηριότητες 5 και 6 οι μαθητές εφαρμόζουν κριτήρια ισότητας τριγώνων, για να αποδείξουν σχέσεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών. Μπορούν να αναφερθούν και σε άλλες έννοιες όπως, για παράδειγμα, στο ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές κατασκευάζουν ένα τρίγωνο ίσο με κάποιο άλλο με τη χρήση κανόνα και διαβήτη, συνδέοντας τον τρόπο με τον οποίο εργάζονται με τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές εφαρμόζουν ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο, για να αποδείξουν μian άλλη ανισοτική σχέση.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές εφαρμόζουν ανισοτικές σχέσεις μεταξύ πλευρών τριγώνου και καταμετρούν τα τρίγωνα που σχηματίζονται.

Στη δραστηριότητα 13 οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και να πειραματιστούν με το προτεινόμενο εφαρμογίδιο, για να δώσουν τις κατάλληλες απαντήσεις στα ερωτήματα της δραστηριότητας.

Τέλος, η δραστηριότητα 14 είναι θέμα που δόθηκε στα πλαίσια της έρευνας PISA.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Τριγωνομετρία

Δείκτες επιτυχίας:

- Διερευνούν και ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς σε ορθογώνιο τρίγωνο και μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις, για να υπολογίζουν αποστάσεις και γωνίες.Μ5.7.
- Επιλύουν προβλήματα με βάση τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών.Μ6.1.
- Εφαρμόζουν τις έννοιες και τις μεθόδους της τριγωνομετρίας στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.Α6.18.

Θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
- Να χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων.
- Να βρίσκουμε τη σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών συμπληρωματικών γωνιών.
- Να επιλύουμε ένα τρίγωνο, όταν είναι γνωστό:
 - (α) το μήκος μίας πλευράς του και το μέτρο μίας οξείας γωνίας του ή
 - (β) το μήκος δύο πλευρών του.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Τριγωνομετρικοί Αριθμοί**
- **Επίλυση Τριγώνου**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές θα ορίσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας. Βασικός στόχος της ενότητας είναι να εφαρμόσουν οι μαθητές τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας στην επίλυση τριγώνου. Κατά συνέπεια, θα κατανοήσουν τη σημασία των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας. Τέλος, θα αποδείξουν σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας και θα δουν με ποιο τρόπο μπορούν αυτοί να χρησιμοποιηθούν, για την απόδειξη θεωρημάτων στη Γεωμετρία.

Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:



➤ **Τριγωνομετρικοί Αριθμοί**

- Στόχος της διερεύνησης είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την ανάγκη ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο μπορούν να υπολογίσουν το μήκος μιας κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου, αν γνωρίζουν το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς και το μέτρο μίας οξείας γωνίας του. Στη συνέχεια, με τη χρήση του προτεινόμενου εφαρμογίδιου, παρατηρούν ότι οι λόγοι των μηκών των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου είναι σταθεροί, αν τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου αυτού παραμείνουν σταθερά.
- Στη δραστηριότητα 1, 5, 9, 10 και 12 οι μαθητές υπολογίζουν τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας.

Στις δραστηριότητες 2 και 4 οι μαθητές αναγνωρίζουν τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας σε ορθογώνια τρίγωνα.

Η δραστηριότητα 3 αποτελείται από ερωτήματα πολλαπλής επιλογής, που αναφέρονται στους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές υπολογίζουν μέτρα γωνιών, αν είναι γνωστός κάποιος τριγωνομετρικός αριθμός τους.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές συμπληρώνουν ισότητες, ανακαλώντας τις γνώσεις τους για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συμπληρωματικών γωνιών.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές ανακαλούν τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας.

Τέλος, στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές αποδεικνύουν σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

➤ **Επίλυση Τριγώνου**

- Στην προτεινόμενη εξερεύνηση οι μαθητές υπολογίζουν την απόσταση μιας αγκυροβολημένης βάρκας από την παραλία, με τη βοήθεια ενός εξάντα, μιας υπολογιστικής μηχανής και μιας μετροταινίας. Στη συνέχεια, ανακαλούν τις γνώσεις τους στους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας και τους εφαρμόζουν, για να υπολογίσουν τη ζητούμενη απόσταση.



- Στην προτεινόμενη διερεύνηση οι μαθητές εφαρμόζουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας, για να επιλύσουν τρίγωνα.
- Στις δραστηριότητες 1-5 οι μαθητές επιλύουν τρίγωνα, εφαρμόζοντας τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

Στις δραστηριότητες 6-10 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1, 4 και 8 οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα σχέσεων, που αναφέρονται σε τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας και μήκη πλευρών ορθογωνίων τριγώνων.

Στις δραστηριότητες 2, 6 και 10 οι μαθητές εφαρμόζουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας σε τρίγωνα.

Στις δραστηριότητες 3, 5, 9 και 12 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές εφαρμόζουν τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας, για να κατασκευάσουν την αντίστοιχη οξεία γωνία.

Τέλος, στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές αποδεικνύουν μια σχέση μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας, με τη βοήθεια των αντίστοιχων ορισμών.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στις δραστηριότητες 1, 2 και 4 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

Στις δραστηριότητες 3 και 6 οι μαθητές εφαρμόζουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας σε τρίγωνα.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές αποδεικνύουν μια σχέση για το εμβαδόν τριγώνου, εφαρμόζοντας τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.



Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές επαληθεύουν μια σχέση που αναφέρεται σε τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας.

Τέλος, στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές εξηγούν τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να μετρήσουν το ύψος ενός δέντρου, με τη βοήθεια τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

Σημείωση:

Στην ενότητα αυτή μπορεί να γίνει μια μικρή άσκηση αξιολόγησης.



ΕΝΟΤΗΤΑ 6: Ευθεία-Γραμμικά Συστήματα

Δείκτες επιτυχίας:

- Κατανοούν την έννοια της κλίσης ευθείας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών και την εφαρμόζουν σε προβλήματα.A4.8.
- Διερευνούν τη θέση δύο ευθειών στο επίπεδο και ανακαλύπτουν κριτήρια καθετότητας και παραλληλίας.A5.7.
- Επιλύουν και διερευνούν γραμμικά συστήματα εξισώσεων και ανισώσεων δύο μεταβλητών (αλγεβρικά ή με τη χρήση δυναμικών λογισμικών) και τα εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων καθημερινής ζωής.A5.15.
- Κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις σε προβλήματα κίνησης. M5.11
- Διερευνούν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν την εξίσωση ευθείας, τη θέση ευθειών, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, την απόσταση σημείου από ευθεία, τις συντεταγμένες του μέσου ευθύγραμμου τμήματος, τη γωνία ευθειών και το εμβαδόν τριγώνου σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.Γ.6.7

Θα μάθουμε:

- Να υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.
- Να βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$ ενός ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.
- Να βρίσκουμε τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών $\varepsilon_1: y = \lambda_1 + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 + \beta_2$.
- Να διερευνούμε πότε ένα γραμμικό σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους έχει μοναδική λύση, πότε είναι αδύνατο και πότε έχει άπειρες λύσεις, χωρίς κατ' ανάγκη, να επιλυθεί.
- Να χρησιμοποιούμε διάφορες αλγεβρικές μεθόδους, όπως τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, για την αλγεβρική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους (x, y) .

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Απόσταση Δύο Σημείων-Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος**
- **Σχετικές Θέσεις Δύο Ευθειών**
- **Γραφική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους**
- **Αλγεβρική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους**



Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές θα ανακαλύψουν τους τύπους υπολογισμού της απόστασης μεταξύ δύο σημείων και εύρεσης των συντεταγμένων του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος με γνωστά άκρα. Θα γνωρίσουν τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών. Στη συνέχεια, οι μαθητές θα συνδέσουν το πλήθος των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος με τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που το αποτελούν. Τέλος, θα γνωρίσουν μεθόδους αλγεβρικής επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και θα τις εφαρμόσουν στην επίλυση προβλήματος.

Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Απόσταση Δύο Σημείων-Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος**

- Στόχος της διερεύνησης είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές τους τύπους υπολογισμού του μήκους ευθύγραμμου τμήματος και εύρεσης των συντεταγμένων του μέσου ευθύγραμμου τμήματος, συναρτήσει των συντεταγμένων των άκρων του. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από τη μελέτη ενός χάρτη, στον οποίο εμφανίζεται ένα σταθερό σημείο ως σημείο αναφοράς. Οι μαθητές καταλήγουν στους συγκεκριμένους τύπους με τη βοήθεια του προτεινόμενου εφαρμογίδιου.
- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές υπολογίζουν την απόσταση δύο σημείων και βρίσκουν τις συντεταγμένες του μέσου του αντίστοιχου ευθύγραμμου τμήματος.

Στις δραστηριότητες 2 και 3 οι μαθητές εφαρμόζουν τον τύπο εύρεσης των συντεταγμένων του μέσου ευθύγραμμου τμήματος, για να επιλύσουν προβλήματα.

Στις δραστηριότητες 4, 6, 8, 9 και 11 οι μαθητές εφαρμόζουν τον τύπο υπολογισμού του μήκους ευθύγραμμου τμήματος, για να επιλύσουν προβλήματα.

Στις δραστηριότητες 5, 7 και 10 οι μαθητές εφαρμόζουν τους τύπους υπολογισμού του μήκους ευθύγραμμου τμήματος και εύρεσης των συντεταγμένων του μέσου ευθύγραμμου τμήματος, για να επιλύσουν προβλήματα.

➤ **Σχετικές Θέσεις Δύο Ευθειών**

- Αρχικός στόχος της προτεινόμενης διερεύνησης είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές τις σχέσεις μεταξύ των λ_1 , λ_2 και β_1 , β_2 , για τις διάφορες σχετικές θέσεις των



ευθειών $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$. Στη συνέχεια, οι μαθητές παρατηρούν ότι η γραφική παράσταση της ευθείας $y = \lambda x + \beta$ διέρχεται από το σημείο $(0, \beta)$, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές υπολογίζουν την κλίση ευθείας, όταν δίνεται ο τύπος της.

Στις δραστηριότητες 2, 3 και 7 οι μαθητές βρίσκουν τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών, όταν δίνονται οι τύποι τους ή οι γραφικές τους παραστάσεις.

