

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Α' Τεύχος

Αναθεωρημένη Έκδοση

ΠΑΙΔΑΓΟΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Α' τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Τεύχος

- Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Λοϊζιάς Σωτήρης
Ματθαίου Κυριάκος
Μαυροκορδάτου Μερóπη
Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας
- Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
- Εποπτεία: Καλλεπίτη Ευτυχία, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Φιλίππου Ανδρέας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Γιασουμής Νικόλας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
- Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
- Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
- Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2012

Β΄ έκδοση 2013

Γ΄ έκδοση 2014

Δ΄ έκδοση 2015

Ε΄ έκδοση 2016

Εκτύπωση: Hermes Media Press Ltd

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-015-0



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϋδεάζονται ως προς το τι «... θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει ...», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δρ Κυπριανός Δ Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

08/01/2016

Επανάληψη

- Επανάληψη από την Α' – Β' Γυμνασίου 9

1. Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

- Αξιοσημείωτες Ταυτότητες $(\alpha \pm \beta)^2$ 20
- Αξιοσημείωτη Ταυτότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ 26
- Αξιοσημείωτες Ταυτότητες $(\alpha + \beta)^3$ και $(\alpha - \beta)^3$ 30

2. Παραγοντοποίηση – Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

- Εισαγωγή στην Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων 43
- Μέθοδοι Παραγοντοποίησης (Κοινός Παράγοντας – Ομαδοποίηση) 48
- Μέθοδοι Παραγοντοποίησης (Διαφορά δύο Τετραγώνων – Διαφορά και Άθροισμα δύο Κύβων) 54
- Μέθοδοι Παραγοντοποίησης (Τριώνυμο – Τέλειο Τετράγωνο) 58
- Εξισώσεις Δεύτερου και Ανώτερου Βαθμού 63
- Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις 72
- Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων 76
- Πρόσθεση – Αφαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων 81

3. Γεωμετρία

- Ανισοτικές Σχέσεις στα Τρίγωνα 100
- Ίσα σχήματα - Ισότητα τριγώνων 104
- Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων 109
- Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων 117

4. Τριγωνομετρία

- Τριγωνομετρικοί Αριθμοί 135
- Επίλυση Τριγώνου 144

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

157

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Επανάληψη



... από την Α' και Β' Γυμνασίου



Επανάληψη από την Α' και Β' Γυμνασίου

Δραστηριότητες



1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \quad (-2) \cdot (-3)$$

$$(\beta) \quad (-2) + (-3)$$

$$(\gamma) \quad (-2) - (-3)$$

$$(\delta) \quad -2 + 5 - 3$$

$$(\epsilon) \quad -3 + 4 - |-5|$$

$$(\sigma\tau) \quad (-3 - 5) : (-4)$$

$$(\zeta) \quad (-3) - (-5) \cdot (+4)$$

$$(\eta) \quad (-3) : (-1) + (-5) \cdot (+4)$$

$$(\theta) \quad (-3)^3 + (-5)^2 - (-1)^4$$

$$(\iota) \quad (-5) : (-4 + 3)^2$$

2. Να χαρακτηρίσετε τον καθένα από τους πιο κάτω αριθμούς, ως ρητό ή άρρητο αριθμό:

$$\sqrt{21}, \quad \frac{3}{5}, \quad \sqrt[3]{8}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \pi, \quad \sqrt{9}, \quad -2, \quad \sqrt[3]{9}$$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) \quad \sqrt{81} - \sqrt[3]{27}$$

$$(\beta) \quad \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

$$(\gamma) \quad \sqrt{5 - \sqrt{16}}$$

$$(\delta) \quad \sqrt{81} \cdot \sqrt{16}$$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \quad 8a - 2a$$

$$(\beta) \quad -2x + 3x - 5x - x$$

$$(\gamma) \quad -2xy - 7xy + 4xy$$

$$(\delta) \quad (-5x^2) \cdot (-4x)$$

$$(\epsilon) \quad (-2x^2)^2$$

$$(\sigma\tau) \quad (2a\beta^2) \cdot (-6a^2\beta^5)$$

$$(\zeta) \quad (30x^6) : (-5x^2)$$

$$(\eta) \quad (-18y^2\omega^2) : (-6\omega y^2)$$

$$(\theta) \quad (-2a^2) \cdot (-a^2) + 5a^4$$

$$(\iota) \quad 6a^4\beta^3 - (-2a^3\beta) \cdot (3a\beta^2)$$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \quad 2x(3x + 5)$$

$$(\beta) \quad -3y^2(2y - 1)$$

$$(\gamma) \quad (a - 2)(a + 2)$$

$$(\delta) \quad (2a + 3)(a + 2)$$

$$(\epsilon) \quad (4x^2 - 5)(2x - 1)$$

$$(\sigma\tau) \quad (a + \beta)(a - \beta - \gamma)$$

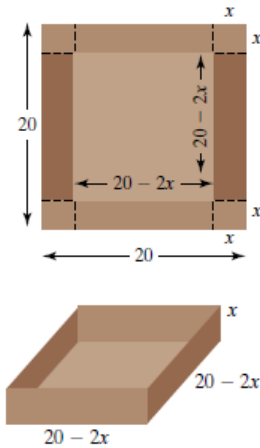
$$(\zeta) \quad (3x - 1)(x - 2) - 10x$$

$$(\eta) \quad 3a(a - 2\beta) - 3\beta(2\beta - a)$$

$$(\theta) \quad 3y^2(-2y + 3) - (2 - y)$$

$$(\iota) \quad -2(3a^2 + 4a - 2) + (2a - 1)$$

6. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $A = 3(x - 2y) - 2x + 5(y + 1)$
- (α) Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση στην πιο απλή της μορφή.
- (β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης, αν $x = 2$ και $y = -1$.
- (γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης, αν $x - y = 15$.



7. Ένα κουτί κατασκευάζεται από ένα τετράγωνο κομμάτι χαρτόνι με πλευρά 20 cm . Κόβουμε τα τετράγωνα από κάθε γωνία του και συμβολίζουμε με x το μήκος της πλευράς τους, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- (α) Για ποιες τιμές του x μπορεί να κατασκευαστεί το κουτί;
- (β) Να γράψετε ένα πολυώνυμο, συναρτήσεϊ του x , που να δίνει τον όγκο του κουτιού (να γίνει διάταξη του πολυωνύμου κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x).
- (γ) Να υπολογίσετε τον όγκο του κουτιού, αν τα τετράγωνα που θα αφαιρέσουμε από τις γωνίες του αρχικού χαρτονιού έχουν πλευρά 4 cm .

8. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

(α) $(8a^2 - 10a) : (2a)$

(β) $(9y^8 - 6y^6) : (-3y^3)$

(γ) $(9x^3\omega - 24x\omega^5) : (-3x\omega)$

(δ) $\frac{x^4y^5 - 4x^3y^2 + 2xy}{2xy}$

(ε) $(a^2 - 4a) : (a - 4)$

(στ) $(x^2 - x - 12) : (x - 4)$

(ζ) $(25x^2 + 10x + 4) : (5x + 1)$

9. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$A = 4x^4 - x^3 - x + 7$, $B = -x^4 + 5x^2 - 5$ και $\Gamma = x^2 + 1$

Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\Gamma - B + A$

(β) $(A + B) - 2\Gamma$

10. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 7x^2 - 5x + 4$ και $Q(x) = -3x^2 + 5x - 9$. Να υπολογίσετε:

(α) $P(-1)$

(β) $Q(+2)$

(γ) $A(x) = P(x) + Q(x)$

(δ) $A(-2)$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $2x - 6 = 4x - 2$

(β) $3(x - 1) + 3 = 3x$

(γ) $3x - 5(x + 1) = 2x - 3$

(δ) $5(x + 2) - 3(1 - x) = 8x + 6$

(ε) $x - \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{3} + \frac{3}{2}$

(στ) $\frac{2(\omega+1)}{4} - \frac{\omega-1}{2} = 1 + \frac{\omega}{6}$

12. Δίνεται ορθογώνιο του οποίου το μήκος είναι κατά 3 cm μεγαλύτερο από το πλάτος του. Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 46 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

13. Να λύσετε τα συστήματα:

(α) $x - y = -1$
 $2x + y = 4$

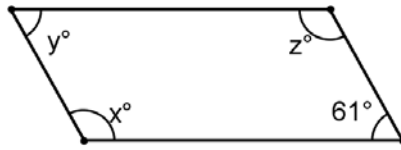
(β) $x + 2y = 3$
 $3x + 4y = 7$

14. Να εξετάσετε ποιες ιδιότητες ισχύουν για καθένα από τα πιο κάτω τετράπλευρα, σημειώνοντας «✓».

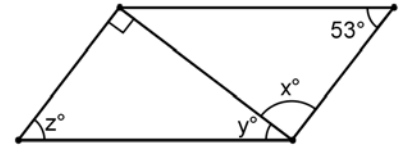
ΙΔΙΟΤΗΤΑ	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Τετράγωνο	Ρόμβος
Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.				
Οι διαγώνιοι είναι ίσες.				
Οι πλευρές είναι ίσες.				
Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.				
Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.				
Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.				
Οι γωνίες του είναι 90°.				
Δυο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές.				
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.				
Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.				

15. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z στα πιο κάτω παραλληλόγραμμα:

(α)



(β)



16. Ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει διαστάσεις διπλάσιες από τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου $K\Lambda MN$. Να συγκρίνετε:

(α) το εμβαδόν των δύο ορθογωνίων

(β) την περίμετρο των δύο ορθογωνίων

17. Δίνεται η ευθεία ε_1 με εξίσωση $y = 2x$.

(α) Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $(2,1)$ και $(-2,-4)$ ανήκουν στην ευθεία ε_1 .

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε_1 με τους άξονες.

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας ε_1 .

(δ) Στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις ευθείες (ε_2): $x = 2$ και (ε_3): $y = -1$.

18. Η ευθεία $y = ax + \beta$ περνά από τα σημεία $A(0, -4)$ και $B(1, -2)$.

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β .

(β) Να παραστήσετε γραφικά την πιο πάνω ευθεία.

(γ) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.

19. Δίνεται η συνάρτηση $-5x + 6y = 30$.

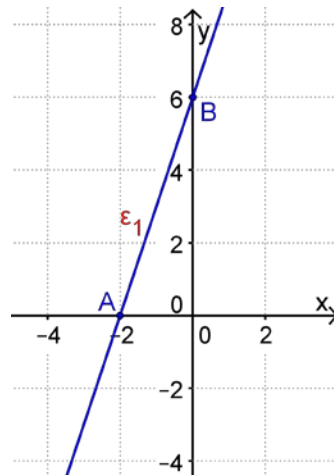
(α) Αν K και Λ είναι τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες x και y αντίστοιχα, να βρεθούν οι συντεταγμένες των K και Λ .

(β) Να παραστήσετε γραφικά την πιο πάνω ευθεία.

(γ) Αν M είναι η αρχή των αξόνων να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $MK\Lambda$.

20. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας ε_1 .

- (α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε_1 .
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 .
- (γ) Στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε την ευθεία $\varepsilon_2: y = 6 - 3x$.
- (δ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου B το σημείο τομής της ε_2 με τον άξονα των x .



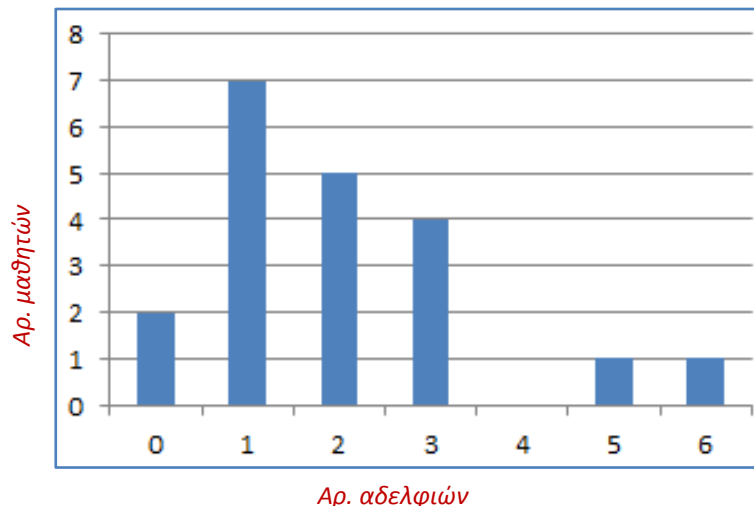
21. Σε ένα Λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών στο τέλος του β' τετραμήνου. Οι μαθητές πήραν τις ακόλουθες βαθμολογίες:

15, 11, 10, 10, 14, 16, 19, 18, 13, 17

Να βρείτε:

- (α) τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 10 μαθητών
- (β) τη διάμεσο της βαθμολογίας των 10 μαθητών
- (γ) το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό μικρότερο από τη μέση τιμή της βαθμολογίας

22. Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει πόσα αδέρφια έχουν οι μαθητές μιας τάξης.



Να υπολογίσετε:

- (α) τη μέση τιμή
- (β) τη διάμεσο
- (γ) την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων



23. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αφού καταγράψετε τον δειγματικό χώρο, να βρείτε την πιθανότητα:
- A: το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι μικρότερο του 6
 - B: η ένδειξη και στα δύο ζάρια να είναι 5
 - Γ: το γινόμενο των δύο ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός
 - Δ: η μια τουλάχιστον ένδειξη να είναι 4
 - Ε: τα ζάρια να μην έχουν την ίδια ένδειξη

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να εφαρμόζουμε τις ταυτότητες:
 - $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 - $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
 - $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
 - $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
 - $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- Να αποδεικνύουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά (όπου είναι δυνατόν) τις ταυτότητες.
- Να μοντελοποιούμε και να επιλύουμε προβλήματα με χρήση ταυτοτήτων.





Λύση Προβλήματος

Ο Jean Baptiste, φωτογράφος ζώων, στη διάρκεια μιας εξόρμησης που διήρκησε έναν χρόνο, τράβηξε πολλές φωτογραφίες πιγκουίνων και των νεοσσών τους.

Το ενδιαφέρον του επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη του μεγέθους διαφορετικών αποικιών πιγκουίνων.

Ερώτηση 1:

Υπό κανονικές συνθήκες, ένα ζευγάρι πιγκουίνων παράγει δύο αυγά κάθε χρόνο. Συνήθως επιζεί ο νεοσσός του μεγαλύτερου από τα δύο αυγά. Στους πιγκουίνους "Ροκχόπερ" (Rockhopper), το πρώτο αυγό ζυγίζει περίπου 78 g και το δεύτερο αυγό ζυγίζει περίπου 110 g.

Πόσα τοις εκατό, κατά προσέγγιση, είναι βαρύτερο το δεύτερο αυγό σε σχέση με το πρώτο αυγό;

- | | |
|--------|--------|
| A. 29% | B. 32% |
| Γ. 41% | Δ. 71% |

Ερώτηση 2:

Ο Jean αναρωτιέται πως θα μεταβάλλεται το μέγεθος της αποικίας των πιγκουίνων τα επόμενα λίγα χρόνια. Για να το διαπιστώσει αυτό, κάνει τις εξής υποθέσεις:

- Στην αρχή του έτους, η αποικία αποτελείται από 10 000 πιγκουίνους (5 000 ζευγάρια).
- Κάθε ζεύγος πιγκουίνων μεγαλώνει ένα νεοσσό κατά τη διάρκεια της άνοιξης κάθε έτους.
- Μέχρι το τέλος κάθε έτους, το 20% των πιγκουίνων (ενήλικες και νεοσσοί) πεθαίνουν.

Με βάση τις πιο πάνω υποθέσεις, πόσοι πιγκουίνοι θα υπάρχουν στην αποικία (ενήλικες και νεοσσοί) στο τέλος του πρώτου έτους;

Ερώτηση 3:

Ο Jean υπολογίζει ότι η αποικία θα συνεχίσει να αναπτύσσεται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Στην αρχή κάθε έτους, η αποικία αποτελείται από ίσο αριθμό αρσενικών και θηλυκών πιγκουίνων, οι οποίοι γίνονται ζευγάρια.
- Κάθε ζεύγος πιγκουίνων γεννά έναν νεοσσό την άνοιξη κάθε χρόνου.
- Με το τέλος του χρόνου το 20% όλων των πιγκουίνων (ενήλικες και νεοσσοί) θα πεθάνουν.
- Οι πιγκουίνοι ηλικίας ενός έτους γεννούν, επίσης, νεοσσοίς.

Με βάση τις πιο πάνω υποθέσεις, ποιος από τους πιο κάτω τύπους περιγράφει τον συνολικό αριθμό των πιγκουίνων Π, μετά από 7 χρόνια;



$$A. \Pi = 10000 \cdot (1,5 \cdot 0,2)^7 \quad B. \Pi = 10000 \cdot (1,5 \cdot 0,8)^7$$

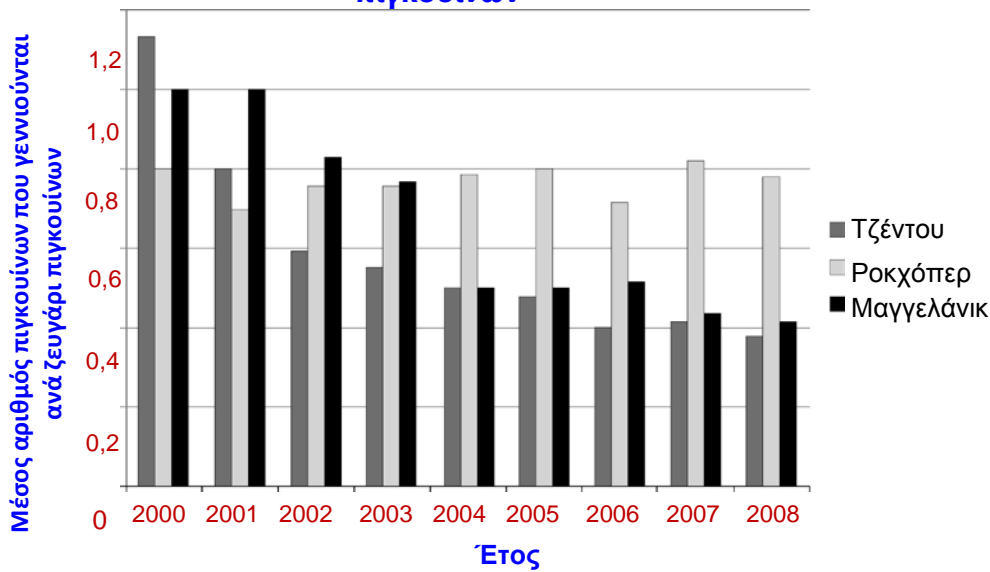
$$Γ. \Pi = 10000 \cdot (1,2 \cdot 0,2)^7 \quad Δ. \Pi = 10000 \cdot (1,2 \cdot 0,8)^7$$

Ερώτηση 4:

Επιστρέφοντας από το ταξίδι του, ο Jean Baptiste, αναζήτησε στο διαδίκτυο πληροφορίες για τον αριθμό των νεοσσών που γεννά κατά μέσο όρο ένα ζευγάρι πιγκουίνων.

Βρήκε το πιο κάτω ραβδόγραμμα για τρία είδη πιγκουίνων: Τζέντου (Gentoo), Ροκχόπερ (Rockhopper) και Μαγγελάνικ (Magellanic).

Ετήσιος αριθμός πιγκουίνων που γεννιούνται ανά ζευγάρι πιγκουίνων



Με βάση το πιο πάνω ραβδόγραμμα, να εξετάσετε κατά πόσο οι ακόλουθες δηλώσεις για τα τρία είδη πιγκουίνων είναι ορθές ή λανθασμένες. Να βάλετε σε κύκλο "Ορθό" ή "Λάθος" για κάθε δήλωση.

Δήλωση	
Ο μέσος αριθμός νεοσσών που γεννήθηκαν το 2000 ανά ζευγάρι πιγκουίνων ήταν μεγαλύτερος από 0,6.	Ορθό / Λάθος
Το 2006, κατά μέσο όρο, λιγότερο από το 80% των πιγκουίνων γέννησε έναν νεοσσό.	Ορθό / Λάθος
Γύρω στο 2015 αυτά τα τρία είδη πιγκουίνων θα εξαφανιστούν.	Ορθό / Λάθος
Ο μέσος αριθμός των νεοσσών πιγκουίνων Μαγγελάνικ (Magellanic) που γεννήθηκαν από κάθε ζευγάρι μειώθηκε μεταξύ 2001 και 2004.	Ορθό / Λάθος

PISA 2012

Έχουμε μάθει ...

▪ Ιδιότητες δυνάμεων:

$$\triangleright \alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

$$\triangleright (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$$

$$\triangleright \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}, \beta \neq 0$$

$$\triangleright \alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$$

$$\triangleright (\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$$

$$\triangleright \alpha^{-\mu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\mu = \frac{1}{\alpha^\mu}, \alpha \neq 0$$

▪ Ιδιότητες ριζών:

$$\triangleright (\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$$

$$\triangleright \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}, \alpha, \beta \geq 0$$

$$\triangleright \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, \alpha \geq 0, \beta > 0$$

$$\triangleright (\sqrt[3]{a})^3 = a, a \geq 0$$

$$\triangleright \sqrt[3]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta}, \alpha, \beta \geq 0$$

$$\triangleright \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}, \alpha \geq 0, \beta > 0$$

▪ **Μονώνυμο** ονομάζεται κάθε γινόμενο το οποίο αποτελείται από πραγματικό αριθμό και μεταβλητές με εκθέτη μη αρνητικό ακέραιο αριθμό.

Παραδείγματα: $-3x$, x^2 , -5 , $\frac{4}{3}a\beta$, $-x^2y^3$, $\frac{a^3\beta^2}{7}$

▪ Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας ονομάζεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο των μεταβλητών του ονομάζεται **κύριο μέρος**. Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ **βαθμός** του μονωνύμου λέγεται το άθροισμα των εκθετών όλων των μεταβλητών του.

Παραδείγματα: $-2x^2y$ Συντελεστής: -2 Κύριο μέρος: x^2y
Το μονώνυμο $-2x^2y$ είναι 2^{ου} βαθμού ως προς x , 1^{ου} βαθμού ως προς y και 3^{ου} βαθμού ως προς x και y

▪ Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος ονομάζονται **όμοια μονώνυμα**. Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα μονώνυμα** ενώ τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές λέγονται **αντίθετα μονώνυμα**.

Παράδειγμα:

Τα μονώνυμα $-8a^3\beta$ και $2a^3\beta$ είναι όμοια, γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος ($a^3\beta$).

Τα μονώνυμα $-2x^2y$ και $+2x^2y$ είναι αντίθετα.

▪ Άθροισμα μονωνύμων

Άθροισμα μονωνύμων λέγεται η αλγεβρική παράσταση που προκύπτει όταν γράψουμε τα μονώνυμα το ένα μετά το άλλο με το πρόσημό τους.

Το άθροισμα **όμοιων** μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, το οποίο έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους. Η πρόσθεση όμοιων μονωνύμων ονομάζεται **αναγωγή ομοίων** όρων.

Παράδειγμα: $3xy^2 - 7xy^2 = (3 - 7)xy^2 = -4xy^2$

▪ Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο, το οποίο έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές των μονωνύμων και καθεμιά με εκθέτη, το άθροισμα των εκθετών που έχει στα μονώνυμα.

Παράδειγμα:

$$(-2a^2) \cdot (3a\beta^4) = (-2 \cdot 3) \cdot a^2 \cdot a \cdot \beta^4 = -6a^{2+1}\beta^4 = -6a^3\beta^4$$

▪ Διάρθρωση μονωνύμων

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, διαιρούμε τους συντελεστές τους και διαιρούμε και τα κύρια μέρη τους.

Παράδειγμα: $(8a^5\gamma) : (4a^2\gamma^3) = \frac{8a^5\gamma}{4a^2\gamma^3} = \frac{8}{4} \cdot a^{5-2} \cdot \gamma^{1-3} = 2a^3\gamma^{-2} = \frac{2a^3}{\gamma^2}$

- **Πολυώνυμο** ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μονωνύμων. Τα μονώνυμα που αποτελούν το πολυώνυμο λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.

Παράδειγμα: Η αλγεβρική παράσταση $2x^2 - 5 + 2x$ είναι ένα πολυώνυμο. Οι όροι του πολυωνύμου είναι: $2x^2$, -5 και $2x$.

- **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή ή τις μεταβλητές αυτές. **Βαθμός** ενός πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς όλες τις μεταβλητές του.

Παράδειγμα:

$$-3x^2 + 2x \quad 2^{\text{ου}} \text{ βαθμού}, \quad 3xy - 2x^3 + 3 \quad 3^{\text{ου}} \text{ βαθμού}$$

▪ Πρόσθεση πολυωνύμων

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερα πολυώνυμα σχηματίζουμε το πολυώνυμο με όρους όλους τους όρους των δοσμένων πολυωνύμων και μόνο αυτούς (στη συνέχεια προχωρούμε σε αναγωγή ομοίων όρων).

Παράδειγμα: $(2x^2 - 5x + 2) - (x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 5x + 2 - x^2 + 4x - 1$
 $= 2x^2 - x^2 - 5x + 4x + 2 - 1$
 $= x^2 - x + 1$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

▪ Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες $(\alpha \pm \beta)^2$

Διερεύνηση (1)

Σε ένα τηλεπαιχνίδι μαθηματικών για ταλαντούχους μαθητές της Γ' Γυμνασίου, η Νεφέλη, μπόρεσε σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα να υπολογίσει προφορικά τις πιο κάτω δυνάμεις:

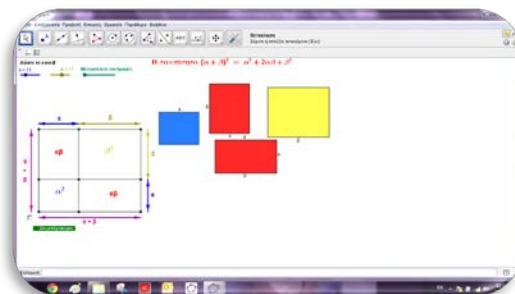
- 41^2
- 101^2
- 999^2
- 105^2

Με το τέλος της διαδικασίας, η Νεφέλη εξήγησε στους συμμαθητές της τον τρόπο που εργαζόταν. Αρχικά, μετέτρεπε τη βάση της δύναμης σε άθροισμα ή διαφορά δύο αριθμών και ακολούθως εφαρμόζε τον τύπο που ανακάλυψε ότι ισχύει για $(\alpha + \beta)^2$ και $(\alpha - \beta)^2$.

- ✓ Να εξετάσετε ποιος τύπος ισχύει για το ανάπτυγμα των $(\alpha + \beta)^2$ και $(\alpha - \beta)^2$.
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το πιο πάνω συμπέρασμα ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών, δίνοντας ένα παράδειγμα.



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En1_Tautotites.ggb» για να διερευνήσετε και γεωμετρικά το συμπέρασμά σας.



- ✓ Πώς νομίζετε ότι ανέλυσε τις πιο πάνω δυνάμεις η Νεφέλη, για να υπολογίσει εύκολα και γρήγορα το αποτέλεσμα;

$$41^2 = (\dots \dots)^2 =$$

$$101^2 = (\dots \dots)^2 =$$

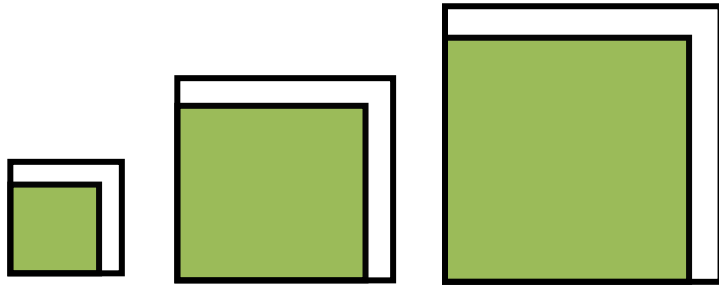
$$999^2 = (\dots \dots)^2 =$$

$$105^2 = (\dots \dots)^2 =$$

Διερεύνηση (2)

Σε μια δεύτερη δοκιμασία οι κριτές έδωσαν τις ακόλουθες οδηγίες στους διαγωνιζόμενους:

«Κάθε φορά θα σας δίνεται ένα τετράγωνο με συγκεκριμένη πλευρά (π.χ. 45 cm, 105 cm, 567 cm, ...). Στη συνέχεια το μήκος της πλευράς του τετραγώνου θα αυξάνεται κατά μία μονάδα. Εσείς θα καλείστε να υπολογίσετε πόσο μεγαλύτερο θα είναι το εμβαδόν του νέου τετραγώνου».



Ο Χρίστος έλυσε με ευκολία τη δοκιμασία και σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα. Ανακάλυψε έναν τρόπο για να υπολογίζει την αύξηση του εμβαδού, χωρίς να υπολογίζει κάθε φορά ξεχωριστά τα δύο εμβαδά και ακολούθως να υπολογίζει τη διαφορά τους.

- ✓ Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα και να προσπαθήσετε να βρείτε τον κανόνα που ανακάλυψε ο Χρίστος.
(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική σας για τους υπολογισμούς)

Πλευρά αρχικού τετραγώνου	Πλευρά νέου τετραγώνου	Διαφορά των δύο εμβαδών
1	2	3
3		
5		
10		
501		

- ✓ Πώς μπορούμε να αποδείξουμε τον κανόνα που σκέφτηκε ο Χρίστος για να μπορεί να υπολογίζει γρήγορα την κάθε διαφορά για οποιαδήποτε πλευρά τετραγώνου του δοθεί;

Μαθαίνω

- **Αλγεβρική ταυτότητα** είναι κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Παράδειγμα:

$$\omega(x + y) = \omega \cdot x + \omega \cdot y$$

- Κάποιες από τις πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:
 - **Τετράγωνο αθροίσματος δύο όρων:** Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο όρων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο όρων, αυξημένο κατά το διπλάσιο του γινομένου αυτών.

$$\text{Δηλαδή: } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} (\alpha + 3)^2 &= \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 3 + 3^2 \\ &= \alpha^2 + 6\alpha + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 32^2 &= (30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 \\ &= 900 + 120 + 4 \\ &= 1024 \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα τετραγώνου αθροίσματος δύο όρων είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει ύστερα από την εκτέλεση όλων των πράξεων.

Δηλαδή το **ανάπτυγμα** του $(\alpha + \beta)^2$ είναι η παράσταση: $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Το αριστερό μέλος της ισότητας το ονομάζουμε ως «Α' μέλος» και το δεξιό μέλος της ισότητας ως «Β' μέλος».

Όταν έχουμε να αποδείξουμε μια ταυτότητα μπορούμε να ξεκινήσουμε από το ένα μέλος και να καταλήξουμε στο άλλο.

$$\begin{aligned} A_{\text{μέλος}} &= \dots = B_{\text{μέλος}} \\ B_{\text{μέλος}} &= \dots = A_{\text{μέλος}} \end{aligned}$$

Μπορούμε, επίσης, να προχωρήσουμε και τα δύο μέλη έως ένα σημείο και να διαπιστώσουμε την ισότητά τους, δηλαδή:

$$\begin{aligned} A_{\text{μέλος}} &= \Gamma \\ B_{\text{μέλος}} &= \Gamma \quad A_{\text{μέλος}} = B_{\text{μέλος}} \end{aligned}$$

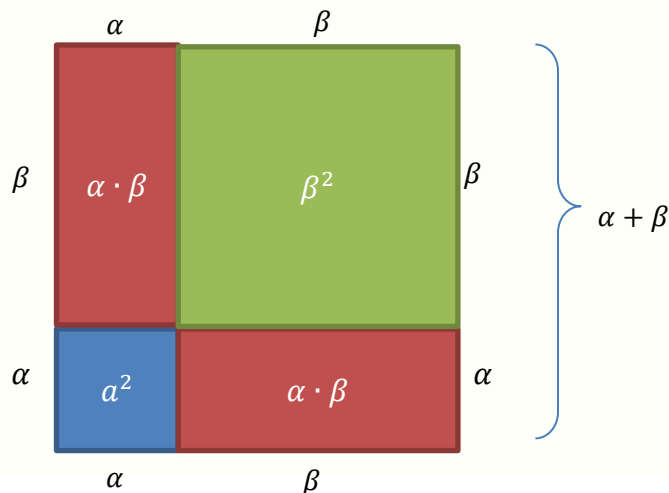
Απόδειξη:

Ονομάζουμε το αριστερό μέλος της ισότητας ως «Α' μέλος» και το δεξιό μέλος της ισότητας ως «Β' μέλος». Θα κάνουμε τις πράξεις στο Α' μέλος και θα οδηγηθούμε με διαδοχικά βήματα στο Β' μέλος.

$$\begin{aligned} A' \text{ μέλος} &= (\alpha + \beta)^2 \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) && \text{Εκτελούμε τις πράξεις} \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &= B' \text{ μέλος} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\text{Γεωμετρική ερμηνεία: } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$



- **Τετράγωνο διαφοράς δύο όρων:** Το τετράγωνο της διαφοράς δύο όρων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο όρων, μειωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο αυτών.

$$\text{Δηλαδή: } (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} (a - 3)^2 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 \\ &= a^2 - 6a + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19^2 &= (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 400 - 40 + 1 \\ &= 361 \end{aligned}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} A' \text{ μέλος} &= (\alpha - \beta)^2 \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) && \text{Εκτελούμε τις πράξεις} \\ &= \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 \\ &= \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &= B' \text{ μέλος} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2.$$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) (x + 2)^2 & (\beta) (2x - 3\psi)^2 \\ (\gamma) \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 & (\delta) (\sqrt{5} + 2)^2 \end{array}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} (\alpha) (x + 2)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4 \\ (\beta) (2x - 3\psi)^2 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3\psi + (3\psi)^2 = 4x^2 - 12x\psi + 9\psi^2 \\ (\gamma) \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 + 2^2 = \frac{x^2}{4} - 2x + 4 \\ (\delta) (\sqrt{5} + 2)^2 &= (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ισχύει:
 $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha, \alpha \geq 0$

2. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(a + 1)^2 - 1 = a(a + 2)$

Λύση:

Α' τρόπος:

Ξεκινάμε από το Α' μέλος για να φθάσουμε στο Β' μέλος.

$$\begin{aligned} A' \text{ μέλος} &= (a + 1)^2 - 1 && \text{Εφαρμόζουμε την ταυτότητα} \\ &= (\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 1 + 1^2) - 1 && (\alpha + \beta)^2. \\ &= a^2 + 2a + 1 - 1 && \text{Κάνουμε αναγωγή ομοίων} \\ &= a^2 + 2a && \text{όρων.} \\ &= a(a + 2) && \text{Εφαρμόζουμε το αντίστροφο} \\ &= B' \text{ μέλος} && \text{της επιμεριστικής ιδιότητας.} \end{aligned}$$

ή **Β' τρόπος:**

Αναπτύσσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας

$$\begin{aligned} A' \text{ μέλος} &= (\alpha + 1)^2 - 1 && \text{Εφαρμόζουμε την ταυτότητα } (\alpha + \beta)^2. \\ &= (\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 1 + 1^2) - 1 && \text{Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.} \\ &= \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 1 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' \text{ μέλος} &= \alpha(\alpha + 2) && \text{Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.} \\ &= \alpha^2 + 2\alpha \end{aligned}$$

Άρα, $A' \text{ μέλος} = B' \text{ μέλος}$. Επομένως, ισχύει: $(\alpha + 1)^2 - 1 = \alpha(\alpha + 2)$

3. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 3$, αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι.

Λύση:

Οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι. Άρα, ισχύει: $\alpha + \beta = 0$

Η παράσταση $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ είναι ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου. Άρα,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 3 &= (\alpha + \beta)^2 + 3 \\ &= 0^2 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες



1. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω ισότητες είναι ταυτότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

Ισότητα	
(α) $x = 5$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(β) $6x = 4x + 2x$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(γ) $0x = 0$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(δ) $x = 1 + y$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(ε) $\alpha \cdot \beta = 0$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(στ) $2(\alpha + \beta) = 2\alpha + \beta$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

2. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) (\alpha + 1)^2 & (\beta) (y - 3)^2 & (\gamma) (7 - \mu)^2 \\ (\delta) (6 + x)^2 & (\epsilon) (4\kappa - 1)^2 & (\sigma\tau) (3x + 2)^2 \\ (\zeta) (5x - \psi^2)^2 & (\eta) (5 + \sqrt{2})^2 & (\theta) (2\omega^2 + y^3)^2 \\ (\iota) \left(\frac{x}{4} - 3\right)^2 & (\iota\alpha) \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 & (\iota\beta) \left(\frac{x-3}{5}\right)^2 \end{array}$$

3. Ο Αλέξης έκανε βιαστικά τις πιο κάτω πράξεις και δεν είχε χρόνο να τις ελέγξει. Να ελέγξετε τις πράξεις του και να διορθώσετε τυχόν λάθη.

$$(x - 2)^2 = x^2 + 4$$

$$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16^2$$

$$(x - 5)^2 = x^2 + 10 - 25$$

$$(3x + 2)^2 = 9x^2 + 4 + 12x$$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(\kappa - 1)^2 + (\kappa + 1)^2$ (β) $(2x + 1)^2 - 2x(2 - x)$

(γ) $(2a + 3)^2 - (1 - 2a)^2$ (δ) $(2\beta - 3)^2 + (\beta - 1)(\beta - 1)$

5. Να συμπληρώσετε τα τετράγωνα, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $(y + \square)^2 = y^2 + 4y + 4$ (β) $(x + \square)^2 = 9 + 6x + x^2$

(γ) $(\square + \square)^2 = 25 + x^2 + 10x$ (δ) $(\square - \square)^2 = -20y + 4y^2 + 25$

(ε) $(5 - \square)^2 = \square + 16\beta^2 - 40\beta$ (στ) $(\square + \square)^2 = y^6 + x^4 + \square$

6. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις είναι τέλεια τετράγωνα:

(α) $x^2 - 4x + 4$ (β) $9x^2 + 6x + 1$

(γ) $4x^2 + 4x + 25$ (δ) $x^2 + 8x - 16$

(ε) $\alpha^2 - 6\alpha + 3$ (στ) $\omega^2 - 2\omega + 1$

Τέλειο τετράγωνο
ονομάζουμε το ανά-
πτυγμα των $(\alpha \pm \beta)^2$

7. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ αν $\alpha + \beta = 5$

(β) $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$ αν $\kappa - \lambda = 2$

(γ) $x^2 + 6xy + 9y^2$ αν $x + 2y = 1 - y$

8. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $(\omega - 2)^2 - (\omega + 2)^2 = -8\omega$

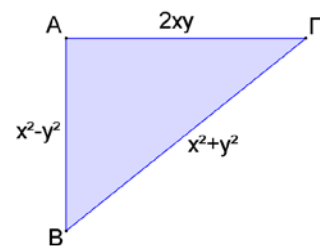
(β) $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$

(γ) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 4\alpha^2\beta^2$

(δ) $\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 2 = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2$

(ε) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

9. Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) αν $x > y$.



10. Δίνεται η παράσταση $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)^2$.

(α) Να δείξετε ότι η παράσταση είναι ανεξάρτητη του α .

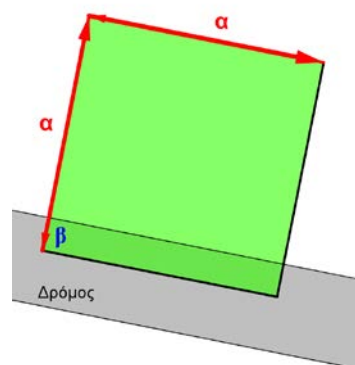
(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\left(\frac{12}{34} + \frac{34}{12}\right)^2 - \left(\frac{34}{12} - \frac{12}{34}\right)^2$

Αξιοσημείωτη ταυτότητα

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$$

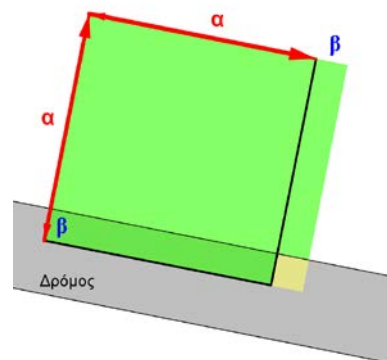
Διερεύνηση

Ο κύριος Γιάννης έχει ένα οικοπέδο, σχήματος τετραγώνου το οποίο εφάπτεται του αυτοκινητόδρομου Λευκωσίας – Λεμεσού. Λόγω της διαπλάτυνσης που θα γίνει στον δρόμο, θα πρέπει να παραχωρηθεί ένα ορθογώνιο μέρος του οικοπέδου πλάτους β , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

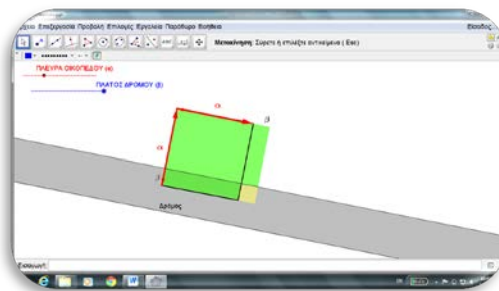


Η αρμόδια υπηρεσία του πρότεινε να του παραχωρήσει ένα ορθογώνιο κομμάτι γης πλάτους β από το γειτονικό κρατικό τεμάχιο.

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο η πρόταση αυτή συμφέρει τον κύριο Γιάννη.
- ✓ Ποιο θα είναι το εμβαδόν του νέου οικοπέδου;



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En1_oikopedo.ggb», να μεταβάλετε τις τιμές των διαστάσεων α και β και να εξετάσετε κατά πόσο το πιο πάνω συμπέρασμά σας ισχύει για κάθε τιμή του μήκους και του πλάτους.



- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο η ισότητα $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$, ισχύει για διαφορετικές τιμές των α και β .
- ✓ Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Μαθαίνω

- **Γινόμενο του αθροίσματος επί τη διαφορά δύο όρων:**
Το γινόμενο του αθροίσματος δύο όρων επί τη διαφορά τους, είναι ίσο με τη διαφορά των τετραγώνων των δύο όρων.
Δηλαδή: $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned}(\alpha - 3)(\alpha + 3) &= \alpha^2 - 3^2 \\ &= \alpha^2 - 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}32 \cdot 28 &= (30 + 2)(30 - 2) \\ &= 30^2 - 2^2 \\ &= 900 - 4 \\ &= 896\end{aligned}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}A' \text{ μέλος} &= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta - \beta\alpha - \beta^2 \\ &= \alpha^2 - \beta^2 \\ &= B' \text{ μέλος}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \quad (a - 5)(a + 5) \qquad (\beta) \quad (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$$

$$(\gamma) \quad (2 - \omega)(\omega + 2) \qquad (\delta) \quad 2\kappa^2 - (\kappa - 1)(\kappa + 1)$$

Λύση:

Εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(a - \beta)(a + \beta)$.

$$(\alpha) \quad (a - 5)(a + 5) = a^2 - 5^2 = a^2 - 25$$

$$(\beta) \quad (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{aligned}(\gamma) \quad (2 - \omega)(\omega + 2) &= (2 - \omega)(2 + \omega) \\ &= 2^2 - \omega^2 \\ &= 4 - \omega^2\end{aligned}$$

Αντιμεταθετική Ιδιότητα της Πρόσθεσης.

