

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Β' Τεύχος

Αναθεωρημένη Έκδοση

ΠΑΙΔΑΓΟΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Β' τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Γ΄ Γυμνασίου, Β΄ Τεύχος

- Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Λοϊζιάς Σωτήρης
Ματθαίου Κυριάκος
Μαυροκορδάτου Μερόπη
Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας
- Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
- Εποπτεία: Καλλεπίτη Ευτυχία, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Φιλίππου Ανδρέας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Γιασουμής Νικόλας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
- Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
- Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
- Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2012

Β΄ έκδοση 2013

Γ΄ έκδοση 2014

Δ΄ έκδοση 2015

Ε΄ έκδοση 2016

Εκτύπωση: Cassoulides Masterprinters

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-016-7



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϋδεάζονται ως προς το τι «... θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει ...», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δρ Κυπριανός Δ Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

08/01/2016

5. Ευθεία – Γραμμικά Συστήματα

▪ Απόσταση Δύο Σημείων, Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος	10
▪ Σχετικές Θέσεις Δύο Ευθειών	17
▪ Γραφική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους	23
▪ Αλγεβρική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους	30

6. Στατιστική

▪ Δειγματοληψία – Εκτίμηση – Γενικεύσεις για τον Πληθυσμό	50
---	----

7. Στερεομετρία

▪ Ευθείες και Επίπεδα στον Χώρο – Μέτρηση Χώρου	68
▪ Εμβαδόν και Όγκος Ορθού Πρίσματος	75
▪ Εμβαδόν και Όγκος Κανονικής Τετραγωνικής Πυραμίδας	84
▪ Εμβαδόν και Όγκος Κυλίνδρου	90
▪ Εμβαδόν και Όγκος Κώνου	95
▪ Εμβαδόν και Όγκος Σφαίρας	100

8. Παραβολή

▪ Η Παραβολή $y = ax^2$	118
-------------------------	-----

9. Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

▪ Παραλληλόγραμμο	138
▪ Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο	146
▪ Ρόμβος	151
▪ Τετράγωνο	156
▪ Ειδικά Θεωρήματα στα Τρίγωνα	161
▪ Τραπεζίο	170

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

183

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.
- Να βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$, ενός ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.
- Να υπολογίζουμε την κλίση ευθείας που δίνεται σε κανονική μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, $B \neq 0$.
- Να βρίσκουμε τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$.
- Να διερευνούμε πότε ένα γραμμικό σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους έχει μοναδική λύση, πότε είναι αδύνατο και πότε έχει άπειρες λύσεις, χωρίς κατ' ανάγκη, να επιλυθεί.
- Να χρησιμοποιούμε διάφορες αλγεβρικές μεθόδους, όπως τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, για την αλγεβρική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους (x, y) .



Λύση Προβλήματος

ΠΩΛΗΣΗ ΕΦΗΜΕΡΙΔΩΝ

Στη Ζέτλαντ δύο εφημερίδες προτίθενται να προσλάβουν πωλητές. Οι πιο κάτω ανακοινώσεις παρουσιάζουν τον τρόπο αμοιβής των πωλητών της κάθε εφημερίδας.

ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ ΑΣΤΕΡΙ

**ΧΡΕΙΑΖΕΣΑΙ
ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟ
ΕΙΣΟΔΗΜΑ;**

**ΓΙΝΕ ΠΩΛΗΤΗΣ ΤΗΣ
ΕΦΗΜΕΡΙΔΑΣ ΜΑΣ**

*Αμοιβή:
0,20 ζετς για κάθε εφημερίδα
για τα πρώτα 240 αντίτυπα
που πωλείς σε μία εβδομάδα,
και επιπλέον 0,40 ζετς για
κάθε επιπρόσθετο αντίτυπο
εφημερίδας που πωλείς.*

ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ ΚΑΛΗΜΕΡΑ

**ΚΑΛΑ ΑΜΕΙΒΟΜΕΝΗ
ΕΡΓΑΣΙΑ ΠΟΥ ΑΠΑΙΤΕΙ
ΛΙΓΟ ΧΡΟΝΟ!**

*Αμοιβή:
Όταν πωλείς την εφημερίδα
«Καλημέρα» κερδίζεις 60
ζετς την εβδομάδα και
επιπλέον 0,05 ζετς για κάθε
αντίτυπο εφημερίδας που
πωλείς.*

Ερώτηση 1:

Ο Φάνης πωλεί κατά μέσο όρο 350 αντίτυπα της εφημερίδας *Αστέρι* κάθε εβδομάδα.

Ποια είναι η μέση εβδομαδιαία αμοιβή του Φάνη;

Ερώτηση 2:

Η Χριστίνα είναι πωλήτρια της εφημερίδας *Καλημέρα*. Μια εβδομάδα πληρώθηκε 74 ζετς.

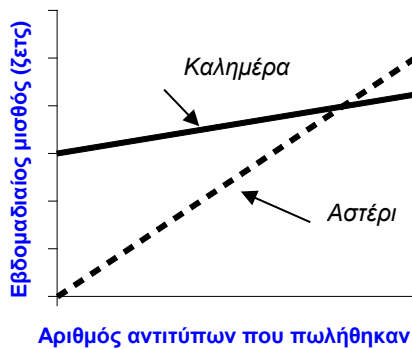
Πόσες εφημερίδες πώλησε εκείνη την εβδομάδα;

Ερώτηση 3:

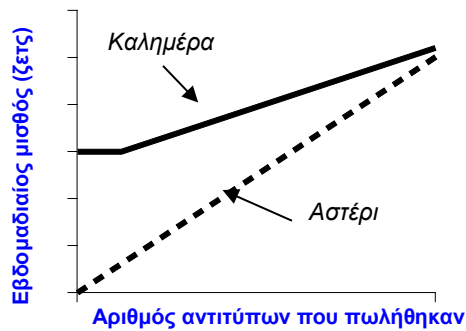
Ο Γιάννης αποφάσισε να υποβάλει αίτηση, για να εργαστεί ως πωλητής σε μια εφημερίδα. Πρέπει να επιλέξει κατά πόσο θα εργαστεί στην εφημερίδα *Αστέρι* ή στην εφημερίδα *Καλημέρα*.

Ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις αναπαριστά ορθά πώς αμείβουν οι δύο εφημερίδες τους πωλητές τους; Να βάλετε σε κύκλο Α, Β, Γ ή Δ.

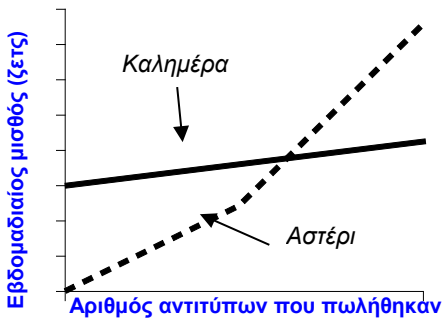
A



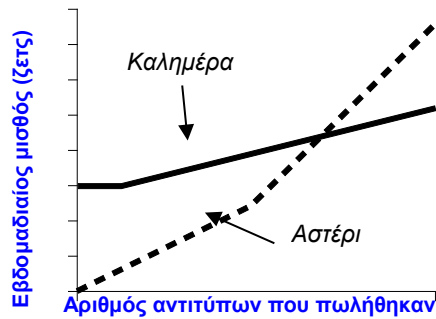
B



Γ



Δ



Pisa 2012

Απόσταση δύο Σημείων – Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος

Διερεύνηση

Τρεις φίλοι, ο Στέφανος, η Ελίνα και ο Άγγελος, λαμβάνουν μέρος στο παιχνίδι κρυμμένου θησαυρού που διοργανώνει το καλοκαιρινό σχολείο τους. Κερδίζει η ομάδα που θα εντοπίσει πρώτη και με τη μεγαλύτερη ακρίβεια το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο θησαυρός.

Κάθε ομάδα έχει πάρει έναν χάρτη με τις ακόλουθες οδηγίες:

Θα ψάξετε να βρείτε στον χώρο της κατασκήνωσης την πιο μεγάλη φοινικιά. Με τη βοήθεια της πυξίδας σας, πρέπει να εντοπίσετε τα σημεία A και B . Ο θησαυρός βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB . Το σημείο A βρίσκεται στα 2 m ανατολικά και 1 m βόρεια από τη μεγάλη φοινικιά, ενώ το σημείο B βρίσκεται στα 6 m ανατολικά και 3 m βόρεια από τη φοινικιά.



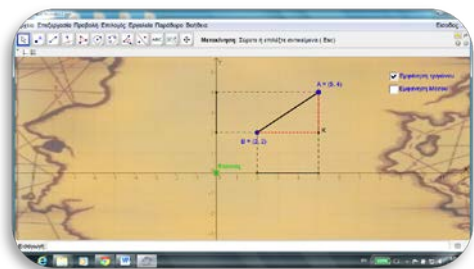
- ✓ Ποιους τρόπους εισηγείστε στα παιδιά έτσι ώστε να βρουν το σημείο του θησαυρού με ακρίβεια και σε σύντομο χρόνο, για να κερδίσουν το παιχνίδι;

Ο Άγγελος εισηγείται ότι πρώτα πρέπει να εντοπίσουν τα δύο σημεία και ακολούθως να στερεώσουν στα σημεία αυτά ένα σχοινί. Να μετρήσουν το σχοινί και ακολούθως να βρουν το μέσο του.

- ✓ Ποιο πρέπει να είναι το μήκος του σχοινιού, που πρέπει να έχουν μαζί τους, ώστε να είναι εφικτή η πιο πάνω μέθοδος;

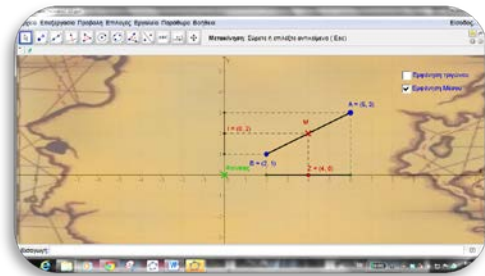


Να ανοίξετε το αρχείο «[C_En6_mesotmimatos.gb](#)». Να μετακινήσετε τα σημεία A και B σε διάφορες θέσεις και να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB σε κάθε περίπτωση. Να εξηγήσετε τον



τρόπο που εργαστήκατε.

- ✓ Να βρείτε έναν τύπο που να υπολογίζει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB σε συνάρτηση των συντεταγμένων των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.
- ✓ Να εξετάσετε πώς διαφοροποιείται ο πιο πάνω τύπος, όταν το AB είναι παράλληλο με έναν από τους άξονες.
- ✓ Να εξετάσετε άλλους τρόπους με τους οποίους τα παιδιά θα μπορούσαν να εντοπίσουν το μέσο χωρίς τη βοήθεια του σχοινοιού.
- ✓ Με τη βοήθεια του πιο πάνω εφαρμογιδίου, να βρείτε τη σχέση που έχουν οι συντεταγμένες του μέσου M με τις συντεταγμένες των σημείων A και B . Να μετακινήσετε τα άκρα A και B του τμήματος AB και να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας.



- ✓ Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Μαθαίνω

- **Απόσταση μεταξύ δύο σημείων A και B**
Η απόσταση δύο σημείων του επιπέδου $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο: $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Παράδειγμα:

Η απόσταση μεταξύ των σημείων $A(-2, 1)$ και $B(2, 4)$ είναι $(AB) = \sqrt{(2 + 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Παρατηρήσεις

- *Δύο σημεία με την ίδια τετμημένη έχουν απόσταση ίση με $|y_2 - y_1|$.
(το ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο με τον άξονα των τεταγμένων)*

- Δύο σημεία με την ίδια τεταγμένη έχουν απόσταση ίση με $|x_2 - x_1|$.
(το ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο με τον άξονα των τετμημένων)

Παράδειγμα:

Η απόσταση μεταξύ των σημείων $A(-2,1)$ και $B(-2,4)$ είναι $(AB) = |4 - 1| = 3$.

▪ Μέσο ευθύγραμμου τμήματος AB

Αν M είναι το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε οι συντεταγμένες του $M(x_M, y_M)$ δίνονται από τις σχέσεις: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Παράδειγμα:

Το μέσο M ενός ευθύγραμμου τμήματος AB με άκρα $A(-2,1)$ και $B(2,4)$ έχει συντεταγμένες

$$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0, \quad y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

Άρα, το μέσο M είναι το σημείο $M(0, \frac{5}{2})$.

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων:

(α) $O(0,0)$ και $A(3,-4)$ (β) $A(-1,1)$ και $B(3,-4)$

(γ) $A(4,-2)$ και $B(-2,-2)$ (δ) $A(3,2)$ και $B(3,4)$

Λύση:

Για να υπολογίσουμε το μήκος εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(α) $(OA) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

(β) $(AB) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \cong 6,4$

(γ) $(AB) = |-2 - 4| = |-6| = 6$

(δ) $(AB) = |4 - 2| = |2| = 2$

2. Δίνονται τα σημεία $A(2,5)$ και $B(-2,3)$. Να βρείτε το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Λύση

$$A(2,5) \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 5 \quad \text{και} \quad B(-2,3) \Rightarrow x_2 = -2, y_2 = 3$$

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_1+x_2}{2} & y_M &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ &= \frac{2+(-2)}{2} & &= \frac{5+3}{2} \\ &= 0, & &= 4 \end{aligned}$$

Άρα, το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος είναι το σημείο $M(0,4)$.

3. Το $M(3,1)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(2,6)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

Λύση:

$$\Gamma(2,6) \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 6 \quad \text{και}$$

$$M(3,1) \Rightarrow x_M = 3, y_M = 1$$

$$\text{Ισχύει: } x_M = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad \text{Ισχύει: } y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα,} \quad 3 &= \frac{2+x_2}{2} & \text{Άρα,} \quad 1 &= \frac{6+y_2}{2} \\ \Rightarrow 2+x_2 &= 6 & \Rightarrow 6+y_2 &= 2 \\ \Rightarrow x_2 &= 4 & \Rightarrow y_2 &= -4 \end{aligned}$$

Άρα, το σημείο Δ είναι $\Delta(4, -4)$.

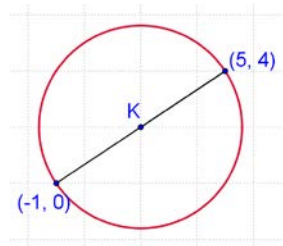
Δραστηριότητες



- Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων A και B και το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
(α) $A(1,0)$ και $B(1,-4)$ (β) $A(1,-1)$ και $B(-7,5)$
(γ) $A(-3,-2)$ και $B(2,-14)$ (δ) $A(3,1)$ και $B(-3,-1)$
- Να δώσετε ένα παράδειγμα ευθύγραμμου τμήματος με μέσο το σημείο $(0,0)$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του άκρου Γ ενός ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ που έχει άκρο $\Delta(0,7)$ και μέσο $M(5,2)$.

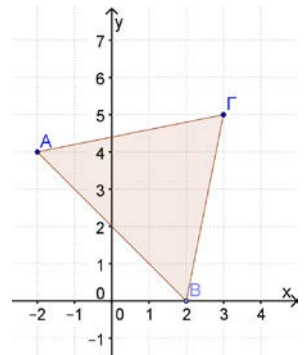
4. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β , αν η απόσταση των σημείων με συντεταγμένες $(3,2)$ και $(\beta, -1)$ είναι 5 μονάδες.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K . Να βρείτε:
 (α) τις συντεταγμένες του κέντρου K
 (β) το μήκος του κύκλου



6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο διαδοχικές κορυφές έχουν συντεταγμένες $A(3,7)$, $B(-3,4)$.

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
 (α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.
 (γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΓM .

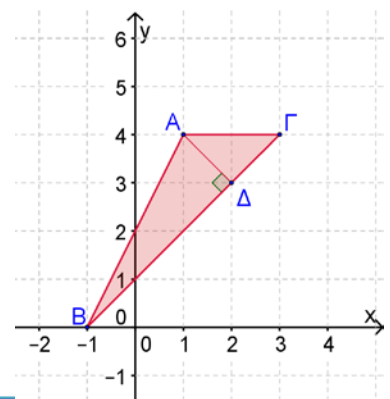


8. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία $A(2,5)$, $B(5,1)$, $\Gamma(2,-3)$, $\Delta(-1,1)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

9. Να αποδείξετε ότι:
 (α) τα σημεία $A(1,2)$, $B(4,-2)$ και $\Gamma(-3,5)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου
 (β) τα σημεία $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(4,2)$ είναι κορυφές ορθογώνιου τριγώνου

10. Να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(2,5)$ και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$, όταν $K(3,1)$ και $\Lambda(-1,3)$.

11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
 (α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β) Αν το $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.



(Οι απαντήσεις να δοθούν με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου)

ΕΥΘΕΙΑ

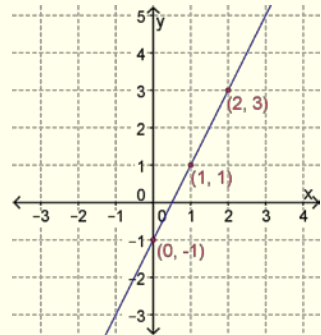
Έχουμε μάθει ...

- Μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax + \beta$ ή $y = ax + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$, ονομάζεται γραμμική συνάρτηση και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή.

- Ο τύπος $y = ax + \beta$ ονομάζεται εξίσωση της ευθείας.

Παράδειγμα:

Η γραφική παράσταση της $y = 2x - 1$ παριστάνεται με ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται δίπλα.



- Αν ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας $y = ax + \beta$, τότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Αντίστροφα, αν οι συντεταγμένες ενός σημείου $A(x_1, y_1)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $y = ax + \beta$, τότε το σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας.

Παράδειγμα:

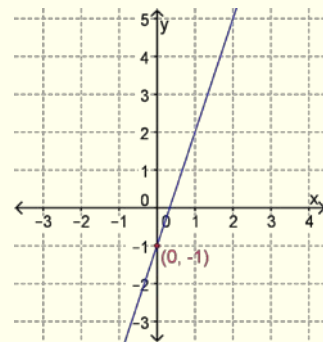
Το σημείο $(-1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $y = -2x$ αφού επαληθεύει την εξίσωσή της.

$$\begin{aligned}y &= -2x \\ 2 &= -2 \cdot (-1) \\ 2 &= 2\end{aligned}$$

- Η ευθεία $y = ax + \beta$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0, \beta)$.

Παράδειγμα:

Η ευθεία $y = 3x - 1$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων y στο σημείο $(0, -1)$.



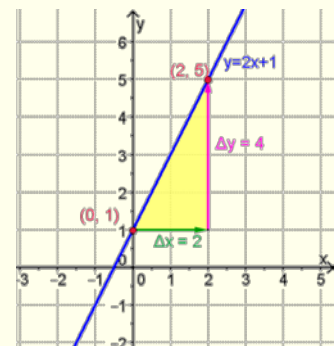
- Κλίση** μιας ευθείας είναι ο λόγος της κατακόρυφης μεταβολής Δy , (από ένα σημείο A σε ένα σημείο B της ευθείας), προς την οριζόντια μεταβολή Δx . Ο λόγος αυτός ονομάζεται και **ρυθμός μεταβολής**.

Δηλαδή η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι ίση με $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Παράδειγμα:

Για την ευθεία $y = 2x + 1$ έχουμε:

$$\text{Άρα, } \lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2.$$



- Αν η εξίσωση της ευθείας δίνεται στη μορφή $y = ax + \beta$, τότε η κλίση της είναι ίση με τον συντελεστή του x , δηλαδή $\lambda = a$.

Παράδειγμα:

Η κλίση της ευθείας $y = 2x + 1$ είναι $\lambda = 2$.

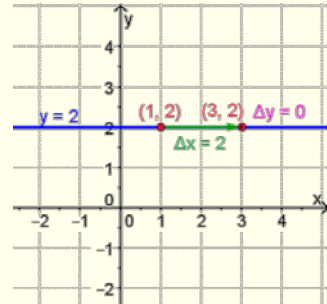
- Η γραφική παράσταση της $y = \beta$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των y στο σημείο $(0, \beta)$.

- Η κλίση κάθε ευθείας της μορφής $y = \beta$ είναι $\lambda = 0$.

Παράδειγμα:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2$ είναι κάθετη στον άξονα των y στο σημείο $(0, 2)$.

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{2} = 0$$



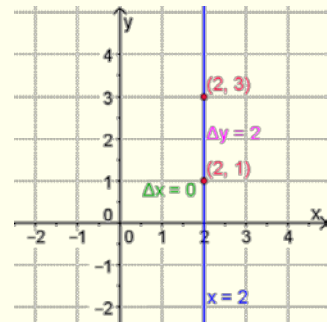
- Η γραφική παράσταση της ευθείας $x = \kappa$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των x στο σημείο $(\kappa, 0)$.

- Η κλίση κάθε ευθείας της μορφής $x = \kappa$ **δεν ορίζεται**.

Παράδειγμα:

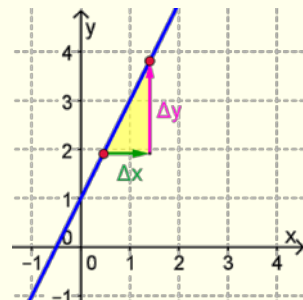
Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $x = 2$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(2, 0)$.

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{0} \text{ ΔΕΝ ορίζεται.}$$

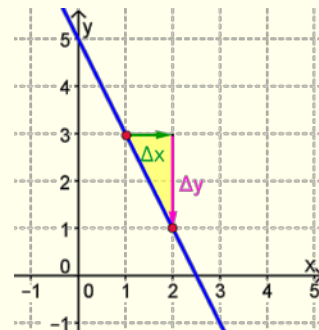


Παρατήρηση:

- Αν $a > 0$, δηλαδή η κλίση $\lambda > 0$, τότε η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή:



- Αν $a < 0$, δηλαδή η κλίση $\lambda < 0$, τότε η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή:

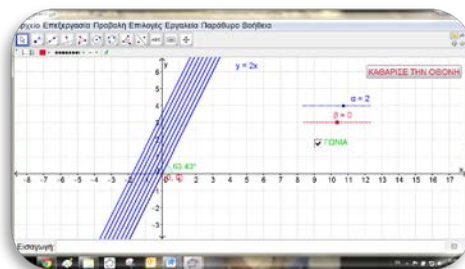


Σχετικές Θέσεις Δύο Ευθειών

Διερεύνηση



Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «C_En6_y=ax+b.ggb».



- ✓ Να επιλέξετε τον δρομέα a και να δώσετε μια τυχαία τιμή. Ακολουθώντας να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα β . Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να επιλέξετε τον δρομέα β και να δώσετε μια τυχαία τιμή. Ακολουθώντας να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα a . Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία για άλλες τιμές των a και β .

Μαθαίνω

- Αν οι ευθείες $\epsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\epsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$ έχουν διαφορετικές κλίσεις ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) τότε οι ευθείες **τέμνονται**. Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση.

Άρα,

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow \epsilon_1 \text{ και } \epsilon_2 \text{ τέμνονται}$$

Παράδειγμα:

Οι ευθείες $\epsilon_1: y = 5x - 2$ και

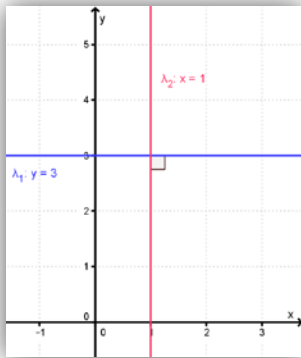
$\epsilon_2: y = -3x + 1$

Έχουν κλίσεις:

$\lambda_1 = 5$ και

$\lambda_2 = -3$, αντίστοιχα.

Άρα, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow \epsilon_1$ και ϵ_2 τέμνονται.



- Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες, τότε οι κλίσεις τους έχουν γινόμενο ίσο με -1 .

Ισχύει και το αντίστροφο:

Αν οι κλίσεις των ευθειών έχουν γινόμενο -1 , τότε οι ευθείες είναι κάθετες.

Δηλαδή:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \quad \text{Συνθήκη Καθετότητας δύο ευθειών}$$

Παράδειγμα:

Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x - 2$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$ έχουν κλίσεις $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ αντίστοιχα.

Άρα:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \text{ και } \varepsilon_2 \text{ τέμνονται κάθετα}$$

- Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$ έχουν ίσες κλίσεις ($\lambda_1 = \lambda_2$) και διαφορετικές σταθερές β_1 και β_2 τότε οι ευθείες είναι **παράλληλες**. Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση.

Άρα,

$$\begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2, \\ \beta_1 \neq \beta_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \quad \text{Συνθήκη Παραλληλίας δύο ευθειών}$$

Παράδειγμα:

Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 5x - 2$ και $\varepsilon_2: y = 5x + 1$

Έχουν: $\lambda_1 = 5, \beta_1 = -2$ και $\lambda_2 = 5, \beta_2 = 1$ αντίστοιχα.

Άρα, $\lambda_1 = \lambda_2, \beta_1 \neq \beta_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

Σημείωση:

Σημείωση:

Οι ευθείες:

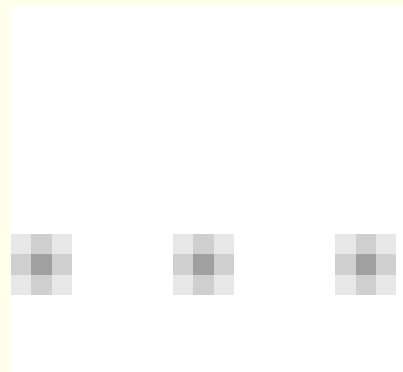
$\varepsilon_1: x = \beta, \beta \in \mathbb{R}$ και

$\varepsilon_2: x = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ είναι επίσης παράλληλες.

Παράδειγμα:

Οι ευθείες $\varepsilon_1: x = 3$ και

$\varepsilon_2: x = 1$ είναι παράλληλες.



- Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$ έχουν ίσες κλίσεις ($\lambda_1 = \lambda_2$) και ίσες σταθερές β_1 και β_2 , τότε οι ευθείες **ταυτίζονται**. Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση.

Άρα,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2, \\ \beta_1 = \beta_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$$

Ο συμβολισμός $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$ σημαίνει ότι οι δύο ευθείες ταυτίζονται.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $\varepsilon_1: y = 2x + 4$ και $\varepsilon_2: 6x + 3y = 2$ είναι παράλληλες ή κάθετες.

Λύση:

Εξετάζουμε τις κλίσεις των δύο ευθειών:

Η ε_1 έχει κλίση $\lambda_1 = 2$.

Η ε_2 έχει κλίση $\lambda_2 = -\frac{6}{3} = -2$.

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Άρα, οι ευθείες δεν είναι παράλληλες (τέμνονται).

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \lambda_2 = -4 \neq -1$. Άρα, οι ευθείες δεν τέμνονται κάθετα.

2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\alpha - 3)x + 3$ και $\varepsilon_2: y = 2x - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή του α , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

Λύση:

Η ε_1 έχει κλίση $\lambda_1 = \alpha - 3$ και $\beta_1 = 3$.

Η ε_2 έχει κλίση $\lambda_2 = 2$ και $\beta_2 = -1$.

Ισχύει $\beta_1 \neq \beta_2$. Άρα, αρκεί οι ευθείες να έχουν τις ίδιες κλίσεις ώστε να είναι παράλληλες:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 \\ \Rightarrow \alpha - 3 &= 2 \\ \Rightarrow \alpha &= 5 \end{aligned}$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο $A(-1,1)$ και είναι:
 - (α) παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_1: 2x - 3y - 5 = 0$
 - (β) κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 3$

Λύση:

(α) Η ζητούμενη ευθεία ε έχει εξίσωση $y = ax + \beta$ με κλίση $\lambda = a$.

Η ευθεία $\varepsilon_1: 2x - 3y - 5 = 0$ έχει κλίση $\lambda_1 = \frac{2}{3}$.

Οι ευθείες ε και ε_1 είναι παράλληλες. Άρα, $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$
επομένως $\varepsilon: y = \frac{2}{3}x + \beta$.

Το σημείο $A(-1,1)$ ανήκει στην ευθεία ε . Επομένως, οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

$$\begin{aligned} \text{Αντικαθιστούμε: } x = -1, y = 1 \text{ στην } y &= \frac{2}{3}x + \beta \\ \Rightarrow 1 &= \frac{2}{3}(-1) + \beta \\ \Rightarrow \beta &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση } y &= \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow 3y &= 2x + 5 \\ \Leftrightarrow 2x - 3y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

(β) Η ζητούμενη ευθεία ε έχει εξίσωση $y = ax + \beta$ με κλίση $\lambda = a$.

Η ευθεία $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 3$ έχει κλίση $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Οι ευθείες ε και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους. Άρα,
 $\lambda \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \lambda = 2$ επομένως $\varepsilon: y = 2x + \beta$.

Το σημείο $A(-1,1)$ ανήκει στην ευθεία ε . Επομένως, οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

$$\begin{aligned} \text{Αντικαθιστούμε: } x = -1, y = 1 \text{ στην } y &= 2x + \beta \\ \Rightarrow 1 &= 2(-1) + \beta \\ \Rightarrow \beta &= 3 \end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = 2x + 3$

Δραστηριότητες



1. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση ευθείας από τη στήλη A με την κλίση της στη στήλη B:

A	
(α)	$y = 3x + 1$
(β)	$y - \frac{1}{3}x = 1$
(γ)	$3x + y = +1$
(δ)	$x + 3y + 1 = 0$
(ε)	$2x - y - 1 = 0$
(στ)	$5x - y = 0$
(ζ)	$x + y = 5$
(η)	$y = -4$
(θ)	$x = 5$

B	
(i)	$\lambda = 2$
(ii)	$\lambda = 0$
(iii)	$\lambda = -1$
(iv)	$\lambda = 4$
(v)	$\lambda = -3$
(vi)	$\lambda = \frac{1}{3}$
(vii)	$\lambda = -\frac{1}{3}$
(viii)	$\lambda = 5$
(ix)	$\lambda = 3$
(x)	Δεν ορίζεται κλίση
(xi)	$\lambda = 1$

2. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2 στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $\varepsilon_1: 2x - 4y = 4$ (β) $\varepsilon_1: y = -2x + \frac{1}{3}$ (γ) $\varepsilon_1: y = 4$
 $\varepsilon_2: -2x + 4y = 2$ $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 3$ $\varepsilon_2: y = -2$

(δ) $\varepsilon_1: 3x + y = 5$ (ε) $\varepsilon_1: x = 6$
 $\varepsilon_2: 6x + 2y = 10$ $\varepsilon_2: x = 2$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\varepsilon_1: 4x - 3y = 2$ (β) $\varepsilon_1: 2x + 4y = 3$ (γ) $\varepsilon_1: 4x + 2y = 3$
 $\varepsilon_2: 4x + 3y = -7$ $\varepsilon_2: y = \frac{1}{2}x - 7$ $\varepsilon_2: y = \frac{1}{2}x - 7$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

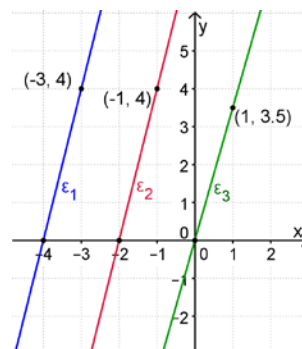
(α) $A(3, -1)$ (β) $A(3, -1)$ (γ) $A(3, -1)$
 $\varepsilon_1: y = 3x - 1$ $\varepsilon_1: y = 3$ $\varepsilon_1: x = 3$

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη με την ευθεία ε_1 σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $A(0,0)$ (β) $A(2,2)$ (γ) $A(0, -5)$
 $\varepsilon_1: 2x + y = 3$ $\varepsilon_1: 3x - 2y - 5 = 0$ $\varepsilon_1: y = 2x - \frac{1}{2}$
(δ) $A(2, -2)$ (ε) $A(2, -2)$
 $\varepsilon_1: x = 0$ $\varepsilon_1: y = 5$

6. Να υπολογίσετε την τιμή του α , ώστε η ευθεία $y = (\alpha + 1)x - 9$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x + 3y = 1$.

7. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 του διπλανού σχήματος.



8. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η ευθεία $(a - 2)x + y = 5$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x - 7$.

9. Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας που:

(α) είναι παράλληλη με την $y = 3x - 5$

(β) είναι παράλληλη με την $y + x = 3$

(γ) τέμνει την $y = 3x$

(δ) τέμνει την $y - x = 1$

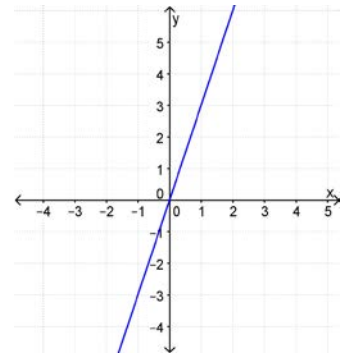
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-3,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,2)$.

(α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.

(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

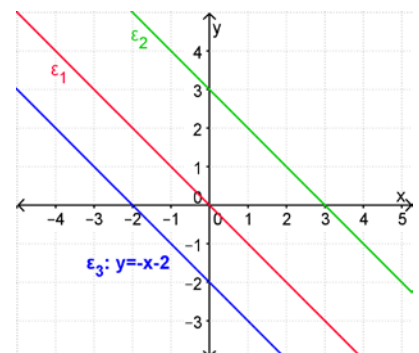
(γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους BD .

11. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας με τύπο $y = 3x$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση των ευθειών με τύπους $y = 3x + 2$ και $y = 3x - 1$.



12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την $y = 3x$ και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, -3)$.

13. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 του διπλανού σχήματος είναι παράλληλες. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.



Γραφική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους

Έχουμε μάθει ...

- Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y** .

Παράδειγμα:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 3 \\ x + y = 6 \end{array} \right\} \text{Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων} \\ \text{με δύο αγνώστους } x, y.$$

- **Λύση** γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος τιμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του.

Παράδειγμα:

Η λύση του γραμμικού συστήματος $\left. \begin{array}{l} y = 2x + 3 \\ x + y = 6 \end{array} \right\}$ είναι το ζεύγος $(1, 5)$ διότι επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, αφού: $5 = 2 \cdot 1 + 3$ και $1 + 5 = 6$

- Για τη **γραφική λύση** ενός γραμμικού συστήματος εργαζόμαστε ως εξής:
 - Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που αντιστοιχούν στις δύο γραμμικές εξισώσεις.
 - Αν οι ευθείες τέμνονται, προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους (x, y) . Το ζεύγος (x, y) είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα:

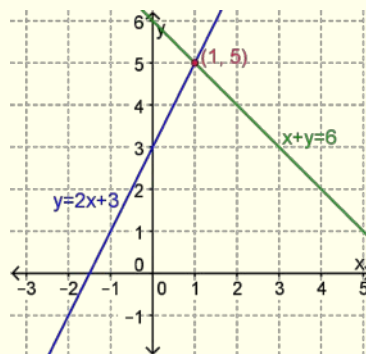
$$\text{Για το σύστημα } \left. \begin{array}{l} y = 2x + 3 \\ x + y = 6 \end{array} \right\}$$

κατασκευάζουμε τις ευθείες:

$$ε_1: y = 2x + 3 \text{ και}$$

$$ε_2: y = 6 - x.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο τομής τους, που είναι το $(1, 5)$. Η λύση του συστήματος είναι $x = 1, y = 5$.



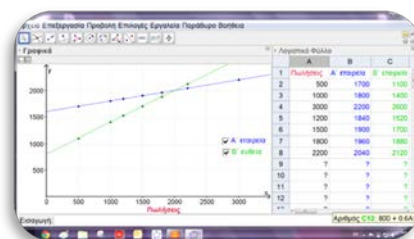
Διερεύνηση (1)

Ο Μιχάλης εργάζεται σε μία εταιρεία ως διαφημιστής. Το συμβόλαιό του προνοεί βασικό μισθό €1600 και 20% προμήθεια στις πωλήσεις που κάνει κάθε μήνα. Μια δεύτερη εταιρεία του προσφέρει βασικό μισθό €800 και 60% προμήθεια στις πωλήσεις του μήνα.

- ✓ Ποιο συμβόλαιο νομίζετε ότι συμφέρει στον Μιχάλη;
- ✓ Για ποιο ποσό πωλήσεων θα έχει τον ίδιο μισθό και στις δύο εταιρείες;



Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «C_En6_Sistimata1.ggb», για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



- ✓ Να γράψετε τιμές στη στήλη «Πωλήσεις» του πίνακα και να μελετήσετε πόσος θα είναι ο μισθός στις δύο εταιρείες.
- ✓ Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε τις γραφικές παραστάσεις, για να απαντήσετε τα πιο πάνω ερωτήματα. Ποιους άλλους τρόπους θα προτείνατε;

Η δεύτερη εταιρεία αλλάζει την προσφορά της και προσφέρει βασικό μισθό €100 και 40% προμήθεια στις πωλήσεις του μήνα

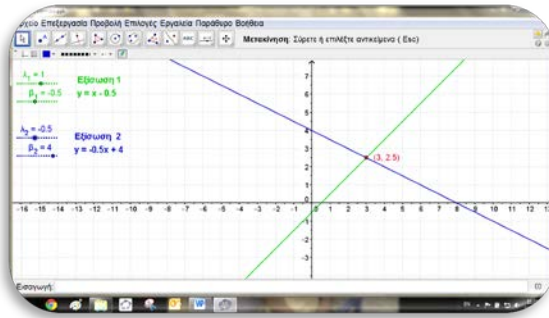
- ✓ Για ποιο ποσό πωλήσεων θα έχει τον ίδιο μισθό και στις δύο εταιρείες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μπορείτε να γράψετε τη δεύτερη εξίσωση στο κουτί εισαγωγής του Geogebra, για να ελέγξετε την ορθότητα του συλλογισμού σας).
- ✓ Ισχύει αυτό για οποιοδήποτε αρχικό βασικό μισθό δώσει η δεύτερη εταιρεία (και προμήθεια 40%); Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για το πλήθος των λύσεων ενός συστήματος.

Διερεύνηση (2)



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En6_Sistimata2.ggb».

Στο εφαρμογίδιο παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο ευθειών με εξισώσεις
$$\left. \begin{array}{l} y = \lambda_1 x + \beta_1 \\ y = \lambda_2 x + \beta_2 \end{array} \right\}$$



✓ Να βρείτε γραφικά τη λύση (αν υπάρχει) των πιο κάτω συστημάτων με τη βοήθεια του υπολογιστή, μετακινώντας τους δρομείς ώστε να δημιουργήσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

A) $\left. \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x + 3 \end{array} \right\}$ B) $\left. \begin{array}{l} y = 3x - 1 \\ y = x + 1 \end{array} \right\}$

Γ) $\left. \begin{array}{l} y = 3x - 1 \\ y = 3x + 3 \end{array} \right\}$ Δ) $\left. \begin{array}{l} y = 3x + 3 \\ y = 3x + 3 \end{array} \right\}$

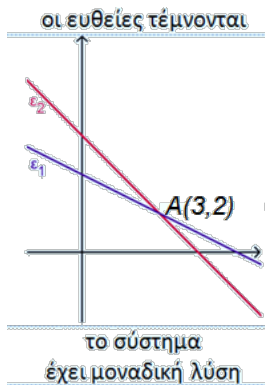
✓ Να γράψετε το πλήθος των λύσεων του καθενός από τα πιο πάνω συστήματα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα αυτά.

✓ Να διατυπώσετε έναν κανόνα για την εύρεση του πλήθους των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (χωρίς να λυθεί το σύστημα).

Μαθαίνω

- Εστω το σύστημα που δημιουργείται από τις εξισώσεις των ευθειών

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1 \\ \varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2 \end{array} \right\} \text{ με } \lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

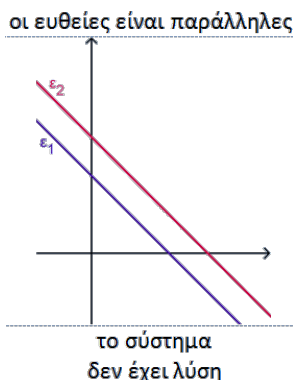


- Αν ε_1 και ε_2 τέμνονται τότε οι συντεταγμένες του σημείου τομής ικανοποιούν τις εξισώσεις και των δύο ευθειών. Άρα, **το σύστημα έχει λύση** τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

Άρα, αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση**.

Παράδειγμα:

Στη διπλανή γραφική παράσταση οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο $A(3,2)$. Άρα, το σύστημα των εξισώσεών τους έχει **λύση το ζεύγος (3, 2)**.



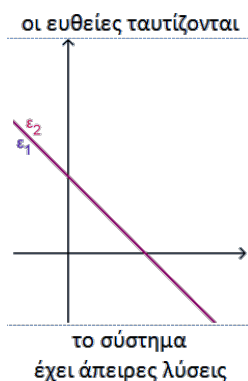
- Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, τότε το σύστημα των εξισώσεων **δεν έχει λύση** και ονομάζεται **αδύνατο**.

Άρα, αν

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \beta_1 \neq \beta_2 \quad \text{τότε το σύστημα δεν έχει λύση}$$

Παράδειγμα:

Στη διπλανή γραφική παράσταση οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Άρα, το σύστημα των εξισώσεών τους **δεν έχει λύση**.



- Αν $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$, τότε οι ευθείες συμπίπτουν. Το σύστημα των εξισώσεων έχει **άπειρες λύσεις**.

Άρα, αν

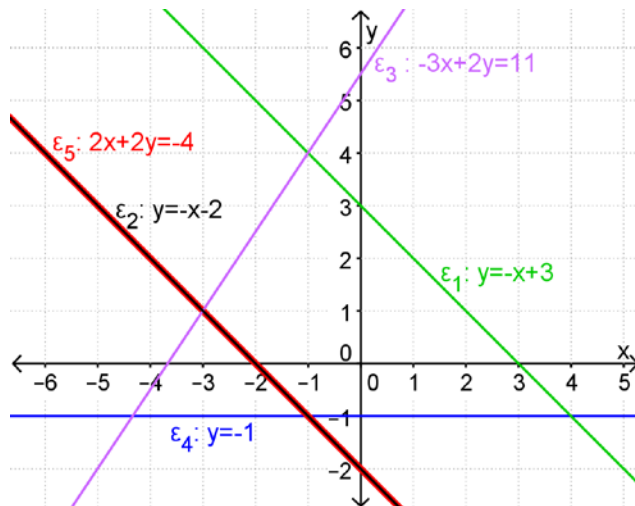
$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \text{τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις}$$

Παράδειγμα:

Στη διπλανή γραφική παράσταση οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται. Άρα, το σύστημα των εξισώσεων έχει **άπειρες λύσεις**.

Παραδείγματα

1. Στο πιο κάτω ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις πέντε εξισώσεων ευθειών.



Να εξετάσετε κατά πόσο τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων έχουν λύση ή όχι χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις που δίνονται.

Για το καθένα να βρείτε τη λύση ή τις λύσεις (αν υπάρχουν).

- (α) $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1: y = -x + 3 \\ \varepsilon_3: -3x + 2y = 11 \end{array} \right\}$ (β) $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1: y = -x + 3 \\ \varepsilon_4: y = -1 \end{array} \right\}$
- (γ) $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1: y = -x + 3 \\ \varepsilon_2: y = -x - 2 \end{array} \right\}$ (δ) $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_5: 2x + 2y = -4 \\ \varepsilon_2: y = -x - 2 \end{array} \right\}$

Λύση:

- (α) Οι ευθείες ε_1 και ε_3 τέμνονται στο σημείο $(-1, 4)$. Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (-1, 4)$.
- (β) Οι ευθείες ε_1 και ε_4 τέμνονται στο σημείο $(4, -1)$. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (4, -1)$.
- (γ) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Άρα, το σύστημα δεν έχει λύση.
- (δ) Οι ευθείες ε_5 και ε_2 ταυτίζονται. Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Λύσεις είναι οι συντεταγμένες κάθε σημείου που βρίσκεται πάνω στις δύο ευθείες. Π.χ. $(-5, 3), (-4, 2)$ κ.λπ.

Δραστηριότητες



1. Να εξετάσετε κατά πόσο το ζεύγος (5,2) είναι η λύση του συστήματος: $\begin{cases} x - y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$.

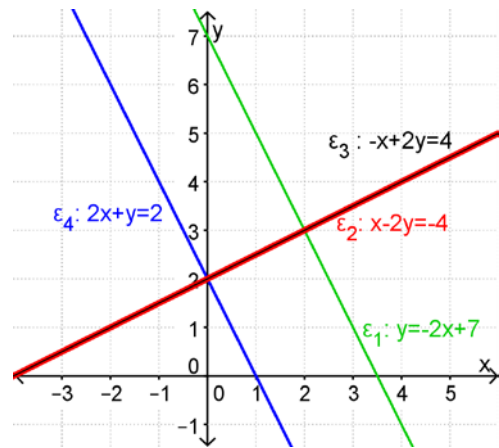
2. Ποιο από τα πιο κάτω ζεύγη αριθμών είναι η λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$.

- A) $x = 3, y = 0$ B) $x = 0, y = 1$ Γ) $x = 2, y = 2$ Δ) $x = -2, y = 1$

3. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων ευθειών.

Να εξετάσετε κατά πόσο τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων έχουν λύση, χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις που δίνονται.

Για το καθένα να βρείτε τη λύση ή τις λύσεις (αν υπάρχουν).



- (α) $\begin{cases} \varepsilon_1: y = -2x + 7 \\ \varepsilon_3: -x + 2y = 4 \end{cases}$ (β) $\begin{cases} \varepsilon_1: y = -2x + 7 \\ \varepsilon_4: 2x + y = 2 \end{cases}$
- (γ) $\begin{cases} \varepsilon_4: 2x + y = 2 \\ \varepsilon_2: x - 2y = -4 \end{cases}$ (δ) $\begin{cases} \varepsilon_3: -x + 2y = 4 \\ \varepsilon_2: x - 2y = -4 \end{cases}$

4. Να συμπληρώσετε με την κατάλληλη εξίσωση έτσι ώστε:

(α) Το σύστημα $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$ να έχει μοναδική λύση.

(β) Το σύστημα $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$ να έχει άπειρες λύσεις.

(γ) Το σύστημα $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$ να μην έχει λύση.

5. Να παραστήσετε γραφικά ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους το οποίο έχει μοναδική λύση το $(-1, 4)$.

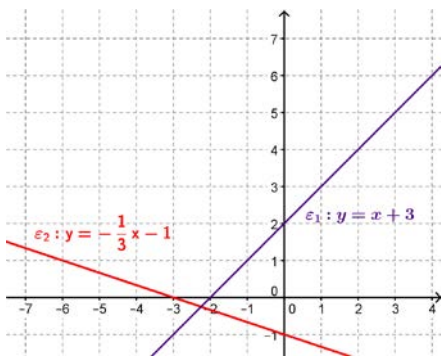
6. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των πιο κάτω συστημάτων (χωρίς να τα λύσετε).

$$(\alpha) \begin{cases} 3 - 2x = y \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

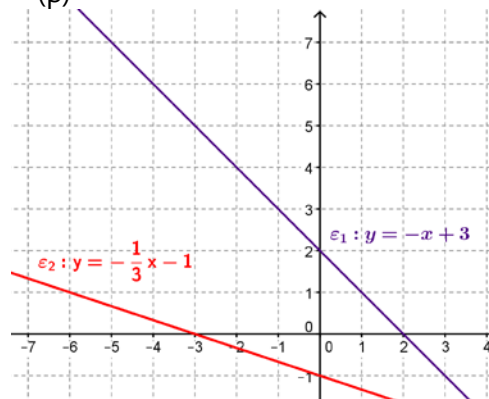
$$(\beta) \begin{cases} 2 - y = 5x \\ y = 5 \end{cases}$$

7. Ποια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις αναπαριστά σύστημα εξισώσεων που δεν έχει λύση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

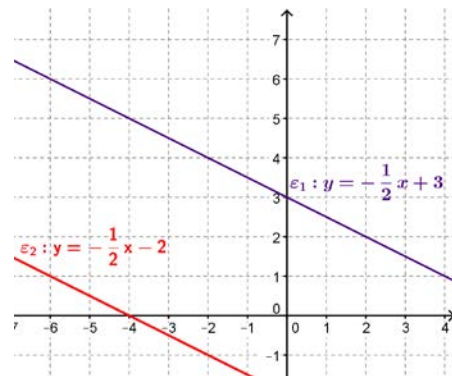
(α)



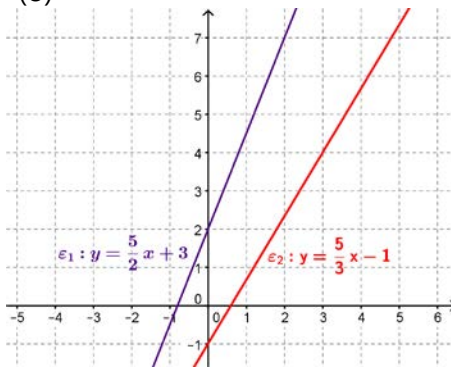
(β)



(γ)



(δ)



8. Να εξετάσετε κατά πόσο ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων που έχει λύσεις τα ζεύγη $(1, 1)$ και $(3, 3)$, έχει και άλλες λύσεις. Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.

Αλγεβρική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους

Έχουμε μάθει ...

- Για την **αλγεβρική επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (x, y) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο της αντικατάστασης**.

Παράδειγμα

Για να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$, εργαζόμαστε ως εξής:

Βήματα:

Επιλύουμε τη μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς τον έναν άγνωστο.

Επιλύουμε την $y - 2x = 1$ ως προς y και έχουμε την $y = 2x + 1$.

Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Αντικαθιστούμε το $2x + 1$ στη θέση του y στην εξίσωση $x + y = 7$ και έχουμε:

$$x + (2x + 1) = 7$$

$$\Rightarrow x + 2x + 1 = 7$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = 7$$

$$\Rightarrow 3x = 7 - 1$$

$$\Rightarrow 3x = 6$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε αντικαθιστούμε σε μια από τις δύο αρχικές εξισώσεις ή σε μια ισοδύναμή τους και βρίσκουμε την τιμή του άλλου αγνώστου.

Αντικαθιστούμε το $x = 2$ στην εξίσωση $y = 2x + 1$ και έχουμε:

$$y = 2 \cdot 2 + 1$$

$$\Rightarrow y = 5$$

Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (x, y) που βρήκαμε.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $x = 2$ και $y = 5$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (2, 5)$.

Διερεύνηση

Η Νικολέττα πλήρωσε €5 για να αγοράσει τα πιο κάτω προϊόντα:

- ✓ Ποια θα μπορούσε να ήταν η τιμή κάθε προϊόντος. (Όλα τα ντόνατς στοιχίζουν το ίδιο. Όλοι οι χυμοί στοιχίζουν το ίδιο).



Πιο κάτω φαίνονται τα προϊόντα που αγόρασαν κάποια άλλα παιδιά. Με βάση τις πιο πάνω πληροφορίες, για ποια από τα παιδιά μπορείτε να γνωρίζετε το ποσό που πρέπει να πληρώσουν;

Μελίνα



Γιώργος



Στέφανος



Χριστίνα



Μιχάλης



- ✓ Να υπολογίσετε την τιμή του κάθε προϊόντος, αν γνωρίζουμε επίσης ότι ο Μιχάλης πλήρωσε €17 για να αγοράσει τα πιο πάνω προϊόντα.
- ✓ Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε και να εξετάσετε διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα μπορούσατε να βρείτε την τιμή του κάθε προϊόντος.

Μαθαίνω

- Για την **αλγεβρική επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους (x, y) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορες αλγεβρικές μεθόδους, όπως τη **μέθοδο της αντικατάστασης** και τη **μέθοδο των αντίθετων συντελεστών**.

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Παραδείγματα:

- Για να επιλύσουμε το σύστημα $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1: 2x - 3y = 3 \\ \varepsilon_2: x + 3y = 6 \end{array} \right\}$ μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 3 \\ x + 3y = 6 \quad + \\ \hline 3x = 9 \\ \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του y στις δύο εξισώσεις του συστήματος είναι **αντίθετοι**. Άρα, προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, προκύπτει μια νέα εξίσωση με άγνωστο μόνο το x . Έτσι βρίσκουμε εύκολα την τιμή του x .

Αντικαθιστούμε το $x = 3$ στην εξίσωση $x + 3y = 6$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} 3 + 3y &= 6 \\ \Rightarrow 3y &= 3 \\ \Rightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $x = 3$ και $y = 1$ δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, 1)$.

- Για να επιλύσουμε το σύστημα $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1: 3x + 2y = 5 \\ \varepsilon_2: 2x - 5y = 16 \end{array} \right\}$ μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 5 \quad | \cdot 2 \\ 2x - 5y = 16 \quad | \cdot (-3) \\ \hline 6x + 4y = 10 \\ -6x + 15y = -48 \quad + \\ \hline 19y = -38 \\ \Rightarrow y = -2 \end{array}$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση επί 2 και τη δεύτερη επί -3 , για να προκύψει **ισοδύναμο σύστημα** με τους συντελεστές του x στις δύο εξισώσεις να είναι αντίθετοι. Στη συνέχεια ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με το παράδειγμα (α).

Αντικαθιστούμε το $y = -2$ στην εξίσωση $3x + 2y = 5$ και έχουμε: $3x - 4 = 5$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3x &= 9 \\ \Rightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $x = 3$ και $y = -2$ δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, -2)$.

Ισχύουν:

- Αν A, B, Γ, Δ αλγεβρικές παραστάσεις για τις οποίες ισχύει:

$$A = B$$

$$\Gamma = \Delta$$

τότε: $A + \Gamma = B + \Delta$

$$A - \Gamma = B - \Delta$$

- Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και A, B αλγεβρικές παραστάσεις για τις οποίες ισχύει:

$$A = B$$

τότε: $\lambda A = \lambda B$

Δύο συστήματα που έχουν την ίδια λύση ονομάζονται **ισοδύναμα**.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \begin{cases} x = 7 - y \\ 2x + 3y = 17 \end{cases} & (\beta) \begin{cases} x - y = 9 \\ 6x + y = 5 \end{cases} & (\gamma) \begin{cases} x + 4y = -8 \\ 5x + 2y = 14 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\delta) \begin{cases} 8x + 2y = 17 \\ -4x - y = 9 \end{cases} & (\epsilon) \begin{cases} 8y = 2x + 48 \\ y = \frac{1}{4}x + 6 \end{cases} \end{array}$$

Λύση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \begin{cases} x = 7 - y & (1) \\ 2x + 3y = 17 & (2) \end{cases} \end{array}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2) την $x = 7 - y$:

$$2x + 3y = 17$$

$$\Rightarrow 2(7 - y) + 3y = 17$$

$$\Rightarrow 14 - 2y + 3y = 17$$

$$\Rightarrow 14 + y = 17$$

$$\Rightarrow y = 3$$

Αφού υπολογίσουμε την τιμή του y , την αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1) και υπολογίζουμε την τιμή του x :

$$\begin{array}{l} x = 7 - y \quad \xrightarrow{y=3} x = 7 - 3 \\ \Rightarrow x = 4 \end{array}$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (4, 3)$

(β) Παρατηρούμε ότι οι δύο εξισώσεις έχουν ήδη αντίθετους όρους $-y$ και $+y$.

$$\begin{array}{r} x - y = 9 \\ 6x + y = 5 \\ \hline 7x = 14 \\ \Rightarrow x = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά} \\ \text{μέλη.} \\ \text{Υπολογίζουμε την τιμή του } x. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - y = 9 \\ \xrightarrow{x=2} 2 - y = 9 \\ \Rightarrow y = -7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Αντικαθιστούμε την τιμή του } x \text{ που} \\ \text{βρήκαμε, στην πρώτη εξίσωση και} \\ \text{βρίσκουμε την τιμή του } y. \end{array}$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (2, -7)$

(γ) Πολλαπλασιάζουμε τις δύο εξισώσεις με τους κατάλληλους αριθμούς έτσι ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y :

$$\begin{array}{l|l} x + 4y = -8 & 1 \\ 5x + 2y = 14 & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 4y = -8 \\ -10x - 8y = -28 \end{array} +$$

$$\begin{array}{l} -9x = -36 \\ \Rightarrow x = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 4y = -8 \\ \xrightarrow{x=4} 4 + 4y = -8 \\ \Rightarrow 4y = -12 \\ \Rightarrow y = -3 \end{array}$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (4, -3)$

(δ) $8x + 2y = 16$
 $-4x - y = 9$

$$\begin{array}{l|l} 8x + 2y = 16 & 1 \\ -4x - y = 9 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 8x + 2y = 16 \\ -8x - 2y = 18 \end{array} +$$

$$0x + 0y = 34$$

Εφόσον δεν υπάρχουν τιμές των x και y που ικανοποιούν τη σχέση $0x + 0y = 34$, το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο).

(ε) $8y = 2x + 48$ (1)
 $y = \frac{1}{4}x + 6$ (2)

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1) την $y = \frac{1}{4}x + 6$:

$$\begin{array}{l} 8y = 2x + 48 \\ \Rightarrow 8\left(\frac{1}{4}x + 6\right) = 2x + 48 \\ \Rightarrow 2x + 48 = 2x + 48 \\ \Rightarrow 2x - 2x = 48 - 48 \\ \Rightarrow 0x = 0 \end{array}$$

Η εξίσωση $0x = 0$ ικανοποιείται για κάθε τιμή του x . Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Λύση είναι κάθε τιμή του x με αντίστοιχη τιμή $y = \frac{1}{4}x + 6$.

Παρατήρηση:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1: 8x + 2y = 16 \\ \Rightarrow 2y = -8x + 16 \\ \Rightarrow y = -4x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varepsilon_2: -4x - y = 9 \\ \Rightarrow -y = 4x + 9 \\ \Rightarrow y = -4x - 9 \end{array}$$

Το σύστημα αποτελείται από τις εξισώσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι **παράλληλες**.

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

Παρατήρηση:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1: 8y = 2x + 48 \\ \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 6 \end{array}$$

$$\varepsilon_2: y = \frac{1}{4}x + 6$$

Το σύστημα αποτελείται από τις εξισώσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 οι οποίες ταυτίζονται.

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

2. Ένα τουριστικό θέρετρο ενοικιάζει διαμερίσματα δύο και τριών υπνοδωματίων για €700 και €900 ευρώ μηνιαίως, αντίστοιχα. Τον τελευταίο μήνα έμειναν 6 δωμάτια ξενοίκιαστα. Οι εισπράξεις ήταν €4600 λιγότερα από τον προηγούμενο μήνα, όταν τα δωμάτια ήταν όλα ενοικιασμένα. Να υπολογίσετε πόσα διαμερίσματα των δύο υπνοδωματίων και πόσα των τριών έμειναν ξενοίκιαστα τον τελευταίο μήνα.

Λύση:

Αν x είναι ο αριθμός των διαμερισμάτων με δύο υπνοδωμάτια και y ο αριθμός των διαμερισμάτων με τρία υπνοδωμάτια που έμειναν ξενοίκιαστα τότε:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ 700x + 900y = 4600 \end{array} \right\}$$

Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

$$x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - x$$

Αντικαθιστούμε στην 2^η εξίσωση:

$$700x + 900y = 4600$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{y=6-x} 700x + 900(6 - x) &= 4600 \\ \Rightarrow 700x + 5400 - 900x &= 4600 \\ \Rightarrow -200x &= 4600 - 5400 \\ \Rightarrow -200x &= -800 \\ \Rightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{y=6-x} y &= 6 - 4 \\ \Rightarrow y &= 2 \end{aligned}$$

Άρα, έμειναν ξενοίκιαστα τέσσερα διαμερίσματα των δύο υπνοδωματίων και δύο διαμερίσματα των τριών υπνοδωματίων.

Δραστηριότητες



1. Να βρείτε τη λύση (αν υπάρχει) των πιο κάτω συστημάτων:

(α) $x = 7y$
 $2x + 4y = 36$

(β) $y = 3 + x$
 $x + 2y = 6$

(γ) $5x - 3y = 10$
 $y = x$

(δ) $y = 3x + 5$
 $3x - y = -5$

$$\begin{aligned}(\epsilon) \quad & 8x - 7y = 37 \\ & 4x + 7y = -13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sigma\tau) \quad & 2x - 3y = 10 \\ & x + 3y = 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\zeta) \quad & y - 2x = 0 \\ & 2x + y = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\eta) \quad & 2x - 4y = -8 \\ & 4x + 8y = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\theta) \quad & y - 2x = 0 \\ & 4x + 8y = 40\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\iota) \quad & 3x = 5 - 2y \\ & x - 3y = 9\end{aligned}$$

2. Να δώσετε ένα σύστημα εξισώσεων που επιλύεται πιο εύκολα με τη μέθοδο της αντικατάστασης και ένα σύστημα εξισώσεων που επιλύεται πιο εύκολα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

3. Ο κύριος Πέτρος αγόρασε για τον γιο του μια μπάλα καλαθόσφαιρας και μια μπάλα πετόσφαιρας και πλήρωσε €58. Η τιμή μιας μπάλας καλαθόσφαιρας είναι κατά €4 περισσότερα από το διπλάσιο της τιμής της μπάλας πετόσφαιρας. Ποιο από τα πιο κάτω συστήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η τιμή της κάθε μπάλας;



$$\begin{aligned}(\alpha) \quad & x + y = 58 \\ & y = 2x - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta) \quad & x + y = 4 \\ & y = 2x - 58\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma) \quad & x + y = 58 \\ & y = 2x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\delta) \quad & x + y = 4 \\ & y = 2x + 58\end{aligned}$$

4. Να βρείτε την τιμή καθενός από τα πιο κάτω προϊόντα:

Κύριος Άλκης		€9,60
Κυρία Μαρίνα		€15

5. Μια γωνία X είναι παραπληρωματική μιας γωνίας Y . Η γωνία X είναι 24° πιο μεγάλη από τη γωνία Y . Να υπολογίσετε τις γωνίες X και Y .