Στις δραστηριότητες 4, 5, 9, 12 και 13 οι μαθητές βρίσκουν τις εξισώσεις ευθειών, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στις σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

Στις δραστηριότητες 6 και 8 οι μαθητές υπολογίζουν την τιμή παραμέτρου, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στις σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

Τέλος, στις δραστηριότητες 10 και 11 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στις σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

➤ **Γραφική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να ανακαλύψουν γραφικά οι μαθητές ότι το κάθε ζεύγος τιμών (x, y) που επαληθεύει δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους, είναι η λύση του γραμμικού συστήματός τους.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές διατυπώνουν ένα γενικό κανόνα για την εύρεση του πλήθους των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

- Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο ένα ζεύγος τιμών (x, y) είναι η λύση ενός γραμμικού συστήματος.

Στις δραστηριότητες 3, 6 και 7 οι μαθητές βρίσκουν το πλήθος των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές συμπληρώνουν τη δεύτερη εξίσωση ενός γραμμικού συστήματος, ώστε αυτό να έχει συγκεκριμένο πλήθος λύσεων.



Τέλος, στις δραστηριότητες 5 και 8 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους γύρω από το πλήθος λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

➤ **Αλγεβρική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους**

- Στόχος της προτεινόμενης διερεύνησης είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
- Στις δραστηριότητες 1 και 7 οι μαθητές επιλύουν γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές αναφέρουν γραμμικά συστήματα, που επιλύονται πιο εύκολα με συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές αναγνωρίζουν το γραμμικό σύστημα που περιγράφει το πρόβλημα.

Στις δραστηριότητες 4-6 και 8-12 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1 και 5 οι μαθητές βρίσκουν το πλήθος των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στις δραστηριότητες 2, 3, 13 και 15 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στις σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές επιλύουν πρόβλημα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους για την εύρεση των συντεταγμένων του μέσου ευθύγραμμου τμήματος και για τον υπολογισμό της απόστασης δύο σημείων.

Η δραστηριότητα 6 να αφαιρεθεί.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές επιλύουν αλγεβρικά γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.



Στις δραστηριότητες 8, 9, 12, 14 και 16 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές αναφέρουν γραμμικά συστήματα με συγκεκριμένο πλήθος λύσεων.

Τέλος, στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές αναφέρουν γραμμικά συστήματα καθώς και τις λύσεις τους, μελετώντας τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές βρίσκουν τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών για τις διάφορες τιμές μιας παραμέτρου.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στις σχετικές θέσεις δύο ευθειών και στην αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές επιλύουν αλγεβρικά ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές βρίσκουν τις συντεταγμένες του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος και επιβεβαιώνουν ότι αυτό ανήκει σε μια ευθεία.

Στις δραστηριότητες 5 και 6 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές αποδεικνύουν την παραλληλία δύο ευθειών της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, όταν τα A, B και Γ ικανοποιούν μια δεδομένη σχέση.

Τέλος, οι δραστηριότητες 8, 9 και 10 είναι θέματα που δόθηκαν στα πλαίσια της έρευνας PISA.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί και με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Στατιστική**Δείκτες επιτυχίας:**

- Αναλύουν τα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού και συζητούν για τη καταλληλότητα του τρόπου συλλογής των δεδομένων (εγκυρότητα, αξιοπιστία, αμεροληψία) και παρουσίασής τους.ΣΠ5.3.

Θα μάθουμε:

- Να διακρίνουμε τις έννοιες της συλλογής δεδομένων από το σύνολο του πληθυσμού (απογραφή) και της συλλογής δεδομένων από μέρος του πληθυσμού (δείγμα).
- Να αντιλαμβανόμαστε σε ποιες περιπτώσεις επιβάλλεται η επιλογή αντιπροσωπευτικού δείγματος.
- Να συζητούμε την καταλληλότητα του τρόπου συλλογής και παρουσίασης δεδομένων.
- Να αντιλαμβανόμαστε σε ποιες περιπτώσεις, τα δεδομένα μας είναι δυνατόν να είναι μεροληπτικά.
- Να χρησιμοποιούμε τα δεδομένα από το δείγμα, για να κάνουμε εκτιμήσεις για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Δειγματοληψία-Εκτίμηση-Γενικεύσεις για τον Πληθυσμό**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές γνωρίζουν την έννοια του δείγματος και τη διακρίνουν από την έννοια της απογραφής. Γνωρίσουν επίσης την έννοια της δειγματοληψίας και θα αντιληφθούν τη σημασία της αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος, για την αποφυγή της μεροληψίας. Συζητούν την καταλληλότητα τρόπων συλλογής δεδομένων και τα χρησιμοποιούν, για να προβούν σε εκτιμήσεις για τον



πληθυσμό μιας έρευνας. Τέλος, διαβάζουν, ερμηνεύουν και αντλούν πληροφορίες από γραφικές παραστάσεις.

Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Δειγματοληψία-Εκτίμηση-Γενικεύσεις για τον Πληθυσμό**

- Στόχος της προτεινόμενης εξερεύνησης είναι να αντιληφθούν οι μαθητές τη σημασία της καταλληλότητας του τρόπου συλλογής των δεδομένων από μέρος του πληθυσμού (δείγμα) για την εξαγωγή εκτιμήσεων για τον πληθυσμό.
- Στην προτεινόμενη διερεύνηση οι μαθητές γνωρίζουν έννοιες της Στατιστικής, όπως πληθυσμός και δείγμα μιας έρευνας και σχολιάζουν τη διαδικασία συλλογής δεδομένων μιας έρευνας.
- Στις δραστηριότητες 1 και 3 οι μαθητές συζητούν για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα συγκεκριμένων μεθόδων δειγματοληψίας.