Αρχικά υπολογίζουμε το γινόμενο, εφαρμόζοντας την ταυτότητα $(a - \beta)(a + \beta)$.

$$\begin{aligned} (\delta) \quad 2\kappa^2 - (\kappa - 1)(\kappa + 1) &= 2\kappa^2 - (\kappa^2 - 1) && \text{Απαλείφουμε παρεν-} \\ &= 2\kappa^2 - \kappa^2 + 1 && \text{θέσεις και κάνουμε} \\ &= \kappa^2 + 1 && \text{αναγωγή ομοίων όρων.} \end{aligned}$$

Δραστηριότητες



1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \quad (x - 3)(x + 3) \qquad (\beta) \quad (2x - 1)(2x + 1)$$

$$(\gamma) \quad (\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 1) \qquad (\delta) \quad (x^3 - 2\omega)(x^3 + 2\omega)$$

$$(\epsilon) \quad \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \qquad (\sigma\tau) \quad (5 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})$$

$$(\zeta) \quad (3a - 1)(1 + 3a) \qquad (\eta) \quad (3y + 5)(5 - 3y)$$

2. Να συμπληρώσετε τα τετράγωνα, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ταυτότητες.

$$(\alpha) \quad (4a - \square)(\square + 1) = \square - 1$$

$$(\beta) \quad (\psi - \square)(\square + 8) = \psi^2 - \square$$

$$(\gamma) \quad (2\beta + \square)(\square - \square) = 64\alpha^4 - \square$$

$$(\delta) \quad (\square - \square)(\square + 5\alpha^3) = \frac{\psi^2}{9} - \square$$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \quad (v - 3)(v + 3)(v^2 + 9) \qquad (\beta) \quad (x + 2)(x - 2) + 3x - 5$$

$$(\gamma) \quad (\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1) - 1 \qquad (\delta) \quad (4x - 1)(4x + 1) + (4x + 2)^2$$

$$(\epsilon) \quad 2x^2 - (2x + 3)(2x - 3) \qquad (\sigma\tau) \quad x(x - 1)(1 + x) - x^3$$

4. Να εφαρμόσετε τις ταυτότητες, για να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \quad 103^2 \qquad (\beta) \quad 29 \cdot 29$$

$$(\gamma) \quad 101 \cdot 99 \qquad (\delta) \quad 198 \cdot 202$$

5. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

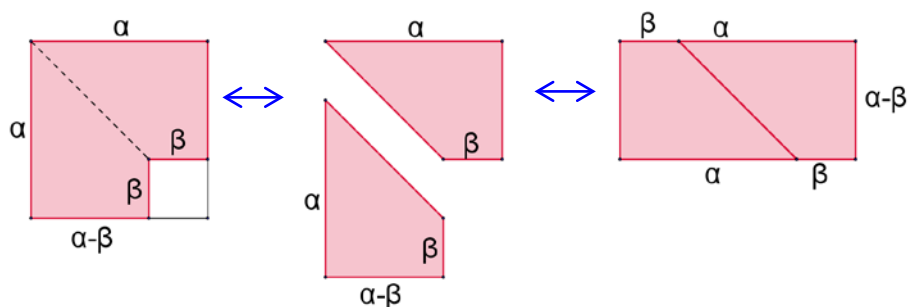
(α) $(\alpha - 1)^2 + 2\alpha = (\alpha - 1)(\alpha + 1) + 2$

(β) $(x - y)(x + y) + 2y^2 = (x - y)^2 + 2xy$

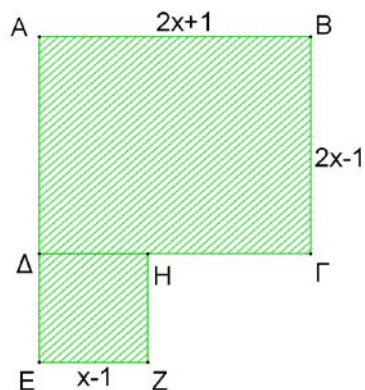
(γ) $(\beta - 1)(\beta + 1)(\beta^2 + 1)(\beta^4 + 1) - \beta^8 = -1$

(δ) $[(\alpha - 3\beta)^2 + 6\alpha\beta](\alpha^2 - 9\beta^2) = \alpha^4 - 81\beta^4$

6. Να εξηγήσετε την πιο κάτω γεωμετρική ερμηνεία της απόδειξης της ταυτότητας $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$:



7. Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος, αν το ΔHZE είναι τετράγωνο πλευράς $x - 1$ και το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο διαστάσεων $2x + 1$ και $2x - 1$.



8. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$A = (3\alpha + 1)^2 + (\alpha - 3)^2 + 10(1 - \alpha)(1 + \alpha)$
είναι σταθερό.

9. Αν $xy = 1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$A = (x - y)^2 - (x - 3)(x + 3) - y^2$

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

$(\alpha + \beta)^3$ και $(\alpha - \beta)^3$

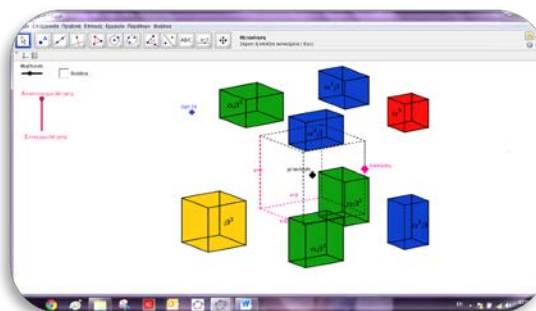
Διερεύνηση

Ο Νικόλας και ο Μιχάλης προσπαθούν να προβλέψουν ποιο θα είναι το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^3$.

- ✓ Εσείς ποιο νομίζετε ότι είναι το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^3$;



Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «C_En1_(a+b)^3.ggb», για να διερευνήσετε γεωμετρικά το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^3$.



- ✓ Να αποδείξετε την ταυτότητα και αλγεβρικά.
- ✓ Ποιο είναι το ανάπτυγμα του $(\alpha - \beta)^3$;

Μαθαίνω

- Κύβος αθροίσματος δύο όρων:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}(2 + \beta)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \beta + 3 \cdot 2 \cdot \beta^2 + \beta^3 \\ &= 8 + 12\beta + 6\beta^2 + \beta^3\end{aligned}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}A_{\text{μέλος}} &= (a + \beta)^3 &= (a + \beta) \cdot (a + \beta)^2 \\ & &= (a + \beta) \cdot (a^2 + 2a\beta + \beta^2) \\ & &= a^3 + 2a^2\beta + a\beta^2 + \beta a^2 + 2a\beta^2 + \beta^3 \\ & &= a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3 \\ & &= B_{\text{μέλος}}\end{aligned}$$

Άρα, $(a + \beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$

▪ **Κύβος διαφοράς δύο όρων:**

$$(a - \beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}(a - 5)^3 &= a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot 5 + 3 \cdot a \cdot 5^2 - 5^3 \\ &= a^3 - 15a^2 + 75a - 125\end{aligned}$$

Απόδειξη:

Α' τρόπος:

$$\begin{aligned}A_{\text{μέλος}} &= (a - \beta)^3 &= (a - \beta) \cdot (a - \beta)^2 \\ & &= (a - \beta) \cdot (a^2 - 2a\beta + \beta^2) \\ & &= a^3 - 2a^2\beta + a\beta^2 - \beta a^2 + 2a\beta^2 - \beta^3 \\ & &= a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3 \\ & &= B_{\text{μέλος}}\end{aligned}$$

Β' τρόπος:

$$\begin{aligned}A_{\text{μέλος}} &= (a - \beta)^3 &= (a + (-\beta))^3 \\ & &= a^3 + 3a^2(-\beta) + 3a(-\beta)^2 + (-\beta)^3 \\ & &= a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3 \\ & &= B_{\text{μέλος}}\end{aligned}$$

Άρα, $(a - \beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{aligned}(\alpha) & \quad (\kappa + 3\lambda)^3 \\ (\beta) & \quad \left(2x - \frac{1}{3}\right)^3\end{aligned}$$

Λύση:

$$\begin{aligned}(\alpha) & \quad \text{Εφαρμόζουμε την ταυτότητα } (a + \beta)^3. \\ (\kappa + 3\lambda)^3 &= (\kappa)^3 + 3 \cdot (\kappa)^2 \cdot (3\lambda) + 3 \cdot (\kappa) \cdot (3\lambda)^2 + (3\lambda)^3 \\ &= \kappa^3 + 3 \cdot \kappa^2 \cdot (3\lambda) + 3 \cdot (\kappa) \cdot (9\lambda^2) + 27\lambda^3 \\ &= \kappa^3 + 9\kappa^2\lambda + 27\kappa\lambda^2 + 27\lambda^3\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(a - b)^3$.

$$\begin{aligned} \left(2x - \frac{1}{3}\right)^3 &= (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 3 \cdot (2x) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= 8x^3 - 3 \cdot (4x^2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 3 \cdot (2x) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{27} \\ &= 8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{27} \end{aligned}$$

2. Αν $P(x) = x^3 - 5x^2 - 1$ και $Q(x) = 4x - 5$, να βρείτε τα πολυώνυμα: $P(x) + 1$ και $P(x + 1)$.

Λύση:

$$\begin{aligned} P(x) + 1 &= x^3 - 5x^2 - 1 + 1 \\ &= x^3 - 5x^2 \end{aligned}$$

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} P(x + 1) &= (x + 1)^3 - 5(x + 1)^2 - 1 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 5(x^2 + 2x + 1) - 1 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 5x^2 - 10x - 5 - 1 \\ &= x^3 - 2x^2 - 7x - 5 \end{aligned}$$

3. Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων: $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ και $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$

Λύση:

Αν $A = B$ τότε
 $A^v = B^v$, $v \in \mathbb{N}$

Αφού ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5$, τότε:

$$\begin{aligned} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 &= 5^2 \\ \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} &= 25 \\ \alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2} &= 25 \\ \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= 25 - 2 \\ \text{Άρα, } \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= 23. \end{aligned}$$

Αφού ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5$, τότε:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) &= 3 \cdot 5 \\ \text{Άρα, } 3\alpha + \frac{3}{\alpha} &= 3 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 15. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 &= 5^3 \\ \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha} + 3 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} &= 125 \\ \alpha^3 + 3\alpha + \frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} &= 125 \\ \alpha^3 + 15 + \frac{1}{\alpha^3} &= 125 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 125 - 15 = 110$$

Δραστηριότητες



1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 3)^3$ (β) $(2 - x)^3$

(γ) $\left(\frac{x}{3} + 3\right)^3$ (δ) $(\alpha - 3\beta)^3$

(ε) $(2x - 1)^3$ (στ) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας!

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(x - 2)^3 - (x - 3)(x + 3) + 4x^2$

(β) $(1 + x)^3 - 2x(2x + 1)^2$

(γ) $(x - 2)^3 + x(2x - 3)(3 + 2x)$

3. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $(x + 2)^3 - 2 = 6(x + 1)^2 + x^3$

(β) $(x - 1)^3 + x(3x - 7) = x(x - 2)(x + 2) - 1$

4. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \quad \text{και}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b).$$

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων $a^2 + b^2$ και $a^3 + b^3$, αν $a + b = 2$ και $ab = -8$.

5. Αν $x + y = 3$ και $xy = 2$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

(α) $x^2 + y^2$ (β) $x^3 + y^3$

(γ) $(x - y)^2$

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\sqrt{\frac{2016^3 - 3 \cdot 2016^2 + 3 \cdot 2016 - 1}{2015}}$$



GeoGebra

→ Παράθυρο CAS

(Calculate Algebra System)

- Να ανοίξετε το λογισμικό
- Από τις "Επιλογές" να κάνετε κλικ στο "Παράθυρο CAS"
- Εδώ μπορείτε να αναπτύξετε οποιαδήποτε ταυτότητα ή αλγεβρική παράσταση θέλετε!

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(2x + 5)^2$

(β) $\left(\frac{1}{a} + a\right)^2$

(γ) $(2 - y^2)^2$

(δ) $(2 - \sqrt{7})^2$

(ε) $(a + 3)(a + 3)$

(στ) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$

(ζ) $(\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$

(η) $(y^2 - \omega)(y^2 + \omega)$

(θ) $(a - 5)^3$

(ι) $(2 - 3\beta)^3$

(ια) $(1 + \beta)(\beta^4 + 1)(\beta - 1)(1 + \beta^2)$

2. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $\square + \square + \beta^2 = (x + \square)^2$

(β) $25x^2 + 1 + \square = (\square + \square)^2$

(γ) $\square + \square + 25y^2 = (4x + \square)^2$

(δ) $(\square + 9x) \cdot (\square - \square) = 4y^2 - \square$

(ε) $\alpha^2 - \square = (\square - \square) \cdot \left(\square + \frac{1}{2}\right)$

(στ) $(3\alpha^2 - \square) \cdot (\square + \square) = \square - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$

(ζ) $\omega^2 - \omega + \square = (\square - \square)^2$

(η) $y^4 + 8y^2 + \square = (\square + \square)^2$

(θ) $\alpha^2 + \frac{9}{\beta^2} + \square = (\square + \square)^2$

(ι) $27x^3 + 1 + \square + \square = (\square + \square)^3$

3. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α) $(x + y)^2 - (x + z)^2 = 2x(y - z) + (y - z)(y + z)$

(β) $(a + \beta)^3 - (a - \beta)^3 = 2\beta(\beta^2 + 3a^2)$

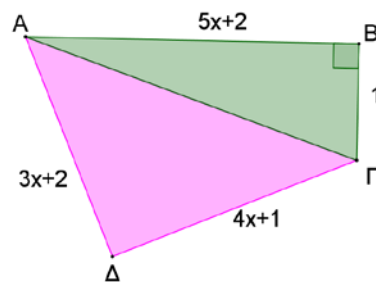
(γ) $\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{3}\right)^2 = \frac{4xy}{9}$

(δ) $(a - \beta + 1)^2 = (a - \beta)^2 + 2(a - \beta) + 1$

4. Σκεφτείτε δύο αριθμούς διαφορετικούς από το μηδέν:
- Βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματός τους.
 - Βρείτε το τετράγωνο της διαφοράς τους.
 - Αφαιρέστε από το τετράγωνο του αθροίσματός το τετράγωνο της διαφοράς.
 - Διαιρέστε το τελικό αποτέλεσμα με το γινόμενο των δύο αριθμών που αρχικά σκεφτήκατε.
 - Το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι ο αριθμός 4 ανεξάρτητα από τους αριθμούς που επιλέξατε.
- Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ισχύει για οποιουσδήποτε αριθμούς επιλέξετε;

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
 $A = 2015^2 - 2014^2$ και
 $B = 1,61^2 - 1,6^2$

6. Αν στο σχήμα, το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο AΓΔ είναι ορθογώνιο.



7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 80$.
- (α) Να βρείτε το $P(x - 1)$.
 - (β) Να αποδείξετε ότι $P(x) - P(x - 1) = 4 - 4x$.
 - (γ) Με τη βοήθεια του πιο πάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $P(100) - P(99)$.
8. Αν $a + \beta = 2$ και $a\beta = -3$, να αποδείξετε ότι:
- (α) $a^2 + \beta^2 = 10$
 - (β) $a^3 + \beta^3 = 26$
 - (γ) $(a - \beta)^2 = 16$
9. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\mu^2 - \nu^2$, $2\mu \cdot \nu$ και $\mu^2 + \nu^2$ αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα, όταν μ, ν φυσικοί αριθμοί με $\mu, \nu \neq 0$ και $\mu \neq \nu$.

Πυθαγόρεια τριάδα
 είναι μια τριάδα φυσικών αριθμών
 $(0 < \alpha < \beta < \gamma)$
 που συνδέονται με τη
 σχέση $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

10. Δίνεται η παράσταση: $A = (x - 1)^3 - x(x^2 - 4x - 2) + 7$,
 (α) Να αποδείξετε ότι $A = x^2 + 5x + 6$.
 (β) Αν $B = 5x + 7$, να αποδείξετε ότι $A - B = (x - 1)(x + 1)$.

11.

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει:	Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
$\alpha\beta = 9$	$\left(\frac{5\alpha-\beta}{3}\right)^2 - \left(\frac{5\alpha+\beta}{3}\right)^2$
$\alpha = \frac{1}{\beta}$	$(3\alpha - \beta)^2 - (3\alpha - 2)(3\alpha + 2) - \beta^2$
$\alpha + \beta = -3$	$(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 - (\alpha - \beta)^2 - 2\alpha\beta$

12. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι το άθροισμα των δύο κάθετων πλευρών είναι 5 και το εμβαδόν του 3. Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσάς του.
13. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 10, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων των δύο αυτών αριθμών είναι ίσο με 64. Να βρείτε το γινόμενό τους.
14. Να λύσετε τις εξισώσεις:
 (α) $(x + 5)^2 = (3 - x)^2 + 24$
 (β) $3(x - 3)^2 + 2(x - 3)(x + 3) = 5(2x - 1)^2 - 15x^2$
15. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:
 (α) $(\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2)$
 (β) $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
16. Να αποδείξετε την ταυτότητα:
 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$
17. Αν α, β και γ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την πλευρά α , να αποδείξετε ότι και οι x, y και ω είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την πλευρά x , όπου $x = 3\alpha + 2\beta + 2\gamma$, $y = 2\alpha + \beta + 2\gamma$ και $\omega = 2\alpha + 2\beta + \gamma$.

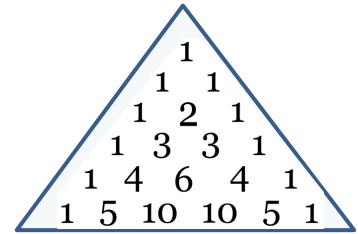
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

- Αν $\alpha = 2 - \sqrt{15}$ και $\beta = \sqrt{6} - \sqrt{10}$:
 - να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\alpha^2 - \beta^2$
 - να δείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{3}}$ και $\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{3}}$ είναι αντίστροφοι
- Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha^2 - \alpha)(\alpha + \alpha^2)}{4} - \frac{(1 - \alpha)}{2} \cdot \frac{(1 + \alpha)}{2}$$
 είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο.
- Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:

$$A = 2015x^{10} + x^2(2x^3 - 2016)^5$$

- Το διπλανό «τρίγωνο» είναι γνωστό ως **τρίγωνο του Πασκάλ** και πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό **Blaise Pascal (1623 – 1662)**.



- Να βρείτε τις επόμενες σειρές αριθμών. Ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς του τριγώνου;
- Να παρατηρήσετε τα αναπτύγματα των:

$$(\alpha + \beta)^n, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}_0$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)^0 &= && \mathbf{1} \\
 (\alpha + \beta)^1 &= && \mathbf{1}\alpha + \mathbf{1}\beta \\
 (\alpha + \beta)^2 &= && \mathbf{1}\alpha^2 + \mathbf{2}\alpha\beta + \mathbf{1}\beta^2 \\
 (\alpha + \beta)^3 &= && \mathbf{1}\alpha^3 + \mathbf{3}\alpha^2\beta + \mathbf{3}\alpha\beta^2 + \mathbf{1}\beta^3 \\
 (\alpha + \beta)^4 &= && \mathbf{1}\alpha^4 + \mathbf{4}\alpha^3\beta + \mathbf{6}\alpha^2\beta^2 + \mathbf{4}\alpha\beta^3 + \mathbf{1}\beta^4 \\
 (\alpha + \beta)^5 &= && \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots \\
 (\alpha + \beta)^6 &= && \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots
 \end{aligned}$$

Μπορείτε να βρείτε άλλες ιδιότητες που κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου του Πασκάλ;

Μπορείτε να ανακαλύψετε τη σχέση των αριθμητικών παραγόντων των όρων με τους αριθμούς στο τρίγωνο του Πασκάλ;

- Να βρείτε τα αναπτύγματα των $(\alpha + \beta)^5$ και $(\alpha + \beta)^6$. Ποιο θα είναι το ανάπτυγμα του $(\alpha - \beta)^6$;
- Σ' ένα περιοδικό για αυτοκίνητα χρησιμοποιείται ένα σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση των νέων αυτοκινήτων. Το αυτοκίνητο με τους περισσότερους βαθμούς παίρνει το βραβείο «Το Αυτοκίνητο της Χρονιάς». Αξιολογήθηκαν πέντε καινούρια αυτοκίνητα και η βαθμολογία τους δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Αυτοκίνητο	Κριτήρια Ασφαλείας (S)	Αποδοτικότητα Βενζίνης (F)	Εξωτερική Εμφάνιση (E)	Εσωτερικά Αξεσουάρ (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
ΚΚ	3	2	3	2

Η βαθμολογία έχει ως εξής:

3 Βαθμοί = Τέλειο 2 Βαθμοί = Καλό 1 Βαθμός = Μέτριο

Για να υπολογιστεί το σύνολο των βαθμών ενός αυτοκινήτου, το περιοδικό χρησιμοποιεί τον παρακάτω κανόνα, ο οποίος είναι το σταθμισμένο άθροισμα των επί μέρους βαθμών:

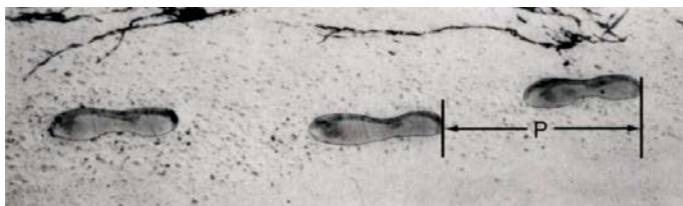
$$\text{Τελική βαθμολογία} = 3 \times S + F + E + T$$

- (α) Να υπολογίσετε την τελική βαθμολογία του αυτοκινήτου «Ca».
- (β) Ο κατασκευαστής του αυτοκινήτου «Ca» σκέφτηκε ότι ο κανόνας για τον υπολογισμό της τελικής βαθμολογίας δεν είναι δίκαιος. Να γράψετε έναν κανόνα υπολογισμού της τελικής βαθμολογίας έτσι ώστε το αυτοκίνητο «Ca» να είναι ο νικητής. Ο κανόνας σας πρέπει να περιέχει και τις τέσσερις μεταβλητές και πρέπει να τον γράψετε, συμπληρώνοντας με θετικούς αριθμούς τα τέσσερα διαστήματα της παρακάτω εξίσωσης.

$$\text{Τελική βαθμολογία} = \dots \times S + \dots \times F + \dots \times E + \dots \times T$$

PISA 2003

6. Στην πιο κάτω φωτογραφία βλέπετε τα πατήματα ενός άνδρα. Η απόσταση από τη φτέρνα του πατήματος μέχρι τη φτέρνα του άλλου αποτελεί το μήκος ενός βήματος, το οποίο ονομάζουμε P.



Ο βηματισμός των ανδρών εκφράζεται από τον τύπο, $\frac{V}{P} = 140$. Ο τύπος δείχνει κατά προσέγγιση τη σχέση ανάμεσα στο V και στο P, όπου

V = το πλήθος των βημάτων που κάνει ένας άνδρας ανά λεπτό, και

P = το μήκος σε μέτρα (m) του βήματος του άνδρα.

- (α) Ο Γιάννης κάνει 70 βήματα ανά λεπτό. Ποιο είναι το μήκος του βήματός του;
- (β) Το μήκος βήματος του Θανάση είναι 0,80 m. Να υπολογίσετε την ταχύτητα βαδίσματος του Θανάση, σε μέτρα ανά λεπτό και σε χιλιόμετρα ανά ώρα, χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο.

PISA 2003

Παραγοντοποίηση

Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ

2

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να εξετάζουμε κατά πόσο ένα πολυώνυμο είναι παράγοντας ενός άλλου πολυωνύμου.
- Να υπολογίζουμε τον άλλο παράγοντα ενός πολυωνύμου, όταν δίνεται ο ένας παράγοντάς του.
- Να μετατρέπουμε αλγεβρικές παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, εφαρμόζοντας διάφορες τεχνικές.
- Να υπολογίζουμε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (ΜΚΔ) και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) αλγεβρικών παραστάσεων.
- Να επιλύουμε εξισώσεις δεύτερου και ανώτερου βαθμού.
- Να υπολογίζουμε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να εκτελούμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να επιλύουμε εξισώσεις που περιλαμβάνουν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.



Ρυθμός Πτώσης Σταγόνων



Ο ενδοφλέβιος ορρός χρησιμοποιείται για τη χορήγηση υγρών και φαρμάκων σε ασθενείς. Οι νοσηλεύτριες χρειάζεται να υπολογίσουν τον ρυθμό πτώσης των σταγόνων D , του ενδοφλέβιου ορρού σε σταγόνες ανά λεπτό.

Χρησιμοποιούν τον τύπο $D = \frac{d \cdot V}{60 \cdot n}$, όπου:

d : είναι ο συντελεστής ροής και η μονάδα μέτρησής του είναι σταγόνες ανά χιλιοστόλιτρο (mL)

V : είναι ο όγκος σε mL του ενδοφλέβιου ορρού στη συσκευή έκχυσης

n : είναι ο αριθμός των ωρών που χρειάζεται, για να αδειάσει η συσκευή.

Ερώτηση 1:

Μία νοσηλεύτρια θέλει να διπλασιάσει τον χρόνο που χρειάζεται για να αδειάσει η συσκευή. Να περιγράψετε με ακρίβεια πώς αλλάζει το D , όταν διπλασιαστεί το n , ενώ τα d και V δεν αλλάζουν.

Ερώτηση 2:

Οι νοσηλεύτριες χρειάζεται, επίσης, να υπολογίζουν τον όγκο του ορρού στη συσκευή V , με βάση τον ρυθμό πτώσης D . Μία σύριγγα με ρυθμό πτώσης 50 σταγόνες ανά λεπτό, πρέπει να χορηγηθεί σε έναν ασθενή για 3 ώρες. Για αυτή τη σύριγγα, ο παράγοντας πτώσης είναι 25 σταγόνες ανά χιλιοστόλιτρο (mL). Ποιος είναι ο όγκος του ορρού σε mL;

PISA 2012

Έχουμε μάθει ...

✓ **Διαίρεση πολωνύμου με μονώνυμο**

Για να διαιρέσουμε ένα πολώνυμο με ένα μονώνυμο, διαιρούμε τον κάθε όρο του πολωνύμου με το μονώνυμο και προσθέτουμε τα πηλίκα που προκύπτουν.

Παράδειγμα:

$$(9a^7 - 6a^5) : 3a^3 = (9a^7 : 3a^3) - (6a^5 : 3a^3) = 3a^4 - 2a^2$$

▪ **Διαίρεση πολωνύμου με πολώνυμο**

Αν έχουμε δύο πολώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$, κάνουμε τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος πολωνύμων $\pi(x)$ και $\nu(x)$, για τα οποία ισχύει:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$$

όπου το $\nu(x)$ μπορεί ή να είναι ίσο με μηδέν ή να έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + 5x + 3 & 2x + 1 \\ -6x^2 - 3x & 3x + 1 \\ \hline +2x + 3 & \\ -2x - 1 & \\ \hline +2 & \end{array}$$

Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης

είναι $\pi(x) = 3x + 1$ και το υπόλοιπο $\nu(x) = 2$.

Ισχύει,

$$6x^2 + 5x + 3 = (2x + 1)(3x + 1) + 2$$

- Για να βρούμε τον **Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (ΜΚΔ)** δύο ή περισσότερων αριθμών, σχηματίζουμε το γινόμενο των **κοινών** πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός παράγοντα τον **μικρότερο** από τους εκθέτες του.

Παράδειγμα:

Αναλύουμε τους αριθμούς 84 και 120 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{ΜΚΔ}(84,120) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

- Για να βρούμε το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών σχηματίζουμε το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός παράγοντα τον **μεγαλύτερο** από τους εκθέτες του.

Παράδειγμα:

Αναλύουμε τους αριθμούς 6 και 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2^3$$

$$ΕΚΠ(6,8) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$$

- Επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.

Παράδειγμα:

$$4x + 3 = 5x - 5 - 3x$$

Χωρίζουμε τους γνωστούς όρους από τους άγνωστους.

$$\Leftrightarrow 4x + 3 = 5x - 5 - 3x$$

$$\Leftrightarrow 4x - 5x + 3x = -5 - 3$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$$\Leftrightarrow 2x = -8$$

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου όρου.

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

Λύση της εξίσωσης.

Εισαγωγή στην Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων

Διερεύνηση

Γνωρίζουμε την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης στο \mathbb{N}_0 .

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \nu, \quad 0 \leq \nu < \delta$$

- ✓ Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο στη διαίρεση $49 : 3$ και να αναφέρετε τον διαιρετέο και τον διαιρέτη.

- ✓ Να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία στις διαιρέσεις:

- $\frac{x^2+2x}{x}$

- $\frac{x^2+2}{x}$

- $\frac{x^2+2x+2}{x}$

- $\frac{x^2+2x}{x+2}$

- $\frac{x^2+2x+2}{x+2}$

Μαθαίνω

- Αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\nu(x)$, για τα οποία ισχύει:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$$

(Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης)

όπου το $\nu(x)$ έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

- Όταν $\nu(x) = 0$, η διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ είναι **τέλεια** και το πολυώνυμο $\delta(x)$ είναι **παράγοντας ή διαιρέτης** του πολυωνύμου $\Delta(x)$.

Παράδειγμα:

(α) Το πολυώνυμο $x + 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^2 - 4$, γιατί: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

(β)

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 6x + 8 & x - 4 \\ -x^2 + 4x & x - 2 \\ \hline -2x + 8 & \\ 2x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Η διαίρεση είναι τέλεια
διότι $\nu(x) = 0$.

Ισχύει: $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$

Άρα, $(x^2 - 6x + 8) = (x - 4)(x - 2)$.

Άρα, το πολυώνυμο $x - 4$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^2 - 6x + 8$.

- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** δύο η περισσότερων πολυωνύμων είναι ο κοινός διαιρέτης των πολυωνύμων αυτών του μεγαλύτερου δυνατού βαθμού.

Παράδειγμα:

Ο ΜΚΔ των ακόλουθων πολυωνύμων είναι:

(α) $\text{ΜΚΔ}(12x^3y^2, 24x^2y^3\omega, 36x^4y) = 12x^2y$

(β) $\text{ΜΚΔ}(4(x - y)(x + y), 6(x + y)^2, 2(x + y)) = 2(x + y)$

Παρατήρηση:

Ο συντελεστής του ΜΚΔ δύο ή περισσότερων πολυωνύμων είναι ίσος με τον ΜΚΔ των συντελεστών των παραγόντων του.

Στο διπλανό παράδειγμα $\text{ΜΚΔ}(12, 24, 36) = 12$

Παραδείγματα

1. Αν ο ένας παράγοντας του πολυωνύμου $9x^3 + 2 - 7x$ είναι ο $3x - 2$, να βρείτε τον άλλο παράγοντα του πολυωνύμου.

Λύση:

Για να βρούμε τον άλλο παράγοντα πρέπει να διαιρέσουμε το πολυώνυμο $9x^3 + 2 - 7x$ με το πολυώνυμο $3x - 2$.

Πρώτα γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις **φθίνουσες δυνάμεις** του x . (Θεωρούμε μηδέν τον συντελεστή του x^2 σε αυτή την περίπτωση).

$9x^3 + 0x^2 - 7x + 2$	$3x - 2$	<ul style="list-style-type: none"> • Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη, δηλαδή $\frac{9x^3}{3x} = 3x^2$, για να βρούμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.
	$3x^2$	

$9x^3 + 0x^2 - 7x + 2$	$3x - 2$	<ul style="list-style-type: none"> • Πολλαπλασιάζουμε το $3x^2$ με τον διαιρέτη ($3x - 2$): $3x^2(3x - 2) = 9x^3 - 6x^2$ • Αφαιρούμε το αποτέλεσμα από τον διαιρετέο, δηλαδή προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο $-9x^3 + 6x^2$. • Προσθέτουμε τα δύο πολυώνυμα. Το άθροισμά τους είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο.
$-9x^3 + 6x^2$ $+6x^2 - 7x + 2$	$3x^2$	

Θεωρούμε το πρώτο μερικό υπόλοιπο ως νέο διαιρετέο και επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία:

$9x^3 + 0x^2 - 7x + 2$	$3x - 2$	<ul style="list-style-type: none"> • Διαιρούμε $\frac{+6x^2}{3x} = +2x$ • Πολλαπλασιάζουμε: $+2x(3x - 2) = 6x^2 - 4x$ • Προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο δηλαδή $-6x^2 + 4x$ και βρίσκουμε το νέο μερικό υπόλοιπο.
$-9x^3 + 6x^2$ $+6x^2 - 7x + 2$ $-6x^2 + 4x$ $-3x$	$3x^2 + 2x$	

Θεωρούμε το νέο μερικό υπόλοιπο ως νέο διαιρετέο και επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία:

$9x^3 + 0x^2 - 7x + 2$	$3x - 2$	<ul style="list-style-type: none"> • Διαιρούμε $\frac{-3x}{3x} = -1$ • Πολλαπλασιάζουμε: $-1(3x - 2) = -3x + 2$ • Προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο, δηλαδή $+3x - 2$ και βρίσκουμε το νέο μερικό υπόλοιπο.
$-9x^3 + 6x^2$ $+6x^2 - 7x + 2$ $-6x^2 + 4x$ $-3x + 2$ $+3x - 2$ 0	$3x^2 + 2x - 1$	

Η διαδικασία τερματίζεται, αφού το μερικό υπόλοιπο είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη.

Ισχύει, $9x^3 + 2 - 7x = (3x - 2)(3x^2 + 2x - 1)$. Άρα, ο άλλος παράγοντας του πολυωνύμου $9x^3 + 2 - 7x$ είναι ο $3x^2 + 2x - 1$.

2. Να εξετάσετε κατά πόσο το πολυώνυμο $\alpha - 2\beta$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $\alpha^2 - 4\beta^2$.

Λύση:

Για να εξετάσουμε κατά πόσο το πολυώνυμο $\alpha - 2\beta$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $\alpha^2 - 4\beta^2$ πρέπει να εξετάσουμε κατά πόσο η διαίρεση είναι τέλεια.

Γράφουμε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του α ή του β .

$\alpha^2 - 4\beta^2$	$\alpha - 2\beta$	<ul style="list-style-type: none"> • Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη, δηλαδή $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, για να βρούμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.
-----------------------	-------------------	--

$\begin{array}{r} \alpha^2 + 0\alpha\beta - 4\beta^2 \\ -\alpha^2 + 2\alpha\beta + 0\beta^2 \\ \hline +2\alpha\beta - 4\beta^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} \alpha - 2\beta \\ \alpha \end{array}$	<ul style="list-style-type: none"> • Πολλαπλασιάζουμε το α με τον διαιρέτη $\alpha - 2\beta$: $\alpha(\alpha - 2\beta) = \alpha^2 - 2\alpha\beta$ • Αφαιρούμε το αποτέλεσμα από τον διαιρετέο, δηλαδή προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο $-\alpha^2 + 2\alpha\beta$. Το άθροισμά είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο.
---	--	--

Θεωρούμε το πρώτο μερικό υπόλοιπο ως νέο διαιρετέο και επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία:

$\begin{array}{r} \alpha^2 + 0\alpha\beta - 4\beta^2 \\ -\alpha^2 + 2\alpha\beta + 0\beta^2 \\ \hline +2\alpha\beta - 4\beta^2 \\ -2\alpha\beta + 4\beta^2 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta \end{array}$	<ul style="list-style-type: none"> • Διαιρούμε $\frac{+2\alpha\beta}{\alpha} = +2\beta$ • Πολλαπλασιάζουμε: $+2\beta(\alpha - 2\beta) = +2\alpha\beta - 4\beta^2$. • Προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο δηλαδή $-2\alpha\beta + 4\beta^2$ και βρίσκουμε το νέο μερικό υπόλοιπο.
---	---	--

Η διαδικασία τερματίζεται, αφού το μερικό υπόλοιπο είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη.

Επειδή η πιο πάνω διαίρεση είναι τέλεια, το πολυώνυμο $\alpha - 2\beta$, όπως και το $\alpha + 2\beta$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $\alpha^2 - 4\beta^2$. Άρα, $\alpha^2 - 4\beta^2 = (\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta)$

3. Να βρείτε τον ΜΚΔ των παραστάσεων:
 (α) $16x^4y^2, 36xy^3\omega$
 (β) $30(x-1)(x+y), 18(x-1), 42(x-1)^2$

Λύση:

(α) $MΚΔ(16x^4y^2, 36xy^3\omega) = 4xy^2$

(β) $MΚΔ[30(x-1)(x+y), 18(x-1), 42(x-1)^2] = 6(x-1)$

Δραστηριότητες



1. Να βρείτε το πολυώνυμο που έχει μοναδικούς παράγοντες τους:
 (α) $(x-2)$ και $(x+1)$
 (β) $5x+2$ και x^2-4x-6
2. Να εξετάσετε κατά πόσο το πολυώνυμο:
 (α) $x+6$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $2x^2+13x-27$
 (β) $x+4$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου x^3-8
 (γ) $3x-y$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $9x^2-6xy+y^2$

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Πολυώνυμο	Παράγοντας	Παράγοντας
$-2x+x^3-3x^2+4$	$x-1$	
$4x^3-22x^2+32x-8$		$x-2$
x^2-4	$x+2$	
$3\alpha^3-\alpha^2\beta+12\alpha-4\beta$		$3\alpha-\beta$

4. Να υπολογίσετε τον ΜΚΔ των παραστάσεων:
 (α) $24\alpha^3\beta^2\gamma^2, 15\alpha^2\beta^3\gamma, 6\alpha^4\beta^3$
 (β) $16\alpha^2x^2, 4\alpha^3x^5, 12\alpha^3x^3$
 (γ) $9\alpha^2(\alpha-\beta)^3, 6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$
5. Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:
 (α) $x(\square + \square) = x^2 + 3x$ (β) $\square(2y - 5) = 6y - 15$
 (γ) $\square(x^2 - 2) = 3ax^2 - 6a$ (δ) $\square(\square - \square) = 3x - 15$

Μέθοδοι Παραγοντοποίησης (Κοινός Παράγοντας – Ομαδοποίηση)

Διερεύνηση (1)

Να γράψετε την παράσταση $6x^2 - 12x$ σε γινόμενο.

Η Εβελίνα, η Ναταλία, ο Νικόλας, ο Στέφανος, και ο Μιχάλης έκαναν την πιο πάνω άσκηση με διαφορετικό τρόπο ο καθένας και έχουν καταλήξει στις πιο κάτω απαντήσεις.

- ✓ Να μελετήσετε και να εξηγήσετε τον τρόπο που εργάστηκε ο κάθε μαθητής.

Ναταλία:

$$6x^2 - 12x = 2(3x^2 - 6x)$$

Νικόλας:

$$6x^2 - 12x = 3(2x^2 - 4x)$$

Στέφανος:

$$6x^2 - 12x = x(6x - 12)$$

Εβελίνα:

$$6x^2 - 12x = 3x(2x - 4)$$

Μιχάλης:


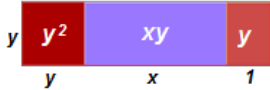
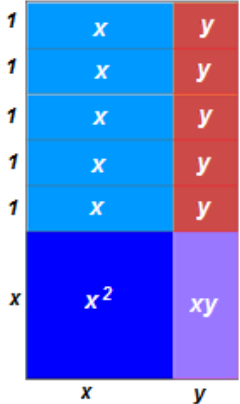
$$6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$$



- ✓ Ποιου μαθητή η απάντηση δεν επιδέχεται ξανά παραγοντοποίηση;
- ✓ Πώς θα εξηγούσατε σε κάποιον τη διαδικασία της παραγοντοποίησης έτσι ώστε μια παράσταση να μην επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση;

Διερεύνηση (2)

Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται τα ορθογώνια A, B, Γ και οι αλγεβρικές εκφράσεις για το εμβαδόν τους.

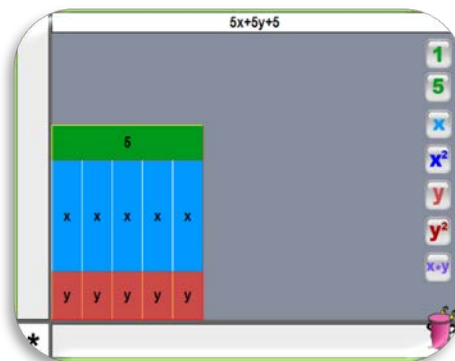
Ορθογώνιο	Εμβαδόν
A	 $xy + 5y$ ή $y(x + 5)$
B	 $y^2 + xy + y$ ή $y(y + x + 1)$
Γ	 $x^2 + xy + 5x + 5y$ ή $x(x + y) + 5(x + y)$ ή $(x + y)(x + 5)$

- ✓ Να εξηγήσετε γιατί καθεμιά από τις αλγεβρικές εκφράσεις που δίνονται στην 3η στήλη εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου που δίνεται στη 2η στήλη.



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En3_Paragontopoiisi1.exe».

- ✓ Να εμφανίσετε 5 διαφορετικά ορθογώνια και να γράψετε το εμβαδόν τους με όσο το δυνατόν περισσότερες διαφορετικές αλγεβρικές εκφράσεις.



Μαθαίνω

Παρατήρηση:

Στο παράδειγμα η παράσταση $2\alpha\beta(2\alpha - 1)$ δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση. Γι' αυτό λέμε ότι η παράσταση έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Παρατήρηση:

Ο κοινός παράγοντας (αν υπάρχει) είναι ο ΜΚΔ των όρων του πολυωνύμου.

- **Παραγοντοποίηση ή ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων** ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση σε γινόμενο. Όταν η παράσταση δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση, θα λέμε ότι έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Στο εξής, όταν λέμε ότι **παραγοντοποιούμε** μια παράσταση θα εννοούμε ότι την **αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Παράδειγμα:

$$4\alpha^2\beta - 2\alpha\beta = 2\alpha\beta(2\alpha - 1)$$

- **Βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης**

➤ Κοινός Παράγοντας

Για να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση της οποίας οι όροι έχουν κοινό παράγοντα, χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα για την εξαγωγή του.

Παραδείγματα:

$$5\alpha - 5\beta + 5\gamma = 5\alpha - 5\beta + 5\gamma = 5(\alpha - \beta + \gamma)$$

Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το 5.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 5».

$$12x^2 - 8x^3 = 4x^2 \cdot 3 - 4x^2 \cdot 2x = 4x^2(3 - 2x)$$

Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $4x^2$.

➤ Κοινός Παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Για να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση με ομαδοποίηση:

- ◆ όλοι οι όροι της παράστασης δεν πρέπει έχουν κοινό παράγοντα
- ◆ μπορούμε να σχηματίσουμε ομάδες ώστε:
 - i. σε κάθε ομάδα που σχηματίζεται να υπάρχει κοινός παράγοντας
 - ii. οι όροι που προκύπτουν, μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα της κάθε ομάδας, να έχουν κοινό παράγοντα

Παράδειγμα:

$$kx + ky + lx + ly =$$

Δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της παράστασης.

$$\underline{kx + ky} + \underline{lx + ly} =$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το k από τους δύο πρώτους όρους της παράστασης και το l από τους δύο τελευταίους όρους της.

$$k(x + y) + l(x + y) = (x + y)(k + l)$$

Σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα το $(x + y)$.

Παραδείγματα

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $10x^3 + 10x$

(β) $3\beta^2\gamma^3 - 9\beta\gamma^2$

(γ) $2x(\alpha + \beta) + 5y(\alpha + \beta)$

(δ) $10(x - y) + 2a(y - x)$

Λύση:

(α) $10x^3 + 10x = 10x(x^2 + 1)$

Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $10x$.