6. Το αερόστατο A βρίσκεται 10 μέτρα πάνω από τη γη και ανεβαίνει προς τα πάνω 15 μέτρα το λεπτό. Το αερόστατο B βρίσκεται 110 μέτρα πάνω από τη γη και κατεβαίνει 10 μέτρα το λεπτό.



- (α) Σε πόσα λεπτά τα αερόστατα θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος;
 (β) Σε ποιο ύψος θα είναι τα δύο αερόστατα σε αυτή τη στιγμή;

7. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

(α)
$$\begin{cases} 3x - (x - y) = 9 - x \\ 3x - 2(y - 1) = 11 \end{cases}$$
 (β)
$$\begin{cases} 3(x - y) = 2(y + x) + 2 \\ 7x + 3y = 52 \end{cases}$$

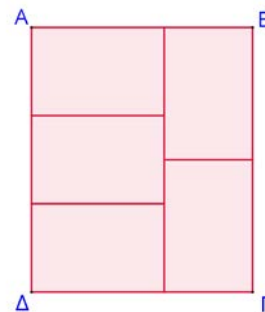
(γ)
$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 3 \\ \frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{10} \end{cases}$$
 (δ)
$$\begin{cases} x + 1 = \frac{5y}{6} \\ \frac{x-y}{4} + \frac{x+2y}{6} = -\frac{5}{12} \end{cases}$$

8. Ο Μάνος κρατεί €205 σε χαρτονομίσματα των €5 και των €10. Αν όλα τα χαρτονομίσματα ήταν 26, πόσα ήταν τα χαρτονομίσματα των €5;

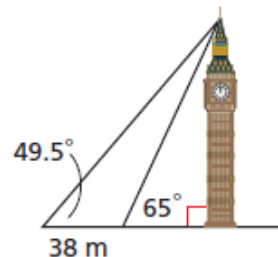
9. Σε μια εκδρομή το κανονικό εισιτήριο ήταν €10 ενώ για τα παιδιά ήταν €6. Συνολικά όλοι οι επιβάτες πλήρωσαν €260. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά, αν γνωρίζουμε ότι ήταν 10 λιγότερα από τους ενήλικες.

10. Σε έναν αγώνα καλαθόσφαιρας για το σχολικό πρωτάθλημα, ο Δημήτρης αναδείχθηκε πρώτος σκόρερ σημειώνοντας 39 πόντους. Οι 9 πόντοι ήταν από ελεύθερες βολές (1 πόντο η κάθε βολή). Οι υπόλοιποι πόντοι ήταν από 13 εύστοχες βολές των 2 και 3 πόντων. Πόσες βολές των 3 πόντων σημείωσε ο Δημήτρης;

11. Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει περίμετρο 44 cm. Το ορθογώνιο αποτελείται από 5 ίσα πιο μικρά ορθογώνια. Να βρείτε τις διαστάσεις του κάθε μικρού ορθογωνίου.



12. Να υπολογίσετε το ύψος του ρολογιού Big Ben στο Λονδίνο.



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \varepsilon_1: x - 3y = 4 & (\beta) \varepsilon_1: y = -3x + \frac{1}{3} & (\gamma) \varepsilon_1: y = 5 \\ \varepsilon_2: -x + 3y = 2 & \varepsilon_2: \frac{1}{3}x - y = +3 & \varepsilon_2: y = -3 \end{array}$$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε_1 σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) A(3,2) & (\beta) A(1,3) \\ \varepsilon_1: y = 3x - 1 & \varepsilon_1: y = 8 \end{array}$$

3. Για ποιες τιμές των α και κ οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3\alpha + 1)x + \kappa$ και $\varepsilon_2: y = (\alpha - 1)x - 3$ είναι παράλληλες;

4. Δίνονται τα σημεία $A(4,5)$, $B(7,2)$ και $\Gamma(4,-1)$.

(α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM .

5. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των πιο κάτω συστημάτων (χωρίς να τα λύσετε).

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases} & (\beta) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases} \end{array}$$

6. Ένα ταχύπλοο ξεκινά από τη θέση A σε ένα νησί με προορισμό ένα άλλο νησί στη θέση Δ . Λόγω κακοκαιρίας το σκάφος ακολούθησε την πορεία που φαίνεται στον χάρτη, από τη θέση A στη θέση B και τελικά κατέληξε στη θέση Γ .



(α) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(β) Να σχεδιάσετε πάνω στον χάρτη ένα διάνυσμα που να προσδιορίζει την πορεία του σκάφους από τη θέση Γ στον προορισμό του στη θέση Δ .

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

7. Να βρείτε τη λύση (αν υπάρχει) των πιο κάτω συστημάτων:

$$(\alpha) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x = -6 \end{cases}$$

$$(\beta) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$(\gamma) \begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$(\delta) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$(\epsilon) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 5 \end{cases}$$

$$(\sigma\tau) \begin{cases} x + 2y = 10 \\ -3x - y = 15 \end{cases}$$

$$(\zeta) \begin{cases} x - y = 5 \\ -3x + 3y = -15 \end{cases}$$

$$(\eta) \begin{cases} \frac{x}{10} - \frac{y}{5} = \frac{3}{10} \\ 3x + 2y = 17 \end{cases}$$

$$(\theta) \begin{cases} 3(\alpha - \beta) + 2(\alpha + \beta) = 15 \\ 3(\alpha + \beta) + 2(\alpha - \beta) = 25 \end{cases}$$

$$(\iota) \begin{cases} \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2} = 2 \\ \frac{\alpha-1}{3} - \frac{3-\beta}{4} = -\frac{7}{12} \end{cases}$$

8. Να βρείτε δύο αριθμούς οι οποίοι να έχουν άθροισμα 20 και το διπλάσιο του ενός να είναι ίσο με το τριπλάσιο του άλλου.

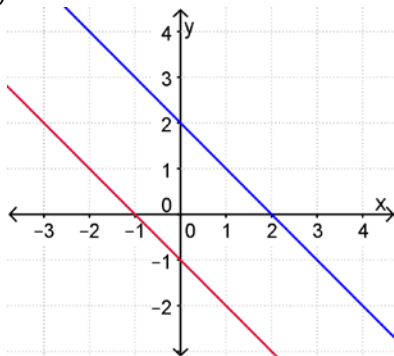
9. Σε μια αίθουσα υπάρχουν 32 άτομα, άντρες και γυναίκες. Αν φύγουν 4 άντρες και έρθουν 2 γυναίκες, ο αριθμός των αντρών θα είναι διπλάσιος από τον αριθμό των γυναικών. Πόσοι άντρες και πόσες γυναίκες υπήρχαν αρχικά στην αίθουσα;

10. Να γράψετε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων που:

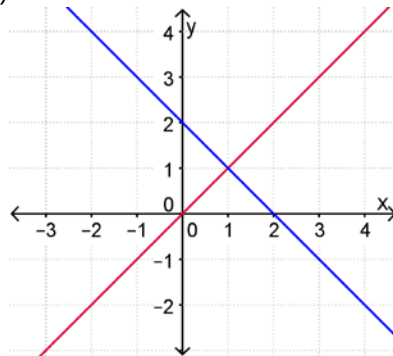
- (α) να μην έχει λύση,
- (β) να έχει άπειρες λύσεις.

11. Να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που αντιστοιχεί στις ευθείες που παριστάνονται πιο κάτω, καθώς και τη λύση του, αν υπάρχει.

(α)



(β)





12. Ο καθηγητής της Γεωγραφίας θέλει να γράψει ένα διαγώνισμα συνολικής βαθμολογίας 100 μονάδων, με ερωτήσεις σωστού/λάθους 2 μονάδων και ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής 4 μονάδων. Οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής θέλει να είναι διπλάσιες από τις ερωτήσεις σωστού/λάθους.

- (α) Να γράψετε ένα σύστημα εξισώσεων σύμφωνα με το πιο πάνω σενάριο.
(β) Πόσες ερωτήσεις κάθε είδους πρέπει να βάλει στο διαγώνισμα;
(γ) Εάν οι περισσότεροι μαθητές χρειάζονται περίπου 1 λεπτό να απαντήσουν κάθε ερώτηση σωστού λάθους και 1,5 λεπτά για κάθε ερώτηση πολλαπλής επιλογής, να εξετάσετε κατά πόσο τα 45 λεπτά είναι αρκετός χρόνος για να τελειώσουν το διαγώνισμα.

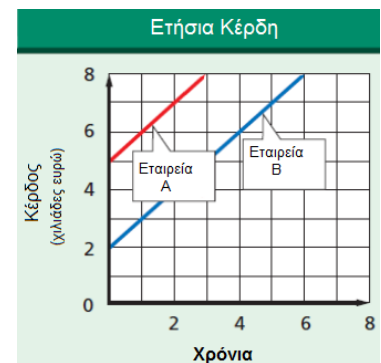
13. Να βρείτε την τιμή του μ ώστε το σύστημα να μην έχει λύση:

$$\left. \begin{array}{l} y = (\mu - 1)x + 9 \\ 2x - y = 13 \end{array} \right\}$$

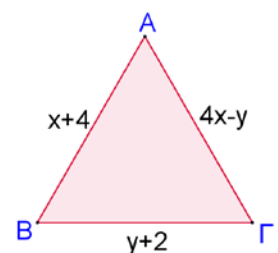
14. Αν το σύστημα $\begin{cases} ax + \beta y = 7 \\ 2ax - \beta y = 8 \end{cases}$ έχει ως λύση $x = 1$ και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των αριθμών α και β .

15. Στη γραφική παράσταση φαίνεται το μέσο κέρδος των εταιρειών A και B τα πρώτα χρόνια λειτουργίας τους.

- (α) Ποια εταιρεία είχε τα περισσότερα κέρδη τα πρώτα 5 χρόνια της λειτουργίας της;
(β) Ποια εταιρεία έχει τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης των κερδών από τη μια χρονιά στην άλλη;
(γ) Αν θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός αύξησης των κερδών των δύο εταιρειών διατηρείται σταθερός, όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση, μέχρι τα πρώτα 20 χρόνια, σε ποια χρονιά τα κέρδη των δύο εταιρειών θα είναι ίσα;



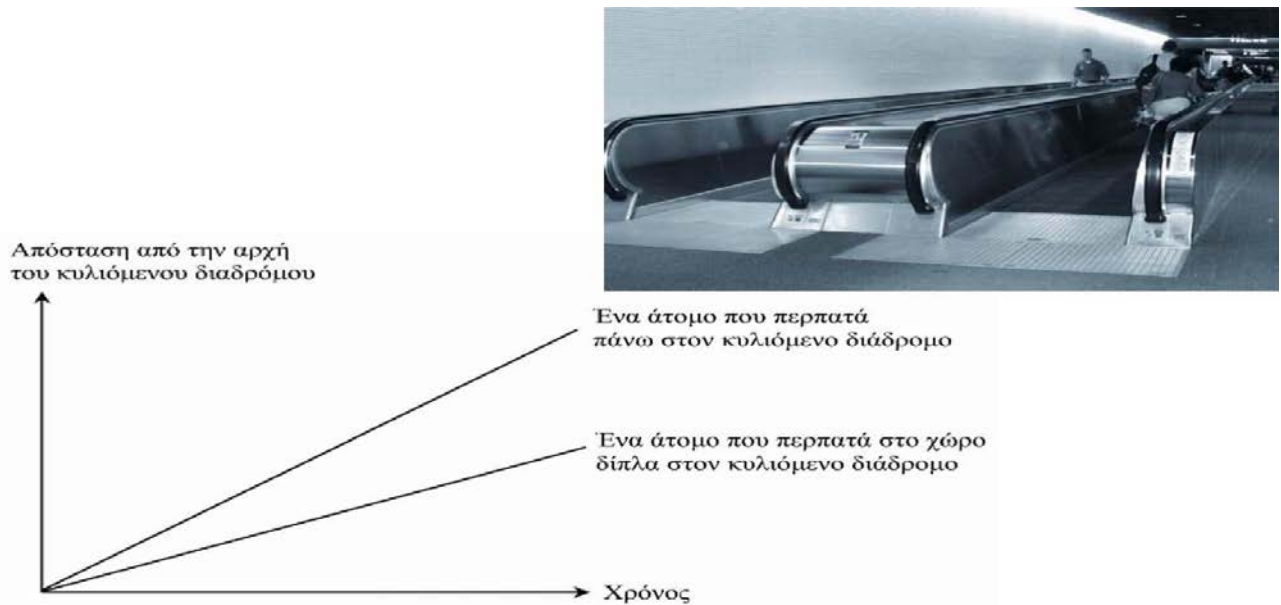
16. Το διπλανό τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x - y = -1$ και $\lambda x - y = -1$ αντίστοιχα, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Αν $A(-2,1)$, $B(-3,-2)$ και $\Gamma(6,0)$ είναι κορυφές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ .
3. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:
$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -13 \end{array} \right\} \text{ (Υπόδειξη: Να θέσετε } \alpha = \frac{1}{x} \text{ και } \beta = \frac{1}{y} \text{)}$$
4. Δίνονται τα σημεία $A(\beta - 2, \alpha + 2)$, $B(\alpha, \beta)$. Να δείξετε ότι το μέσο του AB ανήκει στην ευθεία $y = x + 2$.
5. Το άθροισμα των ψηφίων διψήφιου αριθμού είναι 8. Αν τα ψηφία του αριθμού αντιστραφούν προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 18. Να βρείτε τον αριθμό.
6. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\kappa+1}{2}x + 6$ και $\varepsilon_2: y = \frac{\lambda+2}{3}x$ είναι παράλληλες.
Να βρείτε την τιμή των κ και λ αν ισχύει:
 $(2\kappa + 3)^2 - (2\kappa - 1)^2 = \lambda + 17\kappa + 11$
7. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ με $A_2, B_2, \Gamma_2 \neq 0$.
Αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$, να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

8. Πιο κάτω, βλέπετε μια φωτογραφία κυλιόμενων διαδρόμων. Το διάγραμμα Απόσταση-Χρόνος που ακολουθεί, δείχνει τη σύγκριση μεταξύ του «περπατήματος πάνω στον κυλιόμενο διάδρομο» και του «περπατήματος στο χώρο δίπλα στον κυλιόμενο διάδρομο».



Υποθέτοντας ότι στο παραπάνω διάγραμμα και τα δυο άτομα περπατούν με το ίδιο μήκος βήματος, να προσθέσετε μία γραμμή, η οποία θα αναπαριστά την απόσταση ως προς τον χρόνο για ένα άτομο, που στέκεται ακίνητο πάνω στον κυλιόμενο διάδρομο.

PISA 2003

9. Για λόγους υγείας, οι άνθρωποι θα πρέπει να περιορίζουν τις δυνάμεις τους, για παράδειγμα κατά τη διάρκεια της άθλησης, ώστε να μην υπερβούν μια συγκεκριμένη συχνότητα καρδιακών παλμών. Για χρόνια, η σχέση ανάμεσα στην προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών ενός ατόμου και στην ηλικία του, περιγραφόταν με τον παρακάτω τύπο:

Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών
 $= 220 - \text{ηλικία}$

Πρόσφατες έρευνες έδειξαν ότι ο τύπος αυτός θα έπρεπε να τροποποιηθεί λίγο. Ο καινούργιος τύπος είναι ο ακόλουθος:

Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών
 $= 208 - (0,7 \times \text{ηλικία})$

Ένα άρθρο εφημερίδας αναφέρει: «Λόγω της χρήσης του νέου τύπου αντί του παλιού, ο μέγιστος αριθμός που προτείνεται για τους καρδιακούς παλμούς ανά λεπτό, μειώνεται λίγο για τους νέους ανθρώπους και αυξάνεται λίγο για τους ηλικιωμένους».

Από ποια ηλικία και μετά αυξάνεται η προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών λόγω χρήσης του νέου τύπου;

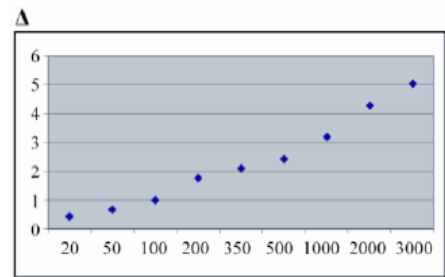
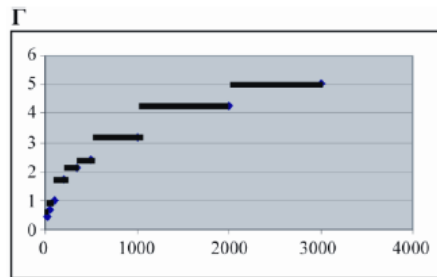
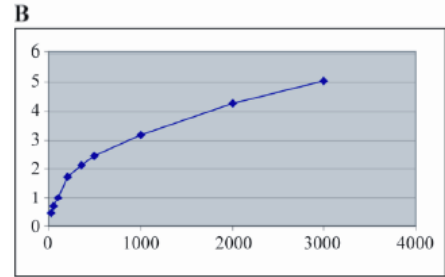
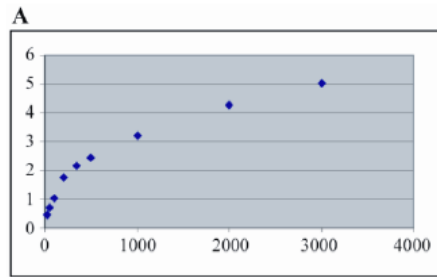
PISA 2003

10. Τα ταχυδρομικά τέλη στη χώρα Ζεντ υπολογίζονται σύμφωνα με το βάρος των αντικειμένων (που στρογγυλοποιείται προς το πλησιέστερο γραμμάριο), όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Βάρος (στρογγυλοποιημένο προς το πλησιέστερο γραμμάριο)	Τέλη
Μέχρι 20 g	0,46 ζεντ
21 g - 50 g	0,69 ζεντ
51 g - 100g	1,02 ζεντ
101 g - 200g	1,75 ζεντ
201 g - 350 g	2,13 ζεντ
351 g- 500 g	2,44 ζεντ
501 g - 1000 g	3,20 ζεντ
1001 g - 2000 g	4,27 ζεντ
2001 g - 3000 g	5,03 ζεντ

(Σ.τ.Μ. Η «χώρα Ζεντ» είναι μια φανταστική χώρα που έχει ένα φανταστικό νόμισμα που ονομάζεται «ζεντ»).

- (α) Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζει καλύτερα τα ταχυδρομικά τέλη στη χώρα Ζεντ; (Ο οριζόντιος άξονας δείχνει το βάρος σε γραμμάρια και ο κατακόρυφος άξονας δείχνει τα τέλη σε ζεντ.)



(β) Η Ιωάννα θέλει να στείλει σ' ένα φίλο της δύο αντικείμενα που ζυγίζουν 40 και 80 γραμμάρια αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψη τα ταχυδρομικά τέλη στη χώρα Ζεντ, να βρείτε εάν είναι φθηνότερο να στείλει τα δύο αντικείμενα σε ένα πακέτο ή να στείλει τα δύο αντικείμενα σε δύο χωριστά πακέτα.

PISA 2003

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να διακρίνουμε τις έννοιες της συλλογής δεδομένων από το σύνολο του πληθυσμού (απογραφή) και της συλλογής δεδομένων από μέρος του πληθυσμού (δείγμα).
- Να αντιλαμβανόμαστε σε ποιες περιπτώσεις επιβάλλεται η επιλογή αντιπροσωπευτικού δείγματος.
- Να συζητούμε την καταλληλότητα του τρόπου συλλογής και παρουσίασης δεδομένων.
- Να αντιλαμβανόμαστε σε ποιες περιπτώσεις, τα δεδομένα μας είναι δυνατόν να είναι μεροληπτικά.
- Να χρησιμοποιούμε τα δεδομένα από το δείγμα, για να κάνουμε εκτιμήσεις για ολόκληρο τον πληθυσμό.



Λύση Προβλήματος

ΕΛΑΤΤΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΣΚΕΥΕΣ

Η εταιρεία *Ηλέκτρικ*, κατασκευάζει δύο είδη ηλεκτρονικών συσκευών: συσκευές αναπαραγωγής εικόνας (video) και συσκευές αναπαραγωγής ήχου. Στο τέλος της ημερήσιας παραγωγής, οι συσκευές ελέγχονται και αυτές που είναι ελαττωματικές απομακρύνονται και στέλνονται για επιδιόρθωση.

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον μέσο όρο των συσκευών που κατασκευάζονται σε μία μέρα, καθώς και το μέσο ποσοστό ελαττωματικών συσκευών που εντοπίζονται σε μία μέρα.

Είδος συσκευής	Μέσος όρος συσκευών που κατασκευάζονται σε μια μέρα	Μέσο ποσοστό ελαττωματικών συσκευών σε μια μέρα
Συσκευές αναπαραγωγής εικόνας	2000	5%
Συσκευές αναπαραγωγής ήχου	6000	3%

Ερώτηση 1:

Πιο κάτω παρουσιάζονται τρεις δηλώσεις σχετικά με την ημερήσια παραγωγή στην εταιρεία *Ηλέκτρικ*. Είναι ορθές οι δηλώσεις; Να βάλετε σε κύκλο "Ναι" ή "Όχι" για κάθε δήλωση.

Δήλωση	Είναι ορθή η δήλωση;
<i>Το ένα τρίτο της ημερήσιας παραγωγής συσκευών είναι συσκευές αναπαραγωγής εικόνας.</i>	Ναι / Όχι
<i>Σε κάθε 100 συσκευές αναπαραγωγής εικόνας, ακριβώς πέντε θα είναι ελαττωματικές.</i>	Ναι / Όχι
<i>Αν μία συσκευή αναπαραγωγής ήχου επιλεγεί τυχαία από την ημερήσια παραγωγή για έλεγχο, η πιθανότητα να χρειάζεται επιδιόρθωση είναι 0,03.</i>	Ναι / Όχι

Ερώτηση 2:

Ένας από τους ελεγκτές έκανε την πιο κάτω δήλωση:

«Κατά μέσο όρο, κάθε μέρα, αποστέλλονται για επιδιόρθωση περισσότερες συσκευές αναπαραγωγής εικόνας, από ότι συσκευές αναπαραγωγής ήχου».

Να αποφασίσετε κατά πόσο η δήλωση του ελεγκτή είναι ορθή. Να υποστηρίξετε την απάντησή σας, παρουσιάζοντας ένα μαθηματικό επιχείρημα.

Ερώτηση 3:

Η εταιρεία Τρόνικς κατασκευάζει, επίσης, συσκευές αναπαραγωγής εικόνας και συσκευές αναπαραγωγής ήχου. Στο τέλος της ημερήσιας παραγωγής, οι συσκευές της εταιρείας Τρόνικς, ελέγχονται και όσες από αυτές τις συσκευές είναι ελαττωματικές, απομακρύνονται και στέλνονται για επιδιόρθωση.

Στους πιο κάτω πίνακες γίνεται σύγκριση του μέσου όρου των συσκευών κάθε είδους που κατασκευάζονται σε μια μέρα, καθώς και του μέσου ποσοστού των συσκευών που εντοπίζονται ως ελαττωματικές σε μια μέρα για τις δύο εταιρείες.

Εταιρεία	Μέσος Όρος συσκευών αναπαραγωγής <u>εικόνας</u> που κατασκευάζονται σε μια μέρα	Μέσο ποσοστό ελαττωματικών συσκευών σε μια μέρα
Εταιρεία Ηλέκτρικ	2000	5%
Εταιρεία Τρόνικς	7000	4%

Εταιρεία	Μέσος Όρος συσκευών αναπαραγωγής <u>ήχου</u> που κατασκευάζονται σε μια μέρα	Μέσο ποσοστό ελαττωματικών συσκευών σε μια μέρα
Εταιρεία Ηλέκτρικ	6000	3%
Εταιρεία Τρόνικς	1000	2%

Ποια από τις δύο εταιρείες, η εταιρεία *Ηλέκτρικ* ή η εταιρεία *Τρόνικς*, έχει το χαμηλότερο συνολικό ποσοστό ελαττωματικών συσκευών;

Έχουμε μάθει ...

- Να κατανοούμε τις έννοιες πληθυσμός και μεταβλητή και να διακρίνουμε τα διάφορα είδη μεταβλητών.
- Να διαβάζουμε, να ερμηνεύουμε και να αντλούμε πληροφορίες από γραφικές παραστάσεις.
- Να ορίζουμε τι είναι συχνότητα, να κατασκευάζουμε και να ερμηνεύουμε τον πίνακα συχνοτήτων.
- Να κατασκευάζουμε ραβδογράμματα, ιστογράμματα και κυκλικά διαγράμματα και να επιλέγουμε μια κατάλληλη γραφική παράσταση για την παρουσίαση δεδομένων.

Άθλημα	Αριθμός Ατόμων
Ποδόσφαιρο	8
Κολύμπι	5
Άλλο	6



- Να περιγράψουμε στατιστικά δεδομένα, υπολογίζοντας μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή).

Παράδειγμα:

Η **μέση τιμή** των παρατηρήσεων 12, 15, 16, 19 είναι:

$$\bar{X} = \frac{12 + 15 + 16 + 19}{4} = \frac{62}{4} = 15,5$$

Παράδειγμα:

Η **διάμεσος** των παρατηρήσεων:

12, 14, **15**, 18, 19 είναι το **15**

12, 14, **14**, 18, 19, 20 είναι το $\frac{14+18}{2} = 16$

Παράδειγμα:

Δίνονται οι θερμοκρασίες σε βαθμούς Κελσίου που καταγράφηκαν το πρώτο δεκαπενθήμερο του Ιουλίου στη Λευκωσία:

36, 37, 37, 38, 40, 40, 39, 36, 37, 38, 37, 39, 39, 40, 40

Παρατηρούμε ότι οι θερμοκρασίες 37 και 40 βαθμοί Κελσίου είναι οι θερμοκρασίες με τη μεγαλύτερη συχνότητα (καταγράφηκαν από 4 φορές η καθεμιά). Άρα, οι **επικρατούσες τιμές** είναι 37 και 40.

- Να εξετάζουμε πώς μεταβάλλονται τα μέτρα θέσης με την προσθήκη ή αφαίρεση κάποιων τιμών.

Δειγματοληψία

Εκτίμηση – Γενικεύσεις για τον πληθυσμό

Εξερεύνηση



Στις προεδρικές εκλογές στις ΗΠΑ το 1936 υπήρξε πλήρης αποτυχία της πρόγνωσης των εκλογικών αποτελεσμάτων.

Η έρευνα που διενήργησε η εταιρεία “Literary Digest” στηρίχτηκε σε αρχικό δείγμα 10 000 000 ατόμων του πληθυσμού από λίστα τηλεφωνικών καταλόγων των διάφορων πόλεων και από τηλεφωνικούς καταλόγους ιδιοκτητών αυτοκινήτων.

Στο ερωτηματολόγιο που ταχυδρομήθηκε απάντησε περίπου το 25% των επιλεγέντων και από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε φάνηκε ότι το εκλογικό σώμα θα έδινε μεγάλη πλειοψηφία στους Ρεπουμπλικάνους με υποψήφιο πρόεδρο τον Landon.

Η μέρα των εκλογών όμως επιφύλαξε μια δυσάρεστη έκπληξη στους στατιστικούς αναλυτές της δημοσκόπησης. Ο Δημοκρατικός υποψήφιος Roosevelt εκλέχτηκε με την ιστορική πλειοψηφία 60,7%, σε αντίθεση με το 40,9% που είχε προβλέψει η δημοσκόπηση της “Literary Digest”.



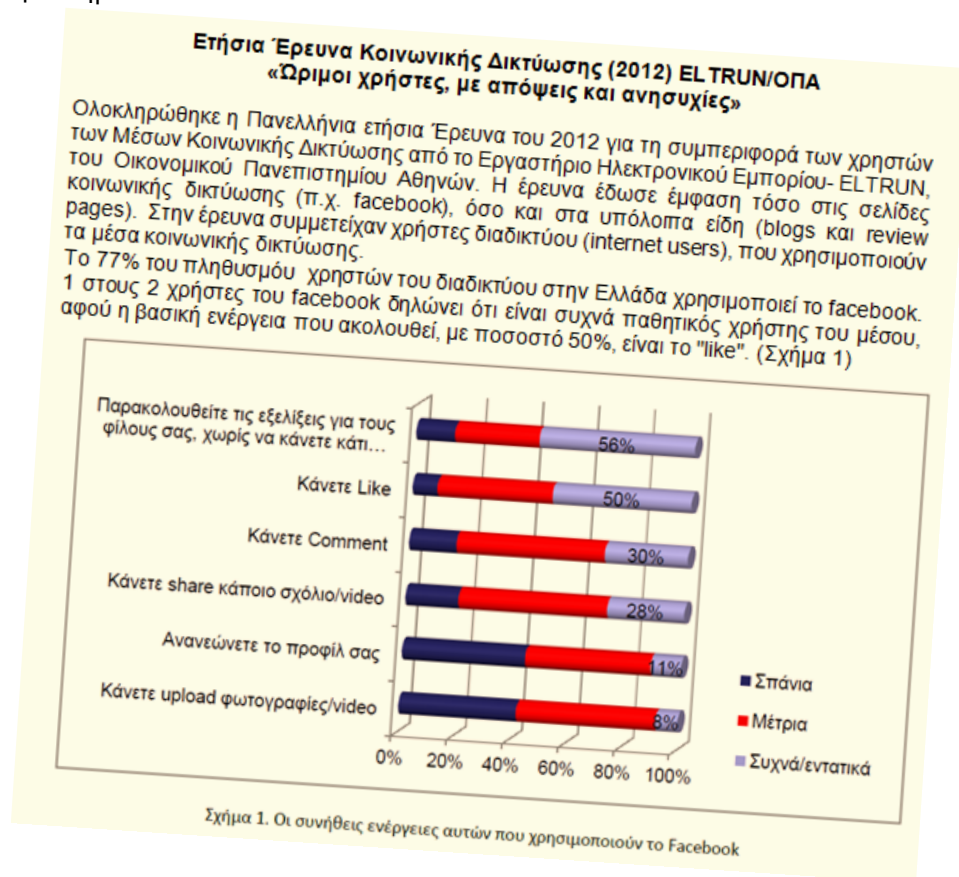
✓ Γιατί νομίζετε η έρευνα απέτυχε και μάλιστα σε τόσο μεγάλο βαθμό;

Διερεύνηση

Η Χριστίνα, ο Στέφανος και ο Γιάννης είναι φοιτητές Πληροφορικής. Έχουν ως θέμα εργασίας στο μεταπτυχιακό τους να μελετήσουν με ποιους τρόπους και σε τι ποσοστό οι Κύπριοι χρησιμοποιούν σελίδες κοινωνικής δικτύωσης στην καθημερινή τους ζωή.