Στις δραστηριότητες 2, 4 και 5 οι μαθητές σχολιάζουν την αντιπροσωπευτικότητα των απόψεων του δείγματος.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές σχολιάζουν την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος και αντλούν πληροφορίες για την έρευνα από τη γραφική παράσταση.

Η δραστηριότητα 7 είναι ανοικτού τύπου και διαπραγματεύεται διάφορες έννοιες, όπως τη δειγματοληψία και τον καταρτισμό ενός αντιπροσωπευτικού ερωτηματολογίου για την εξαγωγή εκτιμήσεων που αφορούν τον πληθυσμό της έρευνάς του.

➤ **Ομαδική Εργασία (Project)**

Στόχος της ομαδικής εργασίας είναι να εφαρμόσουν οι μαθητές τις γνώσεις που απέκτησαν στην ενότητα αυτή, για να οργανώσουν και να εκτελέσουν μια έρευνα στη σχολική τους μονάδα.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Οι δραστηριότητες 1, 2 και 4 είναι θέματα που δόθηκαν στα πλαίσια της έρευνας PISA.



Στις δραστηριότητες 3 και 5 οι μαθητές μελετούν και ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις.

Σημείωση:

Στην ενότητα αυτή μπορεί να γίνει μια μικρή άσκηση αξιολόγησης.



ΕΝΟΤΗΤΑ 8: Στερεομετρία

Δείκτες επιτυχίας:

- Περιγράφουν σχέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο (π.χ. ασύμβατες ευθείες, τρόποι τομής τριών επιπέδων).Γ4.13.
- Ορίζουν και εφαρμόζουν έννοιες στο χώρο (ευθεία, επίπεδο, θέσεις ευθείας και επιπέδου, σχετικές θέσεις σφαίρας και επιπέδου).Γ5.14.
- Σχεδιάζουν σε ισομετρικό χαρτί και στον υπολογιστή στερεά και συμπληρώνουν αναπτύγματα, για να κατασκευάζουν στερεά.Γ5.17.
- Σχεδιάζουν στερεά σε τετραγωνισμένο χαρτί, όταν γνωρίζουν τις τρεις βασικές όψεις τους.Γ5.18.
- Περιγράφουν το αποτέλεσμα της μεταβολής της ακμής ενός τρισδιάστατου σχήματος στο εμβαδόν και στον όγκο του.Μ4.10.
- Κάνουν λογικές εκτιμήσεις αποστάσεων, εμβαδών και όγκου και εκτιμούν το σφάλμα των εκτιμήσεών τους.Μ5.1.
- Υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο στερεών σχημάτων.Μ5.2.
- Διερευνούν και εφαρμόζουν σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων συγκεκριμένων σχημάτων και του εμβαδού ή/και όγκου τους.Μ5.3.

Θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε τη σχετική θέση δύο ευθειών, δύο επιπέδων, ή μιας ευθείας και ενός επιπέδου.
- Να αναγνωρίζουμε τα στερεά σχήματα και τα στοιχεία τους.
- Να υπολογίζουμε το εμβαδόν και τον όγκο ορθού πρίσματος, κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας.
- Να διερευνούμε, να εφαρμόζουμε σχέσεις και να επιλύουμε προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων στερεών και της επιφάνειας και του όγκου τους.

- Ανακαλύπτουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τύπους για την εύρεση του εμβαδού επίπεδων σχημάτων, της επιφάνειας και του όγκου στερεών. M5.4.
- Χρησιμοποιούν και εφαρμόζουν με ευχέρεια τις μονάδες μέτρησης του μήκους, του χρόνου, του εμβαδού, της μάζας, του όγκου, κτλ. και κατανοούν την ισοδυναμία μετρήσεων (π.χ. 1 cm^3 νερού είναι ισοδύναμο με 1 ml νερού). M5.8.
- Εφαρμόζουν τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου τρισδιάστατων σχημάτων. M6.8.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Ευθείες και Επίπεδα στον Χώρο-Μέτρηση Χώρου**
- **Εμβαδόν και Όγκος Ορθού Πρίσματος**
- **Εμβαδόν και Όγκος Κανονικής Τετραγωνικής Πυραμίδας**
- **Εμβαδόν και Όγκος Κυλίνδρου**
- **Εμβαδόν και Όγκος Κώνου**
- **Εμβαδόν και Όγκος Σφαιράς**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές αναγνωρίζουν τη σχετική θέση δύο ευθειών, δύο επιπέδων, ή μιας ευθείας και ενός επιπέδου στο χώρο. Γνωρίζουν επίσης τα στερεά σχήματα και τα στοιχεία τους. Βασικός στόχος της ενότητας είναι να υπολογίζουν οι μαθητές το εμβαδόν και την περίμετρο στερεών σχημάτων (ορθό πρίσμα, κανονική τετραγωνική πυραμίδα, κύλινδρος, κώνος) και να επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων, της επιφάνειας και του όγκου τους.

Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

- **Ευθείες και Επίπεδα στον Χώρο-Μέτρηση Χώρου**
 - Στόχος της προτεινόμενης εξερεύνησης είναι να αναγνωρίσουν οι μαθητές ευθείες και επίπεδα και να παρατηρήσουν τις σχετικές θέσεις τους στο χώρο.