(β) $3\beta^2\gamma^3 - 9\beta\gamma^2 = 3\beta\gamma^2(\beta\gamma - 3)$

Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $3\beta\gamma^2$.

(γ) $2x(\alpha + \beta) + 5y(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(2x + 5y)$

Η παράσταση έχει δύο όρους, τους $2x(\alpha + \beta)$ και $5y(\alpha + \beta)$. Στους δύο όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $(\alpha + \beta)$.

(δ) $10(x - y) + 2a(y - x) = 10(x - y) - 2a(x - y) = 2(x - y)(5 - a)$

Η παράσταση έχει δύο όρους, τους $10(x - y)$ και $2a(y - x)$. Για να δημιουργήσουμε και στους δύο όρους κοινό παράγοντα τον $(x - y)$, γράφουμε τον δεύτερο όρο της $-2a(x - y)$.

Ισχύει:

$$\begin{aligned} -(x - y) &= +(-x + y) \\ &= (y - x) \end{aligned}$$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $a^3 + 21 + 7a^2 + 3a$

(β) $ay - xy + ax - x^2$

(γ) $12x^2 - 8ax - 9\beta x + 6\alpha\beta$

Λύση:

Στις πιο πάνω παραστάσεις δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της παράστασης. Έτσι ομαδοποιούμε τους όρους ώστε να δημιουργήσουμε κοινό παράγοντα.

(α) $a^3 + 21 + 7a^2 + 3a =$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το a^2 από τον πρώτο και από τον τρίτο όρο της παράστασης και το 3 από τους υπόλοιπους όρους της.

Σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα το $(a + 7)$.

$$= a^2(a + 7) + 3(a + 7) = (a + 7)(a^2 + 3)$$

Άρα, $a^3 + 21 + 7a^2 + 3a = (a + 7)(a^2 + 3)$

(β) $ay - yx + ax - x^2 =$
 Βγάζουμε κοινό παράγοντα το y από τους δύο πρώτους όρους της παράστασης και το x από τους δύο τελευταίους όρους της.
 Σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα το $(a - x)$.

$$= y(a - x) + x(a - x)$$

$$= (a - x)(y + x)$$

Άρα, $ay - yx + ax - x^2 = (a - x)(y + x)$

(γ) $12x^2 - 8ax - 9\beta x + 6\alpha\beta =$
 Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $4x$ από τους δύο πρώτους όρους της παράστασης και το -3β από τους δύο τελευταίους όρους της.
 Σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα το $(3x - 2a)$.

$$= 4x(3x - 2a) - 3\beta(3x - 2a)$$

$$= (3x - 2a)(4x - 3\beta)$$

Άρα, $12x^2 - 8ax - 9\beta x + 6\alpha\beta = (3x - 2a)(4x - 3\beta)$

Δραστηριότητες



1. Να βρείτε τους κοινούς παράγοντες των πιο κάτω αλγεβρικών παραστάσεων και να τις αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων:

Πολυώνυμο	Κοινός Παράγοντας	Γινόμενο
$\alpha\beta + \alpha\gamma$		
$7\alpha\beta + 7\alpha\gamma - 7\alpha\delta$		
$3x - 3y + 6$		
$7x^3 - 14x^2$		

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $7x + 7y$

(β) $6x - 6$

(γ) $12 - 6x$

(δ) $x^4 - x^3\alpha$

(ε) $8x^2 - 6x$

(στ) $4xy^3 - 8x^2y$

(ζ) $5x + 10x^2$

(η) $-4x^3 - 18x^2 + 16x$

(θ) $15ax + 30ay - 10a\omega$

(ι) $\frac{2}{3}xy - \frac{4}{3}x^2y$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $2x(x + y) + 5y(x + y)$ (β) $3(\alpha - \beta) + \kappa(\alpha - \beta)$

(γ) $a(a + 1) - 2(1 + a)$ (δ) $4y(2x - 5) + 9a(5 - 2x)$

(ε) $y(\alpha - 2\beta) - 5(2\beta - \alpha)$ (στ) $(x + y)^2 + 3(x + y)$

(ζ) $(\alpha + \beta)^2 - 3\gamma(\alpha + \beta)$ (η) $a(x - y) - x + y$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\alpha\beta + 5\alpha + 2\beta + 10$ (β) $\kappa x - 3\kappa y + \mu x - 3\mu y$

(γ) $\lambda\alpha^2 + \kappa\beta\alpha - \lambda\alpha\beta - \kappa\beta^2$ (δ) $8\alpha^2 - 12\alpha\beta - 10\alpha + 15\beta$

(ε) $xy - 5y - x + 5$ (στ) $2ax^2 + 3axy - 2\beta xy - 3\beta y^2$

5. Αν $x + y = 4$ και $xy = 3$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

$A = 4x + 4y$ $B = 2x^3y^2 + 2x^2y^3$

$\Gamma = x^2y + xy^2 + x + y$ $\Delta = x^3y + xy^3$

6. Αν ο αριθμός κ είναι ακέραιος, να δείξετε ότι ο αριθμός $\kappa^2 + \kappa$ είναι άρτιος.

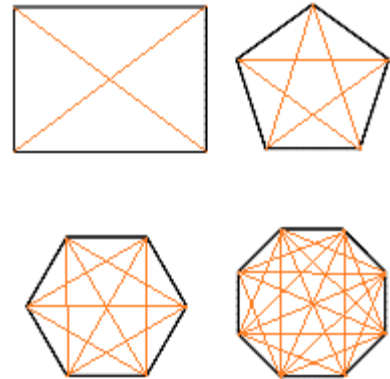
7. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των διαγωνίων (Δ) ενός πολυγώνου με n πλευρές χρησιμοποιούμε την παράσταση:

$$\Delta = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n \quad (n \geq 3).$$

Δηλαδή ένα τετράπλευρο έχει 4 πλευρές και 2 διαγωνίους, ένα πεντάγωνο έχει 5 πλευρές και 5 διαγωνίους κ.λπ.

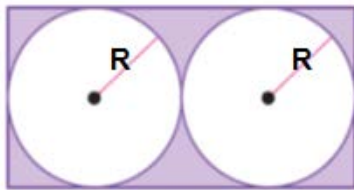
(α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Δ .

(β) Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων ενός δεκάγωνου.

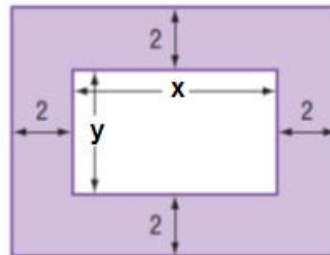


8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής για το καθένα από τα ακόλουθα σχήματα:

(α)



(β)



Μέθοδοι Παραγοντοποίησης (Διαφορά δύο τετραγώνων – Διαφορά και Άθροισμα δύο κύβων)

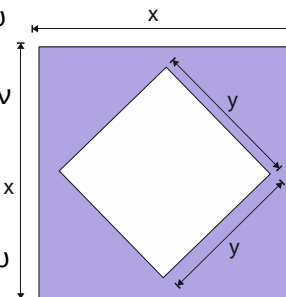
Διερεύνηση

Στο διπλανό σχήμα, η διαφορά της πλευράς x του μεγάλου τετραγώνου από την πλευρά y του μικρού τετραγώνου είναι 1. Το άθροισμα των δύο πλευρών είναι 15.

✓ Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους στο διπλανό σχήμα ισούται με 15.

✓ Να ελέγξετε τον ισχυρισμό του και να εξηγήσετε τον τρόπο που εργάστηκε.



Μαθαίνω

Βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης

➤ Διαφορά δύο τετραγώνων.

Για να παραγοντοποιήσουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι διαφορά δύο τετραγώνων, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Παραδείγματα:

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$$

$$(2x - 1)^2 - y^2 = (2x - 1 + y)(2x - 1 - y)$$

➤ Διαφορά – Άθροισμα δύο κύβων. Για να παραγοντοποιήσουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι διαφορά ή άθροισμα δύο κύβων, χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Παραδείγματα:

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2) \\ = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$8a^3 + b^3 = (2a)^3 + b^3 = (2a + b)[(2a)^2 - 2ab + b^2] \\ = (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

Παρατήρηση: Σε πολλές αλγεβρικές παραστάσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε συνδυασμό των μεθόδων παραγοντοποίησης.

Παραδείγματα

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

$$(\alpha) 4x^2 - 9\beta^2$$

$$(\beta) 8y^3 + 27a^3$$

$$(\gamma) 3x^3 - 24$$

$$(\delta) x^2 - y^2 + x + y$$

Λύση:

$$(\alpha) 4x^2 - 9\beta^2$$

$$= (2x)^2 - (3\beta)^2$$

$$= (2x - 3\beta)(2x + 3\beta)$$

Εκφράζουμε κάθε όρο
ως τετράγωνο.

Διαφορά τετραγώνων.

$$(\beta) 8y^3 + 27a^3$$

$$= (2y)^3 + (3a)^3$$

$$= (2y + 3a)(4y^2 - 6y + 9a^2)$$

Εκφράζουμε κάθε όρο
ως κύβο.

Άθροισμα κύβων.

$$(\gamma) 3x^3 - 24$$

$$= 3(x^3 - 8)$$

$$= 3(x^3 - 2^3)$$

$$= 3(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Κοινός παράγοντας.

Διαφορά κύβων.

$$(\delta) \frac{x^2 - y^2}{x + y} + \frac{x + y}{x + y}$$

$$= (x - y)(x + y) + (x + y)$$

Διαφορά τετραγώνων.

Κοινός παράγοντας.

$$= (x + y)(x - y + 1)$$

2. Αν $x + y = 5$ και $xy = 4$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^3 + y^3$.

Λύση:

Α' Τρόπος:

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του κύβου αθροίσματος.

Ισχύει ότι:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) \quad \text{Βγάζουμε κοινό παράγοντα.}$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 5^3 - 3 \cdot 4 \cdot 5$$

Αντικαθιστούμε.

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 125 - 60 = 65$$

Β' Τρόπος:

Ισχύει ότι:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Και

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2 - 2 \cdot 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25 - 8$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 17$$

Αντικαθιστούμε.

Άρα, αφού

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \text{ τότε}$$

$$x^3 + y^3 = 5 \cdot (17 - 4)$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 5 \cdot 13$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 65$$

Αντικαθιστούμε.

Δραστηριότητες



1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $x^2 - 4$

(β) $x^2 - 49$

(γ) $9 - x^2$

(δ) $4x^2 - 9y^2$

(ε) $-81 + 16\beta^2$

(στ) $\frac{1}{4} - x^2$

(ζ) $\frac{1}{x^2} - 49y^2$

(η) $3\alpha^3 - 3\alpha$

(θ) $2y^2 - 32$

(ι) $25x^4 - 1$

(ια) $81x^4 - 16y^6$

(ιβ) $18a^4 - 50\kappa^4$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $(2x - 1)^2 - y^2$

(β) $(5x + 1)^2 - 4$

(γ) $4\kappa^2 - (\kappa - \lambda)^2$

(δ) $(\alpha + 2\beta)^2 - 16$

(ε) $\omega^2 - (x + y)^2$

(στ) $\rho^2 - (\alpha + \beta)^2$

(ζ) $x(a^2 - \beta^2) + y(a^2 - \beta^2)$

(η) $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha - 2\beta)^2$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $x^2 - y^2 - 5x - 5y$

(β) $\alpha^2 - 4\alpha - \beta^2 + 4\beta$

(γ) $(y - 3)x^2 - (y - 3)\kappa^2$

(δ) $16(y + 4) - (y + 4)y^2$

(ε) $a(x - 3y) + 2(x^2 - 9y^2)$

(στ) $(x^2 - y^2)(2x + y) - (x - y)(4x^2 - y^2)$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
- | | | |
|--|---------------------------|--------------------------|
| (α) $x^3 - 8$ | (β) $125 + \omega^3$ | (γ) $\beta^3 - \alpha^9$ |
| (δ) $\frac{a^3}{8} - \frac{\beta^6}{27}$ | (ε) $-x^3 + \frac{1}{27}$ | (στ) $ax^3 + ay^3$ |
| (ζ) $2x^3 - 54y^3$ | (η) $3x^3 - 24$ | (θ) $x^3y^3 + 1$ |
5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| (α) $x^3(a - \beta) + y^3(a - \beta)$ | (β) $x^3 - y^3 - 2(x^2 - y^2)$ |
| (γ) $a^3 + \beta^3 - 3(a + \beta)$ | (δ) $(\kappa^3 - 1) - 2(\kappa - 1)$ |
6. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις, χρησιμοποιώντας κανόνες παραγοντοποίησης:
- | | |
|--------------------|---------------------|
| (α) $100^2 - 99^2$ | (β) $805^2 - 795^2$ |
|--------------------|---------------------|
7. Αν είναι $A = 2^{2015} + 2^{-2015}$ και $B = 2^{2015} - 2^{-2015}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A^2 - B^2$
8. Να δείξετε ότι $(\alpha - \beta)$ είναι παράγοντας του $\alpha^3 - \beta^3$.

Μέθοδοι Παραγοντοποίησης (Τριώνυμο – Τέλειο Τετράγωνο)

Διερεύνηση (1)



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En3_Paragontopoiisi.ggb».

Στο εφαρμογίδιο οι όροι του πολυώνυμου αναπαριστούνται με πλακίδια εμβαδού 1, x και x^2 τετραγωνικών μονάδων αντίστοιχα.



- ✓ Να μετακινήσετε τους δρομείς για να εμφανιστεί ένα νέο πολυώνυμο, καθώς και η αναπαράστασή του με τα πλακίδια.
- ✓ Να πατήσετε το κουτί επιλογής «Εμφάνιση Διαστάσεων Ορθογωνίου». Να μετακινήσετε τους δρομείς «δρομέας 1» και «δρομέας 2», για να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ισοδύναμο με το εμβαδόν των πλακιδίων που αναπαριστούν το πολυώνυμο.
- ✓ Να μετακινήσετε τα πλακίδια, σχηματίζοντας το ορθογώνιο, για να επιβεβαιώσετε τον συλλογισμό σας.

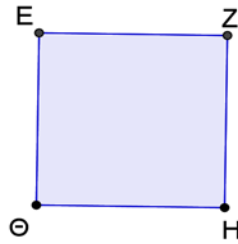
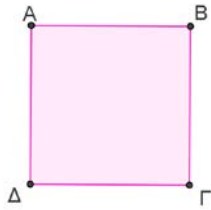
Με τη βοήθεια της πιο πάνω διαδικασίας να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως φαίνεται στο παράδειγμα:

Πολυώνυμο	(Διάσταση 1)·(Διάσταση 2)
$x^2 + 4x + 3$	$(x + 3)(x + 1)$
$x^2 + 3x + 2$	
$x^2 + 4x + 4$	
$x^2 + 5x + 6$	

- ✓ Να διατυπώσετε έναν κανόνα που να συνδέει τους αριθμούς β και γ με τους αριθμούς κ και λ στην ισότητα:

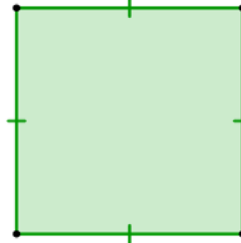
$$x^2 + \beta x + \gamma = (x + \kappa)(x + \lambda)$$

Διερεύνηση (2)



Τα πιο πάνω ορθογώνια έχουν εμβαδόν $E_{AB\Gamma\Delta} = 4x^2 + 4x + 1$ και $E_{EZ\eta\Theta} = x^2 + 5x + 4$.

- ✓ Να βρείτε τις διαστάσεις του κάθε ορθογωνίου και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.
- ✓ Το διπλανό σχήμα είναι τετράγωνο. Ποια μορφή θα πρέπει να έχει ένα τριώνυμο ώστε να μπορεί να αναπαριστά το εμβαδόν του.



Μαθαίνω

Βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης

- **Τριώνυμο 2^{ου} βαθμού.** Το πολυώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ λέγεται τριώνυμο 2^{ου} βαθμού. Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου 2^{ου} βαθμού, όταν $a = 1$, δηλαδή $x^2 + bx + \gamma$ γίνεται ως εξής: Αναζητούμε δύο αριθμούς κ, λ , αν υπάρχουν, που να έχουν γινόμενο γ και άθροισμα β , δηλαδή $\kappa \cdot \lambda = \gamma$ και $\kappa + \lambda = \beta$. Τότε:

$$x^2 + bx + \gamma = (x + \kappa)(x + \lambda)$$

Παράδειγμα:

$$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα +3 και γινόμενο -10. Οι αριθμοί αυτοί είναι το -2 και το +5.

$$\begin{aligned} &(x + \kappa)(x + \lambda) \\ &= x^2 + \kappa x + \lambda x + \kappa \lambda \\ &= x^2 + \underbrace{(\kappa + \lambda)}_{\beta} x + \underbrace{\kappa \lambda}_{\gamma} \end{aligned}$$

➤ **Ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου.** Για να παραγοντοποιήσουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου, χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} 4a^2 + 12a + 9 \\ &= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 \\ &= (2a + 3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 12xy + 36y^2 \\ &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 6y + (6y)^2 \\ &= (x - 6y)^2 \end{aligned}$$

Οι παραστάσεις αποτελούνται από όρους αναπτύγματος τετραγώνου. Άρα, χρησιμοποιούμε τις πιο πάνω ταυτότητες.

Παρατήρηση: Σε πολλές αλγεβρικές παραστάσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε συνδυασμό των μεθόδων παραγοντοποίησης.

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 4x \\ &= x(x^2 + 4x + 4) \\ &= x(x + 2)^2 \end{aligned}$$

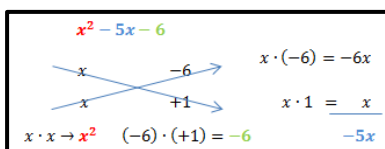
Κοινός Παράγοντας.
Τέλειο Τετράγωνο.

Παραδείγματα

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $x^2 - 5x - 6$ (β) $x^2 + 6x + 9$

(γ) $3x^2 + 6x - 24$ (δ) $y^2 - x^2 - 10y + 25$



Λύση:

(α) $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$

Τριώνυμο.

(β) $3x^2 + 6x - 24$
 $= 3(x^2 + 2x - 8)$
 $= 3(x + 4)(x - 2)$

Κοινός παράγοντας.
Τριώνυμο.

(γ) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Τέλειο τετράγωνο.

(δ) $y^2 - x^2 - 10y + 25$
 $= y^2 - 10y + 25 - x^2$
 $= (y - 5)^2 - x^2$
 $= (y - 5 - x)(y - 5 + x)$

Οι τρεις όροι αποτελούν ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου.
Διαφορά τετραγώνων.

Δραστηριότητες

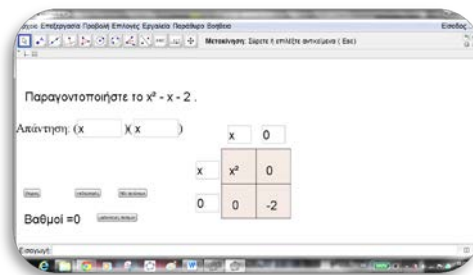


1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως το παράδειγμα

$x^2 + (a + \beta)x + a\beta$	$a\beta$	$a + \beta$	a	β	$(x + a)(x + \beta)$
$x^2 + 6x - 16$	$-2 \cdot 8$	$-2 + 8$	-2	8	$(x - 2) \cdot (x + 8)$
$x^2 + 10x + 16$					
$x^2 - 6x - 16$					
$x^2 - 10x + 16$					
$x^2 - 8x + 16$					
$x^2 + 17x + 16$					

2. Να ανοίξετε το αρχείο «C_En3_Par.trionimou.ggb».

Να δημιουργήσετε 10 διαφορετικά τριώνυμα και να τα παραγοντοποιήσετε. Αφού επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας, πατώντας «έλεγχος», να τις καταγράψετε στο τετράδιό σας.



3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| (α) $x^2 - 9x + 20$ | (β) $y^2 - 2y - 15$ |
| (γ) $x^2 + 5x + 6$ | (δ) $y^2 - 6y + 8$ |
| (ε) $x^2 + 9 - 6x$ | (στ) $a(a - 15) + 56$ |
| (ζ) $\alpha^2 + \alpha - 90$ | (η) $y^3 - 5y^2 - 150y$ |
| (θ) $x^5 + x^4 - 2x^3$ | (ι) $2x^2 - 14x + 20$ |
| (ια) $-a^2 - 5a - 4$ | (ιβ) $y^4 - 5y^3 - 6y^2$ |
4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
- | | |
|-----------------------|--------------------------------------|
| (α) $x^2 - 18x + 81$ | (β) $64 - 16y + y^2$ |
| (γ) $25x^2 + 30x + 9$ | (δ) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ |
| (ε) $x^3 - 6x^2 + 9x$ | (στ) $16a^4 + 24a^2\beta + 9\beta^2$ |

5. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις $A = x^4 - 4x^2$, $B = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ και $A - B$.
6. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν $25\alpha^2 - 30\alpha\beta + 9\beta^2$. Να βρείτε την περίμετρό του, αν ισχύει ότι $5\alpha > 6\beta$.
7. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις, χρησιμοποιώντας κανόνες παραγοντοποίησης:
 (α) $992^2 + 2 \cdot 8 \cdot 992 + 8^2$ (β) $0,58^2 + 0,42^2 + 2 \cdot 0,58 \cdot 0,42$
8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
 (α) $a^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \omega^2$ (β) $x^2 - 16y^2 + 8y - 1$
 (γ) $ax + a + x^2 + 2x + 1$ (δ) $1 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$
9. Να υπολογίσετε όλες τις τιμές του κ για τις οποίες τα πιο κάτω τριώνυμα παραγοντοποιούνται στη μορφή $(x + \alpha)(x + \beta)$, όπου α, β ακέραιοι αριθμοί.
 (α) $x^2 + \kappa x - 7$ (β) $x^2 + \kappa x + 10$
 (γ) $x^2 - 8x + \kappa$, $\kappa > 0$ (δ) $x^2 - 5x + \kappa$, $\kappa > 0$

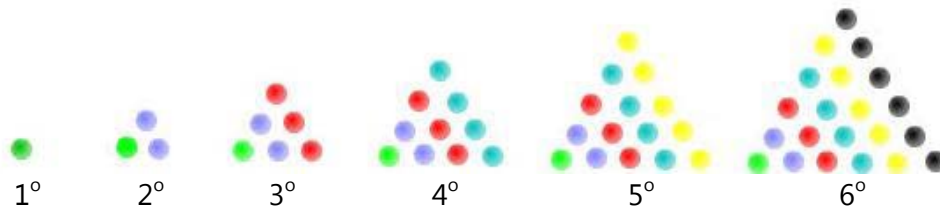
Εξισώσεις Δεύτερου και Ανώτερου Βαθμού

Διερεύνηση (1)

Οι τρίγωνοι αριθμοί είναι μια ακολουθία αριθμών που αρχίζει ως εξής:

1, 3, 6, 10, ...

Οι αριθμοί αυτοί αντιστοιχούν στα παρακάτω «τριγωνικά» σχήματα.



Ο αριθμός T των κουκίδων (•) στο n -οστό τρίγωνο δίνεται από τον τύπο: $T = \frac{1}{2}(n^2 + n)$

✓ Να εξετάσετε ποιοι από τους ακόλουθους αριθμούς είναι τρίγωνοι.

(α) 55

(β) 120

(γ) 150

(δ) 200

Διερεύνηση (2)

Δίνονται οι εξισώσεις: $A \cdot B = 10$, $A \cdot B = 0$

- ✓ Να υπολογίσετε τις πιθανές τιμές των A και B στις πιο πάνω εξισώσεις, αν τα A και B είναι πραγματικοί αριθμοί. Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να λύσετε την εξίσωση: $x \cdot (x - 3) = 10$

Εξίσωση δεύτερου ή ανώτερου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζουμε την εξίσωση που περιέχει μόνο έναν άγνωστο και ο άγνωστος αυτός έχει εκθέτη μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + \beta = 0$, $a \neq 0$, (εξίσωση α' βαθμού) έχει λύση τον αριθμό $x = -\frac{\beta}{a}$.

Μαθαίνω

- Όταν το γινόμενο δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων ισούται με μηδέν, τότε τουλάχιστον μία από αυτές τις παραστάσεις ισούται με μηδέν και αντίστροφα. Δηλαδή: $A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ή $B(x) = 0$

Γενικά:

$$A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \dots \cdot A_n(x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_1(x) = 0 \text{ ή } A_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } A_n(x) = 0$$

Παραδείγματα:

$$(x - 2) \cdot (2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ή } 2x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -\frac{3}{2}$$

$$x^3 + 3x^2 = 10x \Leftrightarrow \\ x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow \\ x(x^2 + 3x - 10) = 0 \Leftrightarrow \\ x(x - 2)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \text{ ή } x + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -5$$

- Κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ ονομάζεται εξίσωση **2^{ου} βαθμού**.

Παράδειγμα:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

- Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$, τότε οι λύσεις ή ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ είναι:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$$\text{Δηλαδή,} \quad x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Παράδειγμα:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Η εξίσωση έχει λύσεις:} \quad x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \\ &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{+1+3}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{+1-3}{4} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Απόδειξη:

$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης επί $4a$.

$$\Rightarrow 4a \cdot ax^2 + 4a \cdot \beta x + 4a \cdot \gamma = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4a\beta x + 4a\gamma = 0$$

$\Rightarrow (4a^2x^2 + 4a\beta x + \beta^2) - \beta^2 + 4a\gamma = 0$ Προσθέτουμε και αφαιρούμε το β^2 , για να προκύψει τέλειο τετράγωνο.

$$\Rightarrow (2ax + \beta)^2 = \beta^2 - 4a\gamma$$

Αν $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$ τότε:

$$\Rightarrow 2ax + \beta = \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}$$

$$\Rightarrow 2ax = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

$$\Rightarrow 2ax + \beta = -\sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}$$

$$\Rightarrow 2ax = -\beta - \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

Επομένως, η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

Παραδείγματα

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x(2x - 1)(x - 1) = 0$

(β) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

(γ) $x^3 = 64x$

(δ) $x(x - 18) + 81 = 0$

Λύση:

(α) Η εξίσωση είναι ήδη στη μορφή $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \dots \cdot A_n(x) = 0$. Άρα, εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται κάθε παράγοντας.

$$\begin{aligned}x(2x - 1)(x - 1) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x - 1 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x = 1 \quad \text{ή } x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{2} \quad \text{ή } x = 1\end{aligned}$$

(β) Η εξίσωση είναι ήδη στη μορφή $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \dots \cdot A_n(x) = 0$. Άρα, εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται κάθε παράγοντας.

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 &\Leftrightarrow x - \sqrt{2} = 0 \text{ ή } x + \sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{ή } x = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

(γ) Πρώτα φέρνουμε τις εξισώσεις στη μορφή $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \dots \cdot A_n(x) = 0$. Στη συνέχεια εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται ο κάθε παράγοντας.

$$x^3 = 64x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 64x = 0$$

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 64) = 0$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x .

$$\Leftrightarrow x(x - 8)(x + 8) = 0$$

Ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου είναι διαφορά τετραγώνων.

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 8 = 0 \quad \text{ή } x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 8 \quad \text{ή } x = -8$$

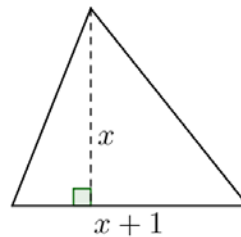
- (δ) Πρώτα φέρνουμε τις εξισώσεις στη μορφή
 $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \dots \cdot A_n(x) = 0$. Στη συνέχεια εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται ο κάθε παράγοντας.

$$\begin{aligned}
 x(x - 18) + 81 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 = 0 && \text{Το α' μέλος της εξίσωσης} \\
 &&& \text{είναι ανάπτυγμα τετρα-} \\
 &&& \text{γώνου σύμφωνα με την} \\
 &&& \text{ταυτότητα} \\
 &&& \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x - 9)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x - 9 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 9 && \text{Άρα, η εξίσωση έχει δι-} \\
 &&& \text{πλή ρίζα το 9.}
 \end{aligned}$$

2. Η βάση ενός τριγώνου είναι 1 μονάδα μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 15 m^2 , να υπολογίσετε τη βάση και το ύψος του.

Λύση:

Έστω,
 $\beta = x + 1$
 $v = x$



$$\begin{aligned}
 E_{\text{τριγ.}} = \frac{\beta \cdot v}{2} = 15 \text{ m}^2 &\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{2} = 15 \\
 \text{Επιλύουμε την} &\Leftrightarrow x(x + 1) = 30 \\
 \text{εξίσωση} &\Leftrightarrow x^2 + x - 30 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 5)(x + 6) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 5) = 0 \text{ ή } (x + 6) = 0 \\
 &\quad x = 5 \text{ (δεκτή) ή} \\
 &\quad x = -6 \text{ (απορρίπτεται διότι είναι} \\
 &\quad \text{μήκη ευθύγραμμων τμημάτων)}
 \end{aligned}$$

Άρα, το ύψος του τριγώνου είναι 5 m και η βάση του 6 m.

3. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $(2x - 5)^2 = 25$

(β) $4x^2 + 4x + 10 = 0$

(γ) $2x^2 - x - 6 = 0$

(δ) $-x^2 + 3x + 1 = 0$

Λύση:

(α) $(2x - 5)^2 = 25$

$$(2x - 5)^2 = (+5)^2 \quad \text{ή} \quad (2x - 5)^2 = (-5)^2$$

$$\begin{array}{llll} \text{Άρα,} & 2x - 5 = -5 & \text{ή} & 2x - 5 = 5 \\ & 2x = -5 + 5 & \text{ή} & 2x = 5 + 5 \\ & 2x = 0 & & 2x = 10 \\ & x = 0 & & x = 5 \end{array}$$

(β) $4x^2 + 4x + 10 = 0$

Α' τρόπος:

$$4x^2 + 4x + 10 = 0$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\alpha = 4, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 10$$

Η εξίσωση έχει ρίζες:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{4} \end{aligned}$$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού η $\sqrt{-24}$ δεν ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

Β' τρόπος:

$$4x^2 + 4x + 10 = 0$$

Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τέλειου τετραγώνου η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 10 &= 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 - 1 + 10 &= 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 + 9 &= 0 \\ (2x + 1)^2 + 9 &= 0 \\ (2x + 1)^2 &= -9 \end{aligned}$$

Για κάθε τιμή του x ισχύει $(2x + 1)^2 \geq 0$. Άρα, η εξίσωση είναι **αδύνατη** αφού δεν υπάρχει τιμή του x που να ισχύει: $(2x + 1)^2 = -9$

(γ) $2x^2 - x - 6 = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$

Η εξίσωση έχει ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm 7}{4}$$

$x_1 = \frac{+1+7}{4}$ $= \frac{8}{4}$ $= 2$		$x_2 = \frac{+1-7}{4}$ $= \frac{-6}{4}$ $= -\frac{3}{2}$
--	--	--

(δ) $-x^2 + 3x + 1 = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$

Η εξίσωση έχει λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-2}$$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{-2}$ $= \frac{+3-\sqrt{13}}{2}$		$x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{-2}$ $= \frac{+3+\sqrt{13}}{2}$
--	--	--

Δραστηριότητες



1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x(x + 5) = 0$

(β) $(x - 7)(x + 5)(2x - 3) = 0$

(γ) $5a^2 - 10a = 0$

(δ) $(2x - 5)(x^2 - 6x + 5) = 0$

(ε) $x^4 - 4x^2 = 0$

(στ) $25x^2 - 10x + 1 = 0$

(ζ) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(η) $(x^2 - 9)(9x^2 - 6x + 1) = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\kappa^3 = 25\kappa$

(β) $x^2 - x = 12$

(γ) $\alpha^2 = 35 - 2\alpha$

(δ) $x^3 = 2x^2$

(ε) $y^3 + y^2 = 2y$

(στ) $\alpha(\alpha - 6) = -9$

(ζ) $(y + 4)(y - 3) = -3y$

(η) $x^2(x - 10) + 25x = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $2x^2 + x - 1 = 0$

(β) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

(γ) $2x^2 - 2x - 3 = 0$

(δ) $2x^2 - 5x + 10 = 0$

(ε) $3x^2 + x - 2 = 0$

(στ) $(x^2 - 7x + 12)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 + 1 = 0$

(β) $(2 - x)^2 = 0$

(γ) $(x - 2)^2 = 4$

(δ) $(3x - 1)^2 + 9 = 0$

(ε) $4x^2 + 12x + 8 = 0$

(στ) $9x^2 - 6x + 2 = 0$

(ζ) $25x^2 - 20x + 12 = 0$

(η) $16x^2 + 40x + 20 = 0$

5. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = (x + 1)^2 + (x - 1)^3 - x^3 + 7$

(α) Να αποδείξετε ότι: $P(x) = -2x^2 + 5x + 7$

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

6. Πιο κάτω φαίνεται η μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Ανδρέας για

να λύσει την εξίσωση

$9x^2 - 6x + 2 = 0$. Να

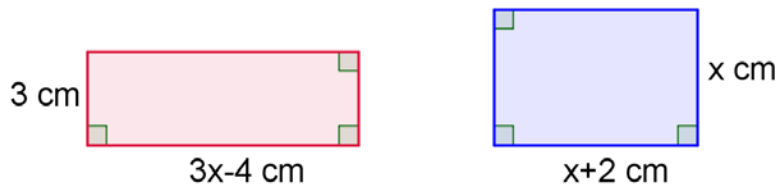
εξετάσετε την ορθότητα

της λύσης.

$9x^2 - 6x + 1 + 1 = 0$
 $(3x - 1)^2 + 1 = 0$
 $(3x - 1)^2 = -1$
Άρα, $3x - 1 = 1$ ή $3x - 1 = -1$
 $3x = 1 + 3$ ή $3x = 0$
 $x = \frac{4}{3}$ ή $x = 0$

7. Η Χριστίνα πολλαπλασίασε έναν αριθμό με τον εαυτό του και μετά πρόσθεσε 6. Το αποτέλεσμα ήταν 5 φορές πιο μεγάλο από τον αρχικό αριθμό. Να γράψετε μια εξίσωση με βάση τις πιο πάνω πληροφορίες και να τη λύσετε για να βρείτε τον αρχικό αριθμό.

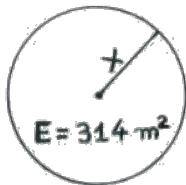
8. Τα πιο κάτω ορθογώνια έχουν το ίδιο εμβαδόν αλλά δεν είναι ίσα. Να υπολογίσετε την τιμή του x .



9. Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων να είναι 74.

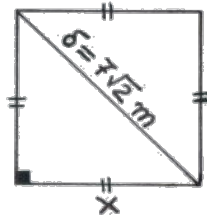
10. Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(α)

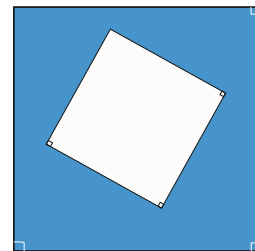


($\pi \cong 3,14$)

(β)



11. Στο διπλανό σχήμα το εξωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά x cm και το εσωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά 3 cm. Να υπολογίσετε την τιμή του x , αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους είναι 16 cm^2 .



12. Ένας ναυαγός βρίσκεται σε μια σωσίβια λέμβο και εκτοξεύει κατακόρυφα προς τα πάνω (όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα) μια φωτοβολίδα για να τον εντοπίσουν. Το ύψος της φωτοβολίδας από την επιφάνεια της θάλασσας δίνεται από την αλγεβρική παράσταση $100t - 5t^2$, όπου t είναι ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα) από την εκτόξευση της φωτοβολίδας.

(α) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η φωτοβολίδα βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας ($Y = 0$).

(β) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «C_En3_fotovolidas.ggb» για να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η φωτοβολίδα βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας ($Y = 0$).



Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

Διερεύνηση

Ο Βασίλης κάνει το ακόλουθο αριθμητικό τέχνασμα στους συμμαθητές του:

- Διαλέξτε έναν αριθμό.
- Υψώστε τον αριθμό στο τετράγωνο.
- Αφαιρέστε το διπλάσιο του αρχικού αριθμού.
- Διαιρέστε το αποτέλεσμα διά τον αρχικό αριθμό μειωμένο κατά 2.
- Ακολούθως διαιρέστε με τον αρχικό αριθμό.

Η απάντησή σας είναι 1!!!

- ✓ Να επιλέξετε διαφορετικούς αριθμούς και να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει το πιο πάνω τέχνασμα.
- ✓ Για ποιους αριθμούς δεν ισχύει το πιο πάνω τέχνασμα;
- ✓ Πως μπορείτε να αποδείξετε ότι ισχύει πάντα το πιο πάνω τέχνασμα;

Μαθαίνω

- Μια αλγεβρική παράσταση με τη μορφή κλάσματος που οι όροι του είναι πολυώνυμα λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**.

Παράδειγμα:

Οι παραστάσεις $\frac{x^2-x+5}{x+1}$, $\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)}$, $\frac{x^2+3x+1}{2}$ είναι ρητές.

- Οι μεταβλητές μιας ρητής αλγεβρικής παράστασης **δεν μπορούν να πάρουν πραγματικές τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή** της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

Παράδειγμα:

Η κλασματική παράσταση $\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)}$,

ορίζεται για $(a-1)(a+1) \neq 0$, δηλαδή για $a \neq 1$ και $a \neq -1$.

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοείται ότι οι μεταβλητές της **δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή**.

- Μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίηση έχει νόημα για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζεται και η αρχική παράσταση.

Παράδειγμα:

$$\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)} = \frac{3(\cancel{a-1})}{(\cancel{a-1})(a+1)} = \frac{3}{a+1}$$

Η απλοποιημένη παράσταση που προέκυψε ορίζεται (έχει νόημα) και πάλι για $a \neq -1$ και $a \neq 1$.

Ένα γινόμενο δύο αριθμών όταν είναι διάφορο του μηδενός, τότε και οι δύο αριθμοί είναι διάφοροι του μηδενός.

Δηλαδή

$\alpha \cdot \beta \neq 0$
τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για το γινόμενο αλγεβρικών παραστάσεων.

Ισχύουν οι ιδιότητες:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$, τότε:

- $\kappa \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa\alpha}{\beta}$, $\kappa \in \mathbb{R}$
- $\frac{\lambda\alpha}{\lambda\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\lambda \neq 0$

Παραδείγματα

- Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

(α) $\frac{13}{x^2}$

(β) $\frac{y}{x+5}$

Λύση:

(α) Η παράσταση $\frac{13}{x^2}$ ορίζεται όταν $x^2 \neq 0$, δηλαδή όταν $x \neq 0$.

(β) Η παράσταση $\frac{y}{x+5}$ ορίζεται όταν $x+5 \neq 0$, δηλαδή όταν $x \neq -5$.

2. Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\frac{x-2}{x^2-4}$ και να την απλοποιήσετε.

Λύση:

Η παράσταση $\frac{x-2}{x^2-4}$ ορίζεται, όταν:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq -2.$$

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{5x^2y^3}{10x^5y^2}$

(β) $\frac{12(a+1)^4}{4(a+1)^5}$

(γ) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

Λύση:

(α) $\frac{5x^2y^3}{10x^5y^2} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{x^2} \cdot \cancel{y^2} \cdot y}{2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{x^2} \cdot x^3 \cdot \cancel{y^2}} = \frac{y}{2x^3}$ Διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της παράστασης.

(β) $\frac{12(a+1)^4}{4(a+1)^5} = \frac{3}{a+1}$ Διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της παράστασης.

(γ) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$ Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της παράστασης και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.

Δραστηριότητες



1. Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζονται οι πιο κάτω παραστάσεις.

(α) $\frac{x+5}{x^2-25}$

(β) $\frac{y^2-4}{y^2+5y-14}$

(γ) $\frac{a-3}{a^2-6a+9}$

2. Να αναγνωρίσετε τις παραστάσεις που είναι ίσες με την παράσταση $\frac{x}{y}$.

(α) $\frac{x-2}{y-2}$ (β) $\frac{5}{5+y}$ (γ) $\frac{x^3}{y^3}$ (δ) $\frac{4x}{4y}$ (ε) $\frac{a^2x}{a^2y}$, $a \neq 0$

3. Ποια από τις ακόλουθες ρητές παραστάσεις δεν ισούται με τις άλλες;

(α) $\frac{5}{3-x}$ (β) $\frac{-5}{x-3}$ (γ) $-\frac{5}{3-x}$ (δ) $-\frac{5}{x-3}$

4. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις.

(α) $\frac{3x}{x^3}$ (β) $\frac{5\beta^2\gamma^3}{2a^2\beta\gamma^2}$

(γ) $\frac{2a^2}{4a(a-6)}$ (δ) $\frac{4(a-9)}{36(9-a)x^3}$

(ε) $\frac{10(a+7)}{2(a+7)^2}$ (στ) $\frac{6(-x-7)(x-2)^2}{24(x-2)(x+7)^2}$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις.

(α) $\frac{2a-10}{a^2-5a}$ (β) $\frac{a^2-2a\beta+\beta^2}{2a-2\beta}$

(γ) $\frac{5x^2-25x}{5x^3-125x}$ (δ) $\frac{2x^2-18}{x^2-6x+9}$

(ε) $\frac{x^2-5x+6}{4-x^2}$ (στ) $\frac{5a-5y+ax-yx}{a^2-ay}$

6. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την τιμή της παράστασης $\frac{2018^3-2018}{2018^2-2018}$.

7. Γιατί το $K = \frac{x^2+5x-24}{x^2+3x-18}$ είναι μεγαλύτερο της μονάδας για κάθε θετικό x ;

Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων

Διερεύνηση



Ο κύριος Γιάννης θέλει να φωτίσει την αυλή του σπιτιού του. Σύμφωνα με τη μελέτη του ηλεκτρολόγου μηχανικού θα χρειαστεί 20 συνηθισμένες λάμπες των 40 w. Προβληματίζεται όμως για το κόστος που θα έχει, αν ανάβει και τις 20 αυτές λάμπες. Η χρέωση από την Α.Η.Κ. είναι περίπου 25 σεντ ανά kwh.

Ο κύριος Γιάννης έγραψε την ακόλουθη παράσταση, για να υπολογίσει το κόστος, όταν ανάβει μια λάμπα για μια ώρα.

$$\text{Κόστος:}$$
$$1 \text{ λάμπα} \cdot 1 \text{ ώρα} \cdot \frac{40 \text{ watt}}{1 \text{ λάμπα}} \cdot \frac{25 \text{ σεντ}}{1 \text{ kilowatt} \cdot 1 \text{ ώρα}} \cdot \frac{1 \text{ kilowatt}}{1000 \text{ watt}} \cdot \frac{1 \text{ ευρώ}}{100 \text{ σεντ}}$$

- ✓ Να εξηγήσετε τι εκφράζει ο καθένας από τους παράγοντες της παράστασης που έγραψε ο κύριος Γιάννης.
- ✓ Να γράψετε μία ισοδύναμη παράσταση με την πιο πάνω όσο πιο απλά μπορείτε.
- ✓ Να υπολογίσετε το κόστος για 3 ώρες, όταν θα έχει αναμμένες όλες τις λάμπες.
- ✓ Ο κύριος Γιάννης ανακάλυψε ότι μπορεί να χρησιμοποιήσει 20 οικονομικούς λαμπτήρες των 8 w. Να υπολογίσετε πόση εξοικονόμηση θα κάνει κάθε 3 ώρες που θα έχει αναμμένες όλες τις λάμπες.