Έχουν μελετήσει διάφορες έρευνες και έχουν μαζέψει υλικό, για να τους βοηθήσει στον σχεδιασμό της δικής τους έρευνας.

Να μελετήσετε την πιο κάτω έρευνα και να απαντήσετε στα ερωτήματα.



- ✓ Ποιος ήταν ο πληθυσμός και ποιο είναι το δείγμα της πιο πάνω έρευνας;
- ✓ Ποια μπορεί να ήταν τα ερωτήματα του ερωτηματολογίου; Ποια μορφή είχαν οι ερωτήσεις;

Τα παιδιά ετοίμασαν ένα αντίστοιχο ερωτηματολόγιο και το έστειλαν με το ηλεκτρονικό ταχυδρομείο σε φίλους και συμφοιτητές τους, για να το απαντήσουν.

- ✓ Να γράψετε μερικές δηλώσεις και τις αντίστοιχες επιλογές που ενδεχομένως να συμπεριέλαβαν τα παιδιά στο ερωτηματολόγιο τους.
- ✓ Να σχολιάσετε τον τρόπο που δούλεψαν τα παιδιά, για να συλλέξουν τα δεδομένα τους.

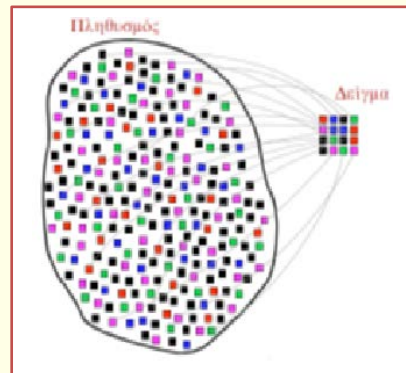
Μαθαίνω

Πληθυσμός – Δείγμα

- Το σύνολο των ατόμων ή αντικειμένων, στο οποίο επικεντρωνόμαστε σε μια έρευνα ονομάζεται **πληθυσμός** της έρευνας.
- Τις περισσότερες φορές είναι πρακτικά πολύ δύσκολο ή και αδύνατο να κάνουμε **απογραφή**, δηλαδή να διερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά για καθένα από τα μέλη του πληθυσμού, για τεχνικούς λόγους ή λόγω χρόνου, κόστους κ.λπ.

Η δειγματοληψία, σε σύγκριση με την απογραφή, έχει το πλεονέκτημα του μικρού κόστους και της ταχύτητας συγκέντρωσης των πληροφοριών. Από την άλλη πλευρά, όμως, έχει το μειονέκτημα ότι ο σχεδιασμός και η εκτέλεσή της χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή, γιατί διαφορετικά δεν οδηγούν σε σωστά συμπεράσματα.

- Στις περιπτώσεις στις οποίες η απογραφή είναι αδύνατη, επιλέγουμε ένα μέρος (υποσύνολο) του πληθυσμού που είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού και το εξετάζουμε. Το μέρος αυτό του πληθυσμού λέγεται **δείγμα**.



- Με βάση τα δεδομένα του δείγματος μπορούμε να κάνουμε **εκτίμηση** και να γενικεύουμε συμπεράσματα που αφορούν ολόκληρο τον πληθυσμό.
- Η διαδικασία επιλογής δείγματος ονομάζεται **δειγματοληψία**. Για να είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό, συνήθως χρησιμοποιούνται μέθοδοι κατά τις οποίες κάθε μέλος του πληθυσμού έχει ίσες πιθανότητες επιλογής.

▪ Παραδείγματα μεθόδων δειγματοληψίας:

◆ Απλή τυχαία Δειγματοληψία.

Το δείγμα επιλέγεται **τυχαία**.

Παράδειγμα:

Το δείγμα επιλέγεται με κλήρωση ή με «μηχανές» τυχαίας επιλογής δείγματος.

◆ Συστηματική δειγματοληψία

Το δείγμα επιλέγεται με έναν **συστηματικό** τρόπο.

Παράδειγμα:

Για να επιλέξουμε δείγμα 300 ατόμων από έναν πληθυσμό 1500 ατόμων καταγραμμένων σε μια λίστα, επιλέγεται τυχαία ένα από τα πρώτα πέντε άτομα και μετά επιλέγεται ο κάθε επόμενος πέμπτος.

Δηλαδή ένα τέτοιο δείγμα μπορεί να περιλαμβάνει το 3^ο, 8^ο, 13^ο, ... , 1498^ο άτομο.

Για να εφαρμοστεί απλή τυχαία ή συστηματική δειγματοληψία χρειάζεται να διαθέτουμε ένα **δειγματοληπτικό πλαίσιο**, δηλαδή έναν κατάλογο όλων των στοιχείων της έρευνας που μπορούν να επιλεγούν ώστε να είναι μέλη του δείγματος.

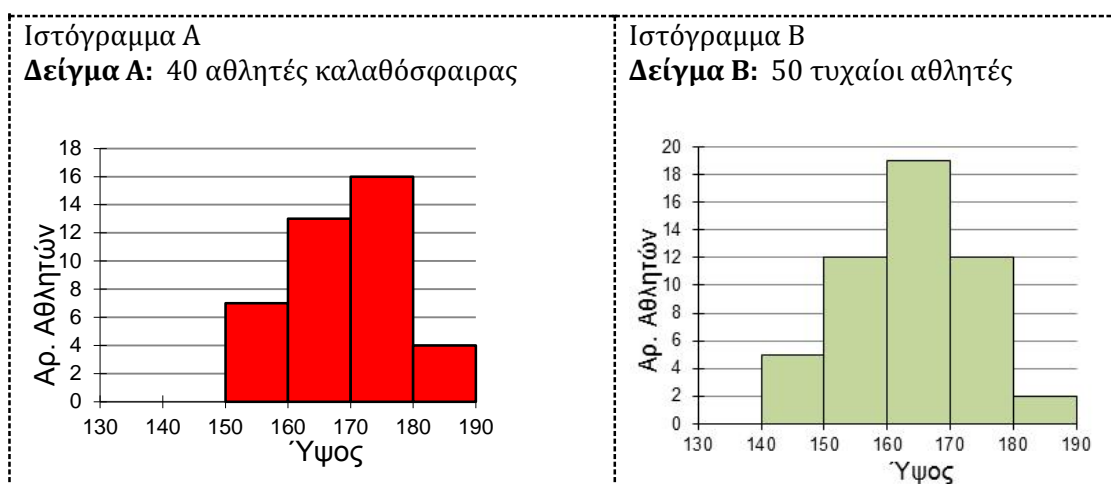
- Κατά τη δειγματοληψία πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε να αποφεύγουμε τη **μεροληψία** που παρουσιάζεται, όταν οι απαντήσεις στο δείγμα διαφέρουν από την πραγματική κατάσταση στον πληθυσμό.

Πιθανές αιτίες μεροληψίας είναι:

- *Να γίνει λανθασμένη επιλογή δείγματος.*
- *Πολλοί που ερωτούνται αποφεύγουν να απαντήσουν.*
- *Οι ερωτήσεις καθοδηγούν τους ερωτώμενους ώστε να απαντούν με συγκεκριμένο τρόπο.*
- *Οι ερωτώμενοι να μην απαντούν με ειλικρίνεια.*

Παραδείγματα

1. Για να παραγγελθούν νέα όργανα γυμναστικής για ένα αθλητικό σχολείο ζητήθηκε να καταγραφούν κάποια στοιχεία για το ύψος των μαθητών, ώστε να γίνει κατάλληλη επιλογή οργάνων.
 - Ο προπονητής των ομάδων καλαθόσφαιρας πήρε πρωτοβουλία και για δείγμα κατέγραψε το ύψος των 40 αθλητών του και το παρουσίασε στο Ιστόγραμμα Α.
 - Η διευθύντρια του σχολείου επέλεξε τυχαία 50 αθλητές και κατέγραψε τα ύψη τους, όπως παρουσιάζονται στο Ιστόγραμμα Β.



- (α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που έχουν ύψος από 170 cm και πάνω, στο καθένα από τα δύο δείγματα.
- (β) Να σχολιάσετε γιατί στο προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε διαφορετικό αποτέλεσμα.

Λύση:

(α) Το ποσοστό των μαθητών που έχουν ύψος από 170 cm και πάνω είναι:

$$\text{στο δείγμα A: } \frac{20}{40} = 50\% \quad \text{στο δείγμα B: } \frac{14}{50} = 28\%.$$

(β) Το δείγμα A που αποτελείται μόνο από τους αθλητές της καλαθόσφαιρας είναι μεροληπτικό, γιατί οι αθλητές της καλαθόσφαιρας είναι συνήθως πιο ψηλοί από τους υπόλοιπους αθλητές. Αυτός είναι ο λόγος που εμφανίζεται τόσο μεγάλο ποσοστό αθλητών πάνω από 1,70 m στο δείγμα αυτό, πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό του δείγματος B.



2. Σε πολλές τηλεοπτικές εκπομπές δημόσιων συζητήσεων, πολλές φορές το κοινό καλείται να ψηφίσει, αν συμφωνεί με την Α άποψη ή τη Β άποψη. Να αναφέρετε δύο λόγους για τους οποίους τα αποτελέσματα της ψηφοφορίας μπορεί να είναι μεροληπτικά.

Λύση:

Δύο λόγοι μπορεί να είναι οι εξής:

(α) Οι θεατές που παρακολουθούν το συγκεκριμένο κανάλι, τη συγκεκριμένη ώρα, μπορεί να έχουν άποψη υπέρ του Α σε ποσοστά διαφορετικά από ότι τα ποσοστά, υπέρ της άποψης αυτής σε ολόκληρη την κοινωνία.

(β) Οι θεατές που θα επιλέξουν να ψηφίσουν είναι συνήθως αυτοί που υποστηρίζουν τη μια από τις δύο απόψεις, ενώ οι υπόλοιποι θεατές πολύ πιθανόν να μην ψηφίσουν καθόλου.

Δραστηριότητες



1. Ο Δημοσιογραφικός Όμιλος θέλει να προβεί σε πρόβλεψη για το ποιος θα είναι ο νέος πρόεδρος του μαθητικού συμβουλίου του σχολείου. Τα μέλη του Ομίλου μαζεύτηκαν στη μία πτέρυγα του σχολείου και κατέγραψαν την ψήφο των μαθητών που πέρασαν από εκεί το πρώτο διάλειμμα.

(α) Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας;

(β) Να συζητήσετε πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου που επέλεξαν οι μαθητές, για να συγκεντρώσουν τις πληροφορίες και να κάνουν την πρόβλεψή τους.

2. Σε ένα καλοκαιρινό μουσικό σχολείο συμμετείχαν 250 παιδιά από όλες τις πόλεις της Κύπρου. Ένα νεανικό περιοδικό επέλεξε να κάνει μια έρευνα για τις προτιμήσεις των νέων της Κύπρου σε διάφορα είδη μουσικής, επιλέγοντας ως δείγμα τα παιδιά του καλοκαιρινού μουσικού σχολείου.

Οι απαντήσεις τους είναι αντιπροσωπευτικές των απόψεων όλων των νέων της Κύπρου; Να δώσετε δύο επιχειρήματα που να τεκμηριώνουν την άποψή σας.

3. Ο Δημήτρης, ο Γιώργος και η Ελένη θα διενεργήσουν μια έρευνα με σκοπό να εξαγάγουν συμπεράσματα για τη δημοφιλέστερη ομάδα της πόλης τους ανάμεσα στους μαθητές του σχολείου τους.

- Ο Δημήτρης ρωτά όλους τους μαθητές στο σχολικό λεωφορείο κατά τη διάρκεια της διαδρομής του προς το σχολείο.
- Η Ελένη συλλέγει το δείγμα της στην είσοδο του σχολείου ρωτώντας κάθε 5ο μαθητή που μπαίνει στο σχολείο από αυτή την είσοδο.
- Ο Γιώργος επιλέγει τυχαία 60 αριθμούς από το 1 μέχρι το 600 και μετά αντιστοιχεί τους αριθμούς με μαθητές του σχολείου του από αλφαβητικό ονομαστικό κατάλογο με τους 600 μαθητές.

Να αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου.

4. Να διαβάσετε τις πιο κάτω ερευνητικές περιπτώσεις και να εξετάσετε, σε καθεμιά από αυτές, κατά πόσο οι απαντήσεις μπορεί να είναι μεροληπτικές. Να γράψετε δύο λόγους για να στηρίξετε την άποψή σας.

(α) Ο Αρχηγός της αστυνομίας ενδιαφέρεται να μάθει για την άποψη των Κύπριων πολιτών για την αστυνομία. Ετοιμάζει ένα ερωτηματολόγιο και στέλνει μερικούς αστυνομικούς σε συγκεκριμένα σημεία των πόλεων για να ρωτούν τους πολίτες.

(β) Ένα περιοδικό που ασχολείται με διάφορα συμπληρώματα διατροφής κάλεσε τους αναγνώστες του που λαμβάνουν τακτικά συμπληρώματα διατροφής να εκφράσουν την άποψή τους για αυτά. Με το τέλος της έρευνας το περιοδικό ανακοίνωσε ότι 90% των πολιτών θεωρεί πολύ ευεργετικά τα συμπληρώματα διατροφής.



5. Ένας εκδότης περιοδικού, ανέθεσε σε κάποιο δημοσιογράφο να καταγράψει τις απόψεις των πολιτών για την ανάγκη δημιουργίας ποδηλατοδρόμων. Ο δημοσιογράφος πήρε τον τηλεφωνικό κατάλογο και επέλεξε τυχαία άτομα στα οποία έκανε την εξής ερώτηση:

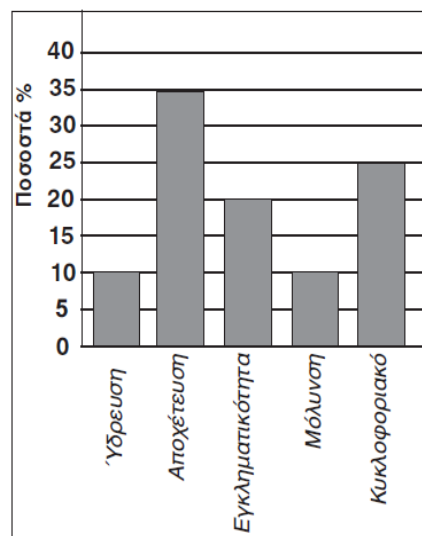
«Είναι φανερό ότι όλος ο κόσμος πλέον επιθυμεί να κυκλοφορεί με ποδήλατο. Συμφωνείτε ή όχι ότι πρέπει να γίνουν ποδηλατόδρομοι σε όλες τις πόλεις;».

Να σχολιάσετε κατά πόσο οι απαντήσεις που κατέγραψε ο δημοσιογράφος αντιπροσωπεύουν τις απόψεις των πολιτών.

6. Ο υποψήφιος δήμαρχος μιας πόλης θέλει να διερευνήσει τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι κάτοικοι της πόλης για να δώσει ιδιαίτερη έμφαση σε αυτά κατά τη προεκλογική του εκστρατεία. Το γραφείο του έκανε μια έρευνα στην οποία οι κάτοικοι κλήθηκαν να δηλώσουν ποιο πρόβλημα θεωρούν ως το πιο σημαντικό.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διπλανό ραβδόγραμμα.

- (α) Με ποιους τρόπους πιστεύετε ότι πήρε το δείγμα του έτσι ώστε να διασφαλιστεί η αντιπροσωπευτικότητα;
- (β) Πού πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση κατά τον σχεδιασμό της προεκλογικής εκστρατείας;
- (γ) Αν ο αριθμός των ατόμων που θεωρούν το κυκλοφοριακό ως το σημαντικότερο πρόβλημα είναι 60 περισσότεροι από εκείνους που θεωρούν τη μόλυνση, να υπολογίσετε τον αριθμό των ερωτηθέντων στην έρευνα.



7. Ένας καθηγητής των μαθηματικών θέλει να εξετάσει κατά πόσο ο χρόνος που σπαταλούν οι μαθητές του για να κάνουν την κατ'οίκον εργασία τους στα μαθηματικά σχετίζεται με τους βαθμούς των γραπτών τους στα μαθηματικά.
- (α) Πώς μπορεί να ελέγξει τον ισχυρισμό του;
 - (β) Πώς πρέπει να επιλέξει το δείγμα του;
 - (γ) Να εξετάσετε πώς πρέπει να τίθενται τα ερωτήματα στο ερωτηματολόγιο (π.χ. ανοικτό ερώτημα – πολλαπλής επιλογής);
 - (δ) Αν θα πρέπει να τους ζητήσει να σημειώσουν για μια μόνο μέρα τον χρόνο ή για περισσότερο καιρό και να πάρει τον μέσο όρο.
 - (ε) Αν θα είναι ανώνυμο ή όχι.
 - (στ) Ποιες άλλες ερωτήσεις θα μπορούσε να συμπεριλάβανε έτσι ώστε να μπορέσει στο μέλλον να μελετήσει καλύτερα τη σχέση χρόνου προετοιμασίας με την επίδοση των μαθητών;



ΟΜΑΔΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ (PROJECT)

Να διεξαγάγετε μια έρευνα στη σχολική σας μονάδα για κάποιο θέμα που σας απασχολεί. Για παράδειγμα:

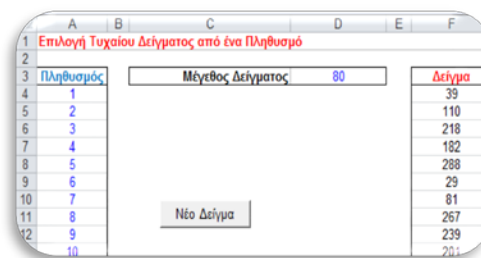
- Χρήση Διαδικτύου (Σκοποί, χρόνος χρήσης, οφέλη, άλλες συνέπειες).
- Οι νέοι και τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης (πλεονεκτήματα, μειονεκτήματα, κίνδυνοι κ.λπ.).
- Αγαπημένη απογευματινή ενασχόληση.
- Υπηρεσίες που επιθυμείτε να προσφέρει ο δήμος ή η κοινότητά σας στους νέους.

(α) Να οργανώσετε και να παρουσιάσετε τα δεδομένα χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους (διαγράμματα και μέτρα θέσης ή διασποράς). Να σχολιάσετε και να καταγράψετε διάφορα συμπεράσματα.



Για την επιλογή δείγματος, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο

[«C En7 Epilogi Deigmatos.xls»](#).



Να χρησιμοποιήσετε έναν ονομαστικό κατάλογο που να έχει αριθμημένους τους μαθητές του σχολείου σας. Αν για παράδειγμα το σχολείο έχει 400 μαθητές, να τροποποιήσετε στο αρχείο τη στήλη «πληθυσμός» ώστε να περιλαμβάνει αριθμούς από το 1 μέχρι το 400. Ακολούθως να επιλέξετε το μέγεθος του δείγματος που θέλετε να πάρετε και να πατήσετε «Νέο Δείγμα». Οι αριθμοί που εμφανίζονται στη στήλη «Δείγμα» αντιστοιχούν στους μαθητές που πρέπει να περιληφθούν στο δείγμα σας.

Βασικά στάδια μιας κοινωνικής / εκπαιδευτικής έρευνας

- ✓ Επιλέγουμε ένα θέμα για έρευνα.
- ✓ Μελετούμε άλλες σχετικές έρευνες για το θέμα.
- ✓ Διατυπώνουμε ερευνητικά ερωτήματα και υποθέσεις που θα εξετάσουμε.
- ✓ Συλλέγουμε και οργανώνουμε δεδομένα που σχετίζονται με τα ερευνητικά ερωτήματα και υποθέσεις.
- ✓ Αναλύουμε και ερμηνεύουμε τα δεδομένα απαντώντας στα ερευνητικά ερωτήματα.
- ✓ Γνωστοποιούμε τα αποτελέσματα (με άρθρα σε περιοδικά ή εφημερίδες, με ειδικές θεματικές ιστοσελίδες, με παρουσιάσεις σε συνέδρια κ.λπ.).

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Στη χώρα Ζεντ έγινε μια δημοσκόπηση, για να εκτιμηθεί το ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου στις επόμενες εκλογές. Τέσσερις εκδότες εφημερίδων έκαναν ξεχωριστές εθνικές δημοσκοπήσεις. Τα αποτελέσματα για τις τέσσερις δημοσκοπήσεις των εφημερίδων είναι τα εξής:

- Εφημερίδα 1: 36,5% (η δημοσκόπηση έγινε στις 6 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 500 πολιτών με δικαίωμα ψήφου)
- Εφημερίδα 2: 41% (η δημοσκόπηση έγινε στις 20 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 500 πολιτών με δικαίωμα ψήφου)
- Εφημερίδα 3: 39 % (η δημοσκόπηση έγινε στις 20 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 1000 πολιτών με δικαίωμα ψήφου)
- Εφημερίδα 4: 44,5% (η δημοσκόπηση έγινε στις 20 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 1000 αναγνωστών, οι οποίοι ψήφιζαν τηλεφωνικά).

Ποιας εφημερίδας τα αποτελέσματα είναι πιθανόν να προβλέψουν καλύτερα το ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου, αν οι εκλογές γίνουν στις 25 Ιανουαρίου; Να γράψεις δυο επιχειρήματα, για να υποστηρίξεις την απάντησή σου.

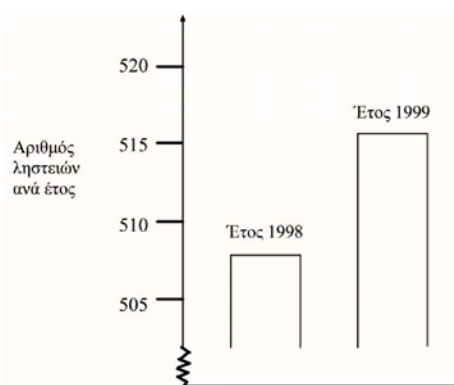
(Σ.Τ.Μ. Η «χώρα Ζεντ» είναι μια φανταστική χώρα).

PISA 2003

2. Σε ένα τηλεοπτικό κανάλι, ένας δημοσιογράφος σχολίασε την παρακάτω γραφική παράσταση ως εξής:

«Η γραφική παράσταση δείχνει ότι σημειώθηκε τεράστια αύξηση στον αριθμό των ληστειών από το έτος 1998 μέχρι το έτος 1999».

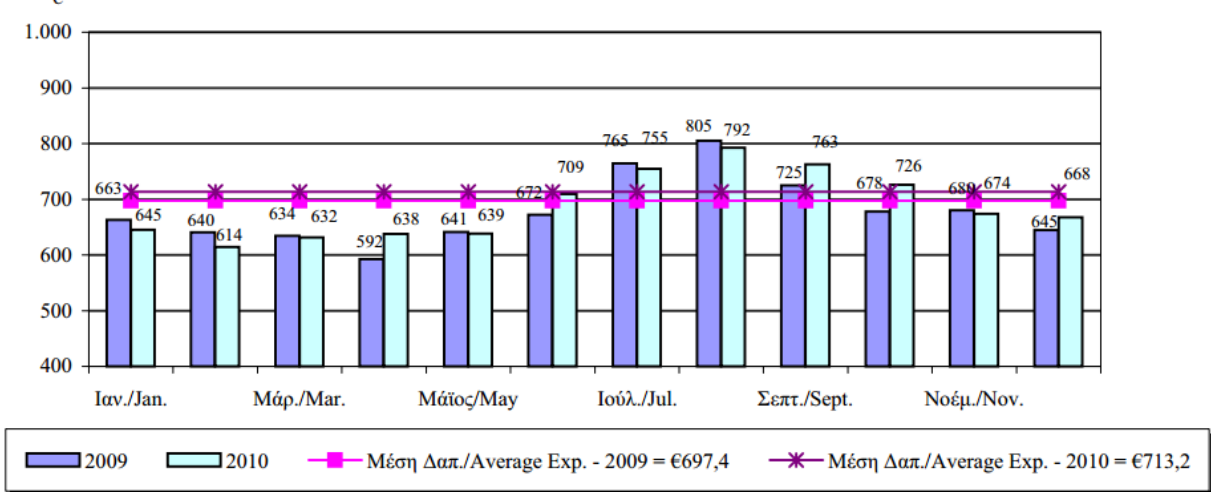
Νομίζετε ότι ο δημοσιογράφος ερμήνευσε σωστά την παραπάνω γραφική παράσταση; Να γράψετε ένα επιχειρήμα που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.



PISA 2003

3. Η Στατιστική υπηρεσία στα πλαίσια των αρμοδιοτήτων της διενεργεί έρευνες ανάμεσα στους τουρίστες που έρχονται στην Κύπρο και καταγράφει πολλά ενδιαφέροντα στοιχεία. Στην ετήσια έκθεση του 2010 για τις στατιστικές τουρισμού, έχει συμπεριλάβει το ακόλουθο διάγραμμα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4: ΚΑΤΑ ΚΕΦΑΛΗ ΔΑΠΑΝΗ ΤΟΥΡΙΣΤΩΝ (€) ΚΑΤΑ ΜΗΝΑ, 2009-2010
FIGURE 4: PER PERSON EXPENDITURE OF TOURISTS (€) BY MONTH, 2009-2010



- Σύμφωνα με τα στοιχεία από τις έρευνες του 2009 και του 2010:
- Ποιος ήταν ο πληθυσμός της έρευνας και ποιο θα μπορούσε να ήταν το δείγμα;
 - Πώς νομίζετε ότι έχουν συλλεγεί τα δεδομένα της έρευνας;
 - Να βρείτε τη χώρα της οποίας οι τουρίστες είχαν τις περισσότερες κατά κεφαλή δαπάνες το 2009. Είναι η ίδια χώρα και για το 2010;
 - Να βρείτε τις χώρες των οποίων οι τουρίστες είχαν κατά κεφαλή δαπάνες κάτω από τη μέση κατά κεφαλή δαπάνη το 2010;
 - Πόση ήταν η μέση κατά κεφαλή δαπάνη των Ελβετών για τα έτη 2009 και 2010.
 - Να σημειώσετε άλλα δύο ενδιαφέροντα στοιχεία που παρουσιάζονται στο διάγραμμα.

4. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει δεδομένα αναφορικά με τα νοικοκυριά που διαθέτουν τηλεόραση σε πέντε χώρες. Ο πίνακας παρουσιάζει, επίσης, το ποσοστό των νοικοκυριών που διαθέτουν τηλεόραση και είναι συνδρομητές καλωδιακής τηλεόρασης.



Χώρα	Αριθμός νοικοκυριών που διαθέτουν τηλεόραση	Ποσοστό όλων των νοικοκυριών που διαθέτουν τηλεόραση	Ποσοστό των νοικοκυριών που διαθέτουν τηλεόραση και είναι συνδρομητές καλωδιακής τηλεόρασης
Ιαπωνία	48,0 εκατομμύρια	99,8%	51,4%
Γαλλία	24,5 εκατομμύρια	97,0%	15,4%
Βέλγιο	4,4 εκατομμύρια	99,0%	91,7%
Ελβετία	2,8 εκατομμύρια	85,8%	98,0%
Νορβηγία	2,0 εκατομμύρια	97,2%	42,7%

Πηγή: ITU, Παγκόσμιοι Δείκτες Τηλεπικοινωνιών 2004/2005
ITU, World Telecommunication/ICT Development Report 2006

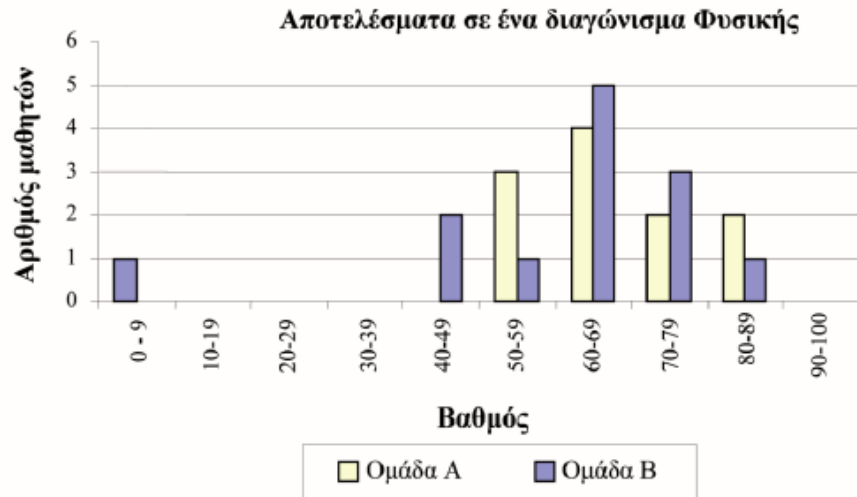
- (α) Ο πίνακας δείχνει ότι το 85,8% όλων των νοικοκυριών στην Ελβετία διαθέτουν τηλεόραση. Με βάση τις πληροφορίες του πίνακα, ποια είναι η πλησιέστερη εκτίμηση για τον συνολικό αριθμό νοικοκυριών στην Ελβετία;
- A. 2,4 εκατομμύρια B. 2,9 εκατομμύρια
- Γ. 3,3 εκατομμύρια Δ. 3,8 εκατομμύρια

Ο Κυριάκος μελέτησε τις πληροφορίες του πίνακα που αναφέρονται στη Γαλλία και στη Νορβηγία. Ο Κυριάκος υποστηρίζει: «Επειδή το ποσοστό όλων των νοικοκυριών που διαθέτουν τηλεόραση είναι περίπου το ίδιο και στις δύο χώρες, στη Νορβηγία μεγαλύτερος αριθμός νοικοκυριών είναι συνδρομητές καλωδιακής τηλεόρασης».

- (β) Να εξηγήσετε γιατί η δήλωση αυτή είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε **την απάντησή σας**.

PISA 2012

5. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τα αποτελέσματα ενός διαγωνίσματος στη Φυσική για δύο ομάδες μαθητών, που τις ονομάζουμε «ομάδα Α» και «ομάδα Β». Ο μέσος βαθμός για την ομάδα Α είναι 62 και για την ομάδα Β είναι 64,5. Οι μαθητές περνούν με επιτυχία το συγκεκριμένο διαγώνισμα, όταν ο βαθμός τους είναι 50 και πάνω.



Παρατηρώντας το διάγραμμα, ο καθηγητής ισχυρίστηκε ότι η ομάδα Β είχε καλύτερη επίδοση στο διαγώνισμα απ' ό,τι η ομάδα Α.