- Στη διερεύνηση οι μαθητές ανακαλύπτουν τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών, δύο επιπέδων ή μιας ευθείας και ενός επιπέδου στο χώρο, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.
- Στις δραστηριότητες 1, 2 και 3 οι μαθητές αναγνωρίζουν ευθείες και επίπεδα στο χώρο, κάνοντας αναφορά στις σχετικές τους θέσεις. Επιπλέον, αναφέρουν τομές επιπέδων, τομές ευθύγραμμου τμήματος με επίπεδο, κορυφές στερεού και πλήθος ακμών στερεού.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές υπολογίζουν τον όγκο στερεών.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές μετατρέπουν μια κυβική μονάδα μέτρησης σε άλλη κυβική μονάδα μέτρησης.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές επαληθεύουν μια σχέση ανάμεσα στις έδρες, στις κορυφές και στις ακμές ενός πολυέδρου.

➤ **Εμβαδόν και Όγκος Ορθού Πρίσματος**

- Στόχος της προτεινόμενης εξερεύνησης είναι να προβληματιστούν οι μαθητές και να περιγράψουν τρόπους με τους οποίους υπολογίζουν τον όγκο ενός αντικειμένου με ακανόνιστο σχήμα, επεξηγώντας την μέθοδο που εφάρμοσε ο Αρχιμήδης.
- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές παρατηρούν ορθά πρίσματα και ανακαλύπτουν τύπους, για να υπολογίσουν τον όγκο και το εμβαδόν της επιφανείας τους. Στη συνέχεια, διερευνούν κατά πόσο η μεταβολή του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου επιφέρει ανάλογη μεταβολή στην επιφάνειά του, χρησιμοποιώντας το λογισμικό *DALEST-Elica Cubix Editor*.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανάγκη εύρεσης του εμβαδού επιφανειών ενός πρίσματος, για να επιλύσουν ένα πρόβλημα. Στη συνέχεια, αναγνωρίζουν επίπεδα σχήματα, τα οποία συνθέτουν ένα πρίσμα με βάση κανονικό πολύγωνο και ανακαλύπτουν τύπους για τον υπολογισμό της παράπλευρης επιφάνειας, της ολικής επιφάνειας και του όγκου του. Τέλος, διερευνούν κατά πόσο η μεταβολή του ύψους ενός πρίσματος επιφέρει ανάλογη μεταβολή στον όγκο και στο εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

- Στις δραστηριότητες 1 και 8 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στον κύβο.



Στις δραστηριότητες 2 και 10 οι μαθητές υπολογίζουν τη μεταβολή των διαστάσεων ενός στερεού, σε συνάρτηση με συγκεκριμένη μεταβολή του όγκου τους.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές υπολογίζουν τον όγκο μιας κατασκευής, αποτελούμενης από έναν κύβο και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Στις δραστηριότητες 4 και 7 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα προτάσεων, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στα ορθά πρίσματα.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις σε ένα τετραγωνικό πρίσμα.

Στις δραστηριότητες 9, 11 και 13 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Τέλος, στη δραστηριότητα 12 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στο ορθό πρίσμα.

➤ **Εμβαδόν και Όγκος Κανονικής Τετραγωνικής Πυραμίδας**

- Στόχος της προτεινόμενης εξερεύνησης είναι να προβληματιστούν οι μαθητές για την εύρεση του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας.

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές θα ανακαλύψουν τους τύπους εύρεσης του εμβαδού της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές παρατηρούν τη σχέση του όγκου ενός ορθού πρίσματος και του όγκου μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με κοινή βάση και ύψος, για να επιβεβαιώσουν τον τύπο εύρεσης του όγκου μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας.

- Στις δραστηριότητες 1, 2, 5 και 6 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στην κανονική τετραγωνική πυραμίδα.

Στις δραστηριότητες 3, 4 και 7 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στα ορθά πρίσματα και στις κανονικές τετραγωνικές πυραμίδες.



➤ **Εμβαδόν και Όγκος Κυλίνδρου**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές ανακαλύπτουν τους τύπους εύρεσης του εμβαδού της κυρτής και της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου, μελετώντας το ανάπτυγμά του. Επιπλέον, μελετούν κατά πόσο η μεταβολή του ύψους και της ακτίνας του κυλίνδρου επιφέρουν ανάλογη μεταβολή στο εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του.

Στόχος της διερεύνησης (2) είναι να παρατηρήσουν οι μαθητές τη διαδικασία κατασκευής ενός κυλίνδρου και το ανάπτυγμά του. Στη συνέχεια, επιβεβαιώνουν τους τύπους εύρεσης του εμβαδού της κυρτής και της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου. Τέλος, ανακαλύπτουν τον τύπο εύρεσης του όγκου του κυλίνδρου.

- Στις δραστηριότητες 1, 2, 4 και 8 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στον κύλινδρο.

Στις δραστηριότητες 3, 5, 6, 7 και 9 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στον κύλινδρο.