Μαθαίνω

- Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε ρητές αλγεβρικές παραστάσεις χρησιμοποιούμε διαδικασίες παρόμοιες με το γινόμενο και το πηλίκο ρητών αριθμητικών παραστάσεων.
Αν A, B, Γ, Δ είναι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, τότε ισχύει:

$$- \kappa \cdot \frac{A}{B} = \frac{\kappa \cdot A}{B}, \kappa \in \mathbb{R}$$

$$- \frac{A}{B} \cdot \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A \cdot \Gamma}{B \cdot \Delta}$$

$$- \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{A \cdot \Delta}{B \cdot \Gamma}$$

$$- \frac{\frac{A}{B}}{\frac{\Gamma}{\Delta}} = \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{A \cdot \Delta}{B \cdot \Gamma}$$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \frac{2a+3\beta}{a-\beta} \cdot \frac{\alpha^2-\beta^2}{9\beta^2-4a^2} = \\ & = \frac{2a+3\beta}{a-\beta} \cdot \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(3\beta-2a)(3\beta+2a)} \text{ Αναλύουμε τους όρους του κάθε} \\ & \text{κλάσματος σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.} \\ & = \frac{(2a+3\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)(3\beta-2a)(2a+3\beta)} \text{ Απλοποιούμε τους ίδιους όρους.} \\ & = \frac{\alpha+\beta}{3\beta-2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\beta) \quad & \frac{x^2}{2y} : \frac{x^3}{6y^4} = \\ & = \frac{x^2}{2y} \cdot \frac{6y^4}{x^3} \text{ Μετατρέπουμε τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό,} \\ & \text{αντιστρέφοντας το διαιρέτη.} \\ & = \frac{3y^3}{x} \end{aligned}$$

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τα αποτελέσματα, όπου είναι δυνατόν.

$$(\alpha) \quad \frac{5}{3x} \cdot \frac{12x^2}{10y}$$

$$(\beta) \quad \frac{1-4x+4x^2}{x^2-4} : \frac{2x-1}{2-x}$$

Λύση:

$$(\alpha) \quad \frac{5}{3x} \cdot \frac{12x^2}{10y} = \frac{2x}{y} \quad \text{Απλοποιούμε}$$

$$(\beta) \frac{1-4x+4x^2}{x^2-4} : \frac{2x-1}{2-x} = \frac{(1-2x)^2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{2-x}{2x-1} \text{ Αντιστρέφουμε τον Διαιρέτη}$$

και παραγοντοποιούμε

Ισχύει

$$(1-2x)^2 = (2x-1)^2$$

$$(2-x) = -(x-2)$$

$$= \frac{-(2x-1)^2 \cdot (x-2)}{(x-2)(x+2)(2x-1)} \text{ Απλοποιούμε}$$

$$= -\frac{2x-1}{x+2}$$

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\frac{\frac{1}{a^2-9}}{\frac{a^2-3a+9}{a^3+27}}$

Λύση:

Α' Τρόπος

$$\frac{\frac{1}{a^2-9}}{\frac{a^2-3a+9}{a^3+27}} = \frac{1}{(a-3)(a+3)} : \frac{a^2-3a+9}{(a+3)(a^2-3a+9)} \text{ Παραγοντοποιούμε}$$

$$= \frac{1}{(a-3)(a+3)} \cdot \frac{(a+3)(a^2-3a+9)}{a^2-3a+9} = \frac{1}{a-3} \text{ Αντιστρέφουμε}$$

και απλοποιούμε

Ισχύει

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

όπου $\beta, \gamma, \delta \neq 0$

Β' Τρόπος

Μετατρέπουμε το σύνθετο κλάσμα σε απλό:

$$\frac{\frac{1}{a^2-9}}{\frac{a^2-3a+9}{a^3+27}} = \frac{\frac{1}{(a-3)(a+3)}}{\frac{a^2-3a+9}{(a+3)(a^2-3a+9)}} = \frac{(a+3)(a^2-3a+9)}{(a-3)(a+3)(a^2-3a+9)}$$

$$= \frac{1}{a-3}$$

Δραστηριότητες



1. Να απλοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση.

$$20 \text{ λεπτά} \cdot \frac{75 \text{ χιλιόμετρα}}{1 \text{ ώρα}} \cdot \frac{1 \text{ ώρα}}{60 \text{ λεπτά}}$$

Τι μπορεί να παριστάνει το αποτέλεσμα της πιο πάνω παράστασης;

2. Να μετατρέψετε: (α) 10 m/s σε Km/h
 (β) 72 Km/h σε m/s

3. Να κάνετε τους πιο κάτω πολλαπλασιασμούς:

$$\begin{array}{ll} \text{(α)} \frac{10}{\alpha^3} \cdot \frac{\alpha^3}{2\omega^3} & \text{(β)} \frac{x^2-1}{2x+2} \cdot \frac{4}{x^2-x} \\ \text{(γ)} \frac{5(a+2)^2}{3a^2} \cdot \frac{9a}{7(a+2)} & \text{(δ)} \frac{x^2-9}{x-3} \cdot \frac{2x}{6+2x} \\ \text{(ε)} \frac{xy^2}{x^2+3x-18} \cdot \frac{4x+24}{xy} \cdot \frac{1}{4y} & \text{(στ)} \frac{y^3-y}{y^2-9} \cdot \frac{9-6y+y^2}{y^2} \cdot \frac{2y+6}{1-y^2} \end{array}$$

4. Να κάνετε τις πιο κάτω διαιρέσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{(α)} \frac{3a^2}{\beta} : \frac{6a}{\beta^2} & \text{(β)} \frac{a^5}{\beta^5} : \left(\frac{a}{\beta}\right)^6 \\ \text{(γ)} \frac{x}{x-2} : \frac{x^2}{x^2-2x} & \text{(δ)} \frac{6}{x+5} : \frac{3x-45}{x^2+10x+25} \\ \text{(ε)} \frac{x^3}{x^3-1} : \frac{3}{x^3+x^2+x} & \text{(στ)} \frac{x^2-8x+12}{x^2-36} : \frac{3x-6}{x^2+5x-6} \end{array}$$

5. Η Γεωργία και η Χριστίνα έκαναν τις πιο κάτω πράξεις:

Γεωργία

$$\begin{aligned} & \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3x}{x^2-3x+2} = \\ & = \frac{\cancel{x-2}}{x+2} \cdot \frac{3x}{(\cancel{x-2})(x-1)} \\ & = \frac{3x}{(x+2)(x-1)} \end{aligned}$$

Χριστίνα

$$\begin{aligned} & \frac{\cancel{x-2}}{x+\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{3x}}{x^2-\cancel{3x}+2} \\ & = \frac{1}{x^2+2} \end{aligned}$$

Να εξηγήσετε ποιο από τα δύο αποτελέσματα είναι ορθό και γιατί;

6. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\frac{2x^4-2x^3}{x^2-x} \cdot \frac{1}{2x}$ για $x = 2013$.

7. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{\frac{2\alpha\gamma}{3\beta}}{\frac{\alpha}{4\beta}}$$

$$(\beta) \frac{\frac{3x-6}{x-1}}{\frac{5x-10}{15x-15}}$$

$$(\gamma) \frac{\frac{x(x+1)}{x^2-1}}{2x}$$

$$(\delta) \frac{\frac{3\alpha+3\beta}{\alpha\beta}}{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}}$$

8. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{x^2y^2-y^4}{x^3-y^3} : \frac{xy^2+y^3}{x^2+xy+y^2}$ είναι σταθερή.

Πρόσθεση – Αφαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων

Διερεύνηση

Ο Γιώργος και ο Δημήτρης δουλεύουν ταυτόχρονα, για να καλύψουν τη στέγη ενός σπιτιού με κεραμίδια. Για την εργασία αυτή χρειάζονται 6 μέρες.

Αν ο καθένας δουλεύει μόνος του, ο Γιώργος τελειώνει τη στέγη 5 μέρες νωρίτερα από τον Δημήτρη.



- ✓ Να θεωρήσετε ότι ο Δημήτρης χρειάζεται x μέρες για να ολοκληρώσει τη στέγη από μόνος του.

Να βρείτε τις παραστάσεις που εκφράζουν τα πιο κάτω:

- Τις μέρες που χρειάζεται ο Γιώργος για να ολοκληρώσει τη στέγη, αν δουλεύει μόνος του.
 - Το μέρος της στέγης που θα ολοκληρώσει ο Γιώργος, σε μια μόνο μέρα, αν δουλεύει μόνος του.
 - Το μέρος της στέγης που θα ολοκληρώσει ο Δημήτρης, σε μια μόνο μέρα, αν δουλεύει μόνος του.
 - Το μέρος της στέγης που θα ολοκληρώσουν μαζί ο Δημήτρης και ο Γιώργος, σε μια μόνο μέρα.
- ✓ Να υπολογίσετε πόσες μέρες χρειάζεται ο Δημήτρης, για να ολοκληρώσει τη στέγη από μόνος του.

Μαθαίνω

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων πολυωνύμων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο **όλων των παραγόντων τους (κοινών και μη-κοινών)** με εκθέτη κάθε παράγοντα τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Παραδείγματα:

Το ΕΚΠ των πιο κάτω παραστάσεων είναι:

$$\text{ΕΚΠ } (2xy^2, 6x^2y\omega, xy) = 6x^2y^2\omega$$

$$\text{ΕΚΠ } ((x-y)(x+y), 5(x+y)^2) = 5(x+y)^2(x-y)$$

- Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ρητές αλγεβρικές παραστάσεις χρησιμοποιούμε διαδικασίες παρόμοιες με το άθροισμα και τη διαφορά ρητών αριθμητικών παραστάσεων.

Για ρητές παραστάσεις με τους **ίδιους παρονομαστές** ισχύει:

$$\frac{A}{B} + \frac{\Gamma}{B} = \frac{A + \Gamma}{B}, \quad \frac{A}{B} - \frac{\Gamma}{B} = \frac{A - \Gamma}{B}$$

Παράδειγμα:

$$\frac{x+3}{y+2} - \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3-(x-2)}{y+2} = \frac{x+3-x+2}{y+2} = \frac{x+5}{y+2}$$

Όταν έχουμε ρητές παραστάσεις με **διαφορετικούς παρονομαστές** πρέπει πρώτα να τις μετατρέψουμε, ώστε να έχουν κοινό παρονομαστή το ΕΚΠ των παρονομαστών τους.

Παράδειγμα:

$$\text{ΕΚΠ } (2x, x+1) = 2x(x+1)$$

$$\frac{x+1}{2x} + \frac{2x}{x+1} = \frac{3(x+1)+4x}{2x(x+1)} = \frac{3x+3+4x}{2x(x+1)} = \frac{7x+3}{2x(x+1)}$$

- Όταν το πηλίκο δύο αλγεβρικών παραστάσεων ισούται με μηδέν, τότε ο αριθμητής του πηλίκου ισούται με μηδέν ενώ ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός και αντίστροφα.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ και } B(x) \neq 0.$$

- Για την επίλυση εξίσωσης της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$, βρίσκουμε τις τιμές που μηδενίζουν την $A(x)$, αλλά δεχόμαστε μόνο όσες από αυτές δεν μηδενίζουν τη $B(x)$.

Παράδειγμα:

$$\frac{x-2}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \quad \text{Περιορισμός: } x+3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \quad \Leftrightarrow x \neq -3$$

Η λύση είναι δεκτή διότι ικανοποιεί τον περιορισμό.

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$(\beta) \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}$$

Λύση:

$$(\alpha) \frac{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y+x}{xy}$$

$$ΕΚΠ = xy$$

$$(\beta) \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{2x-1(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x-x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{x+1}}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1}$$

Μετατρέπουμε τις παραστάσεις, ώστε να έχουν κοινό παρονομαστή (ομώνυμα) και εκτελούμε την πρόσθεση.

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή της παράστασης $\frac{1}{x^2-1}$.

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.:

$$ΕΚΠ = (x+1)(x-1)$$

Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα και εκτελούμε την πρόσθεση στον αριθμητή.

Απλοποιούμε.

2. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2}{x-3} + \frac{x}{2x-4} = \frac{2}{x^2-5x+6}$

Λύση:

$$\frac{2}{x-3} + \frac{x}{2x-4} = \frac{2}{x^2-5x+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-3} + \frac{x}{2(x-2)} = \frac{2}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{\cancel{2}} + \frac{x-3}{\cancel{x}} = \frac{\frac{2}{\cancel{2}}}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-2) + x(x-3)}{2(x-2)(x-3)} = \frac{4}{2(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 4(x-2) + x(x-3) = 4$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8 + x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+4 = 0 \text{ ή } x-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ ή } x = 3$$

Η λύση $x = -4$ είναι δεκτή ενώ η $x = 3$ απορρίπτεται.

Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, για να βρούμε το ΕΚΠ και να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

$$ΕΚΠ = 2(x-2)(x-3)$$

Θέτουμε περιορισμούς:

$$2(x-2)(x-3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 \neq 0 \text{ και } x-3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq 3$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές

Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Ελέγχουμε κατά πόσο οι λύσεις που βρήκαμε τηρούν τους περιορισμούς.

$$(x \neq 2 \text{ και } x \neq 3)$$

Δραστηριότητες



1. Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε τις παραστάσεις ως ένα κλάσμα:

$$(\alpha) \frac{1}{x} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{5x}$$

$$(\beta) \frac{a}{\beta} - \frac{7}{11}$$

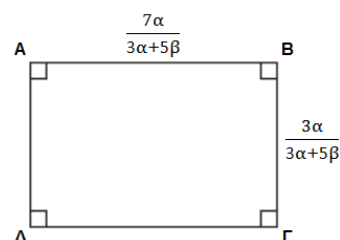
$$(\gamma) \frac{5x}{x+5} + \frac{1}{x+5}$$

$$(\delta) \frac{3x}{x+2} + \frac{6}{x+2}$$

$$(\epsilon) \frac{3}{\beta} + \frac{3}{\beta^2} + \frac{3}{\beta^3}$$

$$(\sigma\tau) \frac{3}{2x} - \frac{1}{xy} + \frac{2}{3y}$$

2. Ποια από τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις εκφράζει την περίμετρο του διπλανού ορθογωνίου;



$$(\alpha) \frac{7\alpha}{3\alpha+5\beta}$$

$$(\beta) \frac{10\alpha}{3\alpha+5\beta}$$

$$(\gamma) \frac{10\alpha}{6\alpha+10\beta}$$

$$(\delta) \frac{20\alpha}{3\alpha+5\beta}$$

3. Η κυρία Ελένη μπορεί να πληκτρολογεί κατά μέσο όρο n λέξεις το λεπτό. Να γράψετε μια παράσταση που να εκφράζει τα λεπτά που χρειάζεται η κυρία Ελένη, για να πληκτρολογήσει:

$$(\alpha) 300 \text{ λέξεις}$$

$$(\beta) 100 \text{ λέξεις}$$

$$(\gamma) 900 \text{ λέξεις}$$

(δ) Να προσθέσετε τις παραστάσεις από τα (α), (β), (γ). Τι αντιπροσωπεύει το άθροισμα αυτό;

4. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$$

$$(\beta) \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}$$

$$(\gamma) \frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x}$$

$$(\delta) \frac{3x}{3x+1} - \frac{5}{3x-1} - \frac{9x^2+1}{9x^2-1}$$

$$(\epsilon) \frac{1}{x-4} - \frac{6}{x^2-x-12} - \frac{x-3}{x^2+3x}$$

$$(\sigma\tau) \frac{a}{a^2+2a} - \frac{2}{2-a} - \frac{4a}{a^2-4}$$

5. Να γράψετε δύο ρητές αλγεβρικές παραστάσεις με παρονομαστή $x + 2$ οι οποίες:

(α) να έχουν άθροισμα 1

(β) να έχουν άθροισμα 0

6. Να δείξετε ότι $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$. Ακολουθώντας να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα, για να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

(α) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (β) $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ (γ) $\frac{1}{10} + \frac{1}{11}$ (δ) $\frac{1}{20} + \frac{1}{21}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(2\alpha - \beta) : \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$ (β) $3\alpha(\alpha + 2) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+2}\right)$

(γ) $\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ (δ) $\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}\right) : \frac{9x^2-1}{x^2-x}$

(ε) $\left(\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x-2}\right) : \frac{x+2}{x^2-3x+2}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{x-7}{x+1} = 0$ (β) $\frac{x^2-2x-3}{x+1} = 0$

(γ) $\frac{y+4}{3} = \frac{2y-1}{y-2}$ (δ) $\frac{x^2-2x-3}{x-3} = 2$

(ε) $\frac{12}{x-1} - \frac{6}{x} = -1$ (στ) $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1} = -2$

(ζ) $\frac{3x}{x^2-16} + \frac{1}{4-x} = \frac{3}{x+4}$ (η) $\frac{5y}{y^2-y-12} + \frac{2}{4-y} = \frac{2y}{y^2+3y}$

9. Να αντιστοιχίσετε τις προτάσεις της Στήλης Ι με τις κατάλληλες προτάσεις της Στήλης ΙΙ:

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
Δίνεται η εξίσωση:	Η εξίσωση έχει λύση:
(α) $\frac{x-3}{x+1} = 0$	1) $x = 0$ ή $x = -3$
(β) $\frac{x(x+3)}{x+1} = 0$	2) $x = 2$
(γ) $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$	3) $x = 3$
(δ) $\frac{x^3-x}{x^2+x} = 1$	4) $x = 1$
	5) $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $3κω + 3κφ$

(β) $5x^2y + 10xy^2 - 15x^3$

(γ) $x^2 - 7x + 10$

(δ) $y^2 - y - 12$

(ε) $8x^2 - 4xy$

(στ) $2x^3 - 2x$

(ζ) $x^2 + xy + 5x + 5y$

(η) $y^3 - 6y^2 + 8y$

(θ) $ax^3 - 27a$

(ι) $16a^2 - 8ay + y^2$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $(a + 1)^2 - 9$

(β) $3x - 3y + x^2 - y^2$

(γ) $(3x + 2y)^2 - 16y^2$

(δ) $4a^2(\beta^2 - 1) + 4\beta^2(1 - \beta^2)$

(ε) $x^3 + y^3 - 3x - 3y$

(στ) $x^2 - 10x + 25 + 4x - 20$

(ζ) $a^3x - \beta^3x + a^3 - \beta^3$

(η) $y^2 - x^2 - 10y + 25$

(θ) $a^3 + 2a^2 + a + a\beta + \beta$

(ι) $(x - y)^2 - (x + 1)^2$

(ια) $(3a - 9)(a^2 - 9) - (a - 3)^2$

(ιβ) $x^2 + 4x - 36a - 12 + ax^2$



3. Ο κύριος Φαίδωνας είναι υπεύθυνος για τη διοργάνωση ενός τουρνουά ποδοσφαίρου σάλας. Για να βρει τον αριθμό των αγώνων που πρέπει να προγραμματίσει χρησιμοποιεί την παράσταση $A = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v$. Το αποτέλεσμα της παράστασης αυτής δίνει τον αριθμό των αγώνων που χρειάζονται, ώστε να παίξουν v ομάδες μεταξύ τους από μια φορά.

(α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση A .

(β) Πόσοι αγώνες πρέπει να προγραμματιστούν, για να παίξουν μεταξύ τους 9 ομάδες από δύο φορές;

4. (α) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων την παράσταση $a^2\beta + a\beta^2 - a - \beta$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι, αν $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$.

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) \frac{9x^4y^3\omega}{-3x^2y^2\omega}$$

$$(\beta) \frac{x+5}{x^2+5x}$$

$$(\gamma) \frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}$$

$$(\delta) \frac{y(y-3)+y^2-9}{4y^2-9}$$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$$

$$(\beta) \frac{2a^3}{3\beta^2} : \frac{4a^2}{6\beta}$$

$$(\gamma) \frac{a^2-4}{a^2+a-6} \cdot \frac{a+3}{a^2+2a}$$

$$(\delta) \frac{2y^2}{y^2-y-6} \cdot \frac{y^2-9}{y}$$

$$(\epsilon) \frac{y^2-4}{y^2+y} : \frac{y^2+5y+6}{y^2+3y}$$

$$(\sigma\tau) \frac{x^3+8}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x^2-2x+4}$$

$$(\zeta) \frac{a^2-4}{a-3} \cdot \frac{a^2+a}{a^2-a-6} : \frac{a^3-a}{a^2-6a+9}$$

$$(\eta) \frac{xy-xy^3}{\frac{6}{xy-x^3y}}$$

$$(\theta) \frac{\frac{x}{y} - \frac{9y}{x}}{\frac{x^2-6xy}{y^2} + 9}$$

$$(\iota) \frac{\frac{x^2+y^2}{xy} - 2}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{3}{5} - \frac{5+9\alpha}{15\alpha}$$

$$(\beta) \frac{\beta+4}{4\beta} - \frac{1}{\beta}$$

$$(\gamma) \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1}$$

$$(\delta) \frac{2y}{2y+1} - \frac{5}{2y-1} - \frac{4y^2+1}{4y^2-1}$$

$$(\epsilon) \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) \cdot \frac{x^2+3x}{2x+18}$$

$$(\sigma\tau) \frac{y^2-4}{y^2+4y+4} : \left(\frac{5}{y+2} - \frac{3}{y} \right)$$

8. Δίνεται το άθροισμα $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

(α) Να εξετάσετε με ποιο από τα παρακάτω ισούται:

$$(A) \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

$$(B) \frac{1}{x(x+1)}$$

$$(Γ) \frac{2x-1}{x(x+1)}$$

$$(\Delta) -\frac{1}{x(x+1)}$$

(β) Να βρείτε το άθροισμα $\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$.

9. Να βρείτε την παράσταση $A(x)$, ώστε να ισχύουν οι ισότητες στις πιο κάτω περιπτώσεις:

$$(\alpha) \frac{2x}{x+3} + A(x) = \frac{2x+3}{x+3}$$

$$(\beta) \frac{2x}{x+3} - A(x) = \frac{3x-1}{x+3}$$

$$(\gamma) \frac{x+1}{x^2-9} \cdot A(x) = \frac{1}{3(x+3)}$$

$$(\delta) \frac{x+3}{x^2-2x+1} : A(x) = \frac{2}{x-1}$$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\alpha) (\alpha - 2)(\alpha + 8) = 0$$

$$(\beta) 3x(5x - 2) = 0$$

$$(\gamma) 3(x + 5)^2 = 0$$

$$(\delta) x^2 = 9x$$

$$(\epsilon) x(x + 3) = 4$$

$$(\sigma\tau) 16\beta^2 - 8\beta + 1 = 0$$

$$(\zeta) x(x + 1) = 3x(x + 1)$$

$$(\eta) (\alpha - 3)(\alpha + 2) = +6$$

11. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου, αν διαφέρουν κατά 5 cm και το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 24 cm^2 .

12. Οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου διαφέρουν κατά 2 cm . Αν η υποτείνουσα είναι 10 cm , να υπολογίσετε τα μήκη των κάθετων πλευρών του τριγώνου.

13. Το άθροισμα του τετραγώνου και του κύβου ενός αριθμού είναι ίσο με 20 φορές τον ίδιο τον αριθμό. Να βρείτε όλους τους αριθμούς με αυτή την ιδιότητα και να χαρακτηρίσετε το σύνολο στο οποίο ανήκουν.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\alpha) \frac{x-2}{x} = 0$$

$$(\beta) \frac{4x+1}{x(x-2)} = \frac{9}{x-2}$$

$$(\gamma) \frac{x+1}{x-1} = 2$$

$$(\delta) \frac{x-3}{x+1} = \frac{x+5}{x-2}$$

$$(\epsilon) \frac{3x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{x-3}$$

$$(\sigma\tau) \frac{y}{y+2} + \frac{4}{y} = \frac{y+8}{y^2+2y}$$

$$(\zeta) \frac{3-3\alpha}{3-\alpha} - \frac{2(\alpha+1)}{2+\alpha} = \frac{30}{\alpha^2-\alpha-6}$$

$$(\eta) \frac{y-4}{y^2+y} + \frac{10}{y^2-1} = \frac{8}{y^2-y}$$

15. Η Δανάη κάνει τα ακόλουθα αριθμητικά τεχνάσματα στους συμμαθητές της:

Τέχνασμα 1:

«Διαλέξτε έναν αριθμό.

Αφαιρέστε 1.

Γυώστε στο τετράγωνο το αποτέλεσμα.

Αφαιρέστε 4.

Διαιρέστε με τον αρχικό αριθμό.

Αφαιρέστε 5 από το αποτέλεσμα.

Η απάντησή σας είναι ο αρχικός σας αριθμός!!!»

Τέχνασμα 2:

«Διαλέξτε έναν αριθμό.

Προσθέστε 3.

Γυώστε στο τετράγωνο το αποτέλεσμα.

Αφαιρέστε 4.

Διαιρέστε με τον αριθμό που είναι κατά 1 πιο μεγάλος από τον αρχικό σας αριθμό.

Αφαιρέστε 5 από το αποτέλεσμα.

Η απάντησή σας είναι ο αρχικός σας αριθμός!!!»

- (α) Να ελέγξετε αν ισχύουν τα πιο πάνω τεχνάσματα. Να εξηγήσετε πώς μπορείτε να είσαστε σίγουροι για την απάντησή σας.
- (β) Πώς μπορείτε να αποδείξετε ότι τα πιο πάνω ισχύουν πάντα;
- (γ) Τα πιο πάνω ισχύουν για όλους τους αριθμούς;

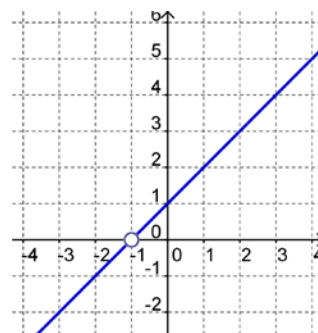
16. Να βρείτε ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς. Να εξετάσετε πόσα τέτοια τρίγωνα υπάρχουν.

17. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, να δείξετε ότι $(\alpha + 2\beta)^2 + (2\alpha - \beta)^2 = 5$.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να δείξετε ότι η παράσταση $\frac{\beta^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{\alpha + \beta}$ είναι ίση με γ .

2. Η συνάρτηση $y = \frac{(x+1)^2}{x+1}$ μπορεί να απλοποιηθεί στην $y = x + 1$, για κάθε τιμή του x , εκτός για $x = -1$, που μηδενίζει τον παρονομαστή. Η γραφική παράσταση της $y = \frac{(x+1)^2}{x+1}$, που φαίνεται δίπλα, είναι η ίδια με της $y = x + 1$ αλλά με ένα άδειο κύκλο στο σημείο $(-1, 0)$ που υποδηλώνει ότι δεν παίρνει τιμή για $x = -1$. Με παρόμοιο τρόπο να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:



(α) $y = \frac{4x^2}{2x}$

(β) $y = \frac{(x-2)(2x-3)}{x-2}$

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2013^3 + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 2014.
4. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{x+2009}\right) \left(1 - \frac{1}{x+2010}\right)$$

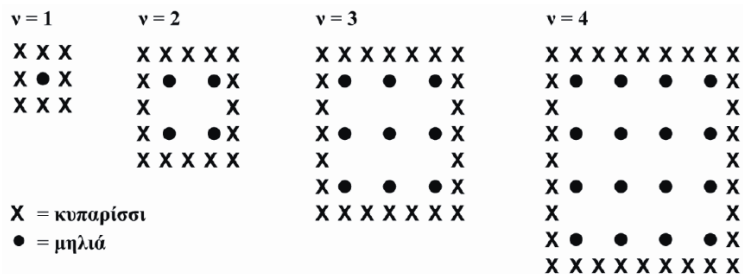
5. (α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$

(β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα:

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014}$$
 δεν μπορεί να υπερβεί τη μονάδα.

6. Ο κύριος Αντρέας εργάζεται σε ένα λογιστικό γραφείο. Συνήθως για να ολοκληρώσει μια δουλειά για έναν συγκεκριμένο πελάτη χρειάζεται 2 ώρες. Μια μέρα επειδή βιαζόταν ζήτησε από τον κ. Γιώργο να τον βοηθήσει και τελείωσαν τη δουλειά σε 1 ώρα και 20 λεπτά. Πόσο χρόνο χρειάζεται ο κύριος Γιώργος για να τελειώσει τη δουλειά από μόνος του;

7. Ένας αγρότης θέλει να φυτέψει μηλιές σε σειρές και σε τετράγωνο σχήμα. Σκέφτεται να προστατέψει τις μηλιές από τον αέρα, περιφράζοντάς τις με κυπαρίσσια. Στα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τη διάταξη των δέντρων, όπως τα φαντάζεται ο αγρότης. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει διαφορετικές σειρές από μηλιές (v = σειρές από μηλιές).



- (α) Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

v	Πλήθος δέντρων μηλιάς	Πλήθος κυπαρισσιών
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

- (β) Οι τύποι που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να υπολογίσετε το πλήθος των δέντρων μηλιάς και το πλήθος των κυπαρισσιών στα παραπάνω διαγράμματα, είναι δύο:

$$\text{Πλήθος δέντρων μηλιάς} = v^2$$

$$\text{Πλήθος κυπαρισσιών} = 8v$$

όπου v είναι ο αριθμός των σειρών που σχηματίζουν οι μηλιές.

Υπάρχει μια τιμή του v , για την οποία το πλήθος των δέντρων μηλιάς ισούται με το πλήθος των κυπαρισσιών. Να βρείτε αυτή την τιμή του v και να περιγράψετε παρακάτω τον τρόπο με τον οποίο την υπολογίσατε.

- (γ) Ας υποθέσουμε ότι ο αγρότης μεγαλώνει συνέχεια το περιβόλι του προσθέτοντας συνεχώς σειρές δέντρων. Ενώ ο αγρότης μεγαλώνει το περιβόλι του προσθέτοντας σειρές, θα χρειαστεί περισσότερες μηλιές ή κυπαρίσσια; Γράψτε παρακάτω τον τρόπο με τον οποίο βρήκατε την απάντησή σας.

PISA 2003

8. Ένα από τα επακόλουθα της υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων, αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά που ονομάζονται λειχήνες.

Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται σε σχήμα περίπου κυκλικό.

Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται, για να υπολογιστεί κατά προσέγγιση, η διάμετρος (δ) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της:

$$\delta = 7,0 \times \sqrt{t - 12} \quad \text{για } t \geq 12$$

όπου δ η διάμετρος της λειχήνας σε mm , και t ο αριθμός των ετών που έχουν περάσει μετά το λιώσιμο των πάγων.

- (α) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, υπολογίστε τη διάμετρο που θα έχει μια λειχήνα, 16 έτη μετά το λιώσιμο των πάγων.
- (β) Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο μιας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος, και είδε ότι ήταν $35 mm$. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος; Εξηγήστε πώς βρήκατε την απάντησή σας.
- (γ) Σε πόσα χρόνια από σήμερα, μια λειχήνα που τώρα έχει διάμετρο $35 mm$ θα έχει διπλασιάσει τη διάμετρό της; Εξηγήστε παρακάτω πώς βρήκατε την απάντησή σας.

PISA 2003

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να εφαρμόζουμε τις προτάσεις που αφορούν τις ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου.
- Να γνωρίζουμε πότε δυο σχήματα είναι ίσα.
- Να εξετάζουμε πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα με τη βοήθεια των κριτηρίων ισότητας τριγώνων.
- Να εφαρμόζουμε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων, για να αποδεικνύουμε ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών.

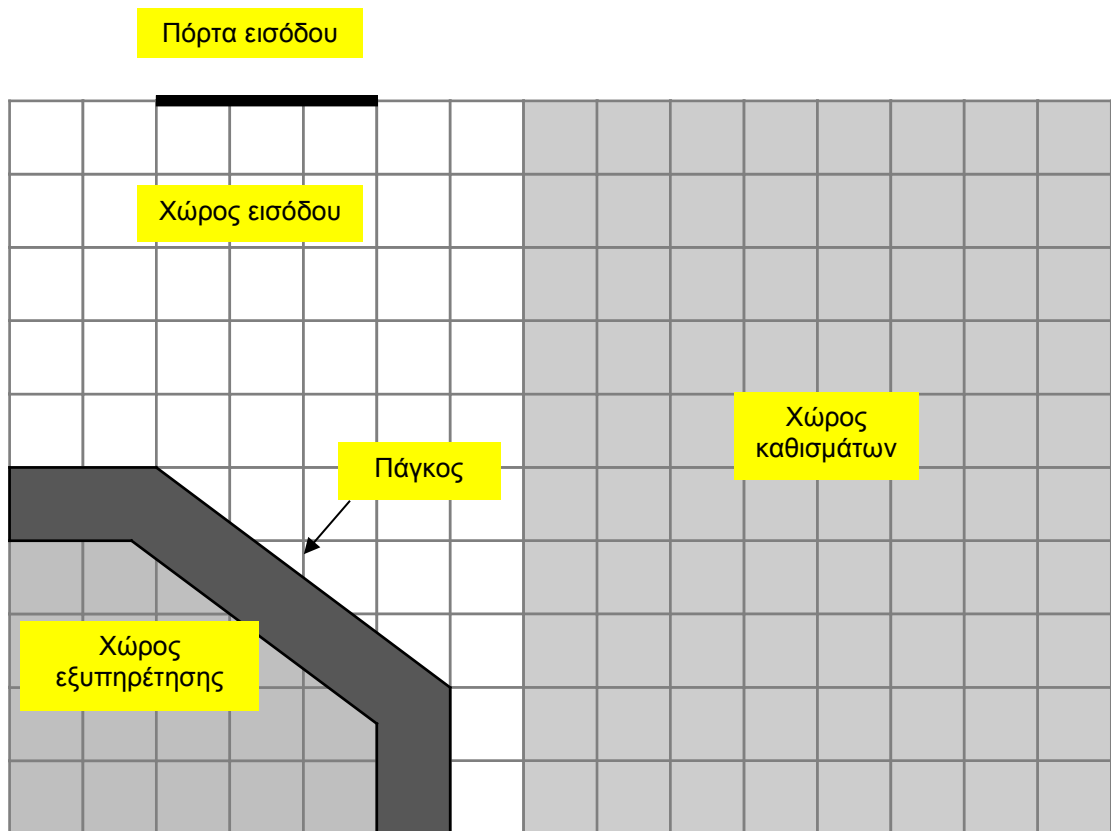


Λύση Προβλήματος

ΖΑΧΑΡΟΠΛΑΣΤΕΙΟ

Πιο κάτω παρουσιάζεται η κάτοψη του Ζαχαροπλαστείου της Μαρίας. Η Μαρία ανακαινίζει το κατάστημά της.

Ο χώρος εξυπηρέτησης περιτριγυρίζεται από τον πάγκο εξυπηρέτησης.



Σημείωση: Κάθε τετραγωνάκι στο διάγραμμα αντιστοιχεί σε 0,5 μέτρα \times 0,5 μέτρα.

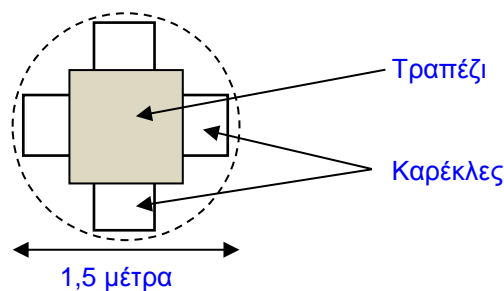
Ερώτηση 1:

Η Μαρία θέλει να τοποθετήσει καινούρια ταπετσαρία κατά μήκος της εξωτερικής πλευράς του πάγκου εξυπηρέτησης. Ποιο είναι το συνολικό μήκος της ταπετσαρίας που χρειάζεται;

Ερώτηση 2:

Η Μαρία πρόκειται, επίσης, να τοποθετήσει νέο δάπεδο στο κατάστημα. Ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν του καταστήματος, εκτός από τον χώρο εξυπηρέτησης και τον πάγκο εξυπηρέτησης;

Ερώτηση 3:



Η Μαρία θέλει να τοποθετήσει στο κατάστημά της σύνολα (σετ) αποτελούμενα από ένα τραπέζι και τέσσερις καρέκλες, όπως αυτό που φαίνεται πιο πάνω. Ο κύκλος αναπαριστά το εμβαδόν του δαπέδου που χρειάζεται για το κάθε σύνολο.

Για να υπάρχει αρκετός χώρος για τους πελάτες, όταν κάθονται, κάθε σύνολο (όπως φαίνεται από τον κύκλο) πρέπει να τοποθετηθεί σύμφωνα με τους πιο κάτω περιορισμούς:

- Κάθε σύνολο πρέπει να τοποθετηθεί τουλάχιστον 0,5 μέτρα μακριά από τους τοίχους.
- Κάθε σύνολο πρέπει να τοποθετηθεί τουλάχιστον 0,5 μέτρα μακριά από τα άλλα σύνολα.

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός συνόλων που μπορεί να τοποθετήσει η Μαρία στον χώρο καθισμάτων στο κατάστημά της, ο οποίος στο διάγραμμα είναι σκιασμένος;

PISA 2012

Έχουμε μάθει ...

- Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 , που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία δ είναι παράλληλες όταν σχηματίζουν:

- τις εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες

$$\text{Αν } \hat{\varphi} = \hat{\mu} \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

ή

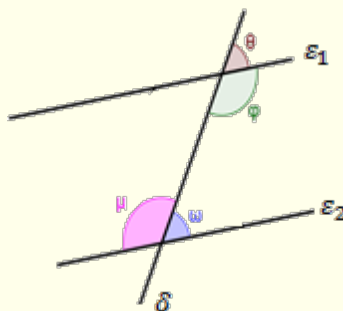
- τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες

$$\text{Αν } \hat{\theta} = \hat{\omega} \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

ή

- τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές

$$\text{Αν } \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^\circ \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$



- **Κύρια Στοιχεία** Τριγώνου

Κάθε τρίγωνο έχει:

- τρεις **πλευρές**,
Παράδειγμα: AB, BG, GA ή γ, α, β αντίστοιχα
- τρεις **γωνίες**,
Παράδειγμα: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$

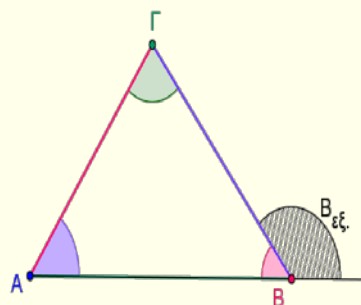


- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180° .

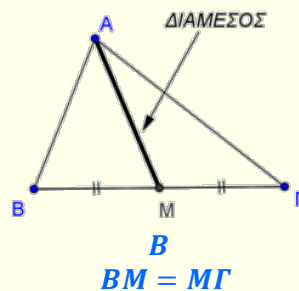
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$

- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

$$\hat{B}_{\text{εξ}} = \hat{A} + \hat{\Gamma}.$$



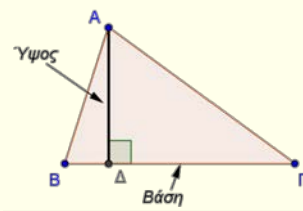
- **Διάμεσος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.



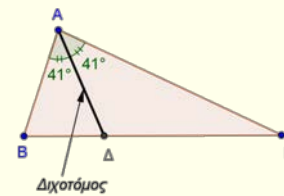
- **Ύψος** τριγώνου ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή του τριγώνου προς την ευθεία που περιέχει την απέναντι πλευρά του. Η πλευρά αυτή ονομάζεται **βάση** του τριγώνου ως προς το συγκεκριμένο ύψος.

$$AD \perp BG$$

$$\hat{\Delta} = 90^\circ$$



- **Διχοτόμος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί μια γωνία του τριγώνου, ξεκινά από μια κορυφή του και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



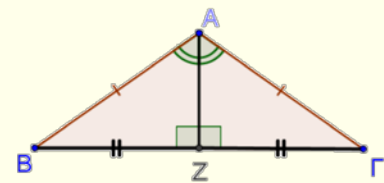
$$\hat{B}AD = \hat{\Delta}AG$$

- Σε **ισοσκελές τρίγωνο** ισχύει:
 - Οι δύο του πλευρές είναι ίσες.
 - Οι δύο του γωνίες (γωνίες βάσης) είναι ίσες.
 - Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διχοτόμος και διάμεσος.

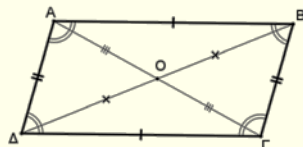
$$\hat{B}AZ = \hat{\Gamma}AZ,$$

$$AZ \perp BG,$$

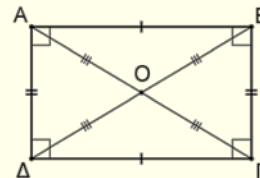
$$BZ = Z\Gamma$$



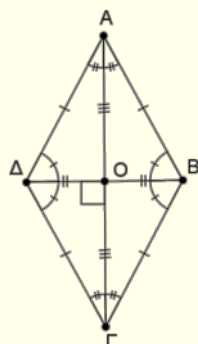
- **Παραλληλόγραμμο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις **απέναντι πλευρές του παράλληλες**.



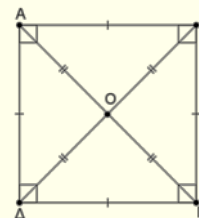
- **Ορθογώνιο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις γωνίες του ορθές**.



- **Ρόμβος** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις πλευρές του ίσες**.



- **Τετράγωνο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις **τέσσερις γωνίες του ορθές και τις τέσσερις πλευρές του ίσες**.





Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.



Οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια λύσης του προβλήματος.

Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στις προηγούμενες τάξεις.

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, η οποία όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δεν γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της **Πρακτικής Γεωμετρίας** από τη **Θεωρητική Γεωμετρία** ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για τον χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα.

Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο, αφού οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο. Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο τις οποίες δεχόμαστε ως **πρωταρχικές** χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, τους οποίους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά

από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα**.

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.




Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.




Ανισοτικές Σχέσεις στα Τρίγωνα




Διερεύνηση




Για την πιο κάτω διερεύνηση θα χρειαστείτε πλαστικά καλαμάκια και ένα ψαλίδι.

- Να κόψετε τα καλαμάκια στα μεγέθη* που φαίνονται ομαδοποιημένα στους πίνακες Α, Β, Γ και Δ.
- Να χρησιμοποιήσετε διαφορετικό χρώμα για κάθε πίνακα.

Ομάδα Α	
3 cm	
4 cm	
5 cm	

Ομάδα Β	
3 cm	
3 cm	
7 cm	

Ομάδα Γ	
3 cm	
5 cm	
7 cm	

Ομάδα Δ	
3 cm	
4 cm	
7 cm	

*τα μεγέθη που φαίνονται είναι υπό κλίμακα.

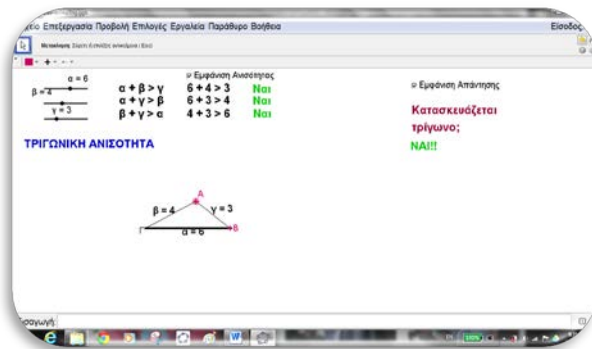
- ✓ Να χρησιμοποιήσετε τα καλαμάκια κάθε ομάδας για να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο κάθε φορά και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα με τις παρατηρήσεις σας.