Οι μαθητές της ομάδας Α δεν συμφωνούν με τον καθηγητή τους και προσπαθούν να τον πείσουν ότι η ομάδα Β δεν είχε απαραίτητα καλύτερη επίδοση.

Αντλώντας στοιχεία από το διάγραμμα, να γράψετε ένα μαθηματικό επιχειρήμα, το οποίο θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές της ομάδας Α.

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε τη σχετική θέση δύο ευθειών, δύο επιπέδων, ή μιας ευθείας και ενός επιπέδου.
- Να αναγνωρίζουμε τα στερεά σχήματα και τα στοιχεία τους.
- Να υπολογίζουμε το εμβαδόν και τον όγκο ορθού πρίσματος, κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας.
- Να διερευνούμε, να εφαρμόζουμε σχέσεις και να επιλύουμε προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων στερεών και της επιφάνειας και του όγκου τους.

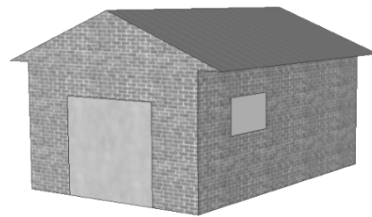


Λύση Προβλήματος

ΑΠΟΘΗΚΗ

Στη «βασική» σειρά αποθηκών που κατασκευάζει μια εταιρεία περιλαμβάνονται μοντέλα με ένα παράθυρο και μια πόρτα.

Ο Γιώργος επέλεξε το πιο κάτω μοντέλο από τη «βασική» σειρά. Στο σχήμα φαίνεται η θέση του παράθυρου και της πόρτας.

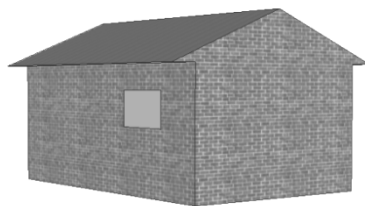


Ερώτηση 1:

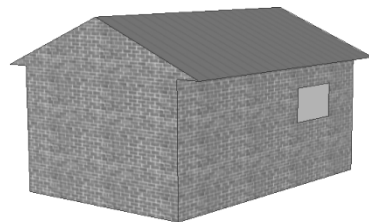
Οι πιο κάτω εικόνες παρουσιάζουν διαφορετικά μοντέλα από τη βασική σειρά, όπως φαίνονται από την πίσω πλευρά. Μόνο μια από αυτές τις εικόνες ταιριάζει με το μοντέλο που επέλεξε ο Γιώργος.

Ποιο μοντέλο επέλεξε ο Γιώργος; Να βάλετε σε κύκλο Α, Β, Γ ή Δ.

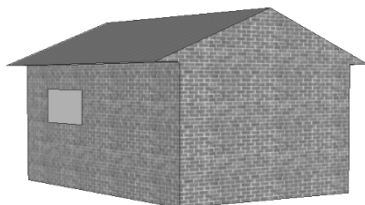
Α



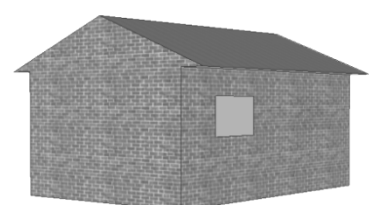
Β



Γ

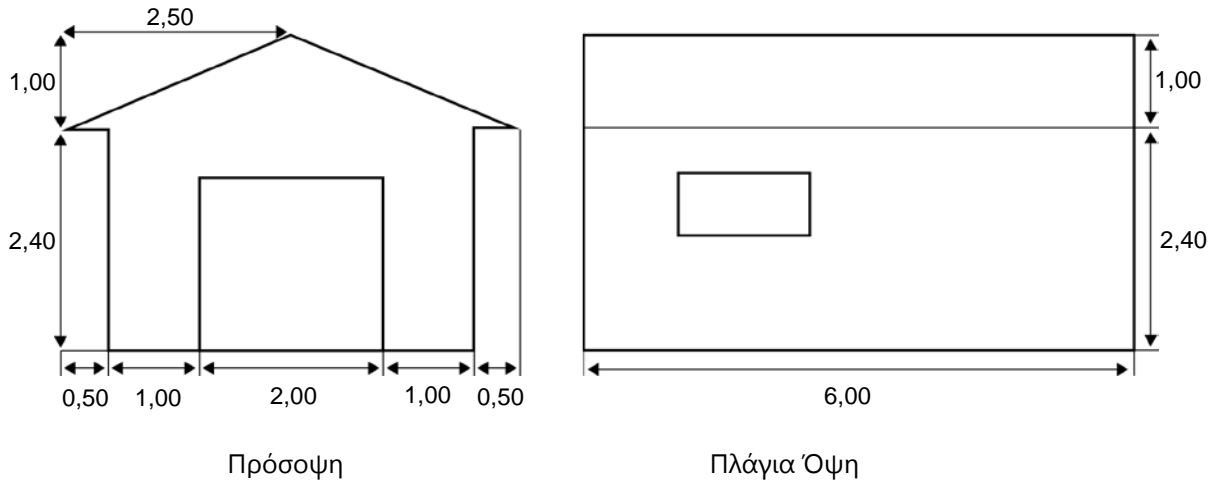


Δ



Ερώτηση 2:

Τα πιο κάτω σχέδια παρουσιάζουν τις διαστάσεις, σε μέτρα, της αποθήκης που επέλεξε ο Γιώργος.



Σημείωση: Το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα.

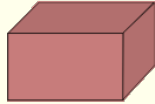
Η στέγη είναι κατασκευασμένη από δύο ίδια ορθογώνια μέρη.

Να υπολογίσετε το **συνολικό** εμβαδόν της στέγης. Να δείξετε την εργασία σας.

Έχουμε μάθει ...

- Να αναγνωρίζουμε στερεά σχήματα, όπως:

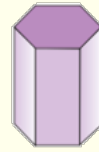
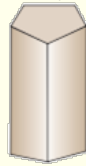
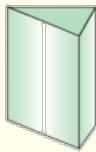
Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



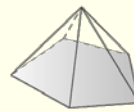
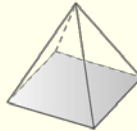
Κύβος



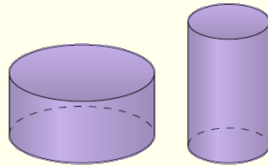
Πρίσματα



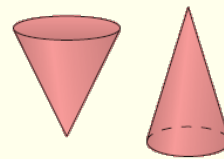
Πυραμίδες



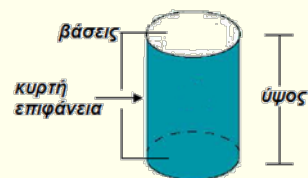
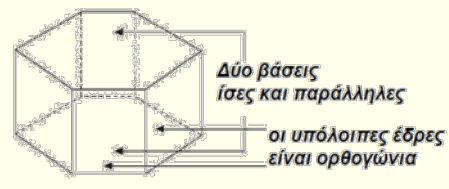
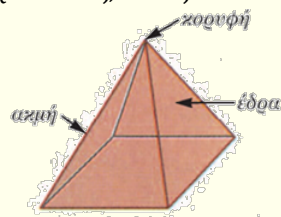
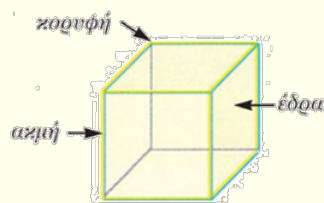
Κύλινδρος



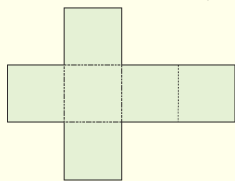
Κώνος



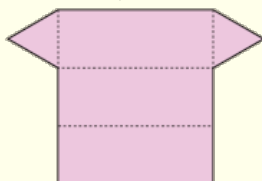
- Να αναγνωρίζουμε χαρακτηριστικά στοιχεία τους, όπως:



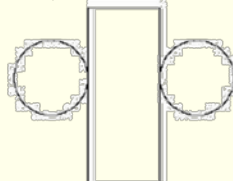
Να αναγνωρίζουμε τα αναπτύγματα στερεών σχημάτων όπως:



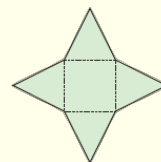
Κύβος



Πρίσμα



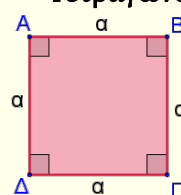
Κύλινδρος



Πυραμίδα

▪ Να υπολογίζουμε την περίμετρο και το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων όπως:

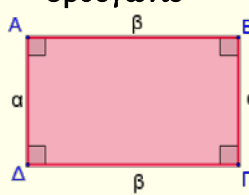
➤ **Τετράγωνο**



$$\Pi_{\text{τετραγώνου}} = 4 \cdot \alpha$$

$$E_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2$$

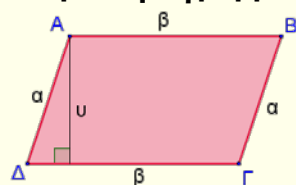
➤ **Ορθογώνιο**



$$\Pi_{\text{ορθογωνίου}} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$$

$$E_{\text{ορθογωνίου}} = \alpha \cdot \beta$$

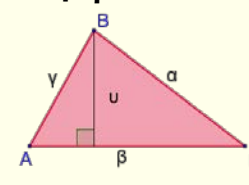
➤ **Παραλληλόγραμμο**



$$\Pi_{\text{παραλληλογράμμου}} = 2\alpha + 2\beta$$

$$E_{\text{παραλληλογράμμου}} = \beta \cdot \upsilon$$

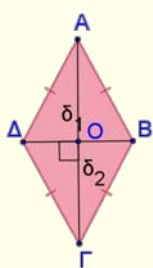
➤ **Τρίγωνο**



$$\Pi_{\text{τριγώνου}} = \alpha + \beta + \gamma$$

$$E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

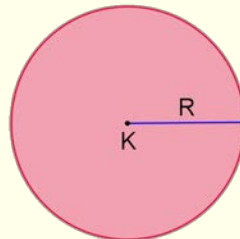
➤ **Ρόμβος**



$$\Pi_{\text{ρόμβου}} = 4 \cdot \alpha$$

$$E_{\text{ρόμβου}} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

➤ **Κύκλος**



$$\Gamma = 2\pi R$$

$$E = \pi R^2$$

Ευθείες και Επίπεδα στον Χώρο Μέτρηση Χώρου

Εξερεύνηση

Πιο κάτω παρουσιάζονται πέντε διαφορετικά σχέδια βιβλιοθήκης.



- ✓ Να μελετήσετε τις πιο πάνω εικόνες και να επιλέξετε ένα από τα σχέδια. Να προσπαθήσετε να περιγράψετε στον διπλανό σας ποια από τις πάνω βιβλιοθήκες επιλέξατε. Αυτός θα πρέπει να σας θέσει διάφορα ερωτήματα και ακολούθως θα πρέπει να μαντέψει ποια είναι η επιλογή σας από τις απαντήσεις σας.
- ✓ Να αναγνωρίσετε ευθείες και επίπεδα και να κάνετε τις παρατηρήσεις σας ως προς τις θέσεις τους.

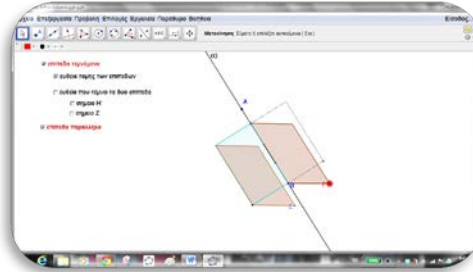
Διερεύνηση



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En8_EfthiesEpipeda.ggb».

- ✓ Να κάνετε τις κατάλληλες επιλογές, να μετακινήσετε το σημείο Γ σε διάφορες θέσεις και να μελετήσετε τις διάφορες σχέσεις μεταξύ:

- ευθείας και επιπέδου
- δύο επιπέδων



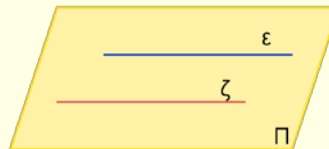
Μαθαίνω

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στον χώρο

- Δύο ευθείες ϵ και ζ του χώρου μπορεί:
 - να είναι **παράλληλες**, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

Παράδειγμα:

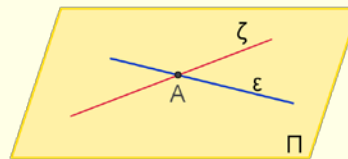
Οι ευθείες ϵ και ζ είναι παράλληλες.



- να **τέμνονται**, να ανήκουν δηλαδή στο ίδιο επίπεδο και να έχουν ένα κοινό σημείο.

Παράδειγμα:

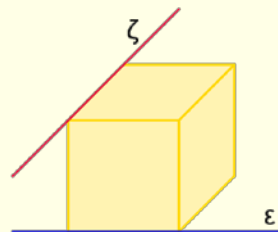
Οι ευθείες ϵ και ζ τέμνονται στο σημείο A .



- να είναι **ασύμβατες**, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

Παράδειγμα:

Οι ευθείες ϵ και ζ ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και δεν έχουν κοινό σημείο.



Τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία ορίζουν ένα μόνο επίπεδο.



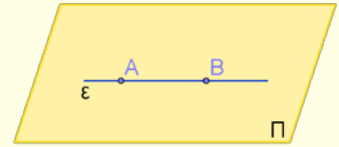
Όταν λέμε **σχετικές** θέσεις δύο σχημάτων εννοούμε όλες τις δυνατές θέσεις που μπορούν να έχουν μεταξύ τους.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

- Μια ευθεία μπορεί να **ανήκει σε ένα επίπεδο**, δηλαδή όλα τα σημεία της ανήκουν στο επίπεδο.

Παράδειγμα:

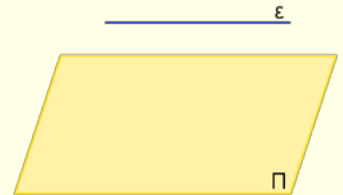
Η ευθεία ε ανήκει στο επίπεδο Π . Κάθε σημείο της ευθείας ανήκει στο επίπεδο.



- Μια ευθεία μπορεί να είναι **παράλληλη με ένα επίπεδο**, δηλαδή η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο.

Παράδειγμα:

Η ευθεία ε είναι παράλληλη με το επίπεδο Π . Η ευθεία και το επίπεδο δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

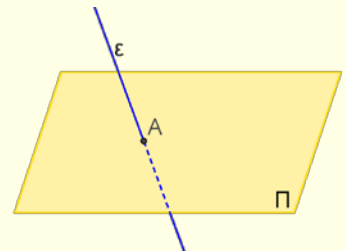


- Μια ευθεία μπορεί να **τέμνει ένα επίπεδο**, δηλαδή έχει ένα μόνο κοινό σημείο.

Το σημείο στο οποίο η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο Π λέγεται **ίχνος της ευθείας ε στο Π** .

Παράδειγμα:

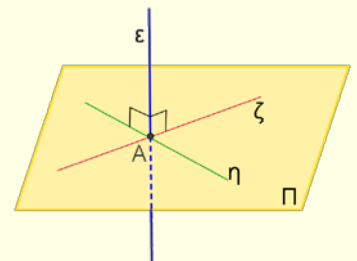
Η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο Π στο σημείο A . Η ευθεία και το επίπεδο έχουν μόνο το A κοινό σημείο.



- Μια ευθεία ε είναι **κάθετη** σε ένα επίπεδο Π , αν είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου η οποία διέρχεται από το ίχνος της ε στο Π .

Παράδειγμα:

Η ευθεία ε είναι κάθετη στις ευθείες ζ και η του επιπέδου Π . Άρα, η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο Π .

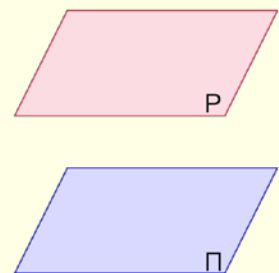


Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στον χώρο

- Δύο επίπεδα του χώρου μπορεί:
 - Να είναι **παράλληλα**, δηλαδή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

Παράδειγμα:

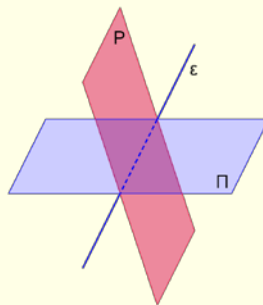
Τα επίπεδα P και Π είναι παράλληλα. Τα επίπεδα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



- Να **τέμνονται**.
Η τομή δύο επιπέδων είναι μία ευθεία.

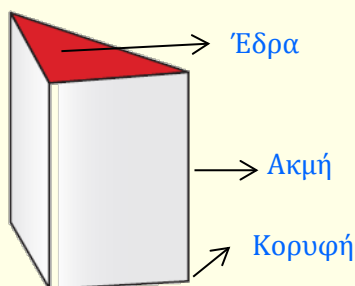
Παράδειγμα:

Τα επίπεδα P και Π τέμνονται. Η τομή τους είναι η ευθεία ϵ η οποία ανήκει και στα δύο επίπεδα.



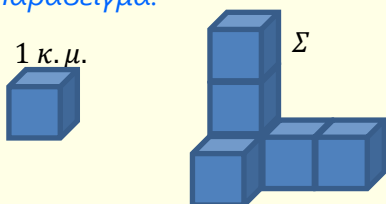
- **Πολύεδρο** είναι ένα στερεό που περικλείεται από επίπεδες επιφάνειες με κάθε επιφάνεια να ορίζεται από ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή πολύγωνα.

Καθεμιά από τις επίπεδες επιφάνειες λέγεται **έδρα** και καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα των πολυγώνων λέγεται **ακμή**. Το σημείο τομής δύο ακμών λέγεται **κορυφή**.



- Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα Σ και έναν κύβο με ακμή μήκους μία μονάδα. Ο θετικός αριθμός που δηλώνει με πόσες επαναλήψεις του κύβου ή μέρους του κύβου σχηματίζεται το στερεό σώμα Σ , λέγεται **όγκος** του σώματος.

Παράδειγμα:

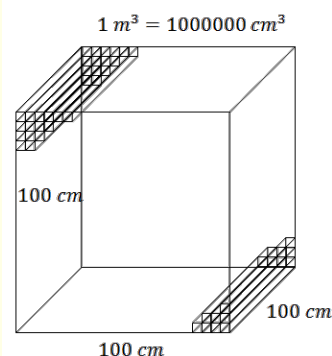


Ο όγκος του στερεού Σ είναι 6 κ. μ.

- Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι το κυβικό μέτρο (m^3), που είναι ένας κύβος με πλευρά 1 m.

Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

- το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3), που είναι ένας κύβος με πλευρά 1 dm
- το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3), που είναι ένας κύβος με πλευρά 1 cm.
- το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3), που είναι ένας κύβος με πλευρά 1 mm.



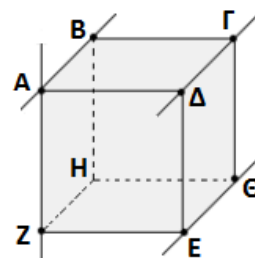
Σημείωση:

Για τη μέτρηση του όγκου των υγρών χρησιμοποιούμε συχνά το λίτρο (l). Ένα λίτρο ισούται με 1000 cm^3 (κυβικά εκατοστόμετρα). Το κυβικό εκατοστόμετρο λέγεται και χιλιοστόλιτρο (ml).

Σε κάποιες χώρες χρησιμοποιούν ως μονάδα όγκου των υγρών το γαλόνι (gal), που είναι ίσο με 4,405 l.

Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύβος. Να ονομάσετε:
- δύο παράλληλα επίπεδα
 - δύο τεμνόμενα επίπεδα
 - δύο ασύμβατες ευθείες
 - δύο ευθείες κάθετες στο επίπεδο $BΓΗ$



Λύση:

- Τα επίπεδα $ΑΒΓ$ και $ΕΖΗ$ είναι παράλληλα.
 - Τα επίπεδα $ΔΕΘ$ και $ΑΔΕ$ τέμνονται.
 - Οι ευθείες $ΑΖ$ και $ΕΘ$ είναι ασύμβατες.
 - Οι ευθείες $ΑΒ$ και $ΖΗ$ είναι κάθετες στο επίπεδο $ΒΓΗ$.
2. Μία δεξαμενή, σε ένα πρατήριο καυσίμων, έχει χωρητικότητα 15 m^3 . Αν το βυτιοφόρο μπορεί να διοχετεύει καύσιμα 50 λίτρα το λεπτό, πόσο χρόνο θα χρειαστεί η δεξαμενή για να γεμίσει, αν είναι τελείως άδεια;

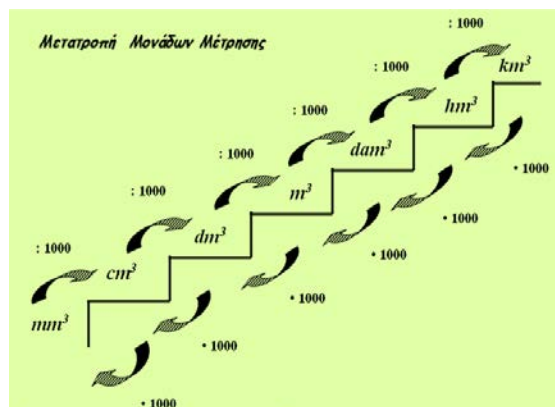
Λύση:

Για να μπορέσουμε να λύσουμε το πρόβλημα, πρέπει να μετατρέψουμε τις μονάδες μέτρησης:

Η χωρητικότητα της δεξαμενής είναι:

$$15 \text{ m}^3 = 15 \cdot 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

$$= 15\,000\,000 \text{ cm}^3$$



Το βυτιοφόρο διοχετεύει με ρυθμό:

$$50 \frac{\text{l}}{\text{min}} = 50 \cdot 1000 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}} = 50\,000 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$$

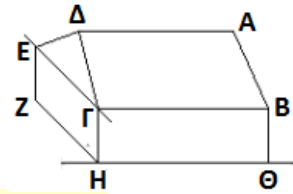
Άρα, ο χρόνος που η δεξαμενή χρειάζεται για να γεμίσει είναι:

$$\frac{15\,000\,000 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}}{50\,000 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}} = 300 \text{ min} = 6 \text{ hours}$$

Δραστηριότητες



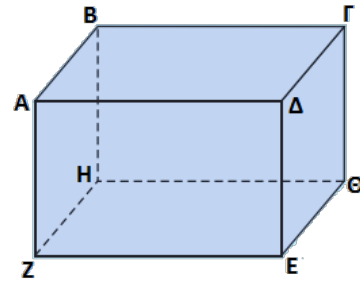
1. Με βάση το διπλανό σχήμα, να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.



- (α) Οι ευθείες $ΕΓ$ και $ΗΘ$ είναι ασύμβατες. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- (β) Τα επίπεδα $ΔΕΓ$ και $ΑΒΓ$ δεν τέμνονται. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- (γ) Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΔ$ και $ΘΗ$ ανήκουν στο επίπεδο $ΑΒΓ$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- (δ) Το στερεό έχει 10 κορυφές. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να αναγνωρίσετε στην αίθουσα διδασκαλίας σας:
- (α) δύο ευθείες παράλληλες και το επίπεδο που ορίζουν
- (β) τρεις ευθείες ανά δύο ασύμβατες
- (γ) μια ευθεία κάθετη στο επίπεδο του δαπέδου
- (δ) δύο παράλληλα επίπεδα

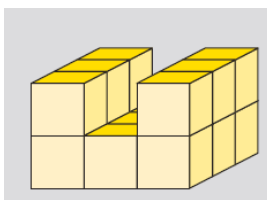
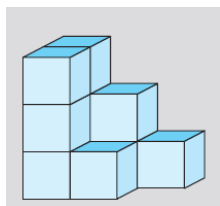
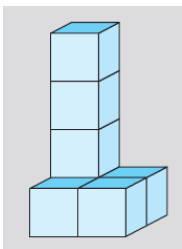
3. Στο σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Να βρείτε:
- (α) το επίπεδο που είναι παράλληλο με το επίπεδο $ΔΓΘ$
- (β) τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι κάθετα στο επίπεδο $ΒΓΘ$
- (γ) την τομή των επιπέδων $ΒΓΘ$ και $ΖΕΘ$
- (δ) την τομή του ευθύγραμμου τμήματος $ΔΕ$ με το επίπεδο $ΑΒΓ$
- (ε) δύο κορυφές του στερεού
- (στ) το πλήθος των ακμών του στερεού



4. Να υπολογίσετε τον όγκο των πιο κάτω στερεών:



1 κ. μ.



5. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

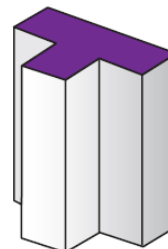
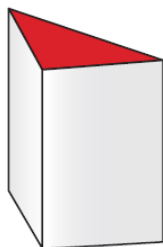
m^3	4,25		
dm^3		12	
cm^3			234

6. Ο γνωστός μαθηματικός Euler ανακάλυψε μια σχέση ανάμεσα στον αριθμό των εδρών E , των ακμών A και των κορυφών K ενός πολύεδρου. Ισχύει:

$$E + K = A + 2$$

Το μέγεθος $E + K - A$ αποκαλείται χαρακτηριστική χ του Euler.

Να επαληθεύσετε τη σχέση αυτή για τα πιο κάτω στερεά:



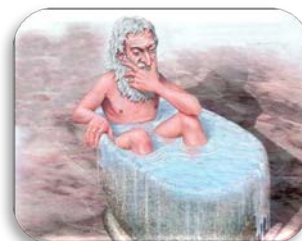
Εμβαδόν και Όγκος Ορθού Πρίσματος

Εξερεύνηση

Ο Αρχιμήδης (287 π.Χ. – 212 π.Χ.) ήταν ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς, φυσικούς και μηχανικούς της αρχαιότητας. Γεννήθηκε, και έζησε στις Συρακούσες, τη μεγάλη ελληνική αποικία της Σικελίας.

Ο Αρχιμήδης, λέγεται, ότι εφηύρε μια μέθοδο για τον προσδιορισμό του όγκου ενός αντικειμένου με ακανόνιστο σχήμα. Σύμφωνα με τον Βιτρούβιο, ο βασιλιάς κάλεσε τον Αρχιμήδη να εξετάσει αν το στέμμα του ήταν από ατόφιο χρυσάφι ή αν είχε αντικατασταθεί κάποιο μέρος με ασήμι. Ο Αρχιμήδης κατάφερε να λύσει το πρόβλημα χωρίς να καταστρέψει το στέμμα, αφού δεν θα μπορούσε να το λιώσει, μέσα σε μια κανονικού σχήματος φόρμα, προκειμένου να υπολογίσει την πυκνότητά του και την προέλευσή του.

Ο μύθος λέει πως καθώς έμπαινε στην μπανιέρα παρατήρησε ότι η στάθμη του νερού ανέβαινε και συνειδητοποίησε ότι αυτή η επίδραση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του όγκου του στέμματος. Ο Αρχιμήδης στη συνέχεια βγήκε στους δρόμους γυμνός, τόσο ενθουσιασμένος από την ανακάλυψή του που ξέχασε να ντυθεί, φωνάζοντας «Εύρηκα!». Το πείραμά του διεξήχθη με επιτυχία, αποδεικνύοντας ότι η κορώνα είχε νοθευτεί με σίδηρο.

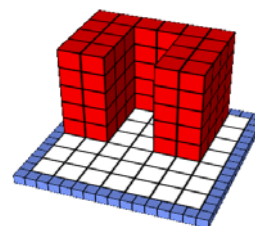


- ✓ Να εξηγήσετε τη μέθοδο που εφάρμοσε ο Αρχιμήδης για να υπολογίσει τον όγκο του στέμματος.

Διερεύνηση (1)

Να παρατηρήσετε το στερεό του διπλανού σχήματος.

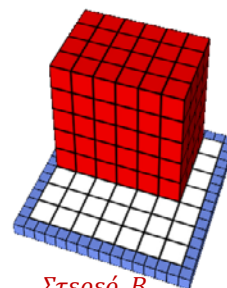
- ✓ Να αναγνωρίσετε το στερεό και να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού A με διαφορετικούς τρόπους.



Στερεό A

- ✓ Να δώσετε έναν γενικό τύπο για τον υπολογισμό του όγκου ενός πρίσματος.

- ✓ Πώς μπορείτε να υπολογίσετε την παράπλευρη επιφάνεια του στερεού; Να δώσετε έναν γενικό τύπο για τον υπολογισμό της παράπλευρης αλλά και της συνολικής επιφάνειας ενός πρίσματος.



Στερεό B

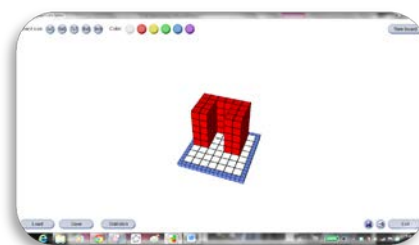
- ✓ Να απαντήσετε τα πιο πάνω ερωτήματα για το στερεό B .

- ✓ Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα νέο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διπλάσιο όγκο από το παραλληλεπίπεδο (Στερεό B); Πώς;

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο αυτό το νέο παραλληλεπίπεδο θα έχει και διπλάσια επιφάνεια.



Μπορείτε να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο με το λογισμικό *DALEST-Elica Cubix Editor*.

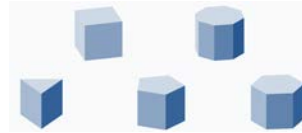


Διερεύνηση (2)

Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει κεριά σε διάφορα σχήματα, μεγέθη και αρώματα. Η επόμενη παραγγελία αφορά μερικές χιλιάδες κεριά σε σχήμα πρίσματος με βάσεις κανονικά πολύγωνα. Πολύγωνα, δηλαδή, με ίσες όλες τις πλευρές τους και όλες τις γωνίες τους. Για την κατασκευή των κεριών θα χρησιμοποιηθούν καλούπια.



Ο υπεύθυνος παραγωγής και ο πελάτης κατέληξαν στα πιο κάτω πέντε σχήματα, όπως φαίνονται δίπλα. Επιπλέον:



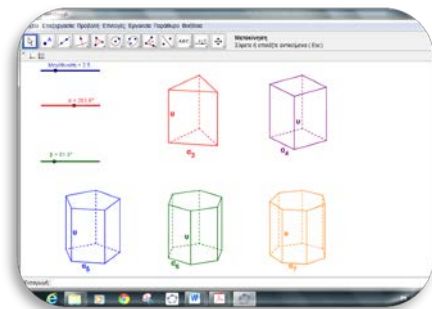
- καθένα από τα πέντε είδη κεριών θα έχει το ίδιο ύψος και το ίδιο μήκος βάσης με τα υπόλοιπα είδη,
- περιμετρικά του κάθε κεριού, θα τοποθετηθεί πλαστική μεμβράνη ενώ στη βάση θα τοποθετείται ένα χαρτόνι στο σχήμα της βάσης για να προστατεύει το κεριό.