➤ **Εμβαδόν και Όγκος Κώνου**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές ανακαλύπτουν τη σχέση που συνδέει τον όγκο ενός κώνου με τον όγκο ενός κυλίνδρου με ίσες ακτίνες και ύψη, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

Στόχος της διερεύνησης (2) είναι να παρατηρήσουν αρχικά οι μαθητές τη διαδικασία κατασκευής ενός κώνου και το ανάπτυγμά του. Στη συνέχεια, επιβεβαιώνουν τον τύπο εύρεσης του όγκου του κώνου. Τέλος, ανακαλύπτουν τους τύπους εύρεσης του εμβαδού της κυρτής και της ολικής επιφάνειας του κώνου.

- Στις δραστηριότητες 1, 4, 7, 8 και 12 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στον κώνο.

Στις δραστηριότητες 2, 3, 5, 6, 9, 10 και 11 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στον κώνο.

➤ **Εμβαδόν και Όγκος Σφαίρας**

- Στόχος της προτεινόμενης διερεύνησης είναι να οπτικοποιήσουν οι μαθητές την κατασκευή της σφαίρας.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στη σφαίρα.



Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα προτάσεων, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στη σφαίρα.

Στις δραστηριότητες 3-6 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στη σφαίρα.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές αναγνωρίζουν ευθείες και επίπεδα στο χώρο, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στις σχετικές θέσεις τους στο χώρο.

Στις δραστηριότητες 2 και 3 οι μαθητές υπολογίζουν τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας στερεών.

Στις δραστηριότητες 4 και 5 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις σε ένα ορθό πρίσμα με βάση ρόμβο.

Στις δραστηριότητες 7, 10 και 17 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στον κύλινδρο.

Στις δραστηριότητες 8 και 13 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στον κώνο.

Στις δραστηριότητες 9, 14 και 16 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στον κύλινδρο, στον κώνο και στη σφαίρα.

Στις δραστηριότητες 11, 12, 18 και 19 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στα ορθά πρίσματα και στη κανονική τετραγωνική πυραμίδα.

Τέλος, στη δραστηριότητα 15 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στον κώνο.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικού τετραέδρου.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στον κώνο.

Στις δραστηριότητες 4 και 5 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στον κύλινδρο και στον κώνο.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές οπτικοποιούν τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαν να προσεγγίσουν έναν κύλινδρο και έναν κώνο, με τη βοήθεια ενός ορθού πρίσματος και μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας αντίστοιχα.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές επιλύσουν ένα πρόβλημα, χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο.

Τέλος, οι δραστηριότητες 8-12 είναι θέματα που δόθηκαν στα πλαίσια της έρευνας PISA.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί και με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 9: Παραβολή

Δείκτες επιτυχίας:

- Μελετούν ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων (άρτια, περιττή, περιοδική, κ.λ.π.) και εντοπίζουν τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες. Α6.3

Θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση με τύπο $y = ax^2$, $a \neq 0$ και να την παριστάνουμε γραφικά.
- Να βρίσκουμε τον τύπο της συνάρτησης $y = ax^2$, $a \neq 0$ από τη γραφική παράσταση.
- Να γνωρίζουμε τον ρόλο του συντελεστή a , $a \neq 0$ στην παραβολή με τύπο $y = ax^2$.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές θα μάθουν να αναγνωρίζουν τη συνάρτηση με τύπο $y = ax^2$ με $a \neq 0$ και να την παριστάνουν γραφικά. Επίσης, οι μαθητές θα μάθουν να βρίσκουν τον τύπο της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a \neq 0$ από τη γραφική παράσταση, αλλά και να αναφέρουν διάφορα στοιχεία της (πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, κορυφή, άξονας συμμετρίας, ελάχιστη-μέγιστη τιμή). Τέλος, οι μαθητές θα αντιληφθούν το ρόλο του a στην παραβολή με τύπο $y = ax^2$ με $a \neq 0$.

Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

- **Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$**
 - Στην προτεινόμενη διερεύνηση οι μαθητές κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a \neq 0$ και μελετούν τα στοιχεία της, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.



- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές αναγνωρίζουν στοιχεία μιας παραβολής, μελετώντας τη γραφική παράστασή της.

Στις δραστηριότητες 2 και 3 οι μαθητές κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις παραβολών και διατυπώνουν συμπεράσματα για το «άνοιγμά» της.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές αναγνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις παραβολών.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές βρίσκουν τις εξισώσεις παραβολών, χρησιμοποιώντας τις γραφικές τους παραστάσεις.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα προτάσεων, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στην παραβολή.

Στις δραστηριότητες 7 και 8 οι μαθητές υπολογίζουν τις τιμές παραμέτρων, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στην παραβολή.

Τέλος, στη δραστηριότητα 9 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση μιας παραβολής.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις παραβολών και αναφέρουν στοιχεία τους.

Στις δραστηριότητες 3 και 5 οι μαθητές υπολογίζουν τις τιμές παραμέτρων, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στην παραβολή. Επιπλέον, στη δραστηριότητα 5 κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της παραβολής.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές αναγνωρίζουν στοιχεία παραβολών, μελετώντας τις γραφικές τους παραστάσεις.

Τέλος, στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση μιας παραβολής.



➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής και μιας ευθείας, και αναφέρουν τα σημεία τομής τους.

Τέλος, οι δραστηριότητες 2-5 είναι θέματα που δόθηκαν στα πλαίσια της έρευνας PISA.