Μήκος πλευρών (cm)	Μπορέσατε να κατασκευάσετε τρίγωνο;
Ομάδα Α 3, 4, 5	
Ομάδα Β 3, 3, 7	
Ομάδα Γ 3, 5, 7	
Ομάδα Δ 3, 4, 7	

- ✓ Ποια προϋπόθεση πρέπει να ισχύει σε σχέση με το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου για να μπορεί αυτό να κατασκευαστεί;
- ✓ Να κόψετε τρία καλαμάκια ώστε να σχηματίζεται ένα τρίγωνο και να εξετάσετε αν ισχύει ο πιο πάνω ισχυρισμός σας.



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En4_KataskeuasimoTrig.ggb» για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



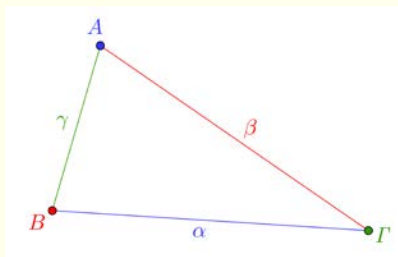
- ✓ Να επιλέξετε το μέτρο των ευθύγραμμων τμημάτων με τη βοήθεια των δρομέων και ακολούθως να περιστρέψετε το ευθύγραμμο τμήμα AB από τα άκρα του (σημειώνονται με σταυρό), για να εξετάσετε κατά πόσο σχηματίζεται τρίγωνο.
- ✓ Να παρατηρήσετε τις σχέσεις των πλευρών του τριγώνου και να διατυπώσετε έναν κανόνα που πρέπει να ισχύει μεταξύ των μέτρων των πλευρών ενός τριγώνου, ο οποίος να μας εξασφαλίζει τότε ένα τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί.

Μαθαίνω

- Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από την απόλυτη διαφορά τους, δηλαδή

Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα

$$\begin{aligned} |ΑΓ - ΑΒ| < ΒΓ < ΑΓ + ΑΒ \\ |ΑΓ - ΒΓ| < ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ \\ |ΒΓ - ΑΒ| < ΑΓ < ΒΓ + ΑΒ \end{aligned}$$



Η σχέση:

$$|ΑΓ - ΑΒ| < ΒΓ < ΑΓ + ΑΒ$$

ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα**.

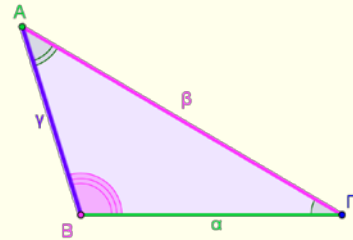
Παρατήρηση

Τρία ευθύγραμμα τμήματα με μήκη α, β, γ μπορούν να κατασκευάσουν τρίγωνο, αν ισχύει μία από τις πιο κάτω ανισοτικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} |\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma \\ |\alpha - \gamma| < \beta < \alpha + \gamma \\ |\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta \end{aligned}$$

- Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου και αντίστροφα.

Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα έχουμε: $\hat{B} > \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \beta > \gamma$



Παρατήρηση:

- Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$, η γωνία A ονομάζεται περιεχόμενη γωνία των πλευρών AB και AG , γιατί οι πλευρές της γωνίας είναι οι πλευρές AB και AG του τριγώνου.
- Οι γωνίες B και Γ ονομάζονται προσκείμενες γωνίες της πλευράς $B\Gamma$, γιατί η πλευρά του τριγώνου $B\Gamma$ είναι κοινή πλευρά τους.

Παραδείγματα

Για να εξετάσουμε κατά πόσο ένα τρίγωνο είναι κατασκευάσιμο, αρκεί να συγκρίνουμε το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών του με τη μεγαλύτερη του πλευρά.

1. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τρίγωνο με μήκη πλευρών:

(α) $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4$

(β) $\alpha = 8, \beta = 6, \gamma = 12$

Λύση:

- (α) Υπολογίζουμε το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών και το συγκρίνουμε με την άλλη πλευρά:

$$\alpha + \beta = 1 + 2 = 3 \quad \text{και} \quad \gamma = 4$$

Ισχύει ότι $\alpha + \beta < \gamma$. Άρα, δεν σχηματίζουν τρίγωνο, αφού το άθροισμα των δύο μικρότερων ευθύγραμμων τμημάτων δεν είναι μεγαλύτερο από το τρίτο.

- (β) Συγκρίνουμε το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών με το μήκος της άλλης πλευράς:

$$\alpha + \beta = 8 + 6 = 14 \quad \text{και} \quad \gamma = 12$$

Ισχύει $\alpha + \beta > \gamma$. Άρα, σχηματίζουν τρίγωνο, αφού το άθροισμα των δύο μικρότερων ευθύγραμμων τμημάτων είναι μεγαλύτερο από το τρίτο.

2. Τα μήκη των πλευρών AB και AG ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $0,8 \text{ m}$ και $3,9 \text{ m}$, αντίστοιχα, και το μήκος του $B\Gamma$ είναι ακέραιος αριθμός. Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

Λύση:

Αφού σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $|AG - AB| < B\Gamma < AG + AB$,

τότε $3,9 - 0,8 < B\Gamma < 3,9 + 0,8$

δηλαδή $3,1 \text{ m} < B\Gamma < 4,7 \text{ m}$.

Άρα, $B\Gamma = 4 \text{ m}$, γιατί είναι ο μόνος ακέραιος που βρίσκεται μεταξύ του $3,1 \text{ m}$ και $4,7 \text{ m}$.

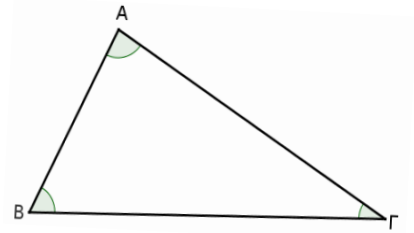
Υπάρχουν άπειρες πλευρές $B\Gamma$ που ικανοποιούν την ανίσωση $3,1 \text{ m} < B\Gamma < 4,7 \text{ m}$

Δραστηριότητες



1. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$.

- (α) Να γράψετε τα κύρια στοιχεία του τριγώνου.
- (β) Να ονομάσετε με μικρά γράμματα τις πλευρές $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ του διπλανού σχήματος.
- (γ) Ποιες είναι οι περιεχόμενες γωνίες των πλευρών:
 - (i) AB και $B\Gamma$
 - (ii) $A\Gamma$ και AB
- (δ) Ποιες πλευρές έχουν περιεχόμενη γωνία τη γωνία Γ ;
- (ε) Ποιες είναι οι προσκείμενες γωνίες της πλευράς AB ;



2. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τρίγωνο με μήκη πλευρών:

- (α) $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$
- (β) $\alpha = 10, \beta = 5, \gamma = 7$
- (γ) $\alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 5$

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $AB = 2,7 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 10 \text{ cm}$. Αν το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ είναι ακέραιος να βρείτε τις πιθανές τιμές που μπορεί να έχει το μήκος της $B\Gamma$.

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΔEZ ($\Delta E = \Delta Z$) η γωνία $\hat{\Delta} = 70^\circ$. Να συγκρίνετε τα μέτρα των πλευρών ΔZ και EZ .

5. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$, οι διχοτόμοι των γωνιών του B και Γ τέμνονται στο K . Να δείξετε ότι $BK > \Gamma K$.

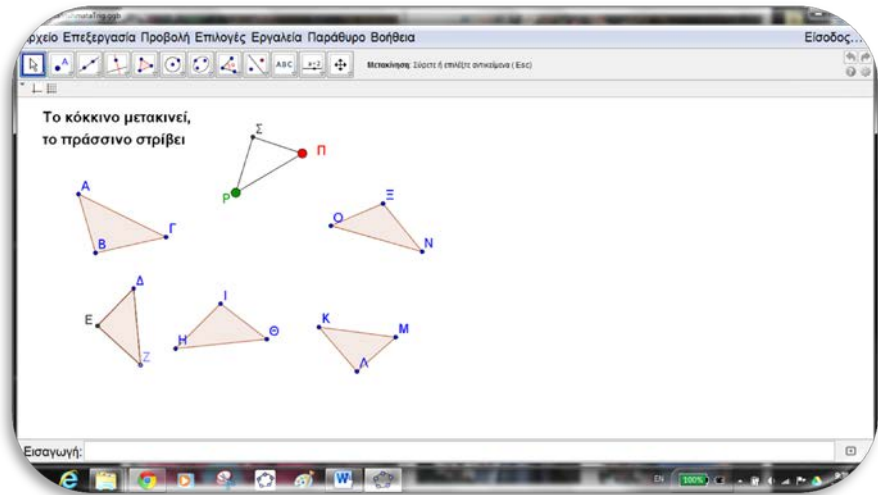
6. Να αποδείξετε ότι το μήκος οποιασδήποτε πλευράς ενός τριγώνου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το μισό της περιμέτρου του (ημιπερίμετρος).

Ίσα σχήματα – Ισότητα τριγώνων

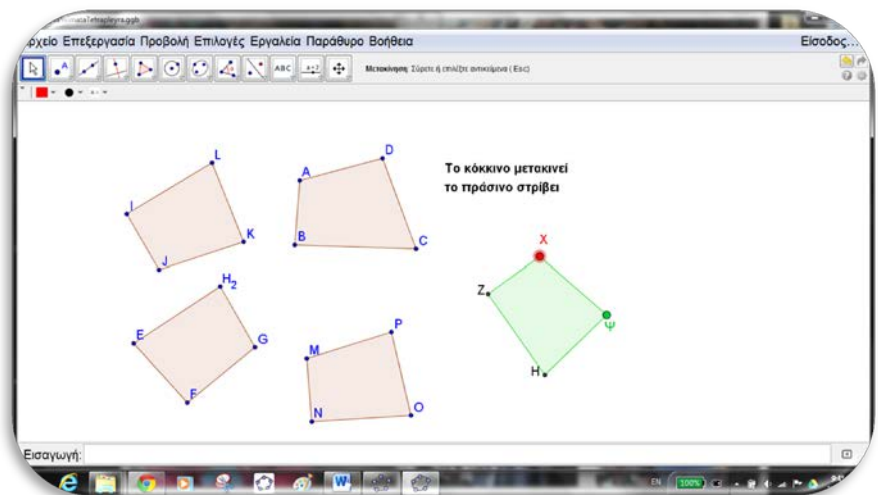
Διερεύνηση (1)



Να ανοίξετε τα αρχεία «C_En4_IsaSsxhmataTrig.ggb» και «C_En4_IsaSsximataTetrapleyra.ggb».



- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο $\Sigma\Pi\rho$, με κατάλληλη μετατόπιση, είναι δυνατόν να συμπίσει με κάποια από τα υπόλοιπα τρίγωνα.



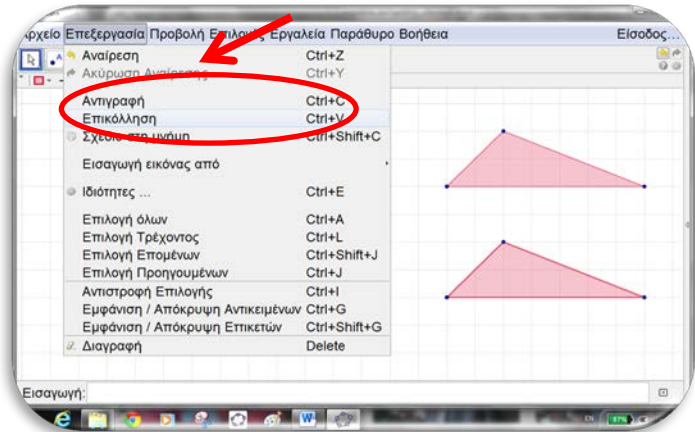
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τετράπλευρο $Z\chi\Psi H$, με κατάλληλη μετατόπιση, είναι δυνατόν να συμπίσει με κάποια από τα υπόλοιπα τετράπλευρα.
- ✓ Τι παρατηρείτε;

Διερεύνηση (2)



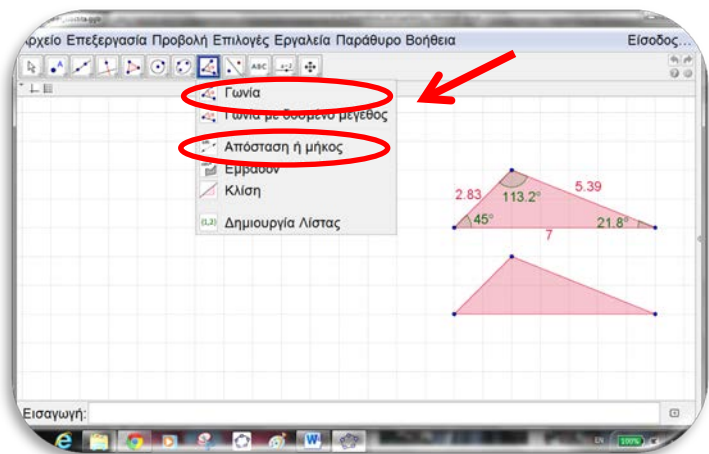
Να ανοίξετε ένα νέο αρχείο του *GeoGebra*. Με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού:

- Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο.
- Να επιλέξετε το τρίγωνο και να το αντιγράψετε με τις εντολές αντιγραφή (COPY) και επικόλληση (PASTE).



- ✓ Να εξετάσετε ποια σχέση έχουν τα δύο τρίγωνα μεταξύ τους.
- ✓ Ποια είναι η σχέση των στοιχείων (πλευρές – γωνίες) του αρχικού τριγώνου με το αντίστοιχο στο τρίγωνο που προέκυψε από την αντιγραφή του.

- ✓ Με την εντολή «ΓΩΝΙΑ» και «ΑΠΟΣΤΑΣΗ ή ΜΗΚΟΣ» να βρείτε το μέτρο των πλευρών και των γωνιών των δύο τριγώνων, για να εξετάσετε τον ισχυρισμό σας.

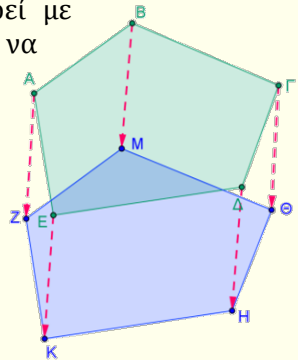


- ✓ Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας, επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για ένα νέο πολύγωνο με τη βοήθεια του λογισμικού, αλλά και των γεωμετρικών σας οργάνων.

Μαθαίνω

Όταν ένα σχήμα μπορεί με κατάλληλη μετατόπιση να ταυτιστεί με ένα άλλο, τότε κάθε πλευρά, κάθε γωνία, κάθε κορυφή κλπ., του πρώτου σχήματος θα συμπίπτει με κάποια του άλλου σχήματος. Τα στοιχεία που συμπίπτουν λέγονται **αντίστοιχα**.

- Δύο επίπεδα σχήματα είναι ίσα, αν μπορεί με κατάλληλη μετατόπιση το ένα από αυτά να ταυτιστεί (συμπίπτει) με το άλλο.



- Αν δύο σχήματα είναι ίσα, τότε έχουν και τα **αντίστοιχα** στοιχεία τους ίσα, δηλαδή κάθε στοιχείο του ενός είναι ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο του άλλου.

Παράδειγμα:

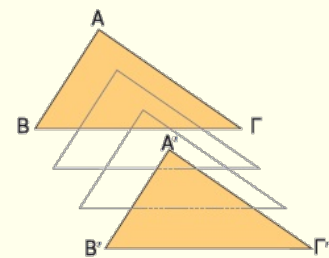
Τα πολύγωνα $ABΓΔΕ$ και $ΜΘΗΚΖ$ είναι ίσα, τότε:

$$\hat{A} = \hat{Z}, \hat{B} = \hat{M}, \hat{\Gamma} = \hat{\Theta}, \hat{\Delta} = \hat{H}, \hat{E} = \hat{K} \text{ και}$$

$$AB = ZM, B\Gamma = M\Theta, \Gamma\Delta = \Theta H, \Delta E = HK, EA = KZ.$$

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν μπορεί με κατάλληλη μετατόπιση το ένα από αυτά να ταυτιστεί (συμπίπτει) με το άλλο.

Τότε τα δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.



Παράδειγμα:

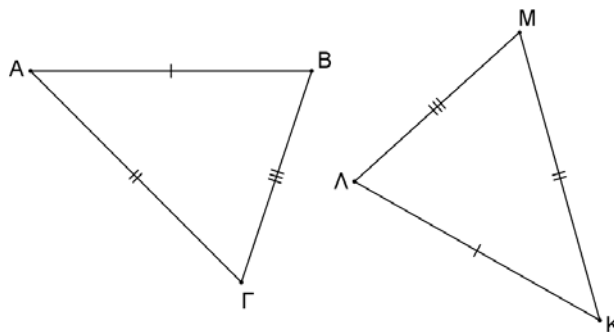
Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, τότε:

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma'} \text{ και}$$

$$AB = A'B', B\Gamma = B'\Gamma', A\Gamma = A'\Gamma'.$$

Παραδείγματα

- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $ΚΛΜ$ είναι ίσα και ισχύει $AB = ΚΛ$, $B\Gamma = ΜΛ$, $\Gamma A = ΚΜ$. Να βρείτε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.



Λύση:

Στα ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

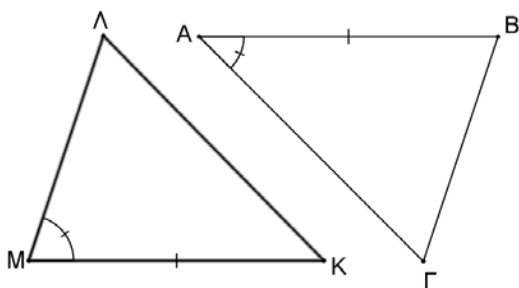
Δηλαδή,

$$B\Gamma = M\Lambda \Rightarrow \hat{A} = \hat{K},$$

$$\Gamma A = MK \Rightarrow \hat{B} = \hat{M} \text{ και}$$

$$AB = K\Lambda \Rightarrow \hat{G} = \hat{L}.$$

2. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ είναι ίσα και ισχύει $AB = MK$ και $\hat{A} = \hat{M}$. Να βρείτε τα αντίστοιχα ίσα κύρια στοιχεία τους.

**Λύση:**

Στα ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές και αντίστροφα.

Δηλαδή,

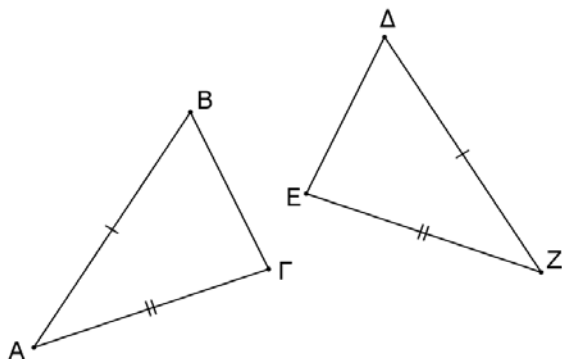
$$AB = MK \Rightarrow \hat{G} = \hat{L}, \text{ και } \hat{A} = \hat{M} \Rightarrow B\Gamma = K\Lambda$$

$$\hat{G} = \hat{L} \text{ και } \hat{A} = \hat{M} \Rightarrow \hat{B} = \hat{K}$$

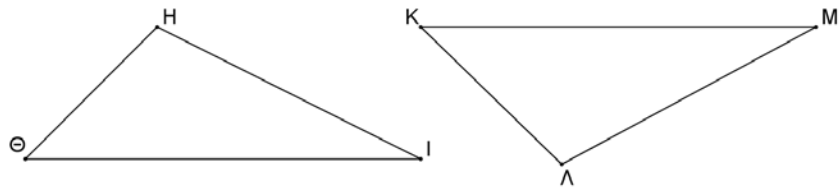
$$\hat{B} = \hat{K} \Rightarrow A\Gamma = M\Lambda$$

Δραστηριότητες

1. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα και ισχύει $AB = \Delta Z$ και $A\Gamma = EZ$. Να βρείτε τα αντίστοιχα ίσα κύρια στοιχεία τους.



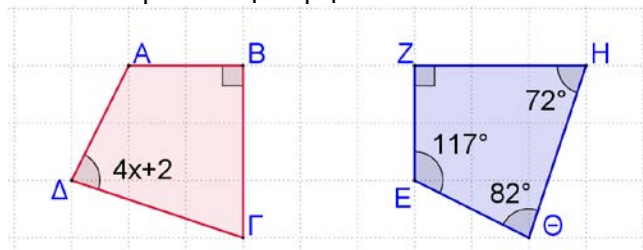
2. Να συγκρίνετε τα πιο κάτω τρίγωνα θHI και $K\Lambda M$, αφού τοποθετήσετε το ένα πάνω στο άλλο με τη χρήση ενός διαφανούς χαρτιού.



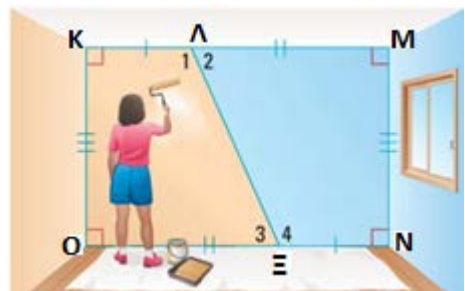
3. Να εξετάσετε κατά πόσο θα μπορούσε:
- (α) ένα σκαληνό τρίγωνο να είναι ίσο με ένα ισοσκελές τρίγωνο
 - (β) ένα ισόπλευρο τρίγωνο να είναι ίσο με ένα ορθογώνιο τρίγωνο
 - (γ) ένα ισοσκελές τρίγωνο να είναι ίσο με ένα ορθογώνιο τρίγωνο
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Η Μαρίλια ισχυρίζεται ότι: «Δύο ίσα τρίγωνα θα έχουν και ίση περίμετρο».
- (α) Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της.
 - (β) Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει και το αντίστροφο, ότι δηλαδή «Δύο τρίγωνα με ίση περίμετρο θα είναι ίσα».

5. Τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $ZH\Theta E$ στο πιο κάτω σχήμα είναι ίσα.
- (α) Να βρείτε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία.
 - (β) Να υπολογίσετε την τιμή του x .



6. Να εξετάσετε κατά πόσο τα δύο τετράπλευρα $K\Lambda E\theta$ και $\Lambda M N E$ της εικόνας είναι ίσα.



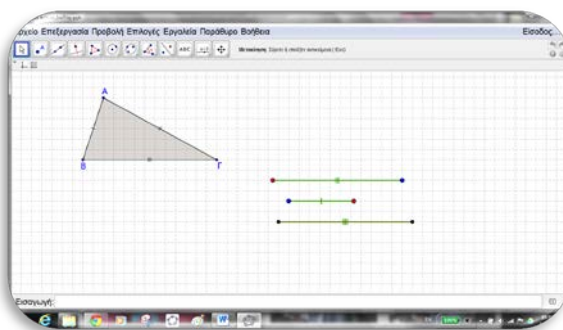
Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

Διερεύνηση (1)



Να ανοίξετε το αρχείο
«C_En4_1o kritirio_IsoTrig.ggb»

Να μετακινήσετε τα δύο πράσινα ευθύγραμμα τμήματα, ώστε να κατασκευάσετε με το μαύρο ευθύγραμμο τμήμα ένα νέο τρίγωνο. (Το ευθύγραμμο τμήμα με μαύρα άκρα δεν μετακινείται ενώ τα άλλα δύο τμήματα μεταφέρονται από το μπλε άκρο και περιστρέφονται γύρω από το κόκκινο άκρο).



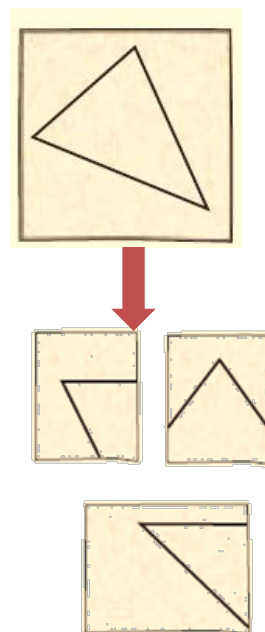
- ✓ Να μετακινήσετε το τρίγωνο που δημιουργείται και να το συγκρίνετε με το τρίγωνο $AB\Gamma$. Τι παρατηρείτε;

Διερεύνηση (2)

Για την πιο κάτω διερεύνηση, θα χρειαστείτε τέσσερα φύλλα χαρτιού, διαφανές χαρτί και ένα ψαλίδι.

- Να σχεδιάσετε σε ένα φύλλο χαρτιού ένα τρίγωνο.
- Να αντιγράψετε, τις τρεις γωνίες του τριγώνου σε τρία ξεχωριστά φύλλα διαφανούς χαρτιού, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Να τοποθετήσετε τα διάφανα φύλλα έτσι ώστε να σχηματίσετε ένα τρίγωνο με γωνίες ίσες με τις αρχικές.

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο αυτό είναι ίσο με το αρχικό τρίγωνο.
- ✓ Να κατασκευάσετε άλλο ένα τρίγωνο με γωνίες ίσες με τις αρχικές γωνίες. Πόσα τέτοια τρίγωνα υπάρχουν;
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο δύο τρίγωνα με ίσες τις γωνίες τους είναι ίσα.



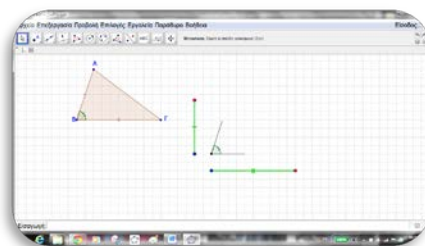
Διερεύνηση (3)

Ο Νικόλας θέλει να εξετάσει κατά πόσο δύο τρίγωνα με μόνο δύο πλευρές ίσες είναι ίσα. Αν όχι, θέλει να μελετήσει ποιο ή ποια άλλα στοιχεία χρειάζονται εκτός από την τρίτη πλευρά, για να διασφαλιστεί η ισότητα δύο τριγώνων.



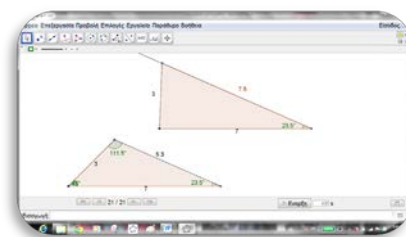
Να ανοίξετε το αρχείο «C_En4_2o kritirio_IsoTrig.ggb», για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.

Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα με τις πλευρές του τριγώνου, ενώ η γωνία είναι ίση με τη γωνία B του τριγώνου $AB\Gamma$ (η γωνία δεν μετακινείται). Να μετακινήσετε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα προς τη γωνία, ώστε να κατασκευάσετε ένα νέο τρίγωνο με πλευρές τα δύο τμήματα και περιεχόμενη τη γωνία που δίνεται.



✓ Ακολουθώς να μετακινήσετε το τρίγωνο που δημιουργείται και να το τοποθετήσετε πάνω στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Τι παρατηρείτε;

✓ Να εξετάσετε με τη βοήθεια του αρχείου «C_En4_PerioxomeniGonia.ggb» κατά πόσο δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο πλευρές ίσες και μία άλλη γωνία, αλλά όχι την περιεχόμενη, αντίστοιχα ίσες.



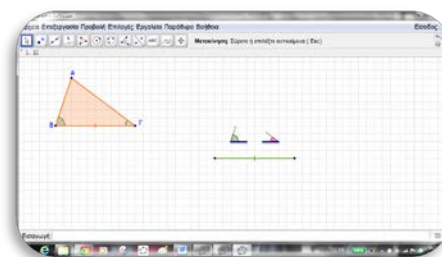
Διερεύνηση (4)



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En4_3o kritirio_IsoTrig.ggb».

Οι δύο γωνίες είναι ίσες με τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και το ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου.

Να μετακινήσετε τις δύο γωνίες προς τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος, ώστε να κατασκευάσετε ένα νέο τρίγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα και τις δύο γωνίες.



✓ Ακολουθώς να μετακινήσετε το τρίγωνο που δημιουργείται και να το συγκρίνετε με το τρίγωνο $AB\Gamma$. Τι παρατηρείτε;

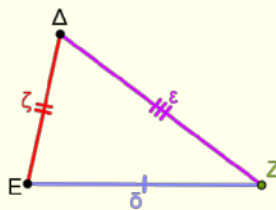
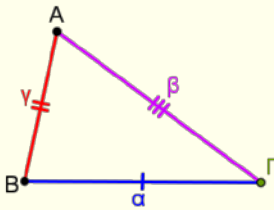
Μαθαίνω

▪ Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Οι προτάσεις οι οποίες εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

♦ 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π – Π – Π)

Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε Π – Π – Π).



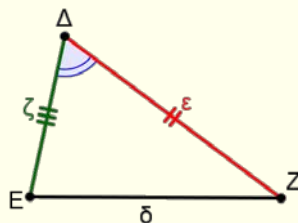
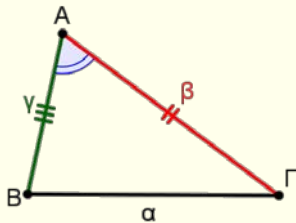
Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ , έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \quad (\Gamma) \\ B\Gamma = EZ \quad (\Gamma) \\ A\Gamma = \Delta Z \quad (\Gamma) \end{array} \right\} \triangle AB\Gamma = \triangle \Delta EZ$$

♦ 2^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π – Γ – Π)

Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε Π – Γ – Π).



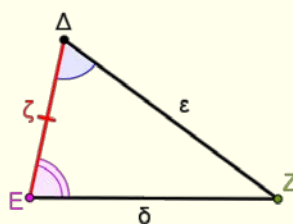
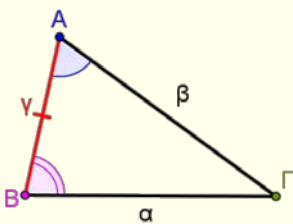
Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ , έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \quad (\Gamma) \\ B\hat{A}\Gamma = E\hat{\Delta}Z \quad (\Gamma) \\ A\Gamma = \Delta Z \quad (\Gamma) \end{array} \right\} \triangle AB\Gamma = \triangle \Delta EZ$$

♦ 3^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ – Π – Γ)

Αν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία αντίστοιχα ίσες, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε Γ – Π – Γ).



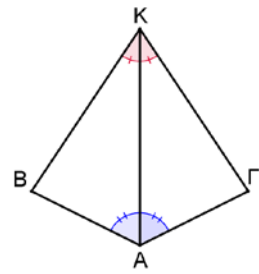
Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ , έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \quad (\Pi) \\ B\hat{A}\Gamma = E\hat{\Delta}Z \quad (\Gamma) \\ A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z \quad (\Gamma) \end{array} \right\} \triangle AB\Gamma = \triangle \Delta EZ$$

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα ABK και AGK του διπλανού σχήματος είναι ίσα.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABK και AGK , τα οποία έχουν:

- $AK = AK$ (Κοινή πλευρά) (Π)
 - $\widehat{BKA} = \widehat{GKA}$ (Δεδομένα από σχήμα) (Γ)
 - $\widehat{BAK} = \widehat{GAK}$ (Δεδομένα από σχήμα) (Γ)
- $\Rightarrow \triangle ABK = \triangle AGK$

Άρα, τα τρίγωνα ABK και AGK είναι ίσα, γιατί έχουν μια κοινή πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες σε κάθε τρίγωνο αντίστοιχα ίσες ($\Gamma - \Pi - \Gamma$).

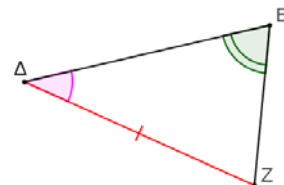
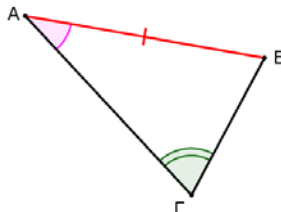
2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνων $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα, με βάση τα δεδομένα που σας δίνονται σε κάθε περίπτωση:
(α) $AB = \Delta Z$, $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$.

Λύση:

(α) Κατασκευάζουμε δυο τρίγωνα σύμφωνα με τα πιο πάνω δεδομένα:

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία Γ είναι απέναντι της πλευράς AB και στο τρίγωνο ΔEZ η γωνία E είναι απέναντι της πλευράς ΔZ .

Άρα, αφού $AB = \Delta Z$ και $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ τότε τα τρίγωνα έχουν αντίστοιχα ίσα μία γωνία και μία πλευρά.



Με βάση τα δεδομένα μας αναζητούμε τώρα ένα τρίτο στοιχείο για να δούμε αν ισχύει κάποιο από τα τρία κριτήρια.

$$\text{Αφού } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{\Gamma}, \quad (1)$$

$$\text{και } \widehat{\Delta} + \widehat{E} + \widehat{Z} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{Z} = 180^\circ - \widehat{\Delta} - \widehat{E}. \quad (2)$$

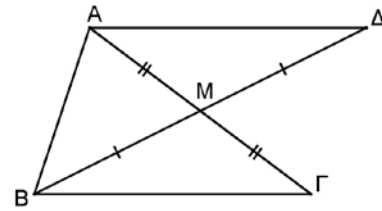
Από τις σχέσεις (1), (2) και τα δεδομένα $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$, έχουμε ότι $\widehat{B} = \widehat{Z}$.

Άρα, ισχύει το κριτήριο ισότητας τριγώνων ($\Gamma - \Pi - \Gamma$) και συνεπώς τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

Παρατήρηση:

Στην περίπτωση που οι ίσες γωνίες δεν είναι προσκείμενες των ίσων πλευρών αλλά είναι αντίστοιχα ίσες, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

3. Στο σχήμα η διάμεσος BM του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει προεκταθεί κατά τμήμα $M\Delta = BM$. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι ίσα.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AM\Delta$, $BM\Gamma$ τα οποία έχουν:

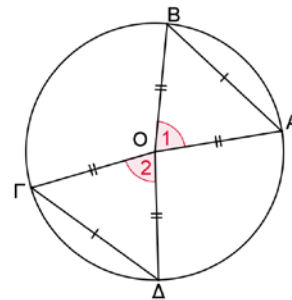
- $AM = M\Gamma$ (M μέσο του $A\Gamma$) (Π)
- $M\Delta = BM$ (Δεδομένο) (Π)
- $\widehat{AM\Delta} = \widehat{BM\Gamma}$ (κατακορυφήν γωνίες) (Γ)

$$\Rightarrow \triangle AM\Delta = \triangle BM\Gamma$$

Άρα, τα τρίγωνα $AM\Delta$ και $BM\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες ($\Pi - \Gamma - \Pi$).

Αφού τα τρίγωνα $AM\Delta$ και $BM\Gamma$ είναι ίσα, τότε και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Άρα, έχουμε ότι $A\Delta = B\Gamma$.

4. Να αποδείξετε ότι σε ίσες χορδές ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ τα οποία έχουν:

- $AO = \Delta O$ (Ακτίνες κύκλου) (Π)
- $BO = \Gamma O$ (Ακτίνες κύκλου) (Π)
- $AB = \Gamma\Delta$ (Δεδομένο) (Π)

$$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle \Gamma O\Delta$$

Άρα, τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα διότι έχουν τρεις πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία ($\Pi - \Pi - \Pi$).

Αφού τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα, τότε και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Άρα, έχουμε ότι $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$.

Οι γωνίες $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ είναι επίκεντρες γωνίες. Άρα, τα αντίστοιχα τόξα τους $AB, \Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Δραστηριότητες



1. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ , για τα οποία ισχύει $AB = EZ$, $B\Gamma = E\Delta$, $A\Gamma = \Delta Z$, $\hat{A} = 100^\circ$ και $\hat{E} = 50^\circ$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών των δύο τριγώνων.

2. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ . Να βρείτε σε ποιες από τις πιο κάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα είναι ίσα.

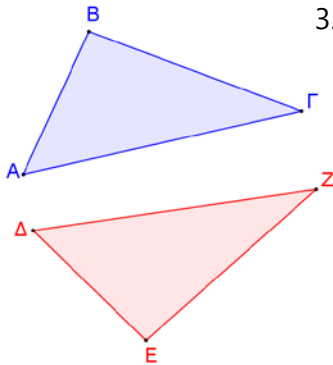
(α) $AB = \Delta E, A\Gamma = \Delta Z, B\Gamma = EZ$

(β) $AB = \Delta E, B\Gamma = EZ$

(γ) $\hat{A} = \hat{\Delta}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{\Gamma} = \hat{Z}$

(δ) $AB = A\Gamma, \Delta E = EZ, \hat{A} = \hat{E}$

(ε) $AB = \Delta E, \hat{A} = \hat{E}, \hat{\Delta} = \hat{B}$



3. Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν σε κάθε περίπτωση έτσι ώστε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ να είναι ίσα:

(α) $\hat{A} = \hat{\Delta}, \hat{B} = \hat{E}$ και _____

(β) $AB = \Delta E, A\Gamma = \Delta Z$ και _____

(γ) $\hat{\Gamma} = \hat{Z}, A\Gamma = \Delta Z$ και _____

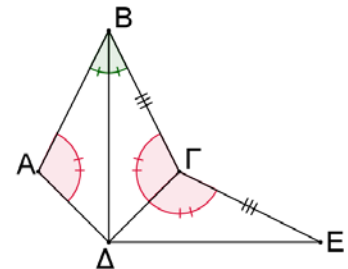
(δ) $\hat{B} = \hat{E},$ _____ και _____

4. Να γράψετε το κριτήριο με το οποίο τα πιο κάτω τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι ίσα .

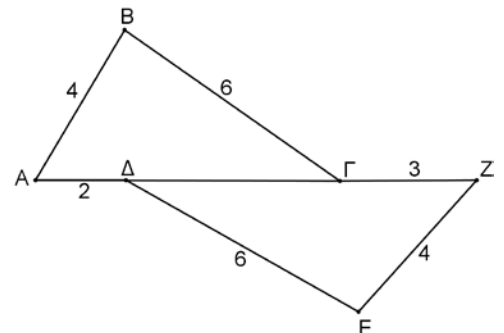
(α) $\hat{A}B\Delta = \hat{B}\Delta\Gamma$ _____

(β) $\hat{B}\Gamma\Delta = \hat{E}\Gamma\Delta$ _____

(γ) $\hat{A}B\Delta = \hat{E}\Gamma\Delta$ _____

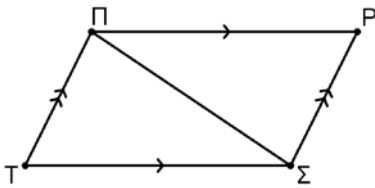


5. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

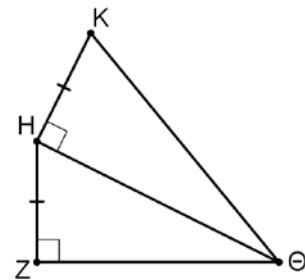


6. Από τα στοιχεία που δίνονται, να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τριγώνων είναι ίσα. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

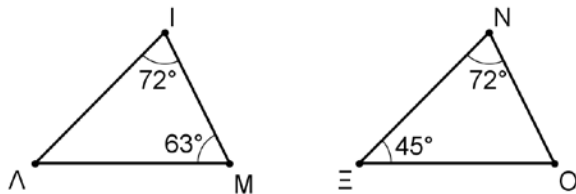
(α)



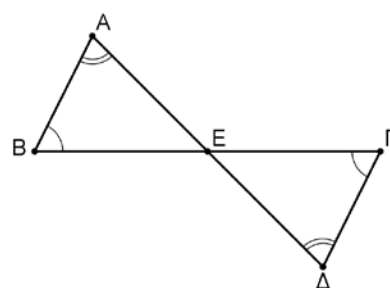
(β)



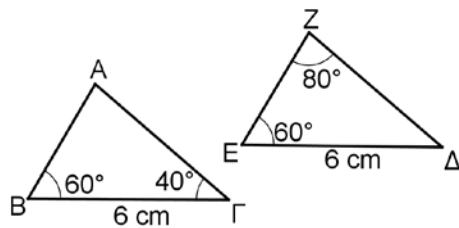
(γ)



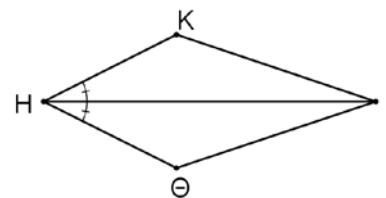
(δ)



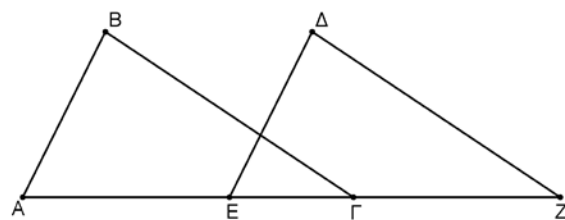
(ε)



(στ)

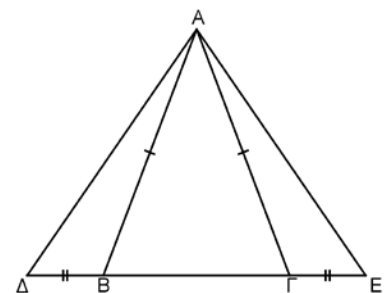


7. Στο σχήμα τα σημεία $A, E, Γ$ και Z είναι συνευθειακά. Αν $AB = ΔE$, $BΓ = ΔZ$ και $AE = ΓZ$, να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $ΔEZ$ είναι ίσα.



8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ABΓ$ και τα σημεία $Δ, E, Z$ στις πλευρές $AB, BΓ, ΓA$, αντίστοιχα, ώστε $AD = BE = ΓZ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΔEZ$ είναι ισόπλευρο.

9. Στο σχήμα το $ABΓ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB = AΓ$). Τα ευθύγραμμα τμήματα $BΔ, ΓE$ είναι προεκτάσεις της πλευράς $BΓ$ τέτοιες ώστε $BΔ = ΓE$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AD E$ είναι ισοσκελές.



10. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι BM και GN ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι ίσες.

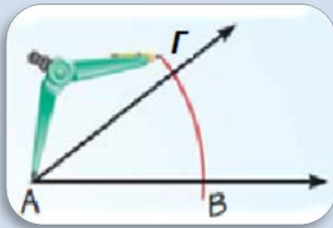
11. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύει ότι:
- (α) Κάθε διαγώνιός του χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δυο ίσα τρίγωνα.
 - (β) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
 - (γ) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Η κατασκευή σχημάτων με "κανόνα και διαβήτη" είναι η μέθοδος στην οποία χρησιμοποιείται μόνο ο κανόνας (μη αριθμημένος χάρακας) και ο διαβήτης. Αυτή η μέθοδος κατασκευής χρονολογείται από τους αρχαίους Έλληνες.

12. Να κατασκευάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ένα τρίγωνο ΔEZ που να είναι ίσο με το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία $A(3,1)$, $B(8,1)$ και $\Gamma(8,8)$.

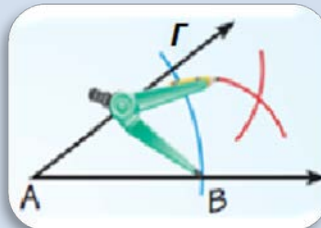
13. Πιο κάτω φαίνεται ένας τρόπος κατασκευής της διχοτόμου μίας γωνίας με κανόνα και διαβήτη. Να αποδείξετε την ορθότητα της κατασκευής.