Ο υπεύθυνος θέλει να μελετήσει πόσο πρέπει να χρεώνει το καθένα από τα πέντε είδη κεριών.

- ✓ Ποιες μετρήσεις του στερεού νομίζετε ότι θα επηρεάζουν το κόστος κατασκευής του;

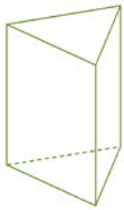


Να ανοίξετε το αρχείο «C_En8_Prismata.ggb» για να μελετήσετε το πιο πάνω σενάριο.

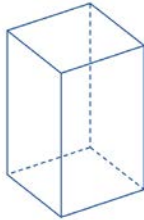


- ✓ Να περιστρέψετε τα πρίσματα. Πόσες και τι είδους επιφάνειες έχει το κάθε πρίσμα; Να μελετήσετε το σχήμα των παράπλευρων εδρών του κάθε κεριού και να βρείτε έναν τύπο για το συνολικό εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κάθε κουτιού.
- ✓ Να γράψετε μια σχέση που να υπολογίζει την παράπλευρη επιφάνειά του, την ολική επιφάνεια, καθώς και τον όγκο κάθε κεριού, σε συνάρτηση με την πλευρά της βάσης (α) και το ύψος ($υ$) του.
- ✓ Να εξετάσετε πώς ο τύπος αυτός διαφοροποιείται στην περίπτωση που η βάση δεν είναι κανονικό πολύγωνο.
- ✓ Να εξετάσετε πώς μεταβάλλεται ο όγκος ενός πρίσματος, αν το ύψος:
 - διπλασιαστεί
 - δεκαπλασιαστεί

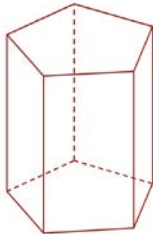
Ισχύει αυτό και για το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος;



Τριγωνικό πρίσμα



Τετραγωνικό πρίσμα

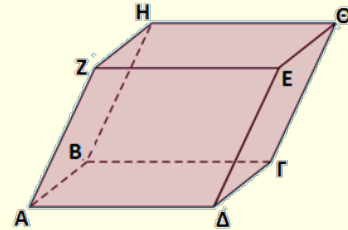


Πενταγωνικό πρίσμα

Μαθαίνω

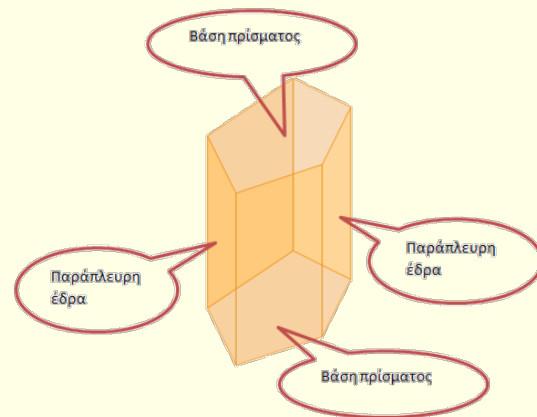
- **Πρίσμα** είναι το στερεό του οποίου:

- οι δύο έδρες του είναι παράλληλα και ίσα πολύγωνα, και ονομάζονται **βάσεις** του πρίσματος.



- οι άλλες έδρες είναι παραλληλόγραμμα και ονομάζονται **παραπλευρες έδρες**.

- **Ορθό πρίσμα** είναι το πρίσμα που οι παραπλευρες ακμές του είναι κάθετες στα επίπεδα των βάσεων.



- Οι **παραπλευρες έδρες** του ορθού πρίσματος είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

- Το **εμβαδόν της παραπλευρης επιφάνειας** (E_{π}) ενός πρίσματος είναι το άθροισμα των εμβαδών των παραπλευρων εδρών του. Είναι ίσο με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του (Π_{β}) επί το ύψος (v) του πρίσματος. Δηλαδή:

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot v$$

- Το **ολικό εμβαδόν** ενός πρίσματος ($E_{ολ}$) είναι το άθροισμα του εμβαδού της παραπλευρης επιφάνειας και των εμβαδών των δύο βάσεων του (E_{β}). Δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta}$$

- Ο **όγκος** (V) ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του (E_{β}) επί το ύψος (v), δηλαδή:

$$V = E_{\beta} \cdot v$$

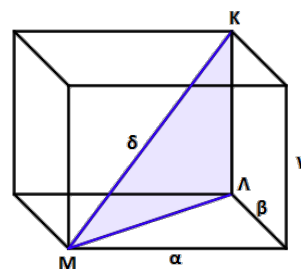
Ένα ορθό πρίσμα λέγεται κανονικό αν οι βάσεις του είναι **κανονικά** πολύγωνα. Πολύγωνα δηλαδή με ίσες όλες τους τις πλευρές και όλες τους τις γωνίες.

- **Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** ονομάζεται το πρίσμα του οποίου οι βάσεις είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

- **Διαστάσεις** (α, β, γ) ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ονομάζονται τα μήκη των τριών ακμών που έχουν κοινό το ένα άκρο τους.
- **Διαγώνιος** (δ) του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδά του.

Το τετράγωνο της διαγωνίου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τριών διαστάσεων του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, δηλαδή

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$



Απόδειξη:

Το ΛΜ είναι η διαγώνιος της βάσης. Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε $(\Lambda\text{M})^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Στο τρίγωνο ΚΛΜ η ΚΛ είναι κάθετη στη ΛΜ, γιατί ως ακμή του παραλληλεπιπέδου είναι κάθετη στη βάση του. Επομένως είναι και κάθετη σε κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το Λ και ανήκει στη βάση του.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ.

$$(\text{KM})^2 = (\Lambda\text{M})^2 + (\text{KL})^2, (\text{KM}) = \delta$$

Άρα, $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$E_{ολ} = 2(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma)$$

- Ο όγκος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι:
 $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$.

- **Κύβος** είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου οι τρεις διαστάσεις είναι ίσες (α).

Οι έδρες του είναι όλες τετράγωνα με πλευρά α .

- Η διαγώνιος δ , ισούται με:

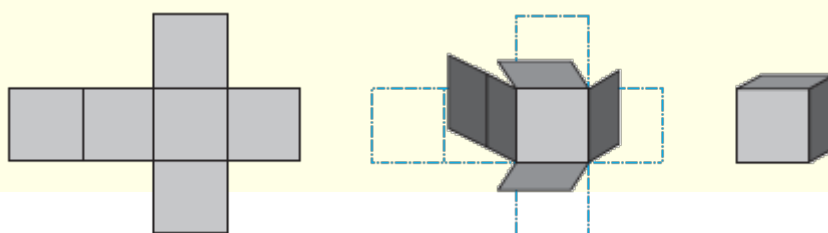
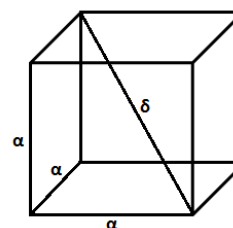
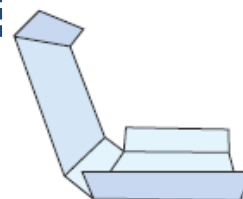
$$\delta = \alpha\sqrt{3}$$

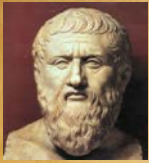
- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κύβου είναι:

$$E_{ολ} = 6\alpha^2$$

- Ο όγκος ενός κύβου είναι:

$$V = \alpha^3$$





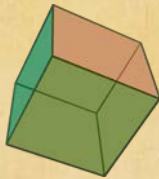
Πλατωνικό στερεό λέγεται ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο, του οποίου όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες. Επομένως, όλες οι ακμές του είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα, καθώς επίσης και όλες οι επίπεδες γωνίες των εδρών του είναι ίσες.

Υπάρχουν μόνο πέντε τέτοια πολύεδρα:

Τετράεδρο



Κύβος



Οκτάεδρο



Δωδεκάεδρο



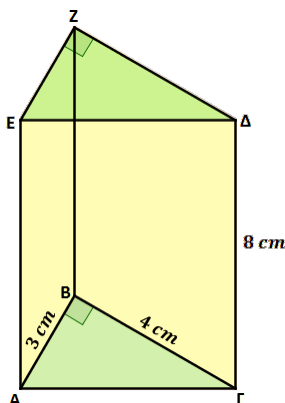
Εικοσάεδρο



Τα Πλατωνικά στερεά ονομάστηκαν έτσι, επειδή μελετήθηκαν στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Στη φιλοσοφία του Πλάτωνα, τα στερεά αυτά συμβόλιζαν τα δομικά στοιχεία του σύμπαντος: το τετράεδρο τη φωτιά, ο κύβος τη γη, το εικοσάεδρο το νερό, το οκτάεδρο τον αέρα και το δωδεκάεδρο τον αιθέρα. Ο Ευκλείδης ασχολείται με αυτά στο 13^ο βιβλίο των Στοιχείων του, στο οποίο αποδεικνύει ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε κυρτά κανονικά πολύεδρα και εκφράζεται η ακμή τους ως συνάρτηση της περιγεγραμμένης σφαίρας.

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο ορθού πρίσματος του οποίου το ύψος είναι 8 cm και οι βάσεις του είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm , αντίστοιχα.



Λύση:

Υπολογίζουμε την υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$:

$$\begin{aligned} (A\Gamma)^2 &= 3^2 + 4^2 \Rightarrow (A\Gamma)^2 = 9 + 16 \\ &\Rightarrow (A\Gamma)^2 = 25 \\ &\Rightarrow A\Gamma = \sqrt{25} \\ &\Rightarrow A\Gamma = 5\text{ cm} \end{aligned}$$

Η βάση είναι τρίγωνο. Άρα,

$$\begin{aligned} P_\beta &= AB + B\Gamma + \Gamma A \\ &= 3 + 4 + 5 \\ &= 12\text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\beta &= \frac{\beta \cdot \nu}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 4}{2} \\ &= 6\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι: $E_\pi = P_\beta \cdot \nu = 12 \cdot 8$

$$\begin{aligned} &= 96 \text{ cm}^2 \\ \text{Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι: } E_{ολ} &= E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta} \\ &= 96 + 2 \cdot 6 \\ &= 108 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ο όγκος του ορθού πρίσματος είναι: } V &= E_{\beta} \cdot v \\ &= 6 \cdot 8 \\ &= 48 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

2. Ένα ενυδρείο έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Οι εσωτερικές διαστάσεις της βάσης του είναι 85 cm και 60 cm και το ύψος του είναι 45 cm . Να υπολογίσετε πόσα λίτρα νερό θα χρειαστούν, για να γεμίσει το ενυδρείο κατά τα $\frac{8}{9}$ του.



Λύση:

$$\begin{aligned} \text{Υπολογίζουμε τον όγκο του παραλληλεπίπεδου: } V &= \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \\ &= 85 \cdot 60 \cdot 45 \\ &= 229\,500 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

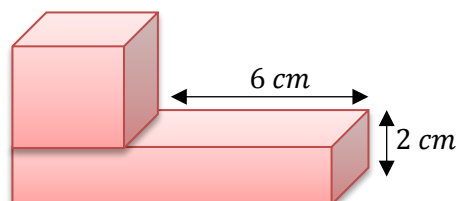
$$\begin{aligned} \text{Ο όγκος του νερού είναι: } V_{\text{νερού}} &= \frac{8}{9} \cdot 229\,500 \\ &= 204\,000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Γνωρίζουμε ότι } 1 \text{ cm}^3 &= 1 \text{ ml} = \frac{1}{1000} \text{ l. Άρα, } V_{\text{νερού}} = \frac{204\,000}{1000} \\ &= 204 \text{ l} \end{aligned}$$

Δραστηριότητες



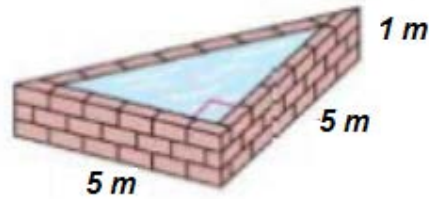
1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή $a = 5 \text{ cm}$.
2. Ο πυθμένας μιας δεξαμενής έχει εμβαδόν 1250 m^2 . Πόσο πρέπει να αυξήσουμε το βάθος της, για να αυξηθεί η χωρητικότητά της κατά 2500 m^3 ;
3. Να υπολογίσετε τον όγκο του διπλανού στερεού αν ο όγκος του κύβου είναι 64 cm^3 .



4. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $V = 420 \text{ cm}^3$. Οι διαστάσεις της βάσης του είναι 6 cm και 7 cm , αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:
- το ύψος
 - το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας
 - το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραλληλεπιπέδου
5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.
- Αν διπλασιάσουμε την ακμή ενός κύβου, τότε ο όγκος του οκταπλασιάζεται. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Αν διπλασιάσουμε το ύψος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, τότε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του διπλασιάζεται. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όλες τις διαγώνιές του ίσες. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Σε κάθε ορθό πρίσμα οι παράπλευρες έδρες του είναι ίσα ορθογώνια. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Οι παράπλευρες έδρες ενός τριγωνικού πρίσματος μπορεί να είναι δύο τετράγωνα και ένα ορθογώνιο. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
6. Το ύψος ενός τετραγωνικού πρίσματος είναι 15 cm και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του 540 cm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος.
7. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου του οποίου οι διαστάσεις είναι διπλάσιες από τις διαστάσεις άλλου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με όγκο 120 cm^3 .
8. Αν η διαγώνιος κύβου είναι $\delta = 5\sqrt{3} \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο του.
9. Μια δεξαμενή καυσίμων έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 2 m , 5 m και 6 m . Πόσες ώρες θα χρειαστούν για να γεμίσει, όταν η παροχή που διοχετεύει τα καύσιμα στη δεξαμενή έχει ροή 4 m^3 την ώρα;
10. Το μήκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι 13 m , το πλάτος 9 m και το ύψος $9,8 \text{ m}$. Αν ελαττώσουμε το πλάτος κατά 2 m και αυξήσουμε το ύψος κατά $1,9 \text{ m}$, πόσο πρέπει να μεταβληθεί το μήκος ώστε ο όγκος να παραμείνει ο ίδιος;

11. Σε οικόπεδο θα γίνει εκσκαφή σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 18 m , 10 m και $2,5\text{ m}$. Η μεταφορά των χωμάτων θα γίνει με φορτηγά χωρητικότητας 15 m^3 . Αν η εταιρεία χρεώνει €4,5 για το κάθε κυβικό μέτρο εκσκαφής, ενώ κάθε διαδρομή του φορτηγού στοιχίζει €48, να υπολογίσετε πόσο θα στοιχίσει η εκσκαφή και μεταφορά των χωμάτων.

12. Η εσωτερική επιφάνεια της λίμνης, που φαίνεται στη διπλανή εικόνα, πρέπει να στεγανοποιηθεί ώστε να μην υπάρχει διαρροή νερού. Να υπολογίσετε το κόστος στεγανοποίησής της, αν γνωρίζετε ότι το υλικό πωλείται €30 η συσκευασία (κάθε συσκευασία καλύπτει 12 m^2) και ο τεχνίτης χρεώνει για την εφαρμογή €1,20 το τετραγωνικό μέτρο. (Να θεωρήσετε ότι οι διαστάσεις που φαίνονται στην εικόνα είναι οι εσωτερικές διαστάσεις της λίμνης).



13. Μια εταιρεία θέλει να κατασκευάσει ένα κουτί από φύλλο αλουμινίου. Το κουτί πρέπει να είναι σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, με βάση τετράγωνο και όγκο 16 dm^3 .

(α) Πόσα διαφορετικά κουτιά μπορεί να κατασκευάσει και με ποιες διαστάσεις αν οι διαστάσεις του πρέπει να είναι φυσικοί αριθμοί;

(β) Ποιο από κουτιά έχει το μικρότερο κόστος ως προς την ποσότητα του αλουμινίου που χρειάζεται;

Εμβαδόν και Όγκος Κανονικής Τετραγωνικής Πυραμίδας

Εξερεύνηση



Η Πυραμίδα του Λούβρου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα αξιοθέατα της πόλης του Παρισιού. Είναι μια μεγάλη γυάλινη και μεταλλική πυραμίδα που μαζί με τρεις μικρότερες, βρίσκεται στην αυλή του Μουσείου του Λούβρου στο Παρίσι. Χρησιμοποιείται ως η κύρια είσοδος του μουσείου όπου οι επισκέπτες μπορούν να θαυμάσουν διάσημα καλλιτεχνήματα όπως τη Νίκη της Σαμοθράκης, την Αφροδίτη της Μήλου, τα αριστουργήματα των Rembrandt, El Greco, Goya και Velazquez και, φυσικά, την περίφημη Μόνα Λίζα του Leonardo da Vinci.

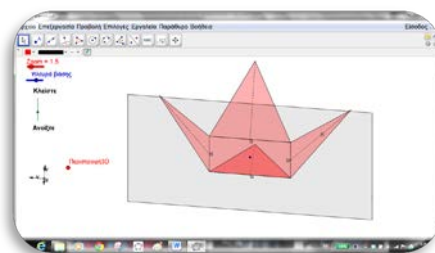
Ο Γάλλος πρόεδρος Φρανσουά Μιτεράν ανέθεσε το 1983 στον αρχιτέκτονα I.M. Πεί την κατασκευή της πυραμίδας, η οποία ολοκληρώθηκε το 1989. Η πυραμίδα, η οποία αποτελείται μονάχα από σιδερένια και γυάλινα μέρη, έχει ύψος $20,6\text{ m}$. Η βάση είναι τετράγωνο με πλευρά 35 m .

- ✓ Να μελετήσετε την πυραμίδα του Λούβρου και να εξετάσετε κατά πόσο τα στοιχεία που σας έχουν δοθεί είναι αρκετά για να υπολογίσετε τη συνολική γυάλινη επιφάνειά της.

Διερεύνηση (1)



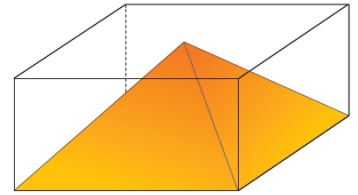
Να ανοίξετε το αρχείο «C_En8_Pyramida.ggb» για να μελετήσετε την πυραμίδα και το ανάπτυσμά της.



- ✓ Να παρατηρήσετε τι σχήμα έχουν οι επιφάνειες μιας τετραγωνικής πυραμίδας.
- ✓ Να βρείτε τον τύπο που υπολογίζει το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αλλά και της ολικής της επιφάνειας.

Διερεύνηση (2)

Ένας γλύπτης έχει πάρει παραγγελία να κατασκευάσει το διπλανό γλυπτό για τον κήπο μιας έπαυλης. Μέσα σε ένα γυάλινο πρίσμα πρέπει να τοποθετήσει μια τετραγωνική πυραμίδα. Η πλευρά της πυραμίδας πρέπει να είναι ίση με την πλευρά του πρίσματος και η κορυφή της να εφάπτεται της πάνω βάσης του πρίσματος.

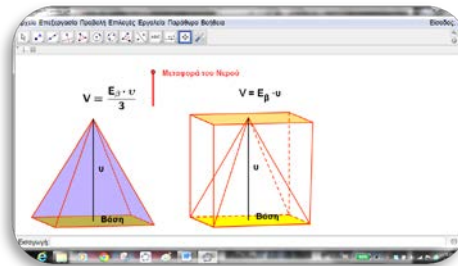


Ο γλύπτης θέλει να γεμίσει τον χώρο που δεν καλύπτει η πυραμίδα με ένα ειδικό υγρό, το οποίο θα φωσφορίζει στο σκοτάδι και στον ειδικά διαμορφωμένο φωτισμό. Επειδή το υγρό αυτό είναι ιδιαίτερα ακριβό, θέλει να παραγγείλει την ακριβή ποσότητα υγρού.

- ✓ Να μελετήσετε το πιο πάνω σενάριο και να σκεφτείτε τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να υπολογιστεί ο όγκος του υγρού εκ των προτέρων. Ποιες μετρήσεις του γλυπτού χρειάζεται για να υπολογίσει με ακρίβεια;



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En8_ogkosPyramidas.ggb» για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



- ✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα, για να μεταφέρετε το υγρό, από την πυραμίδα, στο πρίσμα που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Να παρατηρήσετε τη σχέση μεταξύ των όγκων των δύο στερεών.
- ✓ Να βρείτε τον τύπο που υπολογίζει τον όγκο της πυραμίδας.
- ✓ Να βρείτε τον όγκο του στερεού που απομένει αν αφαιρέσουμε την πυραμίδα.

Μπορείτε να μελετήσετε την πιο πάνω δραστηριότητα με τη βοήθεια των στερεών εποπτικών μέσων.

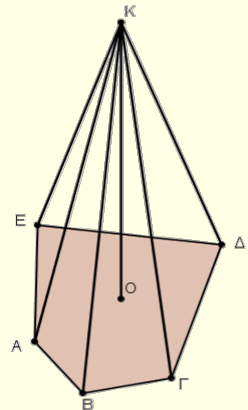


Μαθαίνω

- **Πυραμίδα** ονομάζεται το στερεό του οποίου μια έδρα είναι πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.
 - Το πολύγωνο ονομάζεται **βάση** της πυραμίδας.
 - Η κοινή κορυφή των τριγώνων ονομάζεται **κορυφή** της πυραμίδας.
 - Οι τριγωνικές έδρες της πυραμίδας, που έχουν κοινή κορυφή, ονομάζονται **παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας.
 - Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από την κορυφή της πυραμίδας και είναι κάθετο στη βάση της ονομάζεται **ύψος (v)** της πυραμίδας.

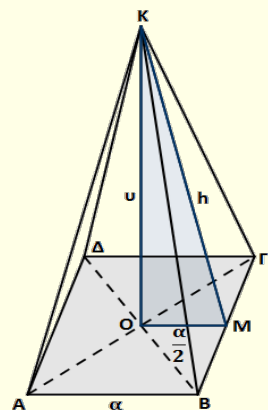
Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο $ABΓΔΕ$ είναι η βάση της πυραμίδας, το σημείο K είναι η κορυφή της, τα τρίγωνα $KAB, KBΓ, KΓΔ, KΔΕ$ και KEA είναι οι παράπλευρες έδρες της και το ευθύγραμμο τμήμα KO είναι το ύψος της πυραμίδας.



- **Κανονική τετραγωνική πυραμίδα** ονομάζεται το στερεό του οποίου μία έδρα (**βάση** της πυραμίδας) είναι τετράγωνο και οι άλλες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα ίσα μεταξύ τους με κοινή κορυφή (**παράπλευρες έδρες**).

- Το ύψος μιας παράπλευρης έδρας της πυραμίδας ονομάζεται **παράπλευρο ύψος ή απόστημα (h)** της πυραμίδας.
- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι $E_{\pi} = \frac{\pi_{\beta} \cdot h}{2}$ και της ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta}$.
- Ο **όγκος** της πυραμίδας είναι $V = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3}$.



Παραδείγματα

1. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 64 cm^2 και παράπλευρο ύψος 12 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

Λύση:

Υπολογίζουμε την πλευρά της βάσης της πυραμίδας:

$$E_{\beta} = 64 \Rightarrow \alpha^2 = 64 \\ \Rightarrow \alpha = 8 \text{ cm}$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίσουμε το ύψος της πυραμίδας:

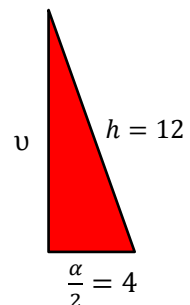
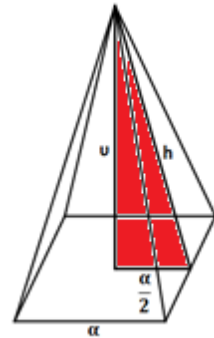
$$v^2 + 4^2 = 12^2 \\ \Rightarrow v^2 = 144 - 16 \\ \Rightarrow v = \sqrt{128} \\ \Rightarrow v = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

Υπολογίζουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας:

$$E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{2} = 192 \text{ cm}^2 \quad E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} \\ E_{ολ} = 192 + 64 = 256 \text{ cm}^2$$

Ο όγκος της πυραμίδας είναι:

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3} \\ = \frac{64 \cdot 8\sqrt{2}}{3} \\ = \frac{512\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$



2. Το διπλανό στερεό είναι μια ξύλινη κατασκευή. Να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του στερεού.

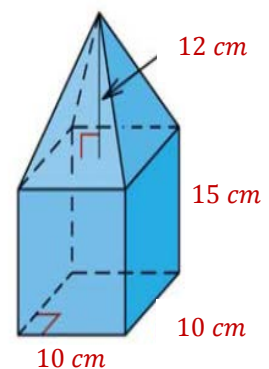
Λύση:

Η συνολική επιφάνεια του στερεού είναι το άθροισμα των επιφανειών των εδρών που το περικλείουν. Δηλαδή, η βάση του πρίσματος, η παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος και η παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας. Άρα,

$$E_{\text{συνολικό}} = (E_{\beta} + E_{\pi}) \text{ πρίσματος} + E_{\pi} \text{ πυραμίδας}$$

Για το πρίσμα έχουμε:

$$E_{\beta} = \alpha \cdot \beta \\ = 10 \cdot 10 \\ = 100 \text{ cm}^2 \quad E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot v \\ = (4 \cdot 10) \cdot 15 \\ = 600 \text{ cm}^2$$



Για να υπολογίσουμε την παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας χρειάζεται να υπολογίσουμε αρχικά το απόστημα με Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\begin{aligned} 12^2 + 5^2 &= h^2 \\ \Rightarrow h^2 &= 144 + 25 \\ \Rightarrow h &= \sqrt{169} \\ \Rightarrow h &= 13 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\pi} &= \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} \\ &= \frac{40 \cdot 13}{2} \\ &= 20 \cdot 13 \\ &= 260 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

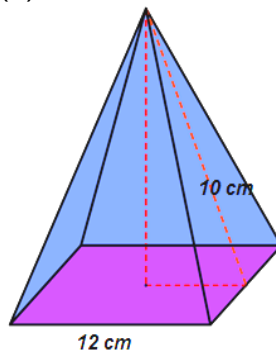
$$\begin{aligned} \text{Άρα, } E_{\text{συνολικό}} &= (E_{\beta} + E_{\pi}) \text{ Παραλληλεπίπεδου} + E_{\pi} \text{ Πυραμίδας} \\ &= 100 + 600 + 260 \\ &= 960 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

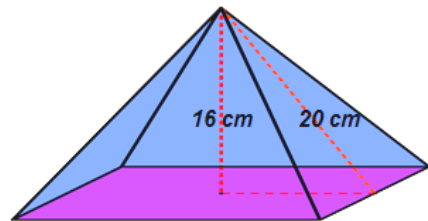


1. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας των πιο κάτω τετραγωνικών πυραμίδων.

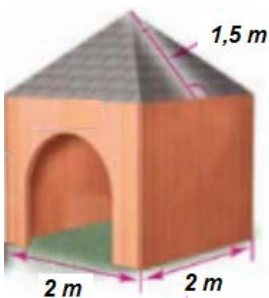
(α)



(β)

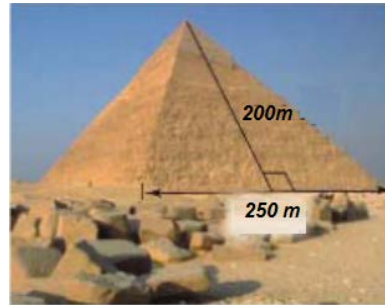


2. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8 cm και ύψος 3 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.



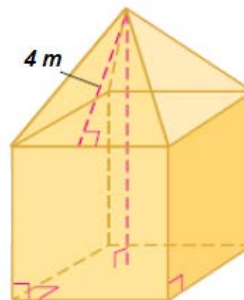
3. Η στέγη στο διπλανό σπιτάκι σκύλου έχει σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας. Για να μη στάζει η στέγη, πρέπει να στεγανοποιηθεί με υλικό που κοστίζει €2,20 ανά m^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του υλικού που χρειάζεται για να καλυφθεί η στέγη και το κόστος αγοράς του.

4. Μια τετραγωνική πυραμίδα στην Αίγυπτο έχει διαστάσεις όπως φαίνονται στη διπλανή φωτογραφία. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.



5. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 9 cm . Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας είναι 279 cm^2 . Να υπολογίσετε το απόστημα της πυραμίδας.
6. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας ισούται με 144 cm^2 και το παράπλευρο ύψος της είναι 8 cm . Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

7. Η διπλανή ξύλινη κατασκευή αποτελείται από έναν κύβο και μια τετραγωνική πυραμίδα. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας της κατασκευής, αν ο κύβος έχει όγκο 216 m^3 .



Εμβαδόν και Όγκος Κυλίνδρου

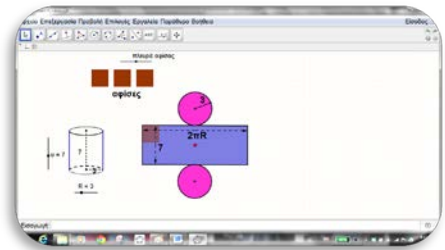
Διερεύνηση (1)

Ένας δήμος τοποθέτησε στην κεντρική πλατεία μια κυλινδρική κολόνα, η οποία χρησιμεύει στην προβολή των εκδηλώσεων που πραγματοποιούνται εντός των ορίων του Δήμου. Η κολόνα έχει ύψος 7 m και ακτίνα 3 m . Στην κυρτή της επιφάνεια μπορούν να αναρτηθούν μεγάλες τετράγωνες αφίσες με πλευρά 3 m .

- ✓ Να βρείτε πόσες το πολύ αφίσες μπορούν να τοποθετηθούν στην κολόνα (χωρίς να καλύπτει η μία την άλλη).



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En8_EpifaneiaKylidrou.gb» για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



- ✓ Να μελετήσετε το ανάπτυγμα του κυλίνδρου και να περιγράψετε από ποιες επιφάνειες αποτελείται.
- ✓ Να μετακινήσετε τους δρομείς, μεταβάλλοντας το ύψος και την ακτίνα του κυλίνδρου και να βρείτε τους τύπους που υπολογίζουν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου.

Επειδή τον τελευταίο καιρό υπάρχουν, όλο και περισσότερες εκδηλώσεις που χρειάζεται να προβληθούν, ο Δήμος σχεδιάζει να τοποθετήσει ακόμη μία κολόνα η οποία να έχει τη διπλάσια παράπλευρη επιφάνεια από την πρώτη κολόνα.