Σημείωση:

Στην ενότητα αυτή δεν ενδείκνυται να γίνει τελικό γραπτό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 10: Παραλληλόγραμμα - Τραπεζίδια

Δείκτες επιτυχίας:

- Διακρίνουν τις μεταβλητές και μη ιδιότητες ενός σχήματος και συγκρίνουν τάξεις σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους.Γ3.8.
- Διερευνούν βασικά θεωρήματα τετραπλεύρων (π.χ. το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της).Γ4.6.
- Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων στην επίλυση και μοντελοποίηση προβλημάτων.Γ4.12.
- Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.Γ5.1.
- Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό.Γ5.2.
- Αναγνωρίζουν, κατασκευάζουν βασικά είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο), αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητές τους στη λύση προβλημάτων.Γ5.8.
- Επεξηγούν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες τριγώνων και τετραπλεύρων σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Γ5.15

Θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε παραλληλόγραμμα με βάση τον ορισμό και τα κριτήρια.
- Να χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου στην επίλυση προβλημάτων.
- Να αναγνωρίζουμε τα είδη των παραλληλογράμμων με βάση τον ορισμό και τα κριτήρια.
- Να αναγνωρίζουμε τραπέζια και ισοσκελή τραπέζια.
- Να γνωρίζουμε και να εφαρμόζουμε τα κριτήρια για το πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο ή ειδικό παραλληλόγραμμο ή τραπέζιο.
- Να αποδεικνύουμε ιδιότητες των τραπεζίων και ισοσκελών τραπεζίων και να τις χρησιμοποιούμε στην επίλυση προβλημάτων.
- Να αποδεικνύουμε ιδιότητες στα τρίγωνα χρησιμοποιώντας ιδιότητες των παραλληλογράμμων και να τις εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων.

- Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούν και να αποδεικνύουν σχέσεις.Μ4.8.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Κριτήρια Τετραπλεύρων**
 - Παραλληλόγραμμο
 - Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο
 - Ρόμβος
 - Τετράγωνο
- **Ειδικά Θεωρήματα στα Τρίγωνα**
- **Τραπέζιο**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων και τραπεζίων, με βάση τον ορισμό και τα κριτήρια. Βασικός στόχος της ενότητας είναι να γνωρίζουν και να αποδεικνύουν οι μαθητές τα κριτήρια για το πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο ή τραπέζιο και να τα εφαρμόζουν, για να αποδεικνύουν σχέσεις και να επιλύουν προβλήματα. Τέλος, οι μαθητές γνωρίζουν ειδικά θεωρήματα στα τρίγωνα, τα αποδεικνύουν και θα εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.

Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

- **Κριτήρια Τετραπλεύρων (Παραλληλόγραμμο)**
 - Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, όταν οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές εξετάζουν ποιες είναι οι ελάχιστες συνθήκες που διασφαλίζουν πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της ολοκλήρωσης μιας ημιτελούς κατασκευής.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο τα τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, χρησιμοποιώντας τα κριτήρια παραλληλογράμμου.

Στις δραστηριότητες 2 και 3 οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα προτάσεων, χρησιμοποιώντας τα κριτήρια παραλληλογράμμου.



Στις δραστηριότητες 4, 6, 7 και 9 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, εφαρμόζοντας τα κριτήρια παραλληλογράμμου.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και υπολογίζουν τις συντεταγμένες του κέντρου του στα πλαίσια της αναλυτικής γεωμετρίας.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές υπολογίζουν τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής ενός τετραπλεύρου, ώστε αυτό να είναι παραλληλόγραμμο.

Στις δραστηριότητες 10 και 11 οι μαθητές αποδεικνύουν σχέσεις, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στο παραλληλόγραμμο.

➤ **Κριτήρια Τετραπλεύρων (Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο)**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι ένα παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές επιβεβαιώνουν ότι ένα παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο. Στη συνέχεια, εξετάζουν ποιες είναι οι ελάχιστες συνθήκες που διασφαλίζουν τότε ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και διατυπώνουν τα αντίστοιχα κριτήρια.

- Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο τα τετράπλευρα είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα, χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα κριτήρια.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα, αποδεικνύοντας ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Στις δραστηριότητες 4-8 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, εφαρμόζοντας τα κριτήρια ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

➤ **Κριτήρια Τετραπλεύρων (Ρόμβος)**

- Στη διερεύνηση οι (1) μαθητές κατανοούν ότι ένα παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι ρόμβος.



Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές επιβεβαιώνουν ότι ένα παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι ρόμβος, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο. Στη συνέχεια, εξετάζουν ποιες είναι οι ελάχιστες συνθήκες που διασφαλίζουν τότε ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος και διατυπώνουν τα αντίστοιχα κριτήρια.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο τα τετράπλευρα είναι ρόμβοι, χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα κριτήρια.

Στις δραστηριότητες 2 και 4 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, εφαρμόζοντας τα κριτήρια ρόμβου.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, στα πλαίσια της αναλυτικής γεωμετρίας.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές παρατηρούν μια κατασκευή με κανόνα και διαβήτη. Στη συνέχεια, επεξηγούν γιατί το τετράπλευρο που κατασκευάστηκε είναι ρόμβος.

Τέλος, στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, χρησιμοποιώντας τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και τα κριτήρια ρόμβου.