Βήμα 1°



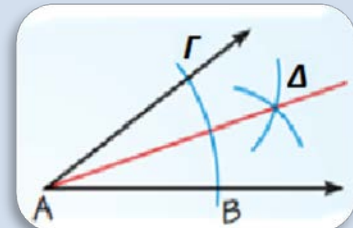
Να κατασκευάσετε ένα τόξο με κέντρο την κορυφή της γωνίας A . Ονομάστε Γ και B τα σημεία που τέμνει το τόξο τις πλευρές της γωνίας.

Βήμα 2°



Να κατασκευάσετε ένα τόξο με κέντρο το Γ και ένα άλλο με την ίδια ακτίνα και κέντρο το B .

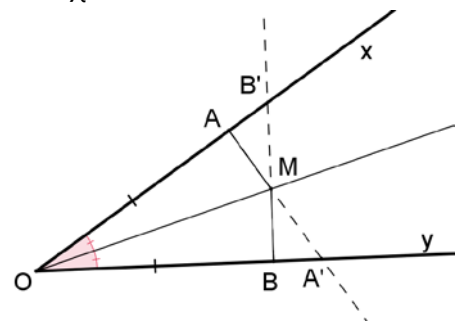
Βήμα 3°



Να ονομάσετε Δ το σημείο τομής των δυο τόξων και να φέρετε την ημιευθεία $A\Delta$. Η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΓAB .

14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στις πλευρές της Ox και Oy παίρνουμε σημεία A και B , αντίστοιχα, έτσι ώστε $OA = OB$.

- (α) Αν M είναι σημείο της διχοτόμου της $x\hat{O}y$, να δείξετε ότι $MA = MB$.
- (β) Αν οι ευθείες AM και MB τέμνουν τις πλευρές Oy και Ox στα A' και B' αντίστοιχα να δείξετε ότι $AA' = BB'$.

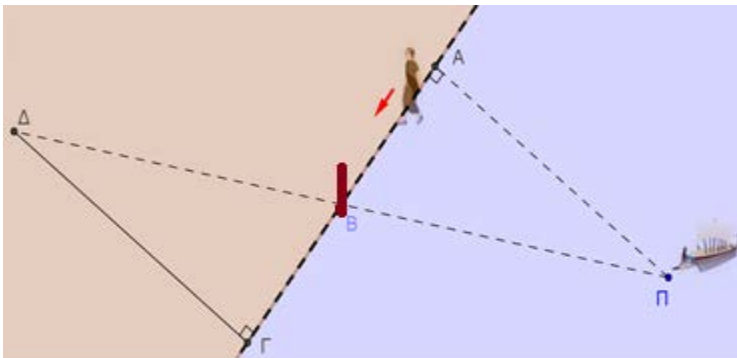


Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων

Εξερεύνηση

Ο Θαλής ο Μιλήσιος λέγεται ότι πριν από 2500 χρόνια χρησιμοποίησε την πιο κάτω μέθοδο, για να υπολογίσει τη θέση των εχθρικών πλοίων από την ακτή:

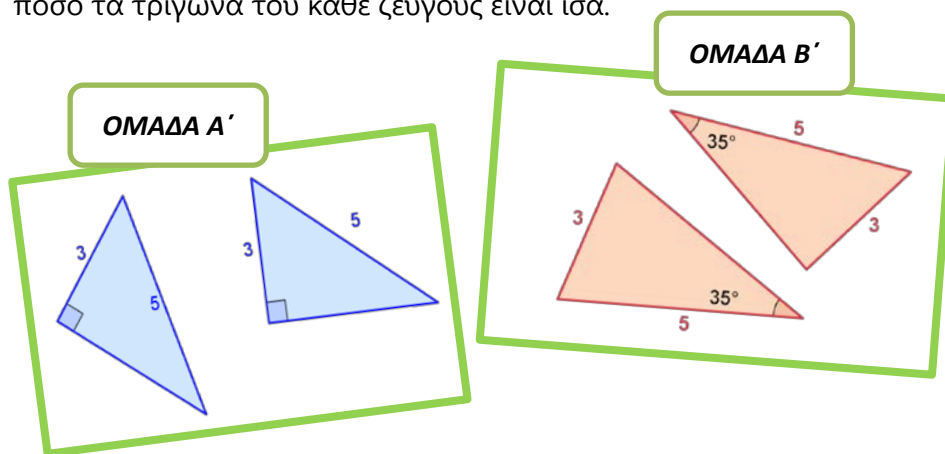
- Από το σημείο (A) της ακτής που βρίσκεται απέναντι από το πλοίο διανύουμε (κάθεται) κατά μήκος της ακτής μια τυχαία απόσταση (AB) , όπου τοποθετούμε ένα ραβδί και στη προέκτασή της διανύουμε ίση απόσταση (BG) , $(BG = AB)$.
- Στη συνέχεια περπατάμε (κάθεται) προς τη στεριά (ΔB) μέχρι ένα σημείο (Δ) , από όπου μπορούμε να στοχεύσουμε μέσω του ραβδιού μας το πλοίο.
- Η απόστασή $(\Delta \Gamma)$ από την ακτή ισούται με τη ζητούμενη απόσταση του πλοίου από την ακτή $(A\Pi)$.



✓ Να εξηγήστε τη μέθοδο του Θαλή.

Διερεύνηση

Δίνονται τα δύο πιο κάτω ζεύγη τριγώνων. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα του κάθε ζεύγους είναι ίσα.



Η Νικολέττα υποστηρίζει ότι δεν μπορεί να γνωρίζει ούτε για το ένα ζεύγος ούτε και για το άλλο αν είναι ίσα, αφού η γωνία δεν είναι περιεχόμενη των δύο ίσων πλευρών.

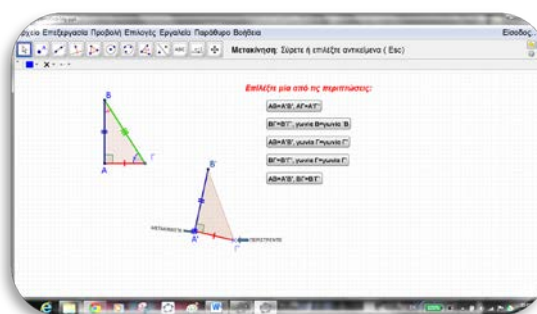
Ο Μιχάλης συμφωνεί με τη Νικολέττα ότι δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι τα τρίγωνα της ομάδας Β' είναι ίσα, ενώ για τα τρίγωνα της ομάδας Α' υποστηρίζει ότι τα στοιχεία που έχει είναι αρκετά για να αποδείξει ότι είναι ίσα.

- ✓ Να εξετάσετε τον ισχυρισμό των δύο παιδιών.
- ✓ Να εξετάσετε πώς διαφοροποιούνται τα κριτήρια της ισότητας στην περίπτωση των ορθογώνιων τριγώνων.



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En4_KritirioOrthTrig.ggb», για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Σε καθεμία από τις περιπτώσεις που φαίνονται στα γαλάζια κουμπιά, κατασκευάζεται ορθογώνιο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, το οποίο έχει, επιπλέον της ορθής γωνίας, άλλα δύο κύρια στοιχεία ίσα με τα αντίστοιχα του $AB\Gamma$.



- ✓ Να εξετάσετε αν μπορεί να συμπέσει το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ με το τρίγωνο $AB\Gamma$, μετακινώντας και περιστρέφοντας το $A'B'\Gamma'$.

Μαθαίνω

Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

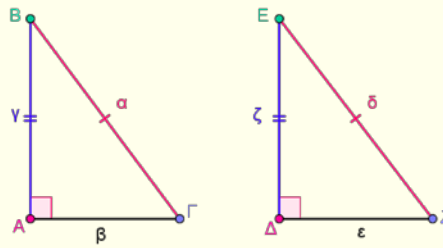
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν ισχύει ένα από τα πιο κάτω:

- Έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία (Π – Π – Ο).

Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ,
έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ \text{ (Ο)} \\ AB = \Delta E \text{ (Π)} \\ B\Gamma = EZ \text{ (Π)} \end{array} \right\} \Delta AB\Gamma = \Delta \Delta EZ$$

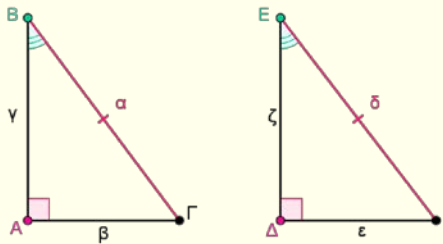


- Έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες (Π – Γ – Ο).

Παραδείγμα:

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ,
έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ \text{ (Ο)} \\ \hat{B} = \hat{E} \text{ (Γ)} \\ B\Gamma = EZ \text{ (Π)} \end{array} \right\} \Delta AB\Gamma = \Delta \Delta EZ$$



Γενικά

Δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι ίσα, όταν εκτός από την ορθή γωνία τους, έχουν και άλλα **δύο αντίστοιχα στοιχεία** τους ίσα, από τα οποία το ένα είναι οπωσδήποτε πλευρά.

▪ **Κριτήρια ισοσκελών τριγώνων.**

Αν ισχύει μία από τις πιο κάτω συνθήκες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

(α) Δύο πλευρές του να είναι ίσες (ορισμός).

(β) Δύο γωνίες του να είναι ίσες.

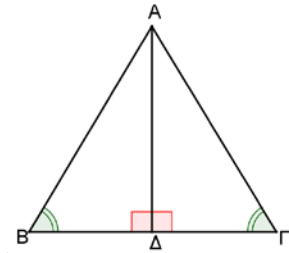
(γ) Αν δύο από τα δευτερεύοντα στοιχεία (ύψος, διάμεσος, διχοτόμος), που αντιστοιχούν στην ίδια πλευρά (βάση), ταυτίζονται.

Απόδειξη (β):

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, κατασκευάζουμε το ύψος $A\Delta$.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ τα οποία έχουν:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (Δεδομένο) (Γ)
 - $A\Delta = A\Delta$ (Κοινή πλευρά) (Π)
- $$\Rightarrow \hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta\Gamma$$



Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία (Π – Γ – Ο).

Από την ισότητα των τριγώνων ($\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta\Gamma$) έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων είναι ίσα. Άρα:

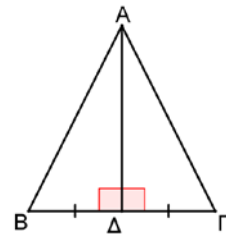
$AB = A\Gamma \Leftrightarrow$ **το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.**

Απόδειξη (γ): Αν $A\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Κατασκευάζουμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Delta$ να είναι ύψος και διάμεσος.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ τα οποία έχουν:

- $B\Delta = \Delta\Gamma$ ($A\Delta$ διάμεσος) (Π)
 - $A\Delta = A\Delta$ (Κοινή πλευρά) (Π)
- $$\Rightarrow \hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta\Gamma$$



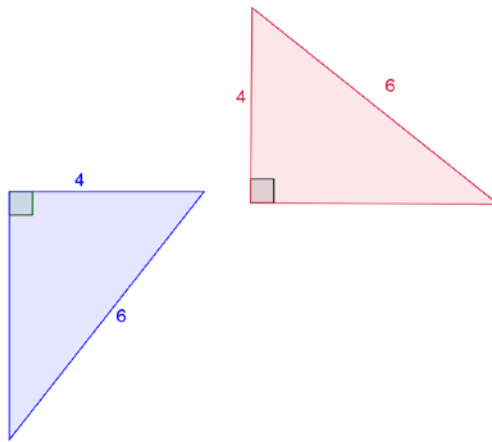
Άρα, τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες (Π – Ο – Π).

Από την ισότητα των τριγώνων ($\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta\Gamma$) έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων είναι ίσα. Άρα, $AB = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

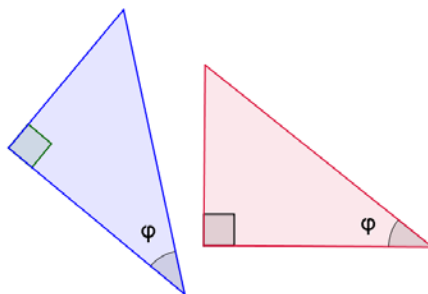
Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τριγώνων είναι ίσα:

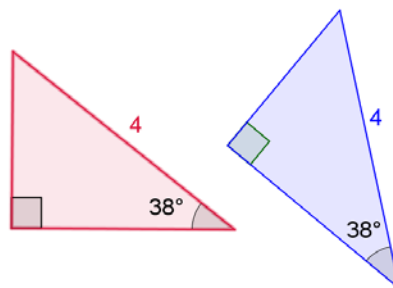
(α)



(β)



(γ)



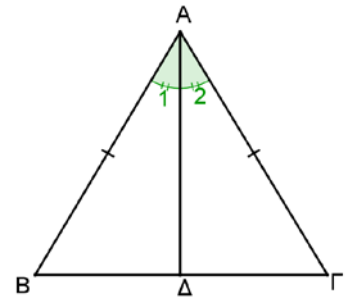
Λύση:

- (α) Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί μια κάθετη πλευρά και η υποτείνουσα του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με μια κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα του άλλου τριγώνου (Π – Π – Ο).
- (β) Με βάση τα δεδομένα δίνονται μόνο ίσες γωνίες. Τα δεδομένα δεν είναι επαρκή για να αποδείξουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.
- (γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί η υποτείνουσα και η μία οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με την υποτείνουσα και την αντίστοιχη οξεία γωνία του άλλου τριγώνου (Π – Γ – Ο).

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει:
 (α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
 (β) Η διχοτόμος της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Λύση:

(α) Στο **ισοσκελές τρίγωνο** $ABΓ$ ($AB = AΓ$), κατασκευάζουμε τη **διχοτόμο** $AΔ$.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AΔB$ και $AΔΓ$ τα οποία έχουν:

- $AB = AΓ$ (Δεδομένο) (Π)
 - $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ($AΔ$ διχοτόμος της γωνίας \hat{A}) (Γ)
 - $AΔ = AΔ$ (Κοινή πλευρά) (Π)
- } $\Rightarrow \triangle AΔB = \triangle AΔΓ$

Άρα, τα τρίγωνα $AΔB$ και $AΔΓ$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες (Π – Γ – Π).

Άρα, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

(β) Από την ισότητα των τριγώνων ($\triangle AΔB = \triangle AΔΓ$) έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων είναι ίσα. Άρα, $BΔ = ΔΓ$ και $\widehat{BΔA} = \widehat{AΔΓ}$.

Αφού $BΔ = ΔΓ$, τότε **$AΔ$ είναι διάμεσος**.

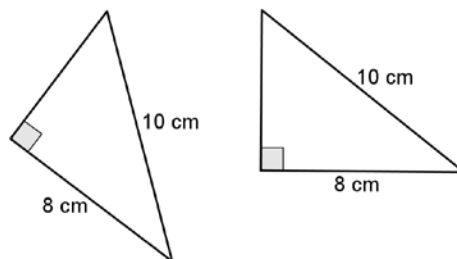
Επειδή $\widehat{BΔA} + \widehat{AΔΓ} = 180^\circ$ και $\widehat{BΔA} = \widehat{AΔΓ}$, τότε $\widehat{BΔA} = \widehat{AΔΓ} = 90^\circ$ και επομένως το τμήμα **$AΔ$ είναι ύψος** του τριγώνου.

Δραστηριότητες

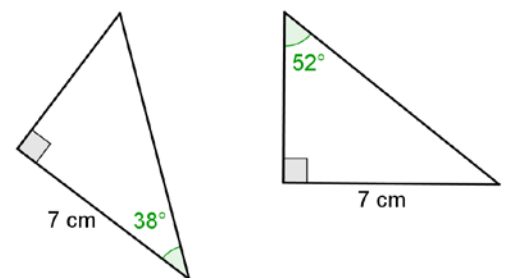


1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω τρίγωνα είναι ίσα.

(α)

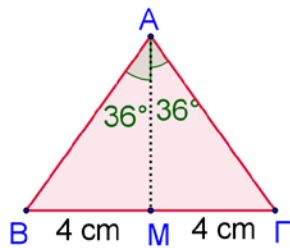


(β)

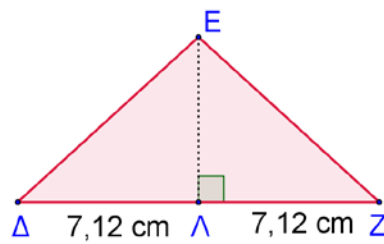


2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω τρίγωνα είναι ισοσκελή, με βάση τις $BΓ$, $ΔΖ$, $ZΘ$ και $KΜ$ αντίστοιχα:

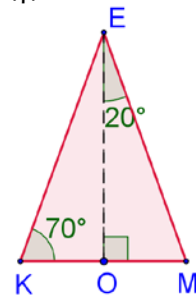
(α)



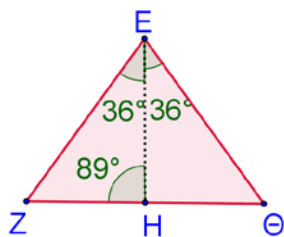
(β)



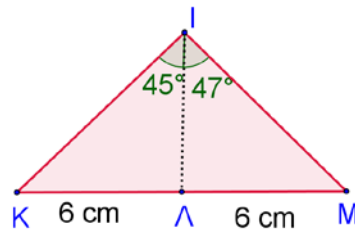
(γ)



(δ)



(ε)



3. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα $ABΓ$ και $ΔEZ$ είναι ισοσκελή, αν οι κορυφές τους έχουν συντεταγμένες:

(α) $A(-4,3)$, $B(4,3)$, $Γ(0,0)$

(β) $Δ(-3,3)$, $E(-2,-2)$, $Z(2,2)$

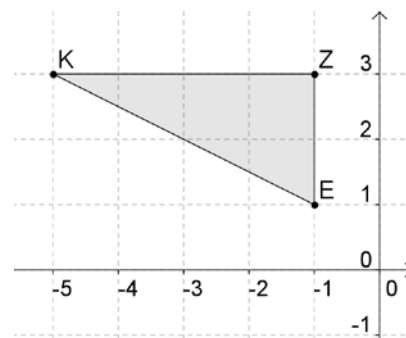
4. Ποια από τις πιο κάτω τριάδες σημείων είναι οι συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου που είναι ίσο με το EZK .

A. $(-1,1)$, $(1,5)$ και $(-4,5)$.

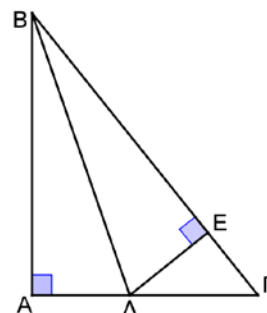
B. $(-2,4)$, $(-7,4)$ και $(-4,6)$.

Γ. $(-3,2)$, $(-1,3)$ και $(-3,1)$.

Δ. $(-7,7)$, $(-7,9)$ και $(-3,7)$.



5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$), $\widehat{BΕΔ} = 90^\circ$ και $AB = BE$. Να δείξετε ότι η $BΔ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ABΓ$.

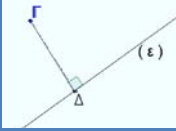


6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Να δείξετε ότι:
- (α) οι διχοτόμοι $B\Delta$, ΓE είναι ίσες
 - (β) τα ύψη του BZ , ΓH είναι ίσα

Η απόσταση σημείου από ευθεία είναι ίση με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ξεκινά από το σημείο και είναι κάθετο στην ευθεία.

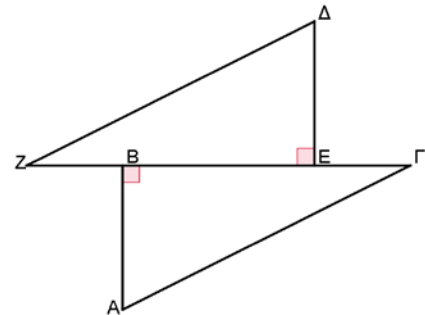
Παράδειγμα:

Η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ε είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ που είναι κάθετο στην ευθεία ε .



7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Αν M είναι τυχαίο σημείο του ύψους AD , να αποδείξετε ότι:
- (α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα
 - (β) το M ισαπέχει από τις πλευρές AB και $A\Gamma$

8. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ορθογώνια ($\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{E} = 90^\circ$). Αν $ZB = E\Gamma$ και $\Delta Z = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι σημεία Δ και A ισαπέχουν από το ευθύγραμμο τμήμα $Z\Gamma$ (τα σημεία B και E βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Z\Gamma$).



9. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$. Να δείξετε ότι το σημείο M ισαπέχει από τις πλευρές AB και $A\Gamma$.

10. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα.

11. Να δείξετε ότι οι διαγώνιοι του ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι ίσες.

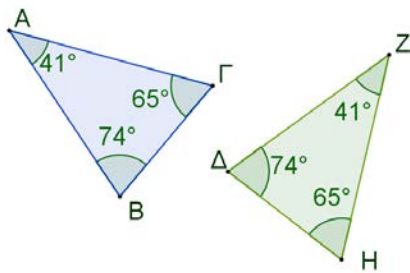
12. Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

13. Να αποδείξετε ότι το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος και διάμεσος.

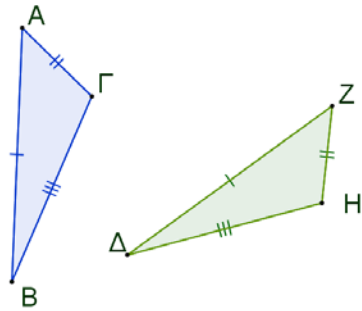
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να εξετάσετε, σε κάθε περίπτωση, κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τριγώνων είναι ίσα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

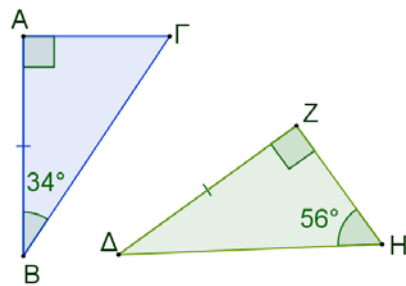
(α)



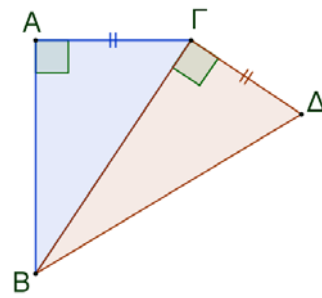
(β)



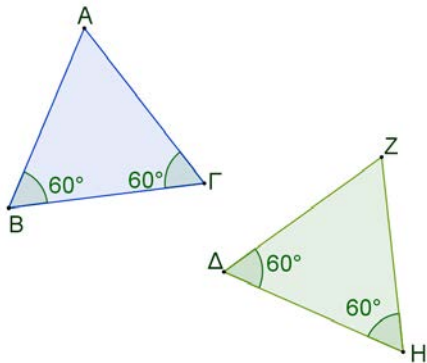
(γ)



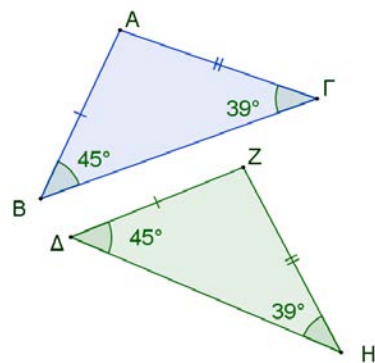
(δ)



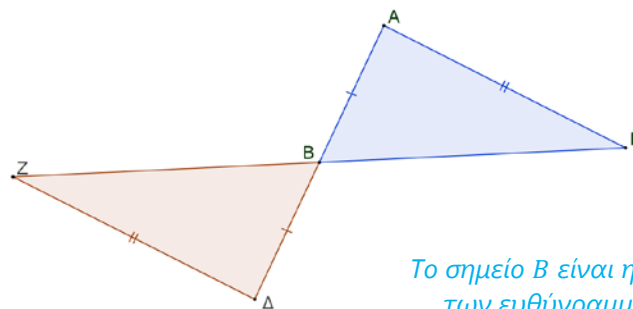
(ε)



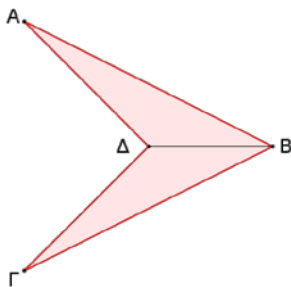
(στ)



(ζ)



Το σημείο Β είναι η τομή των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΔ και ΖΓ.



2. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τρίγωνο με μήκη πλευρών 9 m , 4 m και 6 m .

3. Στο σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός χαρταετού. Αν $AB = B\Gamma$ και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$ διχοτομεί τη γωνία B , να δείξετε ότι:

(α) $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{\Gamma}B$,

(β) $A\Delta\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο.

4. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι φυσικοί αριθμοί. Να βρείτε το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς που μπορεί να έχει ένα τρίγωνο με περίμετρο:

(α) 15 cm

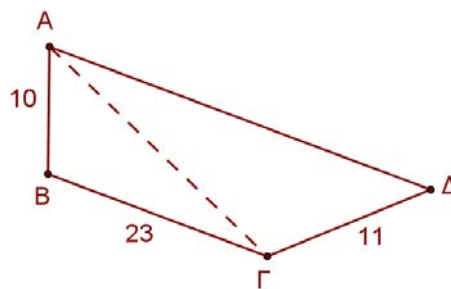
(β) 100 cm

5. Να δείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) με $AB = 10$, $B\Gamma = 23$, και $\Gamma\Delta = 11$. Ποιες είναι οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει το μήκος:

(α) του $A\Gamma$

(β) του $A\Delta$



7. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $AB = \frac{B\Gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

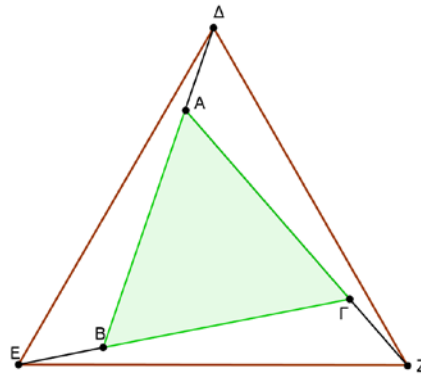
8. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) προεκτείνουμε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ κατά τμήματα $B\Delta = \frac{AB}{3}$ και $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{3}$, αντίστοιχα. Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου $A\Delta E$.

9. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία E, Z , έτσι ώστε $BE = \Gamma Z$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

11. Τα σημεία A και B απέχουν το ίδιο από μια ευθεία ε . Αν η ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AB στο M , να δείξετε ότι το M είναι το μέσο του AB .

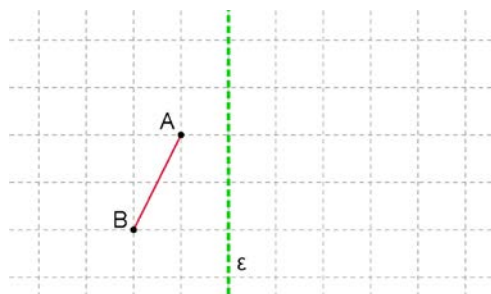
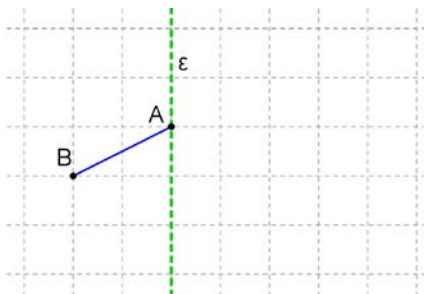
12. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο και $AD = BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.



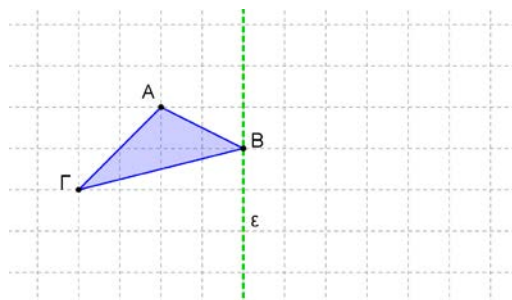
13. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούνται, διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.

14. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Να αποδείξετε ότι:
 (α) οι παρά τις βάσεις γωνίες είναι ανά δύο αντίστοιχα ίσες ($\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$)
 (β) οι διαγώνιοι είναι ίσες ($A\Gamma = B\Delta$)

15. (α) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό των πιο κάτω ευθύγραμμων τμημάτων AB ως προς την ευθεία ε .



(β) Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το αρχικό για καθεμιά από τις πιο πάνω περιπτώσεις.
 (γ) Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία ε είναι ένα ίσο τρίγωνο με το αρχικό.



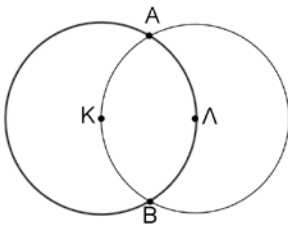
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε σημεία Δ, E στις προεκτάσεις των πλευρών $BA, \Gamma A$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Delta = AE$. Να δείξετε ότι:
(α) $BE = \Gamma\Delta$
(β) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ να δείξετε ότι $M\Delta = ME$.

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο, το άθροισμα τριών οποιωνδήποτε πλευρών του είναι μεγαλύτερο από την τέταρτη πλευρά του.

3. Αν K ένα σημείο εντός του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $KA + K\Gamma < AB + A\Gamma$.

4. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο και ακολούθως να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα άλλο τρίγωνο έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα να είναι ίσα. Να δικαιολογήσετε γιατί τα δυο τρίγωνα που κατασκευάσατε είναι ίσα.



5. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα K και Λ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $K\Lambda$ είναι κάθετα.

6. Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $A\Gamma = \Delta Z, AB = \Delta E$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$, να αποδείξετε ότι οι γωνίες \hat{B} και \hat{E} είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

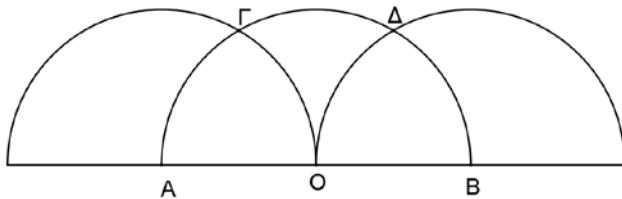
7. Αν Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι: $\frac{AB+A\Gamma-B\Gamma}{2} < A\Delta < \frac{AB+A\Gamma+B\Gamma}{2}$

8. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι κατασκεύαζαν τρίγωνα χρησιμοποιώντας ένα σχοινί με 13 κόμβους (αρπενδόνη). Κάρφωναν τρία καρφιά σε τρεις κόμβους, που αποτελούσαν τις κορυφές του τριγώνου, ώστε το σχοινί να είναι τεντωμένο και να χρησιμοποιηθεί ολόκληρο. Να εξετάσετε πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούν να κατασκευαστούν με το συγκεκριμένο σχοινί.



9. Στις πλευρές Ox και Oy μίας γωνίας xOy παίρνουμε τα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα, ώστε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Αν M σημείο της διχοτόμου της γωνίας xOy , να αποδείξετε ότι:
- (α) $MB = M\Delta$
 (β) οι γωνίες \widehat{AMB} και $\widehat{\Gamma M\Delta}$ είναι ίσες

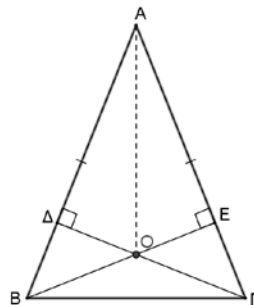
10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο O και διάμετρο $AB = 2R$. Με κέντρα τα A και B και ακτίνα R γράφουμε ακόμα δύο ημικύκλια όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{A\hat{O}\Gamma}$ και $\widehat{B\hat{O}\Delta}$ είναι ίσες.



11. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ προς το μέρος του B και του Γ κατά τμήμα $BZ = \Gamma H$ (Z και H σημεία της προέκτασης του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$, προς το B και Γ αντίστοιχα). Φέρουμε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα $H\Delta$ και $Z\epsilon$ στις ίσες πλευρές του τριγώνου AB και $A\Gamma$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta H = \epsilon Z$.

Υπόδειξη για το (α):
 Να φέρετε τα ύψη AH και BK .

12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο O (Ορθόκεντρο). Να δείξετε ότι η AO είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$.



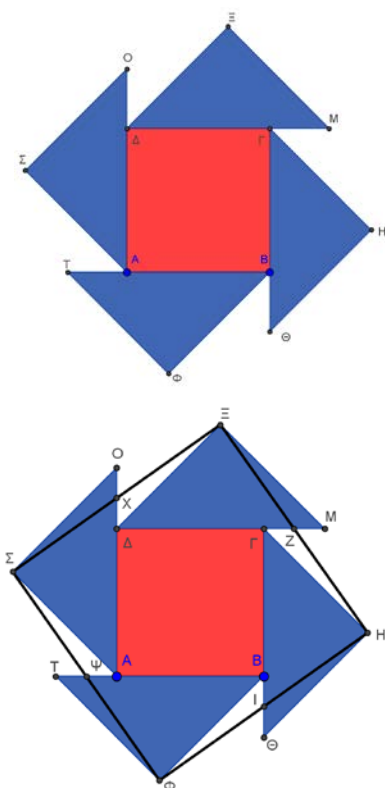
13. Ο Abu al-Wafa ήταν ένας Πέρσης μαθηματικός που μεταξύ άλλων ασχολήθηκε με τη διαίρεση γεωμετρικών σχημάτων σε αλλά απλούστερα, με σκοπό την ανασύνθεσή τους σε ένα νέο γεωμετρικό σχήμα. Μία τέτοια κατασκευή είναι η ακόλουθη:



«Να διαιρέσετε τρία ίσα τετράγωνα σε κατάλληλα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, έτσι ώστε αναδιατάσσοντάς τα (χωρίς να περισέψει κανένα) να σχηματίσετε ένα τετράγωνο».

Ο Abu al-Wafa (940 – 998 μ.Χ.) ήταν ένας Πέρσης μαθηματικός και αστρονόμος που εργάστηκε στη Βαγδάτη. Έκανε σημαντικές καινοτομίες όπως το έργο του σχετικά με αριθμητική για τους επιχειρηματίες. Από αυτόν γίνεται για πρώτη φορά η χρήση των αρνητικών αριθμών σε ένα μεσαιωνικό ισλαμικό κείμενο.

- Κατασκευάζουμε τρία ίσα τετράγωνα, δυο με μπλε και ένα με κόκκινο χρώμα. Χωρίζουμε τα δυο μπλε τετράγωνα σε ίσα τρίγωνα, φέρνοντας διαγωνίους.



- Τοποθετούμε το κόκκινο τετράγωνο και περιμετρικά γύρω του τα τέσσερα τρίγωνα (μπλε).

- Ενώνουμε τις κορυφές Ξ, H, Φ, Σ (όπως βλέπουμε στο σχήμα) και "κόβουμε" τα μικρά τρίγωνα που περισσεύουν, τα τοποθετούμε στα κενά (δείτε τα αντίστοιχα χρώματα) και έχουμε σχηματίσει ένα τετράγωνο.

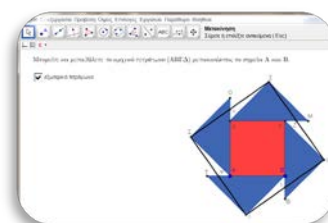
(α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα που είναι έξω από το τετράπλευρο $\Xi H \Phi \Sigma$ είναι ίσα με αυτά που σχηματίζονται από τον κενό χώρο (άσπρο) μέσα στο τετράπλευρο $\Xi H \Phi \Sigma$.

(β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $\Xi H \Phi \Sigma$ είναι τετράγωνο.

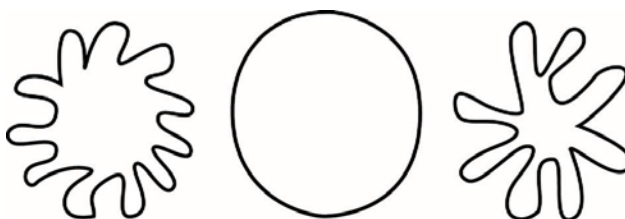


Μπορείτε να δείτε την κατασκευή στο αρχείο:

["C_En4_Emploutismos_AbualWafa.ggb"](#)



14. Ποιο από τα σχήματα έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια;
- (α) Να περιγράψετε μια μέθοδο προσδιορισμού του εμβαδού για το τρίτο σχήμα.
 - (β) Να περιγράψετε έναν τρόπο που να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση την περίμετρο του τρίτου σχήματος.



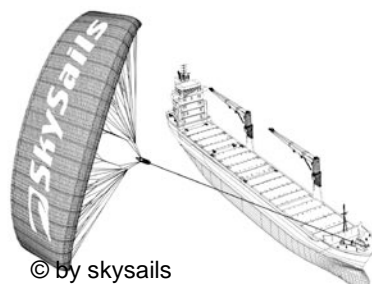
PISA 2003

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
- Να χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων.
- Να βρίσκουμε τη σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών συμπληρωματικών γωνιών.
- Να επιλύουμε ένα τρίγωνο, όταν είναι γνωστό:
(α) το μήκος μίας πλευράς του και το μέτρο μίας οξείας γωνίας του ή
(β) το μήκος δύο πλευρών του.



Λύση Προβλήματος



© by skysails

ΠΛΟΙΑ ΜΕ ΠΑΝΙΑ

Ενεήντα πέντε τοις εκατό του παγκόσμιου εμπορίου, διακινείται θαλάσσια, από περίπου 50 000 πετρελαιοφόρα, φορτηγά πλοία και πλοία μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων. Τα περισσότερα από αυτά τα πλοία χρησιμοποιούν πετρέλαιο για την κίνησή τους.

Οι μηχανικοί σχεδιάζουν να αναπτύξουν μηχανισμούς αεροδυναμικής υποστήριξης των πλοίων. Η εισήγησή τους εστιάζεται στη χρήση πανιών στα πλοία, ώστε να αξιοποιείται η δύναμη του ανέμου. Αυτό θα οδηγήσει σε μείωση της κατανάλωσης αργού πετρελαίου και της επίδρασης των καυσίμων στο περιβάλλον.

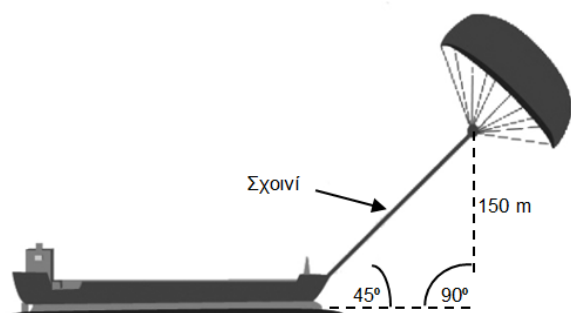
Ερώτηση 1:

Ένα πλεονέκτημα της χρήσης πανιών ναυσιπλοΐας είναι ότι το πανί υπερίπταται σε ύψος 150 m. Σε αυτό το ύψος, η ταχύτητα του ανέμου είναι κατά προσέγγιση 25% μεγαλύτερη από την ταχύτητα στο κατάστρωμα του πλοίου.

Με ποια, κατά προσέγγιση, ταχύτητα πνέει ο άνεμος στο πανί, όταν η ταχύτητα του ανέμου στο κατάστρωμα ενός πλοίου μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων είναι 24 km/h;

- A. 6 km/h B. 18 km/h Γ. 25 km/h
Δ. 30 km/h E. 49 km/h

Ερώτηση 2:



Πόσο περίπου πρέπει να είναι το μήκος του σχοινιού του πανιού, για να ρυμουλκεί το πλοίο υπό γωνία 45° και να βρίσκεται κατακόρυφα σε ύψος 150 m, όπως φαίνεται στο διάγραμμα;

- A. 173 m B. 212 m
Γ. 285 m Δ. 300 m

Σημείωση: Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.
© by skysails

Ερώτηση 3:

Λόγω του υψηλού κόστους του αργού πετρελαίου, το οποίο κοστίζει 0,42 ζετς το λίτρο, οι ιδιοκτήτες του πλοίου Νέο Κύμα σκέφτονται να εξοπλίσουν το πλοίο τους με πανιά ναυσιπλοΐας.

Υπολογίζεται ότι ένα τέτοιο πανί, μπορεί να περιορίσει την κατανάλωση αργού πετρελαίου συνολικά γύρω στο 20%.

Όνομα: Νέο Κύμα

Είδος: Μεταφοράς
εμπορευματοκιβωτίων

Μήκος: 117 μέτρα

Πλάτος: 18 μέτρα

Χωρητικότητα: 12 000 τόνοι

Μέγιστη ταχύτητα: 19 κόμβοι

Ετήσια κατανάλωση πετρελαίου χωρίς τη χρήση πανιού: περίπου 3 500 000 λίτρα



Το κόστος εξοπλισμού του πλοίου Νέο Κύμα με ένα πανί είναι 2 500 000 ζετς. Μετά από πόσα χρόνια η εξοικονόμηση από την κατανάλωση αργού πετρελαίου θα καλύψει το κόστος του πανιού;

Να υποστηρίξετε την απάντησή σας με τους απαραίτητους υπολογισμούς.

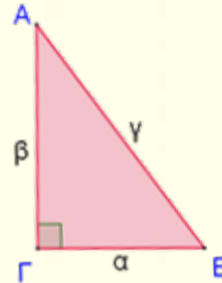
Έχουμε μάθει ...

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Παράδειγμα:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$) με υποτεινούσα τη γ και κάθετες πλευρές τις α και β ισχύει:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$



- Τι είναι λόγος και τι είναι αναλογία.

➤ **Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών α και β** , που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι **το πηλίκο των μέτρων τους**.

Ο λόγος του α προς το β μπορεί να γραφεί ως:
 α προς β ή $\alpha : \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$.

➤ **Αναλογία** ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Παράδειγμα:

Σε ένα τμήμα φοιτούν 12 αγόρια και 10 κορίτσια.

Ο **λόγος** των αγοριών προς τα κορίτσια είναι 12 προς 10 ή $12 : 10$ ή $\frac{12}{10}$ ή πιο απλά $\frac{6}{5}$

Η ισότητα $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ είναι μια **αναλογία**.

➤ Να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών.

• Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

• Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Παράδειγμα:

Ισχύει:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 \text{ και}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6}$$

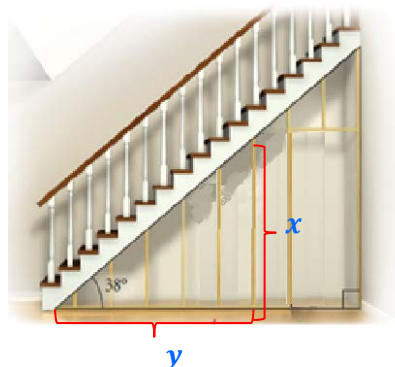
Τριγωνομετρικοί Αριθμοί

Διερεύνηση

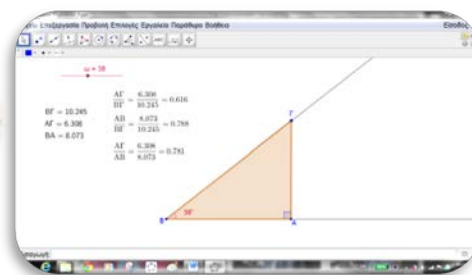
Ο κύριος Μιχάλης θα κατασκευάσει ένα ντουλάπι κάτω από τον χώρο της σκάλας.