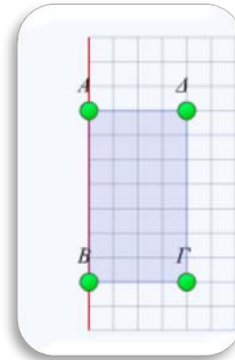
- ✓ Ο επιστάτης του Δήμου ισχυρίζεται ότι αν διπλασιαστεί το ύψος ή η διάμετρος της κολόνας θα διπλασιαστεί η παράπλευρη επιφάνειάς της. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

Διερεύνηση (2)

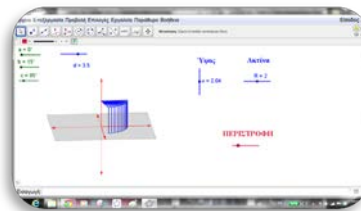
Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26_Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)_1.0».



- ✓ Να επιλέξετε την «ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Κύλινδρος» και να ακολουθήσετε τις οδηγίες των παραγράφων 1.1, 1.2 και 1.3.

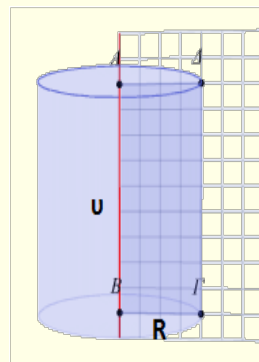


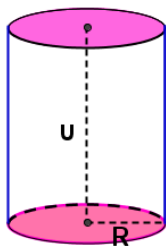
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο «C_En8_Kylidros.ggb» για να μελετήσετε τον κύλινδρο.



Μαθαίνω

- **Ορθός κύλινδρος** ή **κύλινδρος** ονομάζεται το στερεό που παράγεται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο εκτελεί μια πλήρη περιστροφή στον χώρο γύρω από μια πλευρά του.
- Ένας κύλινδρος αποτελείται από
 - δύο ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους που ονομάζονται **βάσεις** και
 - την **κυρτή επιφάνεια**, που, αν την ξετυλίξουμε, θα δούμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου.
 - Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** (v) του κυλίνδρου.
 - Η ακτίνα (R) των βάσεων ονομάζεται και **ακτίνα του κυλίνδρου**.





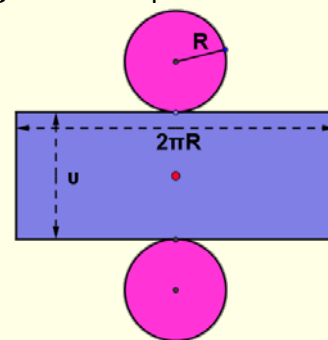
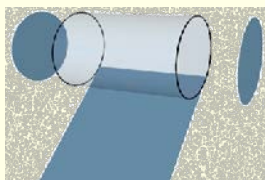
- Το εμβαδόν της **κυρτής επιφάνειας** (E_{κ}) του κυλίνδρου είναι

$$E_{\kappa} = 2\pi Rv$$

και της **ολικής επιφάνειας** ($E_{ολ}$)

$$E_{ολ} = E_{\kappa} + 2E_{\beta} \text{ ή}$$

$$E_{ολ} = 2\pi Rv + 2\pi R^2.$$



- Ο **όγκος** (V) του κυλίνδρου είναι $V = \pi R^2 v$.

Παραδείγματα

- Οι κονσέρβες μιας εταιρείας έχουν σχήμα κυλίνδρου με ύψος 12 cm και ακτίνα βάσης 5 cm , όπως φαίνεται στο σχήμα. Παραγγέλθηκαν στο τυπογραφείο 1000 ετικέτες που θα καλύψουν την κυρτή επιφάνεια της κάθε κονσέρβας, όπως φαίνεται στην εικόνα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χαρτιού που θα χρειαστεί για να τυπωθούν οι ετικέτες.



Λύση:

Κάθε ετικέτα θα καλύπτει την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου.

$$E_{\kappa} = 2\pi Rv$$

$$= 2\pi \cdot 5 \cdot 12$$

$$= 120\pi$$

$$\cong 376,8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Συνολικό εμβαδόν χαρτιού: } 1000 \cdot 376,8 = 376800 \text{ cm}^2$$

$$= 3,768 \text{ m}^2.$$

- Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 4 cm και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι $40\pi \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε:
 - το ύψος του κυλίνδρου,
 - τον όγκο του κυλίνδρου.

Λύση:

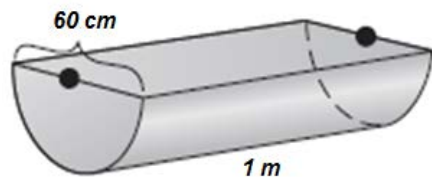
(α) Υπολογίζουμε το ύψος του κυλίνδρου: $E_k = 40\pi$
 $2\pi Rv = 40\pi$
 $2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot v = 40\pi$
 $\Rightarrow 8\pi v = 40\pi$
 $\Rightarrow v = \frac{40\pi}{8\pi}$
 $\Rightarrow v = 5 \text{ cm}$

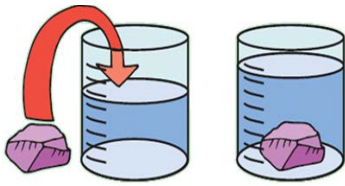
(β) Ο όγκος του κυλίνδρου είναι: $V = \pi R^2 v$
 $= \pi \cdot 4^2 \cdot 5$
 $= 80\pi \text{ cm}^3$

Δραστηριότητες



- Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 5 cm και ύψος 8 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου, όταν η διάμετρος της βάσης του είναι ίση με 6 cm και το ύψος του διπλάσιο της ακτίνας του.
- Το κάλυμμα μιας λάμπας, όπως φαίνεται στο σχήμα, έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 75 cm και διάμετρο 30 cm . Το κάλυμμα κατασκευάζεται από ειδικό ύφασμα που καλύπτει την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου και κοστίζει $30 \text{ σεντ}/\text{m}^2$. Να υπολογίσετε το κόστος κατασκευής 100 τέτοιων καλυμμάτων.
- Ένα κυλινδρικό κουτί, ανοικτό από πάνω, έχει ύψος 12 cm και ακτίνα βάσης 8 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας.
- Το διπλανό δοχείο σε σχήμα (μισού κυλίνδρου) χρησιμοποιείται για να πίνουν νερό τα ζώα. Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού (σε λίτρα) που χωρεί στο δοχείο. (Οι διαστάσεις που φαίνονται στην εικόνα είναι οι διαστάσεις του εσωτερικού χώρου που γεμίζει με νερό).

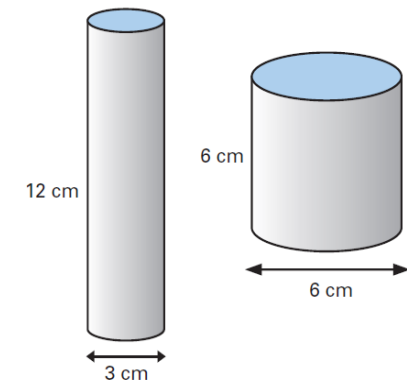




6. Για να υπολογίσει τον όγκο μιας πέτρας ο Αντρέας χρησιμοποίησε ένα κυλινδρικό δοχείο, όπως φαίνεται στο σχήμα, με ακτίνα 10 cm . Έβαλε μέσα στον κύλινδρο υγρό η στάθμη του οποίου έφτασε μέχρι 12 cm από τη βάση του δοχείου. Ακολουθώντας τοποθέτησε μέσα την πέτρα και παρατήρησε ότι η στάθμη του δοχείου ανέβηκε στα 16 cm από τη βάση. Να υπολογίσετε τον όγκο της πέτρας.

7. Ο Μάνος ισχυρίζεται ότι τα δύο κυλινδρικά δοχεία έχουν την ίδια χωρητικότητα.

«Αφού η ακτίνα του δεύτερου κυλίνδρου είναι διπλάσια από την ακτίνα του πρώτου κυλίνδρου και το ύψος του πρώτου είναι διπλάσιο από το ύψος του δεύτερου, τα δύο δοχεία θα έχουν την ίδια χωρητικότητα».

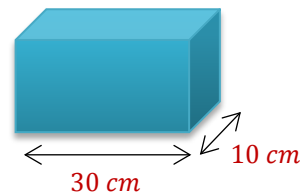
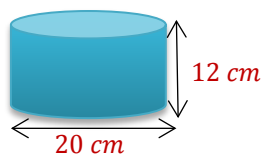


(Οι διαστάσεις είναι οι εσωτερικές διαστάσεις των κυλίνδρων).

Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού.

8. Ένας κύλινδρος έχει όγκο ίσο με $175\pi\text{ cm}^3$. Αν το ύψος του είναι ίσο με 7 cm , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

9. Το πρώτο δοχείο είναι γεμάτο νερό. Αν αδειάσουμε το νερό στο δεύτερο δοχείο, να βρείτε μέχρι ποιο ύψος θα φθάσει.



Εμβαδόν και Όγκος Κώνου

Διερεύνηση (1)

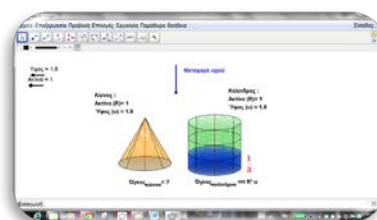
Ο κύριος Νικόλας θέλει να χρησιμοποιήσει μία νέα συσκευασία για σερβίρισμα του καλαμποκιού. Θέλει να μελετήσει τη χωρητικότητα της νέας συσκευασίας και να αποφασίσει την τιμή στην οποία θα το πωλεί.

- ✓ Να εισηγηθείτε τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να υπολογίσει ή να εκτιμήσει τη χωρητικότητα ενός κωνικού κουτιού. Να εξετάσετε από ποιες μετρήσεις εξαρτάται η χωρητικότητα του κουτιού.



Να ανοίξετε το αρχείο [«C_En8_OgkosKonou.ggb»](#) για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.

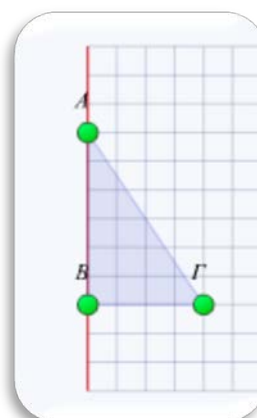
- ✓ Ποια είναι η σχέση που συνδέει τον όγκο του κώνου με τον όγκο του κυλίνδρου;



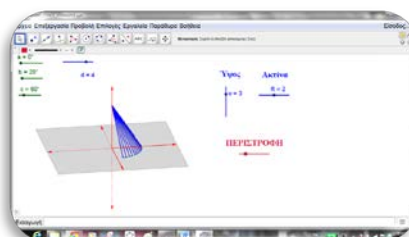
Διερεύνηση (2)

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο [«ΑΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26_Στερεά εκ περιστροφής \(Κύλινδρος, Κώνος\)_1.0»](#).

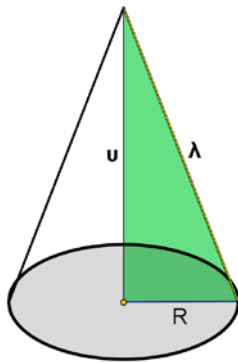
- ✓ Να επιλέξετε την [«ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Κώνος»](#) και να ακολουθήσετε τις οδηγίες των παραγράφων 2.1, 2.2 και 2.3.



Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο [«C_En8_Konos.ggb»](#) για να μελετήσετε τον κώνο.



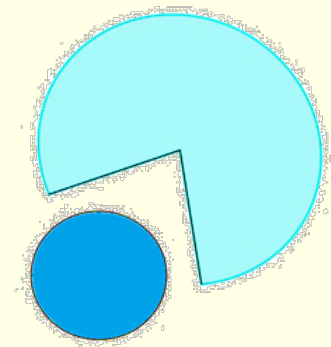
Μαθαίνω



- **Ορθός κώνος** ή απλώς **κώνος** λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογώνιου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.
 - Το ευθύγραμμο τμήμα γύρω από το οποίο περιστρέφεται, λέγεται **άξονας** ή **ύψος (v)** του κώνου.
 - Ο κυκλικός δίσκος που δημιουργείται από την περιστροφή ονομάζεται **βάση**. Η ακτίνα (**R**) της βάσης ονομάζεται και **ακτίνα του κώνου**.
 - Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της υποτείνουσας ονομάζεται **κυρτή επιφάνεια** του κώνου και η υποτείνουσα ονομάζεται **γενέτειρα (λ)** του κώνου.

- Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι: $E_{\kappa} = \pi R \lambda$
- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου είναι:

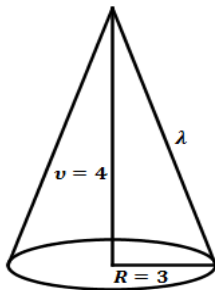
$$E_{ολ} = E_{\kappa} + E_{\beta} \quad \text{ή} \quad E_{ολ} = \pi R \lambda + \pi R^2.$$



- Ο **όγκος** κώνου είναι $V = \frac{\pi R^2 v}{3}$.

Παραδείγματα

1. Ένας κώνος έχει ύψος $v = 4 \text{ cm}$ και ακτίνα βάσης $R = 3 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.



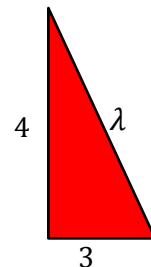
Λύση:

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίσουμε τη γενέτειρα λ του κώνου:

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= 4^2 + 3^2 \\ \Rightarrow \lambda^2 &= 25 \\ \Rightarrow \lambda &= \sqrt{25} \\ \Rightarrow \lambda &= 5 \text{ cm}\end{aligned}$$

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι:

$$\begin{aligned}E_{\kappa} &= \pi R \lambda \\ &= \pi \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 15\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

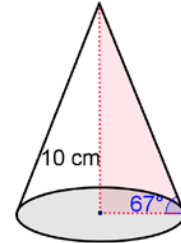


Ο όγκος του κώνου είναι:
$$V = \frac{\pi R^2 v}{3}$$

$$= \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3}$$

$$= 12\pi \text{ cm}^3$$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του διπλανού κώνου.



Λύση:

Υπολογίζουμε την ακτίνα της βάσης του κώνου, εφαρμόζοντας τριγωνομετρία:

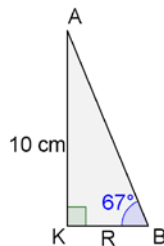
$$\varepsilon\varphi 67^\circ = \frac{AK}{\Pi K}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi 67^\circ = \frac{10}{R}$$

$$\Rightarrow 2,36 \cong \frac{10}{R}$$

$$\Rightarrow R \cong \frac{10}{2,36}$$

$$\Rightarrow R \cong 4,24 \text{ cm}$$



Για να υπολογίσουμε τη γενέτειρα της βάσης του κώνου, εφαρμόζουμε είτε Πυθαγόρειο θεώρημα είτε τριγωνομετρία:

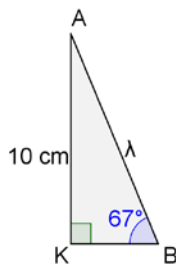
$$\eta\mu 67^\circ = \frac{AK}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \eta\mu 67^\circ = \frac{10}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 0,92 \cong \frac{10}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda \cong \frac{10}{0,92}$$

$$\Rightarrow \lambda \cong 10,87 \text{ cm}$$



Άρα,

$$E_{\kappa} = \pi R \lambda$$

$$\cong 3,14 \cdot 4,24 \cdot 10,87$$

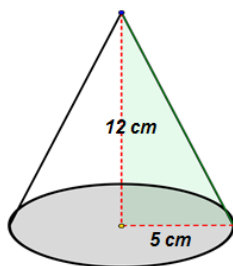
$$\cong 144,72 \text{ cm}^2$$

Δραστηριότητες

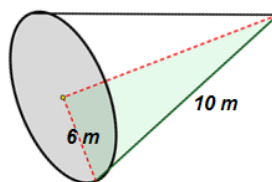


1. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας των πιο κάτω κώνων.

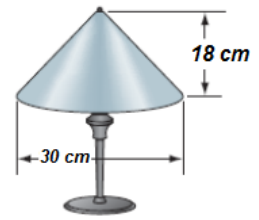
(α)



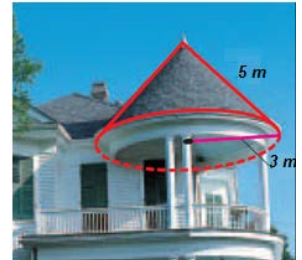
(β)



2. Ένα επιτραπέζιο φωτιστικό έχει κάλυμμα σε σχήμα κώνου με ύψος 18 cm και διάμετρο βάσης 30 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του καλύμματος.

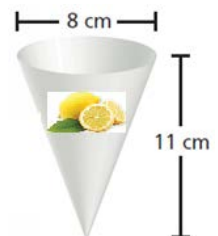


3. Στη διπλανή φωτογραφία, η στέγη της βεράντας του σπιτιού έχει σχήμα κώνου με γενέτειρα 5 m και ακτίνα βάσης 3 m . Η στέγη πρέπει να καλυφθεί με υλικό που κοστίζει $\text{€}20/\text{m}^2$. Να υπολογίσετε το κόστος, για να καλυφθεί η στέγη με το συγκεκριμένο υλικό.



4. Το εμβαδόν της βάσης ενός κώνου είναι $25\pi\text{ cm}^2$. Αν η γενέτειρα του κώνου είναι ίση με 13 cm , να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.
5. Η Ελίνα ισχυρίζεται ότι η γενέτειρα ενός κώνου είναι πάντα μεγαλύτερη από το ύψος του. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της.

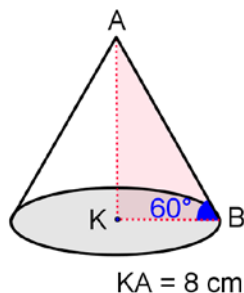
6. Ένα κατάστημα έχει $3,5$ λίτρα λεμονάδας προς πώληση. Χρησιμοποιεί πλαστικά ποτηράκια σε σχήμα κώνου, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Να βρείτε πόσα ποτηράκια μπορεί να γεμίσει.



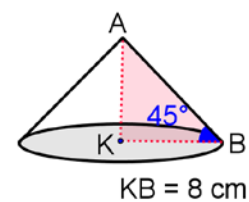
7. Η κυρτή επιφάνεια ενός κώνου είναι $204,1\text{ cm}^2$ και η γενέτειρα του είναι 13 cm . Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

8. Να υπολογίσετε τον όγκο των πιο κάτω κώνων:

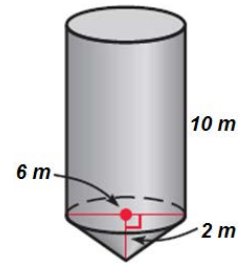
(α)



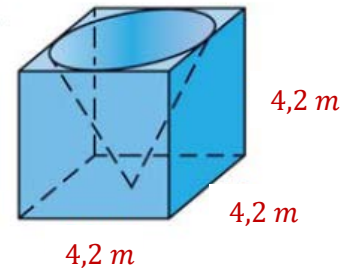
(β)



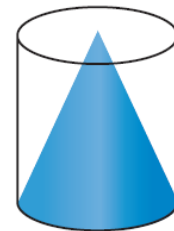
9. Η μεταλλική κατασκευή του διπλανού σχήματος χρησιμοποιείται ως αποθηκευτικός χώρος για σιτηρά. Η κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο με διάμετρο 6 m και ύψη 10 m , 2 m αντίστοιχα. Να βρείτε τον όγκο της κάθε μεταλλικής κατασκευής.



10. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας κύβος που από μέσα του αφαιρέθηκε ένας κώνος. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που μένει.



11. Κώνος είναι εγγεγραμμένος σε κύλινδρο. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $36\pi\text{ cm}^2$. Αν το ύψος του είναι διπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του να υπολογίσετε τη διαφορά των δύο όγκων.



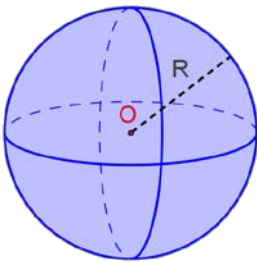
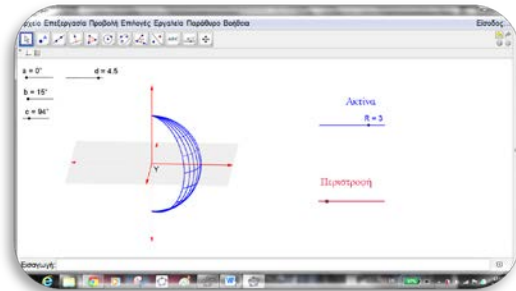
12. Κύλινδρος και κώνος έχουν ακτίνα 6 cm . Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $180\pi\text{ cm}^3$. Αν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου να βρείτε τον όγκο του κώνου.

Εμβαδόν και Όγκος Σφαίρας

Διερεύνηση

Να ανοίξετε αρχείο «C_En8_Sfera.ggb»

- ✓ Να περιστρέψετε το ημικύκλιο και να μελετήσετε το στερεό που παράγεται.



Μαθαίνω

- **Σφαίρα** ονομάζεται το στερεό που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κύκλο (O, R) γύρω από μία διάμετρό του.
 - Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή του κύκλου ονομάζεται **επιφάνεια της σφαίρας**.
 - Το κέντρο O του κύκλου (O, R) είναι το **κέντρο της σφαίρας**.
 - Η απόσταση οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας της σφαίρας από το κέντρο O είναι ίση με την ακτίνα R του κύκλου (O, R) και είναι η **ακτίνα της σφαίρας**.
- Το **εμβαδόν της επιφάνειας** της σφαίρας είναι $E_{σφ} = 4\pi R^2$
- Ο **όγκος** της σφαίρας είναι $V_{σφ} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

*Σημείωση: Η τομή ενός επιπέδου και μιας σφαίρας είναι κύκλος. Όταν το κέντρο της σφαίρας ανήκει στο επίπεδο, τότε ο κύκλος στον οποίο τέμνονται ονομάζεται **μέγιστος κύκλος**.*

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τον όγκο σφαίρας με επιφάνεια $64\pi \text{ cm}^2$.

Λύση:

Βρίσκουμε το μήκος της ακτίνας της σφαίρας:

$$\begin{aligned}E_{\sigma\phi} &= 4\pi R^2 \\4\pi R^2 &= 64\pi \\ \Rightarrow R^2 &= 16 \\ \Rightarrow R &= 4 \text{ cm}\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τον όγκο της σφαίρας:

$$\begin{aligned}V_{\sigma\phi} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 \\ &= 288\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Δραστηριότητες

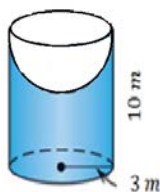


1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο σφαίρας με ακτίνα $R = 7 \text{ cm}$.
2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

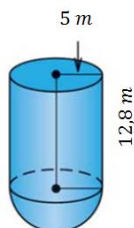
- (α) Η τομή σφαίρας και ενός επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της είναι πάντα κύκλος. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- (β) Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου της. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να υπολογίσετε τον όγκο των πιο κάτω στερεών:

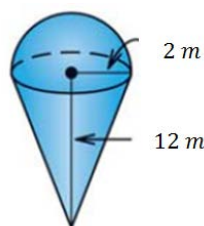
(α)



(β)



(γ)



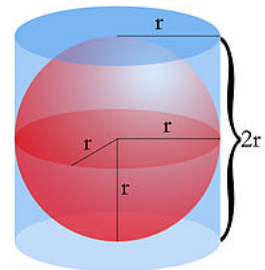


4. Το διπλανό δοχείο στο ύψος χωράει ακριβώς 3 μπάλες του τένις. Αν το ύψος του δοχείου είναι 21 cm , να υπολογίσετε την επιφάνεια της κάθε μπάλας. Πόσες το πολύ τέτοιες μπάλες μπορούν να χωρέσουν σε ένα κουτί σχήματος κύβου με όγκο 2744 cm^3 ;

5. Η υδρόγειος σφαίρα της διπλανής εικόνας περικλείεται από γυάλινο κύβο ακμής 6 cm . Τι ποσοστό του κύβου καταλαμβάνει η σφαίρα;

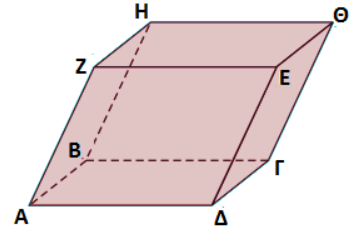


6. Η Μαρίλια ισχυρίζεται ότι η επιφάνεια της σφαίρας του διπλανού σχήματος είναι ίση με την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου στον οποίο είναι εγγεγραμμένη η σφαίρα. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της.

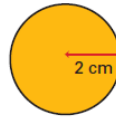
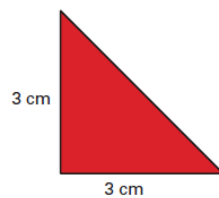
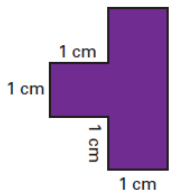
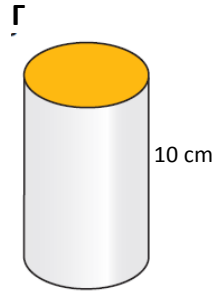
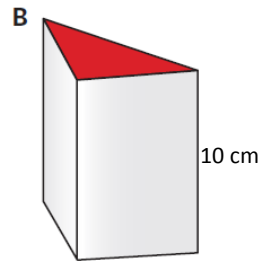
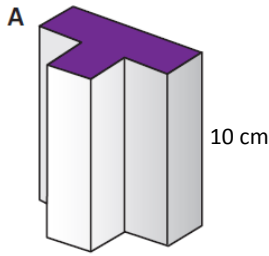


Δραστηριότητες Ενότητας

1. Στο σχήμα δίνεται ένα παραλληλεπίπεδο. Να ονομάσετε:
- (α) δύο παράλληλα επίπεδα
 - (β) δύο επίπεδα που τέμνονται
 - (γ) δύο ασύμβατες ευθείες



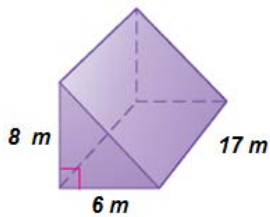
2. Να βρείτε τον όγκο των πιο κάτω στερεών:



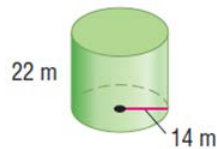
Βάσεις στερεών

3. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας των πιο κάτω στερεών.

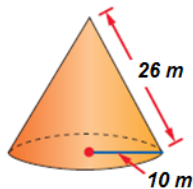
(α)



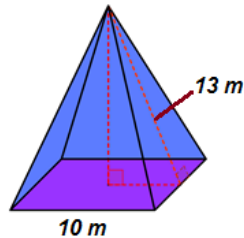
(β)



(γ)



(δ)

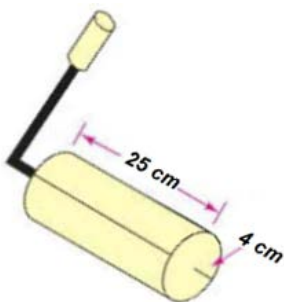


4. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι 352 cm^2 . Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του, αν γνωρίζετε ότι είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 1, 2, 3.

5. Οι διαστάσεις της βάσης ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου είναι 6 cm και 8 cm . Αν η διαγώνιός του είναι $\delta = 26\text{ cm}$, να υπολογίσετε τον όγκο του.
6. Ένα ορθό πρίσμα έχει βάση ρόμβο με διαγώνιες $\delta_1 = 24\text{ dm}$ και $\delta_2 = 10\text{ dm}$. Το ύψος του πρίσματος είναι 12 dm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας σε m^2 .
7. Μία κυλινδρική δεξαμενή έχει ύψος $2,4\text{ m}$ και ακτίνα βάσης $0,80\text{ m}$. Μία αντλία αδειάζει από τη δεξαμενή 6 l το λεπτό. Να βρείτε:
- σε πόσο χρόνο η στάθμη του νερού θα κατέβει 10 cm
 - σε πόσο χρόνο θα αδειάσει η δεξαμενή
 - πόσο θα κατέβει η στάθμη του νερού σε μία ώρα
8. Ένας κώνος έχει όγκο $V = 10\text{ dm}^3$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου που έχει:
- τετραπλάσιο ύψος από τον αρχικό
 - τριπλάσια ακτίνα βάσης από τον αρχικό
 - τετραπλάσιο ύψος και τριπλάσια ακτίνα βάσης από τον αρχικό
9. Στο κυλικείο ενός κινηματογράφου πωλούνται δύο διαφορετικά κύπελλα για γρανίτα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



Να εξετάσετε ποια συσκευασία συμφέρει.

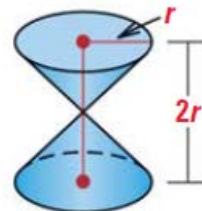
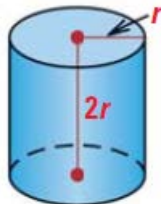


10. Ένας ελαιοχρωματιστής χρησιμοποιεί στην εργασία του ένα ρολό, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Το ρολό καταστρέφεται και χρειάζεται αντικατάσταση, όταν κάνει περίπου 1500 πλήρεις στροφές. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτει το ρολό, όταν κάνει 1500 στροφές.

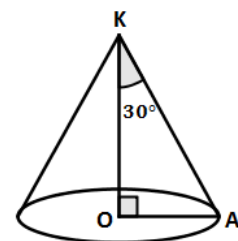
11. Στο σχήμα φαίνεται η ξύλινη στέγη μιας κατοικίας που είναι κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Η πλευρά της βάσης έχει μήκος 10 m και οι παράπλευρες έδρες είναι ισόπλευρα τρίγωνα. Η στέγη στηρίζεται από μια κεντρική δοκό, κάθετη στο κέντρο της βάσης. Οι παράπλευρες έδρες θα καλυφθούν με ειδικό υλικό που στοιχίζει €25 το τετραγωνικό μέτρο. Οι δοκοί για την κατασκευή του σκελετού της στέγης και της δοκού αντιστήριξης στοιχίζουν €15 το μέτρο. Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος κατασκευής της ξύλινης στέγης.



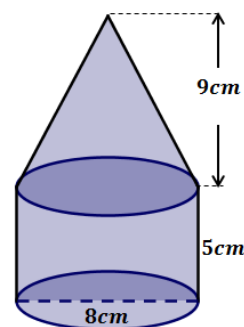
12. Ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει κεριά αγοράζει την πρώτη ύλη σε ράβδους από κερι που έχουν σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 60 cm , 16 cm , 10 cm . Θα χρησιμοποιήσει 10 ράβδους από κερι για να κατασκευάσει διακοσμητικά κεριά που θα έχουν σχήμα κύβου με ακμή 2 cm .
- (α) Πόσα διακοσμητικά κεριά θα κατασκευάσει, αν δεν έχει απώλεια πρώτης ύλης;
- (β) Αν η κάθε ράβδος στοιχίζει €50, πληρώνει €500 για εργατικά και €200 για έξοδα συσκευασίας, πόσα τοις εκατό θα κερδίσει, αν πωλεί τα διακοσμητικά κεριά προς 15 σεντ το ένα;
13. Δύο κώνοι έχουν την ίδια βάση. Αν ο λόγος των υψών των δύο κώνων είναι 5, να βρείτε τον λόγο των όγκων τους.
14. Να κατατάξετε τα πιο κάτω στερεά σε αύξουσα σειρά ως:
- (α) προς τον όγκο τους,
- (β) προς την επιφάνειά τους.