➤ **Κριτήρια Τετραπλεύρων (Τετράγωνο)**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές κατασκευάζουν παραλληλόγραμμο και ειδικά παραλληλόγραμμο, χρησιμοποιώντας δύο ορθογώνιες ταινίες οποιουδήποτε πλάτους. Στόχος είναι να αντιληφθούν ότι το τετράγωνο είναι το ειδικό παραλληλόγραμμο που είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και ρόμβος.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές κατανοούν ότι ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιους που διχοτομούνται κάθετα είναι τετράγωνο. Στη συνέχεια, επιβεβαιώνουν το συμπέρασμα αυτό, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο. Τέλος, εξετάζουν ποιες είναι οι ελάχιστες συνθήκες που διασφαλίζουν τότε ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος και διατυπώνουν τα αντίστοιχα κριτήρια.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές ερμηνεύουν βέννεια διαγράμματα, χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους στα παραλληλόγραμμα.



Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα προτάσεων, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στα παραλληλόγραμμα.

Στις δραστηριότητες 3 και 6 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας τα κριτήρια τετραγώνου.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, στα πλαίσια της αναλυτικής γεωμετρίας.

Τέλος, στις δραστηριότητες 5,7 και 8 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, χρησιμοποιώντας τα κριτήρια τετραγώνου.

➤ **Ειδικά Θεωρήματα στα Τρίγωνα**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές δύο ειδικά θεωρήματα στα τρίγωνα, χρησιμοποιώντας τα προτεινόμενα εφαρμογίδια.

Στόχος της διερεύνησης (2) είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές δύο ειδικά θεωρήματα στα ορθογώνια τρίγωνα, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο. Επιπλέον, καλούνται να προβληματιστούν για την μέθοδο με την οποία θα μπορούσαν να αποδείξουν το ένα από αυτά.

- Στις δραστηριότητες 1, 4 και 7 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, εφαρμόζοντας ειδικά θεωρήματα στα τρίγωνα.

Στις δραστηριότητες 2, 3, 6 και 8 οι μαθητές υπολογίζουν την τιμή μεταβλητών, εφαρμόζοντας ειδικά θεωρήματα στα τρίγωνα.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές υπολογίζουν το μέτρο γωνίας, εφαρμόζοντας ειδικό θεώρημα σε τρίγωνο και ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.

Οι δραστηριότητες 9-12 είναι αποδεικτικές, στις οποίες οι μαθητές εφαρμόζουν ειδικά θεωρήματα στα τρίγωνα, κριτήρια τετραπλεύρων και κριτήρια ισότητας τριγώνων.

➤ **Τραπεζίο**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές τα κριτήρια ισοσκελούς τραπέζιου. Αρχικά, ανακαλύπτουν ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές όταν οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του είναι ίσες. Στη συνέχεια,



παρατηρούν ότι ένα τραπέζιο με ίσες διαγώνιους είναι ισοσκελές, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές διερευνούν και ανακαλύπτουν τη σχέση των παράλληλων πλευρών ενός τραapeζίου με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του (μέτρο, θέση), χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος της διαμέσου τραapeζίου.

Στις δραστηριότητες 2 και 4 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, εφαρμόζοντας τα αντίστοιχα κριτήρια.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές υπολογίζουν την τιμή μεταβλητών, εφαρμόζοντας θεωρήματα της ενότητας.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα κριτήρια και θεωρήματα της ενότητας.

Τέλος, στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο και υπολογίζουν τα μήκη ευθύγραμμων τμημάτων.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

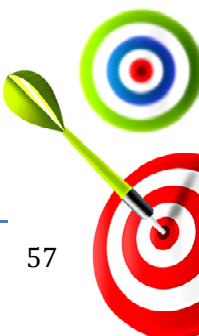
Στις δραστηριότητες 1, 2, 4, 5, 10 οι μαθητές χαρακτηρίζουν τετράπλευρα ως προς το είδος τους.

Στις δραστηριότητες 3, 6, 7, 14 και 15 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, εφαρμόζοντας τα αντίστοιχα κριτήρια.

Στις δραστηριότητες 8, 9 και 12, οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ειδικό παραλληλόγραμμο, εφαρμόζοντας τα αντίστοιχα κριτήρια.

Στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές υπολογίζουν τα μήκη ευθύγραμμων τμημάτων σε ορθογώνιο τρίγωνο, εφαρμόζοντας θεωρήματα στο τρίγωνο.

Στις δραστηριότητες 13, 16 και 17 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι τραπέζιο ή ισοσκελές τραπέζιο, εφαρμόζοντας τα αντίστοιχα κριτήρια.



Στη δραστηριότητα 18 οι μαθητές αποδεικνύουν μια σχέση ευθύγραμμων τμημάτων, χρησιμοποιώντας ιδιότητες παραλληλογράμμου και κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Τέλος, στη δραστηριότητα 19 οι μαθητές αποδεικνύουν μιαν ανισοτική σχέση ευθύγραμμων τμημάτων, χρησιμοποιώντας ιδιότητες παραλληλογράμμου και ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές υπολογίζουν την τιμή μεταβλητής, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες παραλληλογράμμου.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο, εφαρμόζοντας τα αντίστοιχα κριτήρια.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, εφαρμόζοντας τα αντίστοιχα κριτήρια.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές εκφράζουν μια ταξινόμηση τετραπλεύρων με βένναιο διάγραμμα.

Τέλος, στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα, εφαρμόζοντας θεωρήματα στα τρίγωνα.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί και με γραπτό τελικό διαγώνισμα.