Θέλει να μελετήσει πόσα θα είναι τα μήκη (x) των κατακόρυφων ξύλινων δοκών που θα χρειαστεί. Ο κύριος Μιχάλης μπορεί να μετρήσει με ακρίβεια τη γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το πάτωμα, καθώς και τα μήκη (y), των οριζόντιων δοκών.

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο οι δύο μετρήσεις, είναι αρκετές για να υπολογίσει το μήκος (x) κάθε δοκού στο χαρτί αφού είναι δύσκολο να το μετρήσει στην πράξη.



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En5_TrigArithmoi.ggb», για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



- ✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα, για να σχηματίσετε γωνία $\widehat{A\hat{B}G}$ με μέτρο 38° . Ακολουθώντας να μετακινήσετε το σημείο G σε διαφορετικές θέσεις και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα όπως φαίνεται στο παράδειγμα.
- ✓ Να δώσετε και άλλες τιμές για τη γωνία $\widehat{A\hat{B}G}$, να επαναλάβετε τη διαδικασία και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

$\widehat{A\hat{B}G}$	AB	AG	BG	$\frac{AG}{BG}$	$\frac{AB}{BG}$	$\frac{AG}{AB}$
27°	5,444	2,774	6,11	0,454	0,891	0,51
38°						
38°						
38°						
40°						
40°						
40°						
40°						

Η Τριγωνομετρία, ασχολείται με την ακριβή μέτρηση των στοιχείων των τριγώνων. Είναι ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε από πολύ παλιά, από τους αρχαίους Έλληνες. Με στόχο να υπολογίσουν τις αποστάσεις μεταξύ των πλανητών –που είναι αδύνατον να μετρηθούν άμεσα – προσπάθησαν να τις υπολογίσουν από τις γωνίες που σχημάτιζαν μεταξύ τους.

Ο **Αρίσταρχος ο Σάμιος**, ο **Πτολεμαίος**, ο **Ίππαρχος** και άλλοι, που ασχολήθηκαν με την Αστρονομία, βρήκαν σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών τριγώνων.

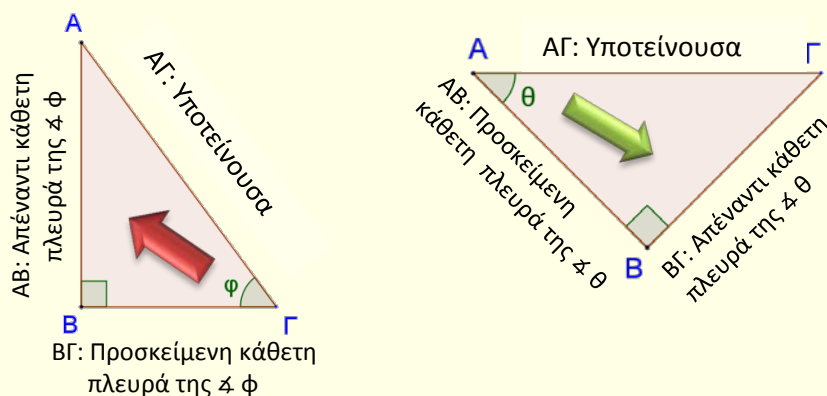
Περίπου δύο χιλιάδες χρόνια πριν δημιουργήθηκαν **τριγωνομετρικοί πίνακες**, δηλαδή πίνακες με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη) γωνιών.

Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αυτών αριθμών δεν ήταν καθόλου απλός. Άρχισε να απλοποιείται μετά τον 17^ο αιώνα μ.Χ. και στις ημέρες μας είναι πανεύκολος με τη χρήση των υπολογιστών τσέπης. Σκοπός αυτών των πινάκων ήταν να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί της Αστρονομίας.

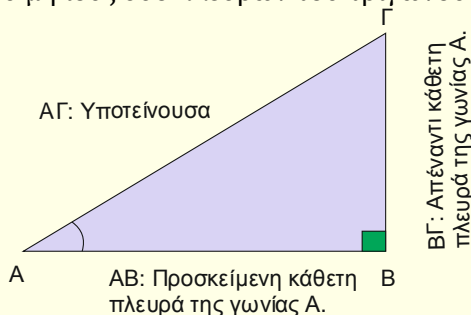
Μαθαίνω

Η τριγωνομετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη μέτρηση των στοιχείων του τριγώνου.

- **Ονομασία πλευρών ορθογώνιου τριγώνου σε σχέση με μια οξεία γωνία του.**



- **Τριγωνομετρικός αριθμός οξείας γωνίας** ορθογώνιου τριγώνου είναι ο λόγος του μήκους δυο πλευρών του τριγώνου.



Λεκτικά	Τύπος
ημίτονο της \hat{A} = $\frac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της } \hat{A}}{\text{υποτείνουσα του τριγώνου}}$	$\eta\mu A = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$
συνημίτονο της \hat{A} = $\frac{\text{Μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς της } \hat{A}}{\text{υποτείνουσα του τριγώνου}}$	$\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Gamma}{A\Gamma}$
εφαπτομένη της \hat{A} = $\frac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της } \hat{A}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της } \hat{A}}$	$\epsilon\phi A = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι καθαροί αριθμοί, δεν έχουν δηλαδή μονάδα μέτρησης.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας μπορούν να υπολογιστούν και με τη βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων.

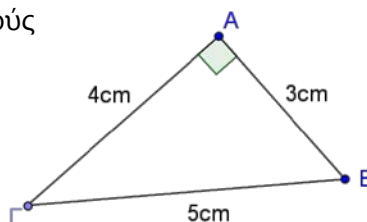
- Στην υπολογιστική μηχανή οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας υπολογίζονται με τη βοήθεια των πιο κάτω εντολών:

Εντολή Υπολογιστικής	Τριγωνομετρικός Αριθμός
sin	Ημίτονο
cos	Συνημίτονο
tan	Εφαπτομένη

Η Υπολογιστική μηχανή θα πρέπει να είναι ρυθμισμένη σε μοίρες, να φέρει την ένδειξη «DEG» ή «D».

Παραδείγματα

- Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και της γωνίας \hat{B} .



Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$:

$B\Gamma$: Υποτείνουσα

Σε σχέση με την \hat{B} :

$A\Gamma$: Απέναντι κάθετη πλευρά της \hat{B}

AB : Προσκείμενη κάθετη πλευρά της \hat{B} .

Σε σχέση με τη $\hat{\Gamma}$:

AB : Απέναντι κάθετη της $\hat{\Gamma}$.

$A\Gamma$: Προσκείμενη κάθετη της $\hat{\Gamma}$

Αν οι γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές, τότε ισχύει:

- $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma$
- $\sigma\upsilon\nu B = \eta\mu\Gamma$

$$\bullet \eta\mu\Gamma = \frac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της } \hat{\Gamma}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3}{5}$$

$$\bullet \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\text{Μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς της } \hat{\Gamma}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{4}{5}$$

$$\bullet \epsilon\varphi\Gamma = \frac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της } \hat{\Gamma}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της } \hat{\Gamma}} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$$

$$\bullet \eta\mu B = \frac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της } \hat{B}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{4}{5}$$

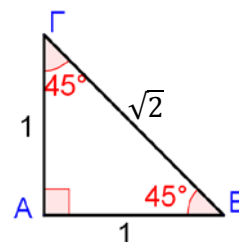
$$\bullet \sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{Μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς της } \hat{B}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3}{5}$$

$$\bullet \epsilon\varphi B = \frac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της } \hat{B}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της } \hat{B}} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{4}{3}$$

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 45° χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Λύση:

Για να κατασκευάσω τη γωνία των 45° , κατασκευάζω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με $AB = A\Gamma = 1$.



Σε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Άρα,

$$(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$$

$$\Rightarrow (B\Gamma)^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\Rightarrow (B\Gamma)^2 = 2$$

$$\Rightarrow B\Gamma = \sqrt{2}$$

$$\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} \Rightarrow \eta\mu 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\epsilon\varphi B = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow \epsilon\varphi 45^\circ = \frac{1}{1} \Rightarrow \epsilon\varphi 45^\circ = 1$$

Παρατήρηση:

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους του λόγου $\frac{1}{\sqrt{2}}$ επί $\sqrt{2}$ και να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ριζών:

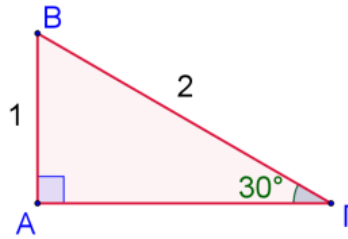
$$\text{Επομένως, } \eta\mu 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Αν το $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° και 60° .

Λύση:

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}. \text{ Άρα, } AB = 1 \text{ και } B\Gamma = 2$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.



Άρα,

$$(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$$

$$\Rightarrow 2^2 = 1^2 + (A\Gamma)^2$$

$$\Rightarrow (A\Gamma)^2 = 4 - 1$$

$$\Rightarrow (A\Gamma)^2 = 3$$

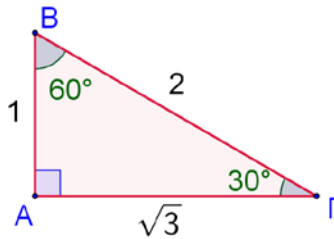
$$\Rightarrow A\Gamma = \sqrt{3}$$

Ισχύει:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} \Rightarrow \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Από το ίδιο τρίγωνο μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και της γωνίας 60° .

$$\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} \Rightarrow \varepsilon\varphi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τους πιο πάνω τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° , 45° και 60° στον πιο κάτω πίνακα:

	30°	45°	60°
$\eta\mu$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\varepsilon\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



4. Να υπολογίσετε, κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων, τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:
 (α) $\eta\mu 30^\circ$ (β) $\sigma\upsilon\nu 42^\circ$ (γ) $\epsilon\phi 70^\circ$

Λύση:

Με την υπολογιστική μηχανή μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ως εξής:

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$\eta\mu 30^\circ$	sin 3 0 =	$\sin 30$ 0.5
$\sigma\upsilon\nu 42^\circ$	cos 4 2 =	$\cos 42$ 0.7431448255
$\epsilon\phi 70^\circ$	tan 7 0 =	$\tan 70$ 2.747477419

Στρογγυλοποιούμε κατάλληλα τους αριθμούς. Άρα,
 $\eta\mu 30^\circ = 0,5$ $\sigma\upsilon\nu 42^\circ \cong 0,743$ $\epsilon\phi 70^\circ \cong 2,747$

5. Να υπολογίσετε, κατά προσέγγιση ακεραίου τις οξείες γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$ και \hat{x} για τις οποίες ισχύει:
 (α) $\eta\mu\omega = 0,9$ (β) $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,5$ (γ) $\epsilon\phi x = 2,2$

Λύση:

Για να βρούμε ποιας γωνίας είναι ένας συγκεκριμένος τριγωνομετρικός αριθμός μπορούμε να εξετάσουμε τον τριγωνομετρικό πίνακα ή να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστική μηχανή.

Για να υπολογίσουμε τη γωνία θα γράψουμε στην υπολογιστική την εντολή για την «αντίστροφη πράξη του τριγωνομετρικού αριθμού». Δηλαδή:

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$\eta\mu\omega = 0,9$	SHIFT sin 0 . 9 =	$\sin^{-1} 0.9$ 64.15806724
$\sigma\upsilon\nu\phi = 0,5$	SHIFT cos 0 . 5 =	$\cos^{-1} 0.5$ 60
$\epsilon\phi x = 2,2$	SHIFT tan 2 . 2 =	$\tan^{-1} 2.2$ 65.55604522

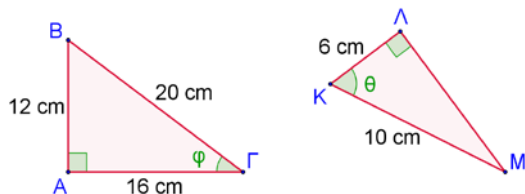
Στρογγυλοποιούμε κατάλληλα τους αριθμούς. Άρα,

$\omega \cong 64^\circ$ $\phi = 60^\circ$ $x \cong 66^\circ$

Δραστηριότητες



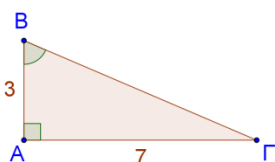
1. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$.



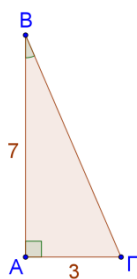
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$.

2. Σε ποιο από τα πιο κάτω τρίγωνα ισχύει ότι $\varepsilon\varphi B = \frac{3}{7}$;

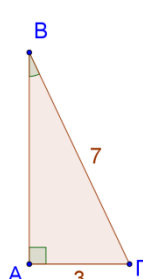
(α)



(β)



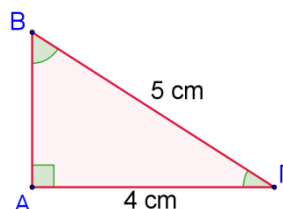
(γ)



3. Στο διπλανό σχήμα, να βρείτε:

(α) Ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της \hat{B} είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;

(β) Ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{\Gamma}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;



4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία $\hat{\theta}$. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση για κάθε περίπτωση:

(α) Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ τότε:

A. $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{4}$

B. $\varepsilon\varphi\theta = \frac{5}{4}$

Γ. $\varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$

(β) Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{5}{13}$ και $\eta\mu\theta = \frac{12}{13}$ τότε:

A. $\varepsilon\varphi\theta = \frac{5}{12}$

B. $\varepsilon\varphi\theta = \frac{12}{5}$

Γ. $\varepsilon\varphi\theta = \frac{13}{5}$

(γ) Αν $\eta\mu\theta = 0,5$ τότε:

A. $\hat{\theta} = 45^\circ$

B. $\hat{\theta} = 30^\circ$

Γ. $\hat{\theta} = 60^\circ$

(δ) Αν $\hat{\theta} = 45^\circ$ τότε:

A. $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$

B. $\eta\mu\theta < \sigma\upsilon\nu\theta$

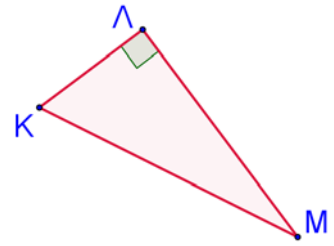
Γ. $\eta\mu\theta > \sigma\upsilon\nu\theta$

5. Να γράψετε με ποιο τριγωνομετρικό αριθμό είναι ίσοι οι πιο κάτω λόγοι στο τρίγωνο KLM .

(α) $\frac{KL}{KM} = \dots \hat{K}$

(β) $\frac{KL}{KM} = \dots \hat{M}$

(γ) $\frac{KL}{LM} = \dots \hat{M}$



6. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη χρήση υπολογιστικής μηχανής. Η απάντηση να δοθεί με 3 δεκαδικά ψηφία.

(α) $\eta\mu 75^\circ$

(β) $\sigma\upsilon\nu 78^\circ$

(γ) $\eta\mu 60^\circ$

(δ) $\sigma\upsilon\nu 23^\circ$

(ε) $\epsilon\phi 52^\circ$

(στ) $\epsilon\phi 88^\circ$

7. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω οξείες γωνίες. Η απάντηση να δοθεί σε προσέγγιση ακεραίου.

(α) $\eta\mu x = 0,5$

(β) $\sigma\upsilon\nu \delta = 0,3$

(γ) $\eta\mu \rho = 0,25$

(δ) $\eta\mu \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ε) $\epsilon\phi \gamma = 3$

(στ) $\epsilon\phi \mu = 3,1$

8. Να συμπληρώσετε ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

(α) $\eta\mu 65^\circ = \sigma\upsilon\nu \dots$

(β) $\sigma\upsilon\nu 50^\circ = \eta\mu \dots$

(γ) $\eta\mu 10^\circ = \sigma\upsilon\nu \dots$

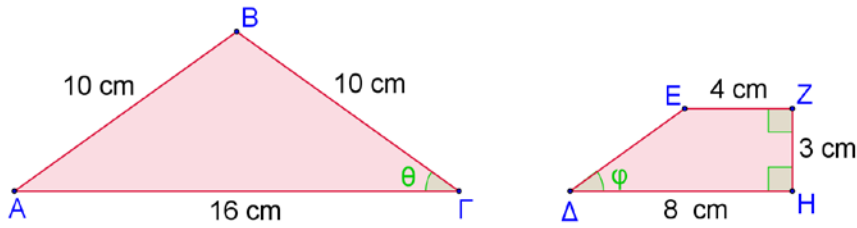
(δ) $\dots 34^\circ = \eta\mu 56^\circ$

(ε) $\sigma\upsilon\nu \dots = \eta\mu 45^\circ$

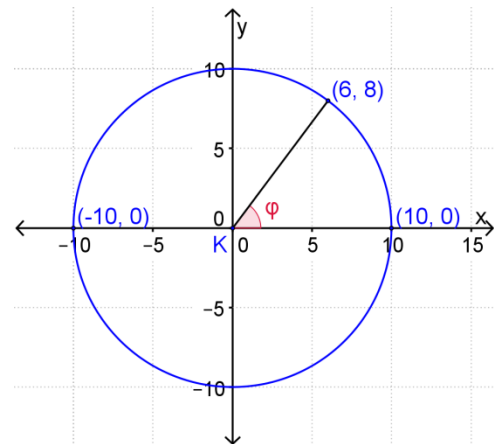
(στ) $\eta\mu \dots = \sigma\upsilon\nu \dots$

9. Η Μαρίλια σε μία άσκηση έχει βρει απάντηση $\epsilon\phi \omega = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. Ο Ανδρέας, χωρίς να λύσει την άσκηση, επιμένει ότι η Μαρίλια έχει σίγουρα λάθος αφού οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας δεν μπορούν να πάρουν τιμή μεγαλύτερη της μονάδας. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

10. Να δείξετε ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$ είναι ίσοι. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις δύο γωνίες;



11. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\varphi}$ στο σχήμα:



12. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(A = 90^\circ)$ ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

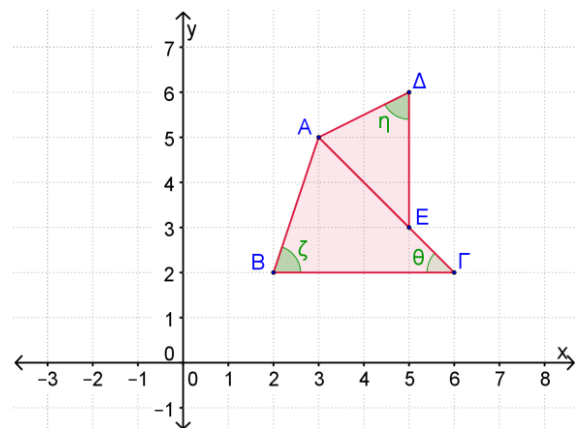
(α) $0 < 5\eta\mu B < 5$

(β) $\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B < 2$

(γ) $\varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$

(δ) $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 B = 1$

13. Να βρείτε την εφαπτομένη και το ημίτονο των γωνιών $\hat{\eta}$, $\hat{\theta}$ και $\hat{\zeta}$ στο διπλανό σχήμα.



Επίλυση Τριγώνου

Εξερεύνηση



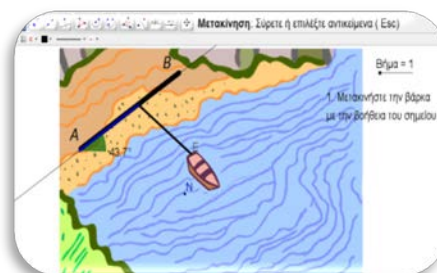
Ο εξάντας είναι ένα γωνιομετρικό όργανο που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση κατακόρυφων ή οριζόντιων γωνιών δύο σταθερών αντικειμένων από τη θέση του παρατηρητή.

Ο Χαράλαμπος βρίσκεται σε μια παραλία και θέλει να υπολογίσει την απόσταση της αγκυροβολημένης βάρκας από την ευθεία που περνά από τα σημεία A και B , χωρίς όμως να αναγκαστεί να κολυμπήσει. Έχει μαζί του έναν εξάντα, μια υπολογιστική μηχανή και μια μετροταινία.



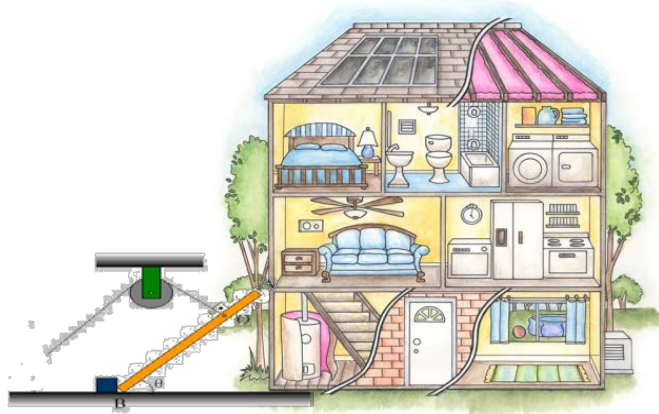
- ✓ Να τον βοηθήσετε να υπολογίσει τη ζητούμενη απόσταση.

Να ανοίξετε το αρχείο «[C_En5_Dierevnisi_Paralia.ggb](#)», για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



Διερεύνηση

Ο κύριος Χρίστος έχει αναλάβει την ανακαίνιση μιας τριώροφης οικοδομής. Για την ανακαίνιση θα χρειαστεί να τοποθετήσει δύο ξύλινες ράμπες που θα οδηγούν η μία στον πρώτο και η άλλη στον δεύτερο όροφο.

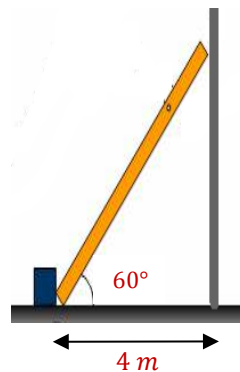


Σύμφωνα με τους κανόνες ασφαλείας:

- Η γωνία που σχηματίζει η ράμπα με το έδαφος δεν πρέπει να υπερβαίνει τις 40° ,
- Η ράμπα πρέπει να είναι ένα ενιαίο κομμάτι ξύλου με μέγιστο μήκος 10 m.

Για τον δεύτερο όροφο, με τη βοήθεια ενός γωνιομέτρου, μέτρησε τη γωνία που θα σχηματίζει η δοκός με το έδαφος από ένα συγκεκριμένο σημείο (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα).

- ✓ Να εξετάσετε πόσο είναι το ύψος του δεύτερου ορόφου.



- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν να τηρηθούν οι κανόνες ασφαλείας και αν ναι, σε ποιο σημείο πρέπει να τοποθετηθεί η δοκός;

Μαθαίνω

- Επίλυση τριγώνου είναι ο υπολογισμός του μέτρου των γωνιών του και του μήκους των πλευρών του.
- Για να επιλυθεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο πρέπει να είναι γνωστό:
(α) το μήκος μίας πλευράς του και το μέτρο μίας οξείας γωνίας του

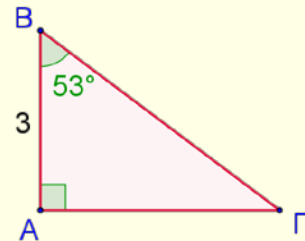
Παράδειγμα:

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 53^\circ$$

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - (90^\circ + 53^\circ) = 37^\circ$$



$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu 53^\circ = \frac{3}{B\Gamma}$$

$$\Rightarrow 0,6 \cong \frac{3}{B\Gamma}$$

$$\Rightarrow 0,6 B\Gamma \cong 3$$

$$\Rightarrow B\Gamma \cong \frac{3}{0,6}$$

$$\Rightarrow B\Gamma \cong 5$$

$$\text{Άρα, } AB = 3$$

$$A\Gamma = 4$$

$$B\Gamma = 5$$

$$\epsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB}$$

$$\Rightarrow \epsilon\varphi 53^\circ = \frac{A\Gamma}{3}$$

$$\Rightarrow 1,33 \cong \frac{A\Gamma}{3}$$

$$\Rightarrow A\Gamma \cong 3 \cdot 1,33$$

$$\Rightarrow A\Gamma \cong 3,99$$

$$\Rightarrow A\Gamma \cong 4$$

ή με Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

$$\Rightarrow A\Gamma = 4$$

(β) το μήκος δύο πλευρών του.

Παράδειγμα:

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

$$\Rightarrow 7^2 = 3^2 + A\Gamma^2$$

$$\Rightarrow A\Gamma^2 = 49 - 9$$

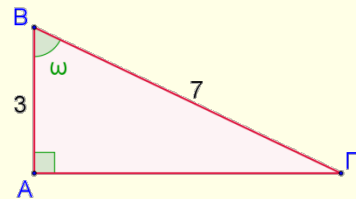
$$\Rightarrow A\Gamma = \sqrt{40}$$

$$\Rightarrow A\Gamma \cong 6,3$$

$$\text{Άρα, } AB = 3$$

$$A\Gamma = 6,3$$

$$B\Gamma = 7$$



$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega \cong 0,43$$

$$\Rightarrow \omega \cong 65^\circ$$

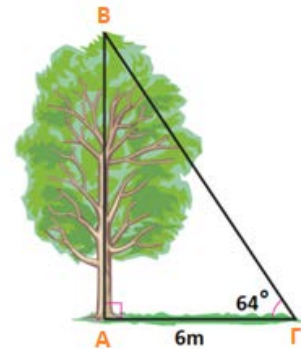
$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 65^\circ$$

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - (90^\circ + 65^\circ) = 25^\circ$$

Παραδείγματα

1. Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος του δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση 6 m από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέτρο της γωνίας προς την κορυφή του δέντρου ήταν 64° . Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου. (Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί να υπολογιστούν κατά προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων).



Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο που δημιουργήθηκε είναι γνωστή η γωνία των 64° και η **προσκείμενη πλευρά** της γωνίας αυτής με μήκος 6m.

Το ζητούμενο της άσκησης είναι το ύψος του δέντρου (AB), δηλαδή η **απέναντι πλευρά** της $\hat{\Gamma} = 64^\circ$. Άρα, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της εφαπτομένης που συνδέει τις πλευρές αυτές.

$$\epsilon\phi\hat{\Gamma} = \frac{AB}{AG}$$

$$\epsilon\phi 64^\circ = \frac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της γωνίας } 64^\circ}{\text{Μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς της γωνίας } 64^\circ}$$

$$2,05 = \frac{AB}{6}$$

$$\Rightarrow AB = 2,05 \cdot 6$$

$$\Rightarrow AB = 12,3 \text{ m}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα

Με τη χρήση υπολογιστικής μηχανής $\epsilon\phi 64^\circ \cong 2,05$

Άρα, το ύψος του δέντρου είναι 12,3 m.

2. Ένας πολιτικός μηχανικός θέλει να υπολογίσει την οξεία γωνία x που δημιουργεί ο πύργος της Πίζας με το έδαφος, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Λύση:

Ζητούμενη είναι η γωνία x ενώ γνωστές είναι η προσκείμενη της πλευρά και η υποτείνουσα του τριγώνου.

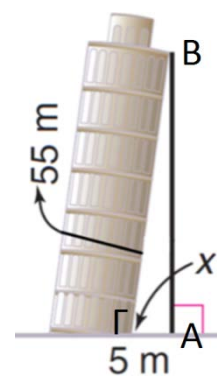
Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει την προσκείμενη πλευρά με την υποτείνουσα είναι το συνημίτονο.

Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{AG}{GB}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{5}{55}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0,09$$



Για να υπολογίσουμε τη γωνία θα γράψουμε στην υπολογιστική την εντολή για την «αντίστροφη πράξη του συνημιτόνου». Δηλαδή,

SHIFT **cos** 0.0909090909 ή

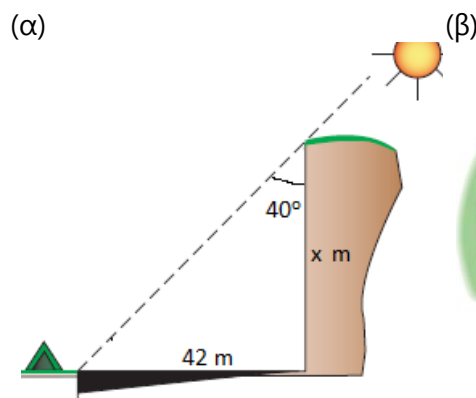
SHIFT **cos** (5 ÷ 55)

Ισχύει **SHIFT** **cos** (0.09090909) $\cong 85^\circ$. Άρα, η ζητούμενη γωνία είναι 85° .

Δραστηριότητες



1. Να υπολογίσετε τις τιμές του x σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις. Οι απαντήσεις να δοθούν σε προσέγγιση ακεραίου.

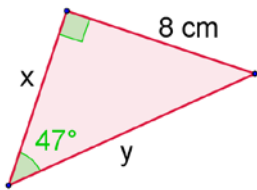


(γ) (δ)

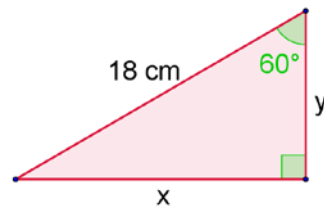
2. Να υπολογίσετε τη γωνία K ενός τριγώνου KLM με κορυφές $K(-2,1)$, $L(5,1)$ και $M(5,-3)$.

3. Να υπολογίσετε τους άγνωστους x και y στις πιο κάτω περιπτώσεις (Οι απαντήσεις να δοθούν κατά προσέγγιση δεκάτου):

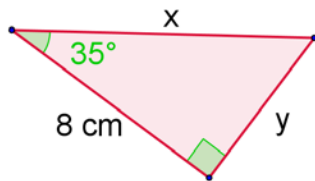
(α)



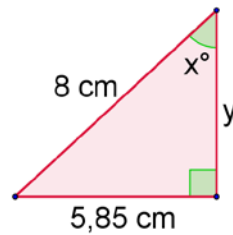
(β)



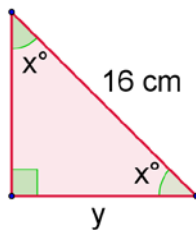
(γ)



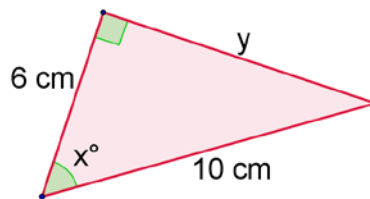
(δ)



(ε)



(στ)



4. Να βρείτε τις άλλες δύο πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου:

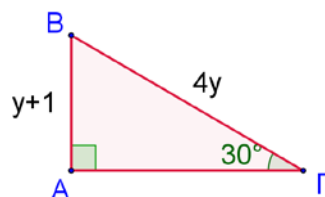
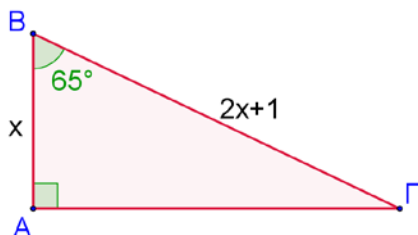
(α) με οξεία γωνία 30° , αν:

- i. η μικρότερη πλευρά έχει μήκος 1 cm,
- ii. η μεγαλύτερη πλευρά έχει μήκος 1 cm.

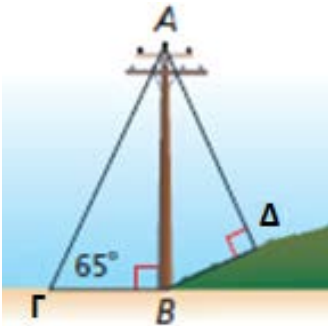
(β) με οξεία γωνία 45° , αν:

- i. η μια κάθετη πλευρά έχει μήκος 1 cm,
- ii. η μεγαλύτερη πλευρά έχει μήκος 1 cm.

5. Να βρείτε την τιμή του x και του y στις πιο κάτω περιπτώσεις:

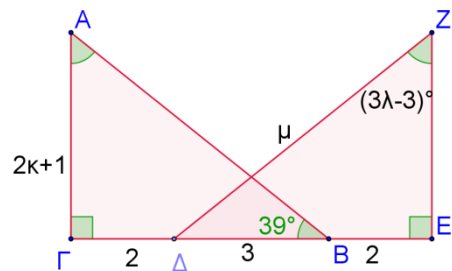


6. Να βρείτε, με δύο διαφορετικούς τρόπους, το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου με μήκος πλευράς 5 cm .

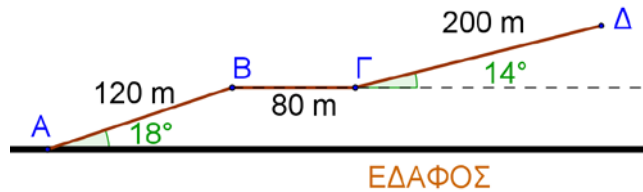


7. Ένας πάσσαλος της ηλεκτρικής, μήκους 8 m , είναι τοποθετημένος στη βάση ενός λόφου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η γωνία που σχηματίζει ο λόφος με το έδαφος είναι 20° , να υπολογίσετε το μήκος των δύο συρμάτων με τα οποία στερεώνεται ο πάσσαλος.

8. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ στο σχήμα είναι ίσα. Να βρείτε την τιμή των κ , λ και μ .



9. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Δ από το έδαφος στο πιο κάτω σχήμα:



10. Ένας προβολέας είναι τοποθετημένος στον τοίχο ενός κτιρίου σε ύψος $6,40\text{ m}$ από το έδαφος. Ένας εργάτης διαθέτει μια σκάλα με 12 σκαλοπάτια, τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση 30 cm . Το πρώτο σκαλοπάτι απέχει από τη βάση της σκάλας 50 cm και το τελευταίο σκαλοπάτι 40 cm από την κορυφή της σκάλας. Σύμφωνα με τους κανόνες ασφαλείας της συγκεκριμένης σκάλας, η γωνία με το έδαφος δεν πρέπει να υπερβαίνει τις 75° . Αν ο εργάτης έχει ύψος $1,80\text{ m}$, να εξετάσετε κατά πόσο μπορεί να αλλάξει τη λάμπα του προβολέα ή όχι.

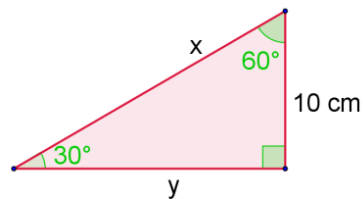


Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε με ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βαζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

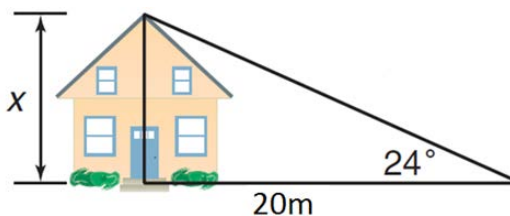
- | | |
|--|--------------|
| (α) $\eta\mu 1^\circ = \sigma\upsilon\nu 89^\circ$ | ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$ | ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) Αν $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{4}$ | ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) Αν $\omega = 45^\circ$ τότε $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega = \epsilon\phi\omega$ | ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) $\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 20^\circ$ | ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) Αν $0^\circ < \omega < \phi < 90^\circ$ τότε $\eta\mu\omega < \eta\mu\phi$ | ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ |

2. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x και y με προσέγγιση εκατοστού χρησιμοποιώντας τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:



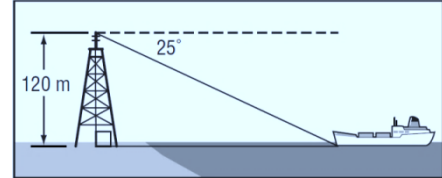
	$\omega = 30^\circ$	$\omega = 60^\circ$
$\eta\mu\omega$	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866$	0,5
$\epsilon\phi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0,577$	$\sqrt{3} \cong 1,732$

3. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το ύψος του σπιτιού, αν γνωρίζετε ότι:
 $\eta\mu 24^\circ \cong 0,41$
 $\sigma\upsilon\nu 24^\circ \cong 0,91$
 $\epsilon\phi 24^\circ \cong 0,45$



4. Ο Λίνος ισχυρίζεται ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία 30° η υποτείνουσα είναι διπλάσια από την πλευρά που βρίσκεται απέναντι της γωνίας των 30° . Να εξετάσετε κατά πόσο ο ισχυρισμός αυτός είναι ορθός.

5. Να υπολογίσετε την απόσταση του πλοίου από τον πύργο, αν είναι γνωστό ότι $\eta\mu 25^\circ \cong 0,42$, $\sigma\upsilon\nu 25^\circ \cong 0,91$, $\epsilon\phi 25^\circ \cong 0,47$.



6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $\hat{A} = 90^\circ$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B , αν $\epsilon\phi\Gamma = \frac{2}{5}$.

7. Να κατασκευάσετε μία γωνία ω με $\epsilon\phi\omega = 2$.

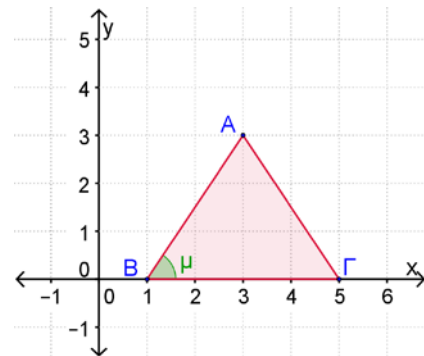
8. Να εξετάσετε τους πιο κάτω ισχυρισμούς:

(α) «Όταν μια οξεία γωνία αυξάνεται, τότε αυξάνεται το ημίτονό της».

(β) «Σε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$, ισχύει: $\epsilon\phi B = \epsilon\phi\Gamma$ ».

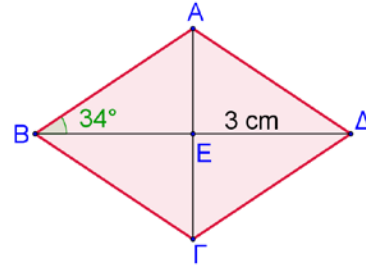
9. Σε ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία του είναι τετραπλάσια από την άλλη, ενώ η υποτείνουσα είναι ίση με 4 dm . Να επιλύσετε το τρίγωνο.

10. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\mu}$.

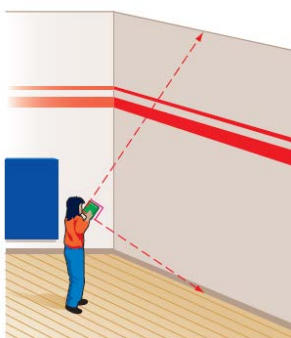


11. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(\hat{A} = 90^\circ)$ ισχύει η σχέση: $\frac{\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu B} = \varepsilon\varphi B$

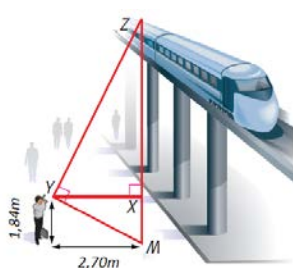
12. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού



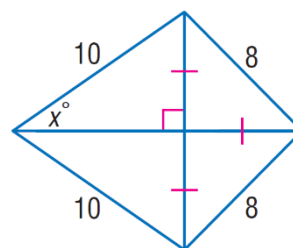
1. Η Σοφία προσπαθεί να υπολογίσει το ύψος του τοίχου. Πήρε ένα βιβλίο το τοποθέτησε κοντά στο μάτι της έτσι ώστε όταν κοιτάζει κατά μήκος της μιας πλευράς του βιβλίου να φαίνεται η συμβολή του τοίχου με την οροφή και όταν κοιτάζει κατά μήκος της άλλης πλευράς του βιβλίου να φαίνεται η συμβολή του τοίχου με το πάτωμα. Αν η απόσταση του ματιού της από το έδαφος είναι 165 cm και από τον τοίχο 2 m , να υπολογίσετε το ύψος του τοίχου.



2. Ο κύριος Ζήνωνας θέλει να σχεδιάσει μια γέφυρα για πεζούς η οποία θα περνά πάνω από το τρένο. Για να σχεδιάσει τη γέφυρα πρέπει να υπολογίσει το ύψος ZM από το έδαφος μέχρι την κορυφή του τρένου. Να τον βοηθήσετε να υπολογίσει το ύψος αυτό.

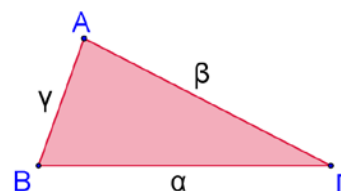
3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30° και 60° , χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 cm).

4. Να υπολογίσετε την τιμή του x στο σχήμα:



5. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$$



6. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία ω ενός ορθογώνιου τριγώνου, αν ισχύει:

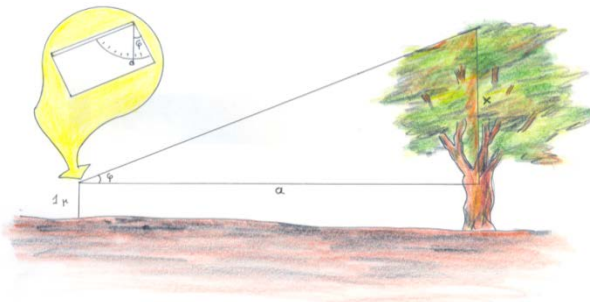
(α) $4\epsilon\varphi\omega = 4$

(β) $2\sigma\upsilon\nu\omega - 1 = 0$

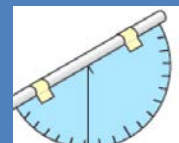
7. Ο Έκτορας ισχυρίζεται ότι το *ημω* δεν μπορεί να ισούται με *εφω* για καμμιά τιμή της οξείας γωνιά ω . Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.
8. Ο Χρίστος και η Νεφέλη είναι πρόσκοποι. Σε μια από τις δραστηριότητές τους έμαθαν πώς να εκτιμούν, αλλά και πώς να υπολογίζουν με ακρίβεια το ύψος ενός δένδρου. Να μελετήσετε τους πιο κάτω τρόπους και να εξηγήσετε με μαθηματικές έννοιες τη διαδικασία σε καθεμία από τις πιο κάτω μεθόδους.

♦ Μέτρηση με γωνιόμετρο

Σε συγκεκριμένη απόσταση από το δέντρο και σε ύψος ενός μέτρου από το έδαφος (α), στόχευσε την κορυφή του δέντρου. Μέτρησε, με τη βοήθεια του γωνιομέτρου, τη γωνία (φ), που σχηματίζεται από το σχοινάκι και την κάθετη ακμή του χαρτονιού προς το καλαμάκι. Κάνε τους κατάλληλους υπολογισμούς.



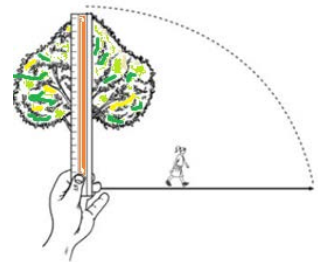
Το γωνιόμετρο μπορεί να είναι ένα απλό χαρτόνι που στη μια γωνία του είναι σχεδιασμένο ή προσαρμοσμένο ένα μοιρογνωμόνιο. Στην κορυφή αυτή είναι δεμένο ένα σχοινάκι στο οποίο στην άλλη του άκρη είναι δεμένο ένα βαρίδι. Στην πάνω άκρη του χαρτονιού είναι στερεωμένο ένα σωληνάκι (π.χ. καλαμάκι).



♦ Εκτίμηση του ύψους

1^η μέθοδος

Κρατώντας ένα ραβδί όρθιο μετακινήσου μέχρι το ραβδί να γίνει ίσο με το ύψος του δέντρου. Στρέψε το ραβδί κατά 90° όπως φαίνεται στο σχήμα και ζήτη από ένα άλλο άτομο να σταθεί εκεί που θα δείχνει η κορυφή του ραβδιού. Η απόσταση αυτή από τη βάση του αντικειμένου μέχρι του σημείου που έδειξε η κορυφή του ραβδιού είναι ίση με το ύψος του.



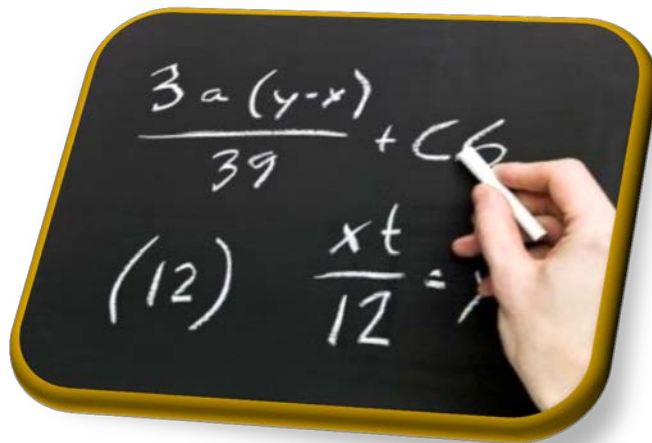
2^η μέθοδος

Τοποθέτησε στο έδαφος έναν πάσσαλο και μέτρησε τη σκιά του. Ακολούθως μέτρησε το μήκος της σκιάς του δέντρου. Με μια απλή μέθοδο των τριών βρίσκουμε το ύψος του αντικειμένου.



Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Α' τεύχος



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ: Επανάληψη από την Α' – Β' Γυμνασίου

Σελίδα 9

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) 6 (β) -5 (γ) 1 (δ) 0 (ε) -4 (στ) 2 (ζ) 17 (η) -17 (θ) -3 (ι) -5
2.	Ρητοί: $\frac{3}{5}, \sqrt[3]{8}, -\frac{1}{3}, \sqrt{9}, -2$ Άρρητοι: $\sqrt{21}, \pi, \sqrt[3]{9}$
3.	(α) 6 (β) $\frac{2}{3}$ (γ) 1 (δ) 36
4.	(α) $6a$ (β) $-5x$ (γ) $-5xy$ (δ) $20x^3$ (ε) $4x^4$ (στ) $-12a^3b^7$ (ζ) $-6x^4$ (η) 3ω (θ) $7a^4$ (ι) $12a^4b^3$
5.	(α) $6x^2 + 10x$ (β) $-6y^3 + 3y^2$ (γ) $a^2 - 4$ (δ) $2a^2 + 7a + 6$ (ε) $8x^3 - 4x^2 - 10x + 5$ (στ) $a^2 - a\gamma - \beta^2 - \beta\gamma$ (ζ) $3x^2 - 17x + 2$ (η) $3a^2 - 3a\beta - 6\beta^2$ (θ) $-6y^3 + 9y^2 + y - 2$ (ι) $-6a^2 - 6a + 3$
6.	(α) $x - y + 5$ (β) 8 (γ) 20
7.	(α) $0 < x < 10$ (β) $4x^3 - 80x^2 + 400x$ (γ) 576 cm^3
8.	(α) $4a - 5$ (β) $-3y^5 + 2y^3$ (γ) $-3x^2 + 8\omega^4$ (δ) $\frac{x^3y^4}{2} - 2x^2y + 1$ (ε) a (στ) $x + 3$ (ζ) $\pi = 5x + 1$ και $v = 3$
9.	(α) $5x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 13$ (β) $3x^4 - x^3 + 3x^2 - x$
10.	(α) 16 (β) -11 (γ) $4x^2 - 5$ (δ) 11
11.	(α) $x = -2$ (β) Αόριστη (γ) $x = -\frac{1}{2}$ (δ) Αδύνατη (ε) $x = 5$ (στ) $\omega = 0$
12.	$E = 130 \text{ cm}^2$
13.	(α) $x = 1, y = 2$ (β) $x = 1, y = 1$

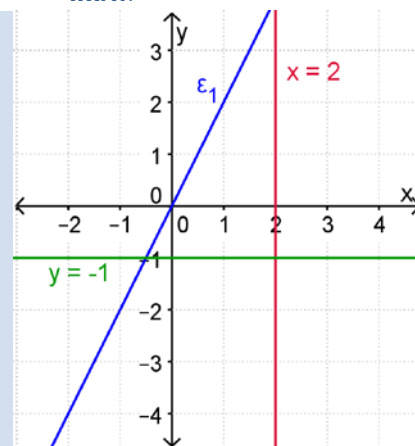
ΙΔΙΟΤΗΤΑ	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Τετράγωνο	Ρόμβος
Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι είναι ίσες.		✓	✓	
Οι πλευρές είναι ίσες.			✓	✓
Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.			✓	✓
Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.	✓	✓	✓	✓
Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.	✓	✓	✓	✓
Οι γωνίες του είναι 90° .		✓	✓	
Δυο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.			✓	✓

14.

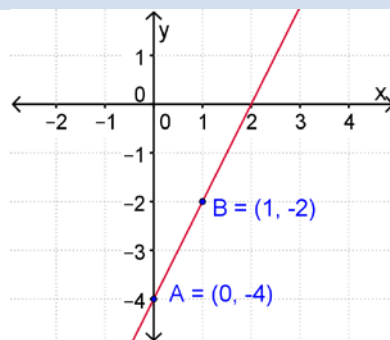
15. (α) $x = z = 119, y = 61$ (β) $x = 90, y = 37, z = 53$

16. (α) $E_{ABΓΔ} = 4 \cdot E_{KΛΜΝ}$ (β) $\Pi_{ABΓΔ} = 2 \cdot \Pi_{KΛΜΝ}$

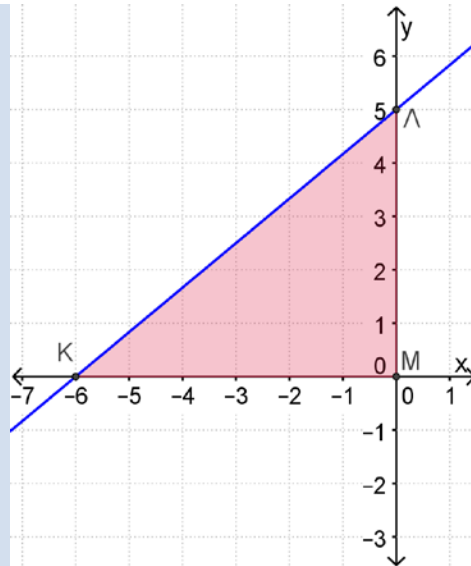
17. (α) $(-2, -4)$ ανήκει (β) $(0,0)$ (γ) (δ)



18. (α) $\alpha = 2, \beta = -4$ (β) (γ) $\lambda = 2$

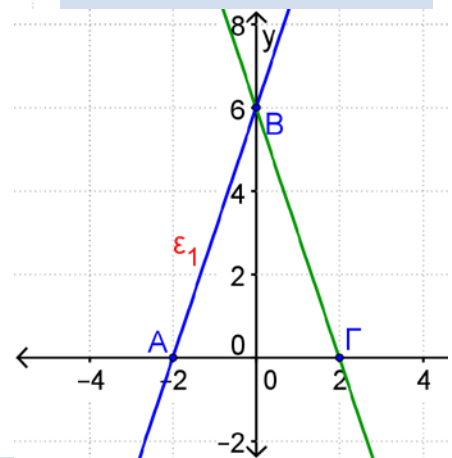


19. (α) $K(-6,0)$ (β) $\Lambda(0,5)$



(γ) $E = 15 \text{ τ. μ.}$

20. (α) $\lambda = 3$ (β) $y = 3x + 6$ (γ)



(δ) Ισοσκελές

21. (α) 14,3 (β) 14,5 (γ) 50%

22. (α) 2 (β) 2 (γ) 1

23. (α) $P(A) = \frac{5}{18}$ (β) $P(B) = \frac{1}{36}$ (γ) $P(\Gamma) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

(δ) $P(\Delta) = \frac{11}{36}$ (ε) $P(E) = \frac{5}{6}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ $(\alpha \pm \beta)^2$

Σελίδα 24

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) Δεν είναι Ταυτότητα (β) Είναι Ταυτότητα

(γ) Είναι Ταυτότητα (δ) Δεν είναι Ταυτότητα

(ε) Δεν είναι Ταυτότητα (στ) Δεν είναι Ταυτότητα

2.	(α)	$\alpha^2 + 2\alpha + 1$	(β)	$y^2 - 6y + 9$
	(γ)	$\mu^2 - 14\mu + 49$	(δ)	$x^2 + 12x + 36$
	(ε)	$16\kappa^2 - 8\kappa + 1$	(στ)	$9x^2 + 12x + 4$
	(ζ)	$25x^2 - 10x\psi^2 + \psi^4$	(η)	$10\sqrt{2} + 27$
	(θ)	$y^6 + 4\omega^2 y^3 + 4\omega^4$	(ι)	$\frac{x^2}{16} - \frac{3x}{2} + 9$
	(ια)	$y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}$	(ιβ)	$\frac{x^2 - 6x + 9}{25}$
3.	(α)	$x^2 - 4x + 4$	(β)	$x^2 - 8x + 16$
	(γ)	$x^2 - 10x + 25$	(δ)	ΟΡΘΗ
4.	(α)	$2\kappa^2 + 2$	(β)	$6x^2 + 1$
	(γ)	$16a + 8$	(δ)	$5\beta^2 - 14\beta + 10$
5.	(α)	$(y + \boxed{2})^2 = y^2 + 4x + 4$	(β)	$(x + \boxed{3})^2 = 9 + 6x + x^2$
	(γ)	$(\boxed{5} + \boxed{x})^2 = 25 + x^2 + 10x$	(δ)	$(\boxed{2y} - \boxed{5})^2 = -20y + 4y^2 + 25$
	(ε)	$(5 - \boxed{4\beta})^2 = \boxed{25} + 16\beta^2 - 40\beta$	(στ)	$(\boxed{y^3} + \boxed{x^2})^2 = y^6 + x^4 + \boxed{2y^3x^2}$
6.		$x^2 - 4x + 4, 9x^2 + 6x + 1, \omega^2 - 2\omega + 1$		
7.	(α)	25	(β)	4
	(γ)	1		
9.		ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο		
10.	(β)	4		

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$		Σελίδα 28		
1.	(α)	$x^2 - 9$	(β)	$4x^2 - 1$
	(γ)	$\alpha^2 \beta^2 - 1$	(δ)	$x^6 - 4\omega^2$
	(ε)	$\kappa^2 - \frac{1}{4}$	(στ)	23
	(ζ)	$9a^2 - 1$	(η)	$25 - 9y^2$
2.	(α)	$(4a - \boxed{1})(\boxed{4a} + 1) = \boxed{16a^2} - 1$	(β)	$(\psi - \boxed{8})(\boxed{\psi} + 8) = \psi^2 - \boxed{64}$
	(γ)	$(2\beta + \boxed{8\alpha^2})(\boxed{8\alpha^2} - \boxed{2\beta}) = 64\alpha^4 - \boxed{4\beta^2}$		
	(δ)	$(\frac{\psi}{3} - \boxed{5\alpha^3})(\frac{\psi}{3} + 5\alpha^3) = \frac{\psi^2}{9} - \boxed{25\alpha^6}$		
3.	(α)	$v^4 - 81$	(β)	$x^2 + 3x - 9$
	(γ)	$\alpha^4 - 2$	(δ)	$32x^2 + 16x + 3$

	(ε) $-2x^2 + 9$	(στ) $-x$
4.	(α) 10609	(β) 841
	(γ) 9999	(δ) 39996
7.	$E = 5x^2 - 2x$	
8.	$A = 20$	
9.	$A = 7$	

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ $(\alpha \pm \beta)^3$ Σελίδα 33

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$	(β) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$
	(γ) $\frac{x^3}{27} + x^2 + 9x + 27$	(δ) $\alpha^3 - 9\beta\alpha^2 + 27\alpha\beta^2 - 27\beta^3$
	(ε) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$	(στ) $x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
2.	(α) $x^3 - 3x^2 + 12x + 1$	(β) $-7x^3 - 5x^2 + x + 1$
	(γ) $5x^3 - 6x^2 + 3x - 8$	
4.	$a^2 + \beta^2 = 20$	$\alpha^3 + \beta^3 = 56$
5.	(α) 5	(β) 9
	(γ) 1	
6.	2015	

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ Σελίδα 34

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) $4x^2 + 20x + 25$	(β) $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$
	(γ) $y^4 - 4y^2 + 4$	(δ) $11 - 4\sqrt{7}$
	(ε) $a^2 + 6a + 9$	(στ) 4
	(ζ) $\beta^2 - \alpha^2$	(η) $y^4 - \omega^2$
	(θ) $a^3 - 15a^2 + 75a - 125$	(ι) $8 - 36\beta + 54\beta^2 - 27\beta^3$
	(ια) $\beta^8 - 1$	
2.	(α) $\boxed{x^2} + \boxed{2x\beta} + \beta^2 = (x + \boxed{\beta})^2$	
	(β) $25x^2 + 1 + \boxed{10x} = (\boxed{5x} + \boxed{1})^2$	
	(γ) $\boxed{16x^2} + \boxed{40xy} + 25y^2 = (4x + \boxed{5y})^2$	
	(δ) $(\boxed{2y} + 9x) \cdot (\boxed{2y} - \boxed{9x}) = 4y^2 - \boxed{81x^2}$	

$$(ε) \quad \alpha^2 - \frac{1}{4} = \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)$$

$$(στ) \quad \left(3\alpha^2 - \frac{\beta}{2\alpha} \right) \cdot \left(3\alpha^2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right) = 9\alpha^4 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$$

$$(ζ) \quad \omega^2 - \omega + \frac{1}{4} = \left(\omega - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$(η) \quad y^4 + 8y^2 + 16 = \left(y^2 + 4 \right)^2$$

$$(θ) \quad \alpha^2 + \frac{9}{\beta^2} + \frac{6\alpha}{\beta} = \left(\alpha + \frac{3}{\beta} \right)^2$$

$$(ι) \quad 27x^3 + 1 + 27x^2 + 9x = (3x + 1)^3$$

5. $A = 4029, B = 0,0321$

7. (α) $-2x^2 + 6x + 76$ (γ) -396

11. (α) -20 (β) -2

(γ) -4

12. $\sqrt{13}$

13. 18

14. (α) $x = \frac{1}{2}$ (β) $x = -2$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Σελίδα 37

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) 3

3. 17 ου βαθμού

4. $(\alpha + \beta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$
 $(\alpha + \beta)^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$
 $(\alpha - \beta)^6 = \alpha^6 - 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 - 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 - 6\alpha\beta^5 + \beta^6$

5. 15 βαθμοί

6. (α) 0,5 m (β) 89,6 μέτρα ανά λεπτό
 5,38 χιλιόμετρα ανά ώρα

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Παραγοντοποίηση – Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ				Σελίδα 47
Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	(α)	$x^2 - x - 2$	(β)	$5x^3 - 18x^2 - 38x - 12$
2.	(α)	ΟΧΙ	(β)	ΟΧΙ
			(γ)	ΝΑΙ
3.		Πολυώνυμο	Παράγοντας	Παράγοντας
		$-2x + x^3 - 3x^2 + 4$	$x - 1$	$x^2 - 2x - 4$
		$4x^3 - 22x^2 + 32x - 8$	$4x^2 - 14x + 4$	$x - 2$
		$x^2 - 4$	$x + 2$	$x - 2$
		$3a^3 - a^2\beta + 12a - 4\beta$	$a^2 + 4$	$3a - \beta$
4.	(α)	$3a^2\beta^2$	(β)	$4a^2x^2$
			(γ)	$3a^2(a - \beta)^2$
5.	(α)	$x(\boxed{x} + \boxed{3}) = x^2 + 3x$	(β)	$\boxed{3}(2y - 5) = 6y - 15$
	(γ)	$\boxed{3a}(x^2 - \boxed{2}) = 3ax^2 - 6a$	(δ)	$\boxed{3}(\boxed{x} - \boxed{5}) = 3x - 15$

ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ-ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ				Σελίδα 52
Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.		Πολυώνυμο	Κοινός Παράγοντας	Γινόμενο
		$a\beta + a\gamma$	a	$a(\beta + \gamma)$
		$7a\beta + 7a\gamma - 7a\delta$	$7a$	$7a(\beta + \gamma - \delta)$
		$3x - 3y + 6$	3	$3(x - y + 2)$
		$7x^3 - 14x^2$	$7x^2$	$7x^2(x - 2)$
2.	(α)	$7(x + y)$	(β)	$6(x - 1)$
	(δ)	$x^3(x - a)$	(ε)	$2x(4x - 3)$
	(ζ)	$5x(1 + 2x)$	(η)	$-2x(2x + 9x - 8)$
	(ι)	$\frac{2}{3}xy(1 - 2x)$	(θ)	$5a(3x + 6y - 2\omega)$
3.	(α)	$(x + y)(2x + 5y)$	(β)	$(a - \beta)(3 + \kappa)$
	(δ)	$(2x - 5)(4y - 9a)$	(ε)	$(a - 2\beta)(y + 5)$
	(ζ)	$(a + \beta)(a + \beta - 3\gamma)$	(η)	$(x - y)(a - 1)$
4.	(α)	$(\beta + 5)(a + 2)$	(β)	$(x - 3y)(\kappa + \mu)$
	(δ)	$(2a - 3\beta)(4a - 5)$	(ε)	$(x - 5)(y - 1)$
			(γ)	$(a - \beta)(\lambda a + \kappa\beta)$
			(στ)	$(2x + 3y)(ax - \beta y)$

5. (α) $A = 16$ (β) $B = 72$
 (γ) $\Gamma = 16$ (δ) $\Delta = 30$
7. (α) $\Delta = \frac{1}{2}v(v-3)$ (β) 35 διαγωνίσι
8. (α) $E = 2R^2(4-\pi)$ (β) $E = 4(x+y+4)$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ-ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΑΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΟ ΚΥΒΩΝ

Σελίδα 56

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $(x-2)(x+2)$ (β) $(x-7)(x+7)$
 (γ) $(3-x)(3+x)$ (δ) $(2x-3y)(2x+3y)$
 (ε) $(4\beta-9)(4\beta+9)$ (στ) $\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)$
 (ζ) $\left(\frac{1}{x}-7y\right)\left(\frac{1}{x}+7y\right)$ (η) $3\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$
 (θ) $2(y-4)(y+4)$ (ι) $(5x^2-1)(5x^2+1)$
 (ια) $(3x-2y)(3x+y)(9x^2+4y^2)$ (ιβ) $2(3\alpha^2-5\kappa^2)(3\alpha^2+5\kappa^2)$
2. (α) $(2x-1-y)(2x-1+y)$ (β) $(5x-1)(5x+3)$
 (γ) $(\kappa+\lambda)(3\kappa-\lambda)$ (δ) $(\alpha+2\beta-4)(\alpha+2\beta+4)$
 (ε) $(\omega-x-y)(\omega+x+y)$ (στ) $(\rho-\alpha-\beta)(\rho+\alpha+\beta)$
 (ζ) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(x+y)$ (η) $\beta(2\alpha-3\beta)$
3. (α) $(x+y)(x-y-5)$ (β) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-4)$
 (γ) $(y-3)(x-\kappa)(x+\kappa)$ (δ) $(y+4)^2(4-y)$
 (ε) $(x-3y)(\alpha+2x+6y)$ (στ) $(x-y)(2x+y)(2y-x)$
4. (α) $(x-2)(x^2+2x+4)$ (β) $(5+\omega)(25-5\omega+\omega^2)$
 (γ) $(\beta-\alpha^3)(\beta^2+\beta\alpha^3+\alpha^6)$ (δ) $\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta^2}{3}\right)\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha\beta^2}{6}+\frac{\beta^4}{9}\right)$
 (ε) $\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{x}{3}+x^2\right)$ (στ) $\alpha(x+y)(x^2-xy+y^2)$
 (ζ) $2(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$ (η) $3(x-2)(x^2+2x+4)$
 (θ) $(xy+1)(x^2y^2-xy+1)$
5. (α) $(a-\beta)(x+y)(x^2-xy+y^2)$ (β) $(x-y)(x^2+xy+y^2-2x-2y)$
 (γ) $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-3)$ (δ) $(\kappa-1)(\kappa^2+\kappa-1)$
6. (α) 199 (β) 16000
7. $2^2 = 4$

Δραστηριότητα Απαντήσεις

	$x^2 + (a + \beta)x + a\beta$	$a\beta$	$a + \beta$	a	β	$(x + a)(x + \beta)$
1.	$x^2 + 6x - 16$	$-2 \cdot 8$	$-2 + 8$	-2	8	$(x - 2) \cdot (x + 8)$
	$x^2 + 10x + 16$	$2 \cdot 8$	$2 + 8$	2	8	$(x + 2)(x + 8)$
	$x^2 - 6x - 16$	$-8 \cdot 2$	$-8 + 2$	-8	2	$(x - 8)(x + 2)$
	$x^2 - 10x + 16$	$(-8) \cdot (-2)$	$-8 - 2$	-8	-2	$(x - 8)(x - 2)$
	$x^2 - 8x + 16$	$(-4) \cdot (-4)$	$-4 - 4$	-4	-4	$(x - 4)^2$
	$x^2 + 17x + 16$	$16 \cdot 1$	$16 + 1$	16	1	$(x + 16)(x + 1)$
	3.	(α) $(x - 5)(x - 4)$	(β) $(y - 5)(y + 3)$	(γ) $(x + 2)(x + 3)$		
	(δ) $(y - 4)(y - 2)$	(ε) $(x - 3)^2$	(στ) $(a - 7)(a - 8)$			
	(ζ) $(\alpha - 9)(\alpha + 10)$	(η) $y(y - 15)(y + 10)$	(θ) $(x - 1)(x + 2)x^3$			
	(ι) $2(x - 5)(x - 2)$	(ια) $-(a + 1)(a + 4)$	(ιβ) $(y - 6)(y + 1)y^2$			
4.	(α) $(x - 9)^2$	(β) $(y - 8)^2$	(γ) $(5x + 3)^2$			
	(δ) $(2x + 3y)^2$	(ε) $x(x - 3)^2$	(στ) $(4\alpha^2 + 3\beta)^2$			
5.	$A = x^2(x - 2)(x + 2)$ $B = (2x - 1)(x - 2)(x + 2)$ $A - B = (x - 2)(x + 2)(x - 1)^2$					
6.	$\Pi = 4(5\alpha - 3\beta)$					
7.	(α) 1 000 000	(β) 1				
8.	(α) $(\alpha - \beta - \omega)(\alpha - \beta + \omega)$	(β) $(x - 4y + 1)(x + 4y - 1)$				
	(γ) $(x + 1)(a + x + 1)$	(δ) $(1 - a - \beta)(1 + \alpha + \beta)$				
9.	(α) $\kappa = \pm 6$	(β) $\kappa = \pm 7, \kappa = \pm 11$				
	(γ) $\kappa = 16, \kappa = 15, \kappa = 7, \kappa = 12$	(δ) $\kappa = 6, \kappa = 4$				

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1.	(α) $x = 0$ ή $x = -5$	(β) $x = 7$ ή $x = \frac{3}{2}$ ή $x = -5$
	(γ) $a = 0$ ή $a = 2$	(δ) $x = \frac{5}{2}$ ή $x = 1$ ή $x = 5$
	(ε) $x = 0$ ή $x = -2$ ή $x = 2$	(στ) $x = \frac{1}{5}$
	(ζ) $x = 2$ ή $x = 3$	(η) $x = -3$ ή $x = 3$ ή $x = \frac{1}{3}$
2.	(α) $\kappa = 0$ ή $\kappa = -5$ ή $\kappa = 5$	(β) $x = -3$ ή $x = 4$

(γ)	$\alpha = -7$ ή $\alpha = 5$	(δ)	$x = 0$ ή $x = 2$
(ε)	$y = 0$ ή $y = -2$ ή $y = 1$	(στ)	$a = 3$
(ζ)	$y = -6$ ή $y = 2$	(η)	$x = 0$ ή $x = 5$
3.	(α) $x = -1$ ή $x = \frac{1}{2}$	(β)	$x = -\frac{1}{5}$ ή $x = 1$
	(γ) $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ ή $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$	(δ)	Αδύνατη
	(ε) $x = -1$ ή $x = \frac{2}{3}$	(στ)	$x = \frac{1}{2}$ ή $x = 2$ ή $x = 3$ ή $x = 4$
4.	(α) Αδύνατη	(β)	$x = 2$
	(γ) $x = 0$ ή $x = 4$	(δ)	Αδύνατη
	(ε) $x = -2$ ή $x = -1$	(στ)	Αδύνατη
	(ζ) Αδύνατη	(η)	$x = \frac{-5-\sqrt{5}}{4}$ ή $x = \frac{-5+\sqrt{5}}{4}$
5.	(β) $x = -1$ ή $x = \frac{7}{2}$		
6.	Λάθος		
7.	$x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 2$ ή $x = 3$		
8.	$x = 4$		
9.	5,7 ή -5,-7		
10.	(α) $x = 10$ cm	(β)	$x = 7$ cm
11.	$x = 5$		
12.	(α) $t = 0$ ή 20 δευτερόλεπτα		

ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Σελίδα 74

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) $x \in \mathbb{R} - \{\pm 5\}$	(β) $y \in \mathbb{R} - \{-7, 2\}$	(γ) $a \in \mathbb{R} - \{3\}$
2.	Οι δ, ε.		
3.	Η γ.		
4.	(α) $\frac{3}{x^2}$	(β) $\frac{5\beta\gamma}{2a^2}$	(γ) $\frac{a}{2(a-6)}$
	(δ) $-\frac{1}{9x^3}$	(ε) $\frac{5}{a+7}$	(στ) $-\frac{x-2}{4(x+7)}$
5.	(α) $\frac{2}{a}$	(β) $\frac{a-\beta}{2}$	(γ) $\frac{1}{x+5}$
	(δ) $\frac{2(x+3)}{x-3}$	(ε) $-\frac{x-3}{x+2}$	(στ) $\frac{x+5}{a}$
6.	2019		

**ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ-ΔΙΑΙΡΕΣΗ
ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ**

Σελίδα 78

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. 25 km
Παριστάνει την απόσταση που καλύπτεται σε συγκεκριμένο χρόνο.

2. (α) 36 km/h (β) 20 m/s

3. (α) $\frac{5}{\omega^3}$ (β) $\frac{2}{x}$ (γ) $\frac{15(a+2)}{7a}$
 (δ) x (ε) $\frac{1}{x-3}$ (στ) $-\frac{2(y-3)}{y}$

4. (α) $\frac{a\beta}{2}$ (β) $\frac{\beta}{a}$ (γ) 1

 (δ) $\frac{2(x+5)}{x-15}$ (ε) $\frac{x^4}{3(x-1)}$ (στ) $\frac{x-1}{3}$

5. Γεωργία

6. 2013

7. (α) $\frac{8\gamma}{3}$ (β) 9

 (γ) $\frac{1}{2(x-1)}$ (δ) $\frac{3\alpha\beta}{\beta-\alpha}$

**ΠΡΟΣΘΕΣΗ-ΑΦΑΙΡΕΣΗ
ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ**

Σελίδα 84

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $\frac{17}{15x}$ (β) $\frac{11\alpha-7\beta}{11\beta}$ (γ) $\frac{5x+1}{x+5}$
 (δ) 3 (ε) $\frac{3(\beta^2+\beta+1)}{\beta^3}$ (στ) $\frac{9y+4x-6}{6xy}$

2. Το δ.

3. (α) $\frac{300}{v}$ (β) $\frac{100}{v}$
 (γ) $\frac{900}{v}$ (δ) $\frac{1300}{v}$ Τα λεπτά που χρειάζεται η κυρία Ελένη για να πληκτρολογήσει 1300 λέξεις.

4. (α) $\frac{1-x}{x(x+1)}$ (β) $\frac{x+8}{(x+2)(x-1)}$ (γ) $\frac{x+1}{x(x+2)}$
 (δ) $\frac{6}{1-3x}$ (ε) $\frac{4(x-3)}{x(x-4)(x+3)}$ (στ) $-\frac{1}{(a+2)}$

5. (α) Π.χ. $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x+2}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{1}{x+2}$
 (β) Π.χ. $\frac{-2}{x+2} + \frac{2}{x+2}$, $\frac{-x}{x+2} + \frac{x}{x+2}$

6. (α) $\frac{5}{6}$ (β) $\frac{11}{30}$
 (γ) $\frac{21}{110}$ (δ) $\frac{41}{420}$

7. (α) $-2\alpha\beta$ (β) 6 (γ) $\frac{x+1}{1-x}$
 (δ) $\frac{1}{3x+1}$ (ε) -1

8. (α) $x = 7$ (β) $x = 3$

 (γ) $y = -1$ ή $y = 5$ (δ) $x = 1$

 (ε) $x = -3$ ή $x = -2$ (στ) $x = 0$ ή $x = -2$

$(\zeta) \quad x = 8$

$(\eta) \quad y = -2$

9. $(\alpha) \quad 3)$

$(\beta) \quad 1)$

$(\gamma) \quad 2)$

$(\delta) \quad 4)$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

Σελίδα 86

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1. (α)	$3\kappa(\varphi + \omega)$
(β)	$5x(2y^2 + xy - 3x^2)$
(γ)	$(x - 5)(x - 2)$
(δ)	$(y - 4)(y + 3)$
(ϵ)	$4x(2x - y)$
$(\sigma\tau)$	$2x(x - 1)(x + 1)$
(ζ)	$(x + y)(x + 5)$
(η)	$y(y - 4)(y - 2)$
(θ)	$a(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
(ι)	$(4a - y)^2$
2. (α)	$(a - 2)(a + 4)$
(β)	$(x - y)(3 + x + y)$
(γ)	$3(3x - 2y)(x + 2y)$
(δ)	$4(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\beta - 1)(\beta + 1)$
(ϵ)	$(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3)$
$(\sigma\tau)$	$(x - 5)(x - 1)$
(ζ)	$(x + 1)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
(η)	$(y - 5 - x)(y - 5 + x)$
(θ)	$(a + 1)(a^2 + a + \beta)$
(ι)	$-(y + 1)(2x - y + 1)$
$(\iota\beta)$	$(x + 6)(x + ax - 6a - 2)$
3. (α)	$\frac{v(v-1)}{2}$
(β)	72 αγώνες
4. (α)	$(\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1)$
5. (α)	$-3yx^2$
(β)	$\frac{1}{x}$
(γ)	$\frac{x}{x+1}$
(δ)	$\frac{y-3}{2y-3}$
6. (α)	$\frac{1}{xy}$
(β)	$\frac{a}{\beta}$
(γ)	$\frac{1}{a}$
(δ)	$\frac{2y(y+3)}{y+2}$
(ϵ)	$\frac{y-2}{y+1}$
$(\sigma\tau)$	1
(ζ)	$\frac{a-2}{a-1}$
(η)	$\frac{2(y-1)(y+1)}{(x-1)(1+x)}$
(θ)	$\frac{y(x+3y)}{x(x-3y)}$
(ι)	$\frac{xy(y-x)}{x+y}$
7. (α)	$-\frac{1}{3\alpha}$
(β)	$\frac{1}{4}$

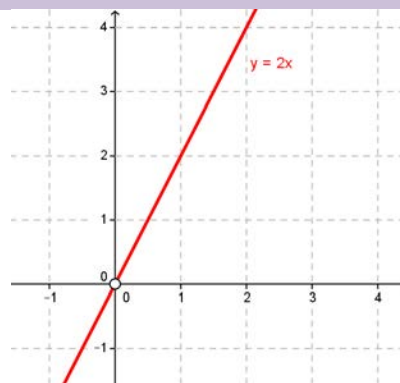
	(γ)	$\frac{3}{x+1}$	(δ)	$\frac{-6}{2y-1}$
	(ε)	$\frac{x}{2(x-3)}$	(στ)	$\frac{y(y-2)}{2(y-3)}$
8.	(α)	Το Β	(β)	$\frac{1}{4062240}$
9.	(α)	$\frac{3}{x+3}$	(β)	$\frac{1-x}{x+3}$
	(γ)	$\frac{x-3}{3(x+1)}$	(δ)	$\frac{x+3}{2x-2}$
10.	(α)	$\alpha = 2$ ή $\alpha = -8$	(β)	$x = 0$ ή $x = \frac{2}{5}$
	(γ)	$x = -5$	(δ)	$x = 0$ ή $x = 9$
	(ε)	$x = -4$ ή $x = 1$	(στ)	$\beta = \frac{1}{4}$
	(ζ)	$x = 0$ ή $x = -1$	(η)	$\alpha = -3$ ή $\alpha = 4$
11.		$\alpha = 8 \text{ cm}$ $\beta = 3 \text{ cm}$		
12.		$\alpha = 8 \text{ cm}$ $\beta = 6 \text{ cm}$		
13.		$x = 0$ ή $x = 4$ ή $x = -5$		
14.	(α)	$x = 2$	(β)	$x = \frac{1}{5}$
	(γ)	$x = 3$	(δ)	$x = \frac{1}{11}$
	(ε)	$x = -14$	(στ)	$y = -3$
	(ζ)	$\alpha = -10$	(η)	$y = 4$
15.		Το δεύτερο ισχύει για όλους τους αριθμούς εκτός από τον αριθμό -1		
16.		$\alpha = 3 \mu.$ $\beta = 4 \mu.$ $\gamma = 5 \mu.$		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

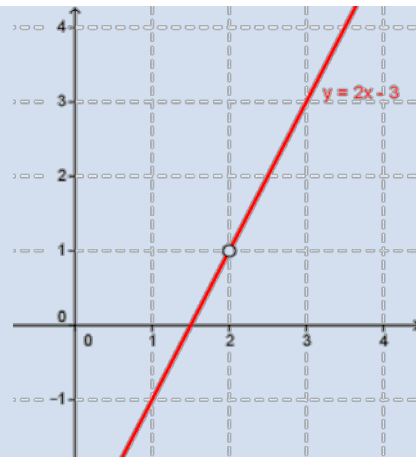
Σελίδα 90

Δραστηριότητα Απαντήσεις

2. (α) $y = 2x, x \neq 0$



(β) $y = 2x - 3, x \neq 2$



4. $\frac{x - 1}{x + 2010}$

6. 4 ώρες

7. (α)

v	Πλήθος δέντρων μηλιές	Πλήθος κυπαρισσιών
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

(β) $v = 8$

(γ) Οι μηλιές αυξάνονται γρηγορότερα.

8. (α) 14 mm

(β) 37 χρόνια

(γ) Σε 75 χρόνια από τώρα

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Σελίδα 103

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) Γωνίες: A, B, Γ και πλευρές: $AB, B\Gamma, A\Gamma$ (β) $AB = \gamma, B\Gamma = \alpha, A\Gamma = \beta$

(γ) $(\iota)\hat{B}$ $(\upsilon)\hat{A}$

(δ) $A\Gamma, \Gamma B$

(ε) \hat{A}, \hat{B}

2. (α) ΟΧΙ (β) ΝΑΙ
(γ) ΝΑΙ

3. $BΓ = 8, 9, 10, 11 \text{ cm}$

4. $EZ > ΔZ$

ΙΣΑ ΣΧΗΜΑΤΑ - ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σελίδα 107

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $\hat{B} = \hat{Δ}, BΓ = ΔE, \hat{E} = \hat{Γ}, \hat{A} = \hat{Ζ}$

4. (α) ΟΡΘΟΣ Ο ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ
(β) ΛΑΘΟΣ Ο ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

5. (α) $\hat{B} = \hat{Ζ}, \hat{\theta} = \hat{Δ}, \hat{Γ} = \hat{Η}, \hat{A} = \hat{E}$
 $AB = ZE, BΓ = ZH, ΔΓ = H\theta, AΔ = E\theta$
(β) $x = 20^\circ$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σελίδα 113

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $\hat{B} = \hat{E} = 50^\circ, \hat{A} = \hat{Ζ} = 100^\circ, \hat{Γ} = \hat{Δ} = 30^\circ$

2. (α) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (β) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (γ) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ
(δ) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (ε) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ

3. (α) $AB = ΔE$ (β) $\hat{A} = \hat{Δ}$ ή $EZ = BΓ$ (γ) $EZ = BΓ$ ή $\hat{A} = \hat{Δ}$
(δ) $\hat{A} = \hat{Δ}, AB = ΔE$ ή $\hat{Γ} = \hat{Ζ}, EZ = BΓ$ ή $AB = ΔE, EZ = BΓ$

4. (α) Γ-Π-Γ (β) Π-Γ-Π (γ) Π-Γ-Π

5. ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ ($AΓ \neq ΔZ$)

6. (α) Π-Π-Π (β) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (γ) ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΡΚΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ
(δ) ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΡΚΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (ε) Γ-Π-Γ (στ) ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΡΚΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

5.	(α) $\sigma\upsilon\nu K$ (γ) $\epsilon\phi M$	(β) $\eta\mu M$
6.	(α) 0,966 (γ) 0,866 (ε) 1,280	(β) 0,208 (δ) 0,921 (στ) 28,636
7.	(α) $x = 30^\circ$ (γ) 14° (ε) 72°	(β) $\delta = 73^\circ$ (δ) 60° (στ) 72°
8.	(α) 25° (γ) 80° (ε) 45°	(β) 40° (δ) $\sigma\upsilon\nu$ (στ) Π.χ. $\eta\mu 89^\circ = \sigma\upsilon\nu 1^\circ$
9.	Μόνο για ημιτονο και συνημίτονο ισχύει ο περιορισμός.	
10.	$\hat{\phi} = \hat{\theta}$	
11.	$\eta\mu\phi = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{3}{5}$, $\epsilon\phi\phi = \frac{4}{3}$	
13.	$\epsilon\phi\eta = 2$, $\epsilon\phi\theta = 1$, $\epsilon\phi\zeta = 3$ $\eta\mu\eta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\eta\mu\theta = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\epsilon\phi\zeta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$	

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ		Σελίδα 148
Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) $x \cong 50 m$ (γ) $x \cong 6 m$	(β) $x \cong 106 m$ (δ) $x \cong 10 m$
2.	29,7°	
3.	(α) $x \cong 7,5 cm$, $y \cong 10,9 cm$ (γ) $x \cong 9,8 cm$, $y \cong 5,6 cm$ (ε) $x \cong 45^\circ$, $y \cong 11,3 cm$	(β) $x \cong 15,6 cm$, $y = 9 cm$ (δ) $x \cong 47^\circ$, $y \cong 5,5 cm$ (στ) $x \cong 53^\circ$, $y = 8 cm$
4.	(α) $1 cm, \sqrt{3} cm, 2 cm$ (β) $1 cm, 1 cm, \sqrt{2} cm$	$0,5 cm, \frac{\sqrt{3}}{2} cm, 1 cm$ $\frac{1}{\sqrt{2}} cm, \frac{1}{\sqrt{2}} cm, 1 cm$
5.	$x \cong 3$	$y = 1$
6.	$E = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cong 10,8 cm^2$	
7.	$A\Delta \cong 7,5 m$, $A\Gamma \cong 8,8 m$	
8.	$\kappa \cong \frac{3}{2}$, $\mu \cong 6,4$, $\lambda = 18$	
9.	85,5 m	

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

Σελίδα 151

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΟΡΘΟ (β) ΟΡΘΟ
	(γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ
	(ε) ΛΑΘΟΣ (στ) ΟΡΘΟ
2.	$x = 20 \text{ cm}, y \cong 17,32 \text{ cm}$
3.	$x \cong 9 \text{ m}$
4.	ΟΡΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ
5.	$x \cong 255,3 \text{ m}$
6.	$\eta\mu B = \frac{5}{\sqrt{29}}, \eta\mu B = \frac{2}{\sqrt{29}}, \epsilon\phi B = \frac{5}{2}$
8.	(α) ΟΡΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ (β) ΟΡΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ
9.	$1,2 \text{ dm}, 3,8 \text{ dm}, 4 \text{ dm}$ $18^\circ, 72^\circ, 90^\circ$
10.	$\eta\mu B = \frac{3}{\sqrt{13}}, \eta\mu B = \frac{2}{\sqrt{13}}, \epsilon\phi B = \frac{3}{2}$
12.	$\Pi = 14,47 \text{ cm} \quad E = 12,12 \text{ cm}^2$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Σελίδα 154

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$4,07 \text{ m}$
2.	$ZM = 5,84 \text{ m}$
3.	$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\epsilon\phi 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$
4.	$x = 34,4^\circ$
6.	(α) $\omega = 45^\circ$ (β) $\omega = 60^\circ$
7.	ΟΡΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

\in	ανήκει
\notin	δεν ανήκει
\forall	για κάθε
\exists	υπάρχει
\cup	ένωση συνόλων
\cap	τομή συνόλων
\subset	γνήσιο υποσύνολο
\subseteq	υποσύνολο
\emptyset ή $\{ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
\neq	άνισο
\equiv	ταυτοτικά ίσο
\cong	κατά προσέγγιση ίσο
\mathbb{N}	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{N}_0	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{Z}	ακέραιοι αριθμοί $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
\mathbb{Z}^+	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{Z}^-	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
\mathbb{Q}	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta: \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0\}$
\mathbb{Q}^+	θετικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{Q}_0^+	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
\mathbb{Q}^-	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{R}	πραγματικοί αριθμοί
\Rightarrow	απλή συνεπαγωγή
\Leftrightarrow	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
\perp	κάθετες
\parallel	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή



Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)



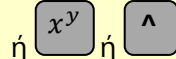
Υποδιαστολή



Εκθέτης δύναμης με βάση το 10



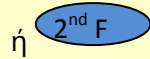
Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος



Δύναμη



Ποντίκι (Mouse)



Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί



Επανεκκίνηση υπολογιστικής



Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή



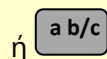
Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)



Εισαγωγή Προσήμου –



Κλάσμα



Μετατροπή Κλάσματος ↔ Δεκαδικό



Σβήσιμο μνήμης



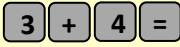

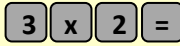
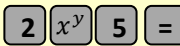
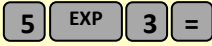

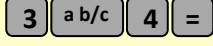

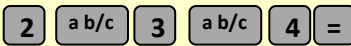
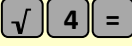
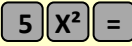
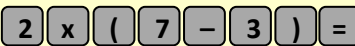
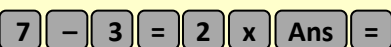
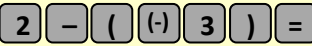
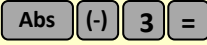
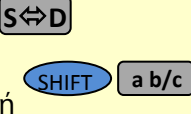


Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη



Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη



Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3 + 4$		3+4 7
$2,34 - 1,1$		2.34 - 1.1 1.24
$3 \cdot 2$		3X2 6
2^5		2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$		5E3 ή 5X103 5000
$\frac{3}{4}$	 ή 	$\frac{3}{4}$ 3J4
$2\frac{3}{4}$	 ή 	$2\frac{3}{4}$ 2 J 3 J 4
$\sqrt{4}$		$\sqrt{4}$ 2
5^2		5^2 25
$2 \cdot (7 - 3)$		2X(7 - 3) 8
$2 \cdot (7 - 3)$		2XAns 8
$2 - (-3)$		$2 - (-3)$ 5
$ -3 $		$ -3 $ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης		$\frac{1}{4}$
$9 - 6 : 2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 	$9 - 6 : 2 M +$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9 - 6 : 2) - 6 : (9 - 6 : 2)$		$3 X M - 6 : M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°-89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290