15. Το ύψος του κώνου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα έχει μήκος $KO = 6\sqrt{3}\text{ cm}$ και σχηματίζει γωνία $\text{OKA} = 30^\circ$ με τη γενέτειρα λ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

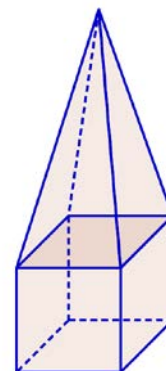


16. Στο σχήμα δίνονται ένας κύλινδρος και ένας κώνος. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που δημιουργείται.



17. Ένα δοχείο έχει σχήμα κυλίνδρου με διάμετρο 8 cm και ύψος 14 cm . Είναι γεμάτο με υγρό μέχρι το $\frac{1}{2}$ του ύψους του. Αν τοποθετήσουμε στο ποτήρι 3 σιδερένιους κύβους με ακμή 2 cm , να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο θα ανεβεί η στάθμη του νερού.

18. Τοποθετούμε μια πυραμίδα πάνω σε έναν κύβο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το ύψος της πυραμίδας είναι διπλάσιο από την ακμή του κύβου (a), να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που δημιουργείται συναρτήσει του a .



19. Ο Νικόλας ισχυρίζεται ότι το πλήθος των ακμών ενός ορθού πρίσματος είναι πάντα πολλαπλάσιο του 3. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

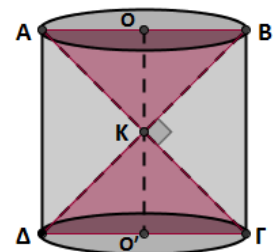
1. Το εμβαδόν των εδρών ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι 12 cm^2 , 24 cm^2 και 32 cm^2 . Αν οι διαστάσεις του είναι ακέραιοι αριθμοί, να υπολογίσετε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου.
2. Μια πυραμίδα με βάση τρίγωνο, λέγεται *τριγωνική πυραμίδα*. Αν όλες οι έδρες της είναι ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, λέγεται *κανονικό τετράεδρο*. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κανονικού τετραέδρου με ακμή βάσης $a \text{ cm}$.
3. Η γενέτειρα λ ενός κώνου είναι ίση με τα $\frac{13}{12}$ του ύψους του ν . Αν $\lambda + \nu = 75 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

4. Για να φτιάξουμε το κάλυμμα ενός πολύφωτου (αμπαζούρ) χρησιμοποιούμε ειδικό πάπυρο. Το σχήμα προκύπτει από τη διαφορά δύο κώνων.



- (α) Αν ο μεγάλος κώνος έχει ύψος 70 cm και ακτίνα βάσης 15 cm , ενώ ο μικρός έχει ύψος 20 cm και ακτίνα βάσης 10 cm , να υπολογίσετε το εμβαδόν του παπύρου που χρειαζόμαστε.
- (β) Αν ο πάπυρος κοστίζει €35 το τετραγωνικό μέτρο, πόσο θα κοστίσει το κάλυμμα;

5. Στο σχήμα οι δύο κώνοι είναι ίσοι και η κοινή κορυφή τους K είναι το μέσο του ύψους ν , του κυλίνδρου.

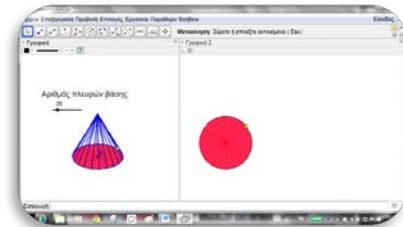
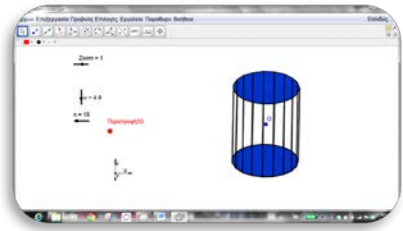


- (α) Αν $B\hat{K}\Gamma = 90^\circ$, να δείξετε ότι $R = \frac{\nu}{2}$, όπου R είναι η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου.
- (β) Αν V είναι ο όγκος του κυλίνδρου και V_k ο όγκος του κάθε κώνου, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{V}{V_k}$.
- (γ) Να υπολογίσετε τον όγκο του μέρους του κυλίνδρου που περικλείεται από τον κύλινδρο και τους δύο κώνους.



6. Να ανοίξετε τα αρχεία «C_En8_PrismaProsKyliedr o.ggb» και «C_En8_PyramidaProsKono.g b».

Να μεταβάλετε τον δρομέα «n» για να αυξήσετε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου. Ποιο στερεό σχηματίζεται, αν θεωρητικά είχαμε βάση με άπειρες πλευρές σε καθεμιά περίπτωση;



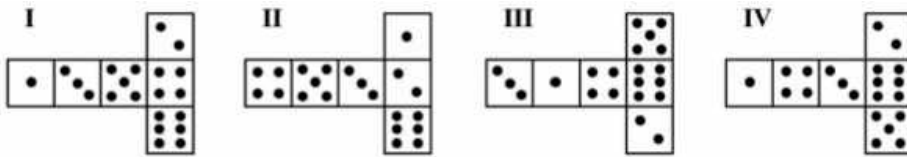
7. Να εξηγήσετε γιατί ένα τραπέζι με τρία πόδια είναι πιο σταθερό από ένα τραπέζι με τέσσερα πόδια.



8. Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν δύο ζάρια. Το ζάρι είναι ένας ειδικά αριθμημένος κύβος, για τον οποίο ισχύει ο παρακάτω κανόνας: **Το άθροισμα των κουκκίδων των δύο απέναντι εδρών του είναι πάντα 7.**

Μπορείτε να κατασκευάσετε έναν απλό αριθμημένο κύβο κόβοντας, διπλώνοντας και κολλώντας ένα χαρτόνι. Αυτό μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Στα παρακάτω σχήματα με τις κουκκίδες στις έδρες, βλέπετε τέσσερις τρόπους κατασκευής τέτοιων κύβων.

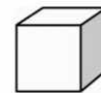
Ποια από τα παρακάτω σχήματα μπορούν να διπλωθούν έτσι, ώστε να σχηματιστεί ένας κύβος, για τον οποίο να ισχύει ο κανόνας ότι το άθροισμα των κουκκίδων των δύο απέναντι εδρών του ισούται με 7; Στον πίνακα που ακολουθεί, για κάθε σχήμα να κυκλώσετε το «Ναι» ή το «Όχι».



Σχήμα	Ισχύει ο κανόνας ότι το άθροισμα των κουκκίδων των δύο απέναντι εδρών του ισούται με 7;
I	Ναι / Όχι
II	Ναι / Όχι
III	Ναι / Όχι
IV	Ναι / Όχι

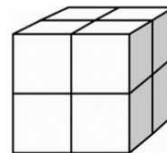
PISA 2003

9. Στη Σούζαν αρέσει να κάνει συνθέσεις με μικρούς κύβους, όπως αυτός που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα:



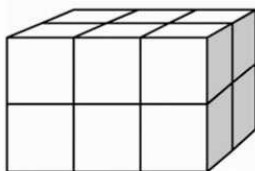
Μικρός κύβος

Η Σούζαν έχει πολλούς μικρούς κύβους σαν αυτόν του σχήματος και χρησιμοποιεί κόλλα, για να τους ενώσει και να κάνει άλλες συνθέσεις. Η Σούζαν πρώτα κολλάει οκτώ κύβους μαζί, για να κάνει τη σύνθεση που φαίνεται στο σχήμα Α.

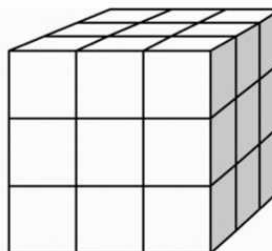


Σχήμα Α

Στη συνέχεια η Σούζαν κατασκευάζει τις συνθέσεις που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα Β και Γ:



Σχήμα Β



Σχήμα Γ

- Πόσους μικρούς κύβους θα χρειαστεί η Σούζαν, για να κατασκευάσει τη σύνθεση του σχήματος Β;
- Πόσους μικρούς κύβους θα χρειαστεί η Σούζαν, για να κατασκευάσει τη σύνθεση του σχήματος Γ;

Η Σούζαν αντιλαμβάνεται ότι χρησιμοποίησε περισσότερους μικρούς κύβους από όσους πραγματικά χρειαζόταν, για να κατασκευάσει μια σύνθεση σαν αυτή του σχήματος Γ. Καταλαβαίνει ότι θα μπορούσε να έχει κολλήσει τους μικρούς κύβους αφήνοντας εσωτερικά ένα κενό.

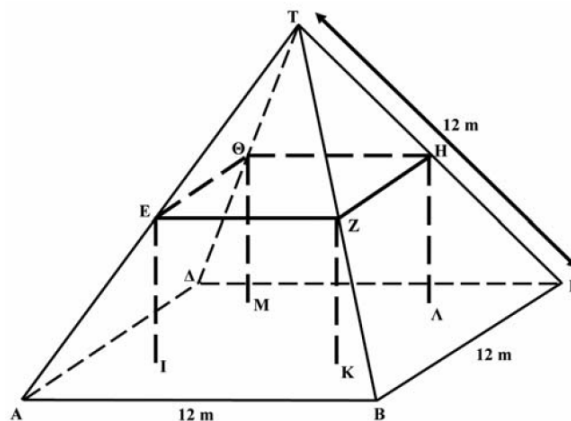
(γ) Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κύβων που χρειάζεται, για να κατασκευάσει μια σύνθεση σαν αυτή του σχήματος Γ που να έχει εσωτερικά κενό;

Τώρα η Σούζαν θέλει να κατασκευάσει μία σύνθεση που να έχει μήκος 6 μικρών κύβων, πλάτος 5 μικρών κύβων και ύψος 4 μικρών κύβων. Θέλει να χρησιμοποιήσει τον μικρότερο δυνατό αριθμό κύβων αφήνοντας το μεγαλύτερο δυνατό κενό στο εσωτερικό της σύνθεσης.

(δ) Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κύβων που θα χρειαστεί, για να κατασκευάσει αυτή τη σύνθεση;

PISA 2003

10. Στη φωτογραφία βλέπετε μια αγροτική κατοικία που έχει σκεπή σε σχήμα πυραμίδας. Το πιο κάτω σχήμα αναπαριστά τη σκεπή της αγροτικής κατοικίας. Στο σχήμα, στο οποίο αναγράφονται οι πραγματικές διαστάσεις της σκεπής, η βάση $AB\Gamma\Delta$ της σκεπής είναι ένα τετράγωνο.

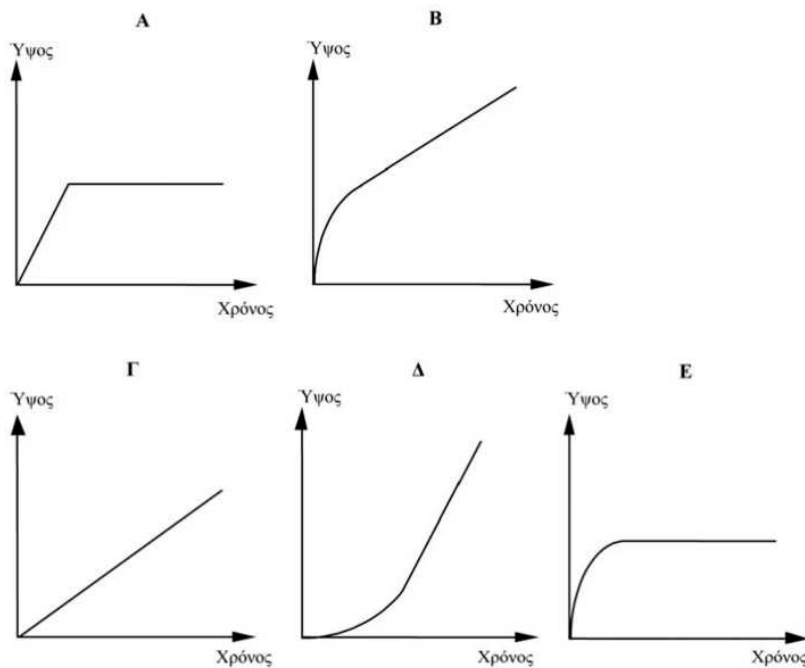
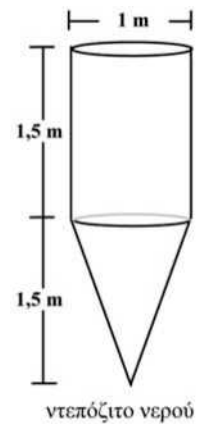


Τα δοκάρια που υποστηρίζουν τη σκεπή αντιστοιχούν στις ακμές του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $EZH\Theta IK\Lambda M$. Το E είναι το μέσον της ακμής AT της πυραμίδας, το Z είναι το μέσον της ακμής BT , το H είναι το μέσον της ακμής ΓT και το Θ είναι το μέσον της ακμής ΔT . Όλες οι ακμές της πυραμίδας έχουν μήκος 12 m .

- (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης $AB\Gamma\Delta$ της σκεπής.
 (β) Να υπολογίσετε το μήκος της EZ , μιας από τις οριζόντιες ακμές του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

PISA 2003

11. Ένα ντεπόζιτο νερού έχει τη μορφή και τις διαστάσεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αρχικά το ντεπόζιτο είναι άδειο. Μετά το γεμίζουμε νερό με ρυθμό ένα λίτρο ανά δευτερόλεπτο. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνει πώς το ύψος του νερού μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου;

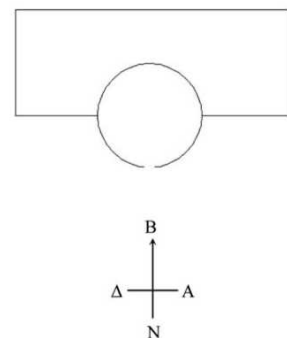


PISA 2003

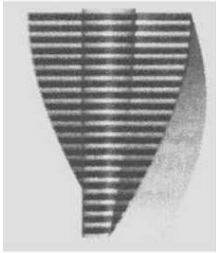
12. Συχνά, στη μοντέρνα αρχιτεκτονική, τα κτήρια έχουν ασυνήθιστα σχήματα. Η παρακάτω φωτογραφία δείχνει τη μακέτα ενός «στριφτού κτηρίου» που σχεδιάστηκε στον υπολογιστή, και την κάτοψη του ισόγειου. Τα σημεία του οριζοντα δείχνουν τον προσανατολισμό του κτηρίου.

Στο ισόγειο του κτηρίου υπάρχει η κυρία είσοδος και χώρος για καταστήματα. Πάνω από το ισόγειο υπάρχουν 20 όροφοι με διαμερίσματα.

Η κάτοψη κάθε ορόφου είναι ίδια με την κάτοψη του ισόγειου, αλλά ο προσανατολισμός κάθε ορόφου είναι λίγο διαφορετικός σε σχέση με τον όροφο που βρίσκεται ακριβώς κάτω από αυτόν. Ο κύλινδρος περιλαμβάνει το φρεάτιο του ανελκυστήρα και μια έξοδο σε κάθε όροφο.



- (α) Να εκτιμήσετε το συνολικό ύψος του κτηρίου σε μέτρα.
Να εξηγήσετε την απάντησή σας.



Οι διπλανές φωτογραφίες δείχνουν πλευρικές όψεις του στριφτού κτηρίου.

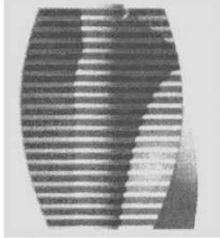
(β) Από ποια θέση έχει τραβηχτεί η φωτογραφία της πλευρικής όψης 1; Κυκλώστε την απάντησή σας.

A. Από τον Βορρά

B. Από τη Δύση

Γ. Από την Ανατολή

Δ. Από τον Νότο



(γ) Από ποια θέση έχει τραβηχτεί η φωτογραφία της Πλευρικής όψης 2; Κυκλώστε την απάντησή σας.

A. Από Βορειοδυτικά

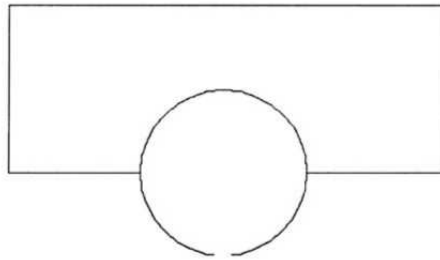
B. Από Βορειοανατολικά

Γ. Από Νοτιοδυτικά

Δ. Από Νοτιοανατολικά

Κάθε όροφος με διαμερίσματα παρουσιάζει μια συγκεκριμένη «στροφή» σε σχέση με το ισόγειο. Το ρετιρέ (ο 20ός όροφος πάνω από το ισόγειο) σχηματίζει ορθή γωνία με το ισόγειο.

(δ) Η παρακάτω κάτοψη αναπαριστά το ισόγειο. Πάνω σ' αυτό το σχήμα, να σχεδιάσετε την κάτοψη του 10ου ορόφου, δείχνοντας πώς είναι τοποθετημένος ο όροφος αυτός σε σχέση με το ισόγειο.



PISA 2003

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ

8

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

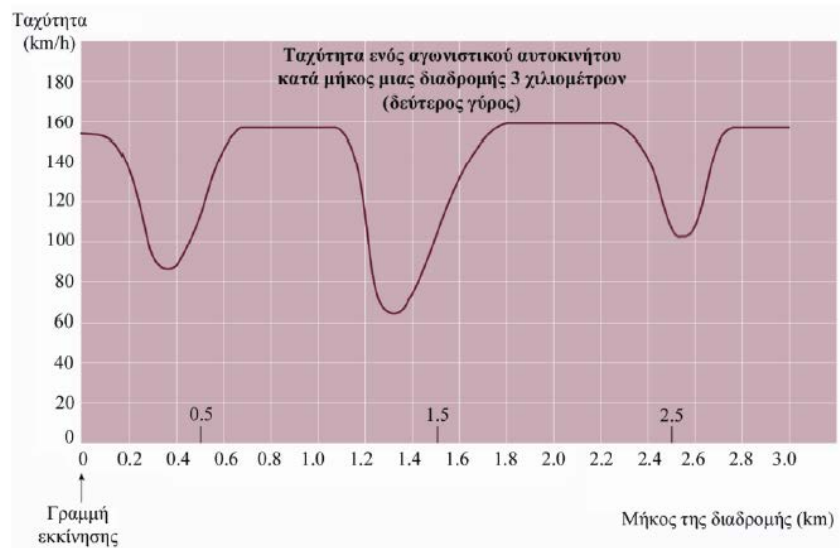
- Να αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση με τύπο με $y = ax^2$, $a \neq 0$ και να την παριστάνουμε γραφικά.
- Να βρίσκουμε τον τύπο της συνάρτησης $y = ax^2$, με $a \neq 0$, από τη γραφική της παράσταση.
- Να γνωρίζουμε τον ρόλο του συντελεστή a , με $a \neq 0$ στην παραβολή με τύπο $y = ax^2$.



Λύση προβλήματος

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΑΓΩΝΙΣΤΙΚΟΥ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ

Στην παρακάτω γραφική παράσταση, παρουσιάζονται οι μεταβολές της ταχύτητας ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου που τρέχει τον δεύτερο γύρο του σε μια μη κυκλική επίπεδη διαδρομή μήκους 3 χιλιομέτρων.



Ερώτηση 1:

Πόση περίπου απόσταση έχει διανύσει το αυτοκίνητο από τη γραμμή εκκίνησης μέχρι να φτάσει στην αρχή του μακρύτερου ευθύγραμμου τμήματος της διαδρομής;

Να βάλετε σε κύκλο την απάντησή σας.

- A. 0,5 km B. 1,5 km
Γ. 2,3 km Δ. 2,6 km

Ερώτηση 2:

Σε ποιο σημείο της διαδρομής του δεύτερου γύρου σημειώθηκε, κατά προσέγγιση, η μικρότερη ταχύτητα;

Να βάλετε σε κύκλο την απάντησή σας.

- A. Στη γραμμή εκκίνησης B. Στα 0,8 km περίπου
Γ. Στα 1,3 km περίπου. Δ. Περίπου στο μισό της διαδρομής

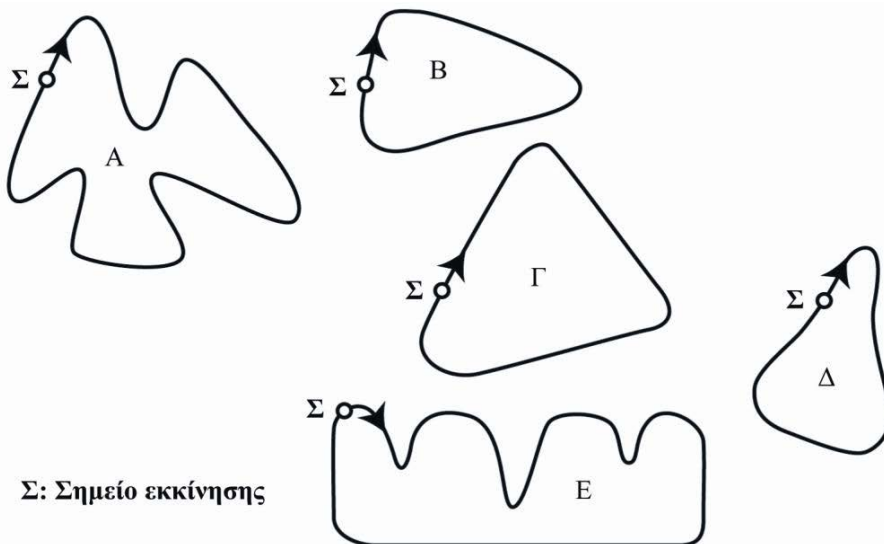
Ερώτηση 3:

Να διαβάσετε τις παρακάτω προτάσεις και να βάλετε σε κύκλο την πρόταση που δείχνει τι συμβαίνει στην ταχύτητα του αυτοκινήτου μεταξύ των ενδείξεων 2,6 km και 2,8 km.

- A. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου παραμένει σταθερή.
- B. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου αυξάνεται.
- Γ. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου μειώνεται.
- Δ. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τη γραφική παράσταση.

Ερώτηση 4:

Στο σχήμα που ακολουθεί, βλέπετε πέντε διαφορετικές διαδρομές αγώνων αυτοκινήτου. Σε ποια από τις παρακάτω διαδρομές έτρεξε το αυτοκίνητο της άσκησης, για να δώσει την προηγούμενη γραφική παράσταση της ταχύτητας; Να βάλετε σε κύκλο το σωστό σχήμα.



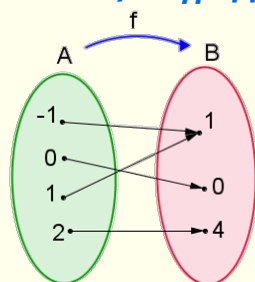
Έχουμε μάθει ...

- Τι είναι συνάρτηση, πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών συνάρτησης.
- Να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης που δίνεται με βελοειδές διάγραμμα.
- Να αναγνωρίζουμε και να ορίζουμε τη συνάρτηση σε διάφορες μορφές:
 - βελοειδές διάγραμμα
 - γράφημα
 - τύπο
 - πίνακα τιμών
 - περιγραφικά ή συμβολικά
 - γραφική παράσταση

Παράδειγμα:

Δίνονται τα σύνολα $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ και $B = \{1, 0, 4\}$. Η συνάρτηση f που συνδέει κάθε στοιχείο του συνόλου A με μόνο ένα στοιχείο του συνόλου B , μπορεί να δοθεί ως εξής:

➤ με **βελοειδές διάγραμμα**:



➤ ως **σύνολο διατεταγμένων ζευγών**:

$$G = \{(-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}.$$

Πεδίο Ορισμού: $\{-1, 0, 1, 2\}$

Πεδίο Τιμών: $\{0, 1, 4\}$

➤ με τη χρήση **τύπου**:

$$y = x^2$$

ή

$$f(x) = x^2$$

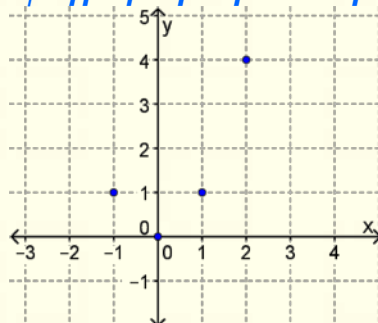
όπου με x συμβολίζουμε τη μεταβλητή που παίρνει όλες τις τιμές του συνόλου A και με y τη μεταβλητή που παίρνει τις αντίστοιχες τιμές στο σύνολο B .

Η τιμή της μεταβλητής που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή της μεταβλητής x , μέσω του κανόνα αντιστοίχισης f της συνάρτησης, συμβολίζεται και με $f(x)$.

➤ με πίνακα τιμών:

x	-1	0	1	2
y	1	0	1	4

➤ με γραφική παράσταση:



➤ περιγραφικά ή συμβολικά:

Κανόνας: «Κάθε αριθμός του συνόλου $\{-1, 0, 1, 2\}$ αντιστοιχίζεται με το τετράγωνό του».

- Να επιλύουμε εξισώσεις β' βαθμού με παραγοντοποίηση.

Παράδειγμα:

Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = x$.

$$\begin{aligned}x^2 = x &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \\ &x(x - 1) = 0 \\ &x = 0 \text{ ή } x = 1\end{aligned}$$

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x .

- Να ορίζουμε και να αναγνωρίζουμε διαστήματα πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα:

Το διάστημα $[3, 5]$ είναι κλειστό.

Το διάστημα $(-1, 5)$ είναι ανοικτό.

Το διάστημα $[0, 9)$ είναι κλειστό αριστερά και ανοικτό δεξιά.

Το διάστημα $(-1, \frac{3}{4}]$ είναι ανοικτό αριστερά και κλειστό δεξιά.

Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$

Διερεύνηση

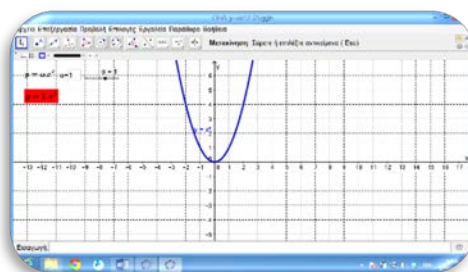
Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = ax^2, a \neq 0$.

- ✓ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- ✓ Να κάνετε έναν πίνακα αντίστοιχων τιμών για τη συνάρτηση $y = x^2$ και να την κατασκευάσετε σε τετραγωνισμένο χαρτί.



Να ανοίξετε το αρχείο: «C_En8_y=ax^2.ggb»

Στο κουτί εισαγωγής ή μέσω του δρομέα του εφαρμογιδίου, μπορείτε να δώσετε διάφορες τιμές για τη μεταβλητή a , έτσι ώστε να μας δίνει διαφορετικές καμπύλες με τύπο:



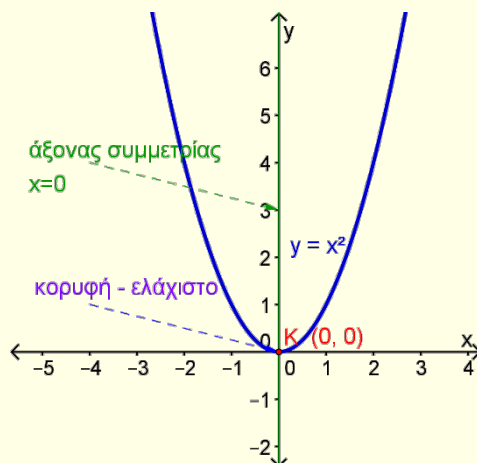
$$f(x) = ax^2, a \neq 0.$$

- ✓ Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.
- Για κάθε περίπτωση $a > 0$ και $a < 0$:
 - ✓ Να εξετάσετε τη μορφή και το «άνοιγμα» της καμπύλης.
 - ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο παρουσιάζει κάποιο είδος συμμετρίας.
 - ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει σημείο που θα το χαρακτηρίζατε ως «χαμηλότερο», ή «ψηλότερο».
 - ✓ Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών.

Μαθαίνω

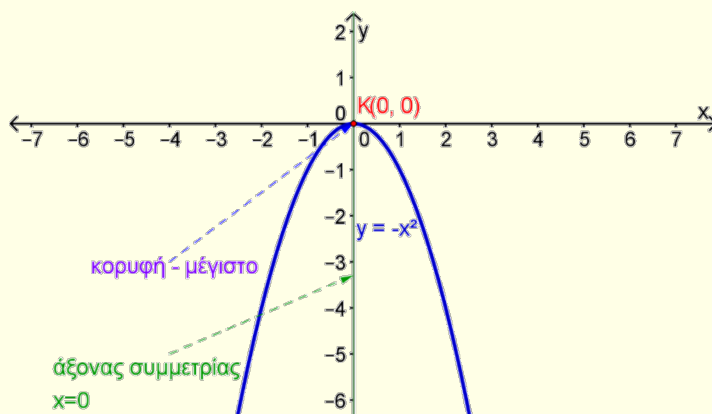
- Η συνάρτηση $y = ax^2$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$:
 - Έχει γραφική παράσταση μία **καμπύλη**, η οποία ονομάζεται **παραβολή**.
 - Το σημείο $(0,0)$ - αρχή αξόνων - είναι η **κορυφή** της παραβολής.
 - Έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα των τεταγμένων, ο οποίος ονομάζεται **άξονας της παραβολής**.
- Αν $a > 0$, τότε:
 - Το **Πεδίο Τιμών** της συνάρτησης είναι το $[0, +\infty)$.
 - Η παραβολή έχει **ελάχιστη τιμή την $y = 0$** στο σημείο με συντεταγμένες $O(0,0)$.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, η συνάρτηση $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $(0,0)$ και έχει άξονα συμμετρίας το $x = 0$.

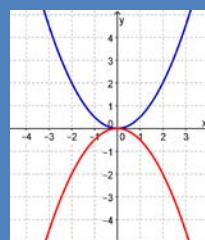


- Αν $a < 0$, τότε:
 - Το **Πεδίο Τιμών** της συνάρτησης είναι το $(-\infty, 0]$.
 - Η παραβολή έχει **μέγιστη τιμή την $y = 0$** στο σημείο με συντεταγμένες $O(0,0)$.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, η συνάρτηση $y = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστο στο $(0,0)$.

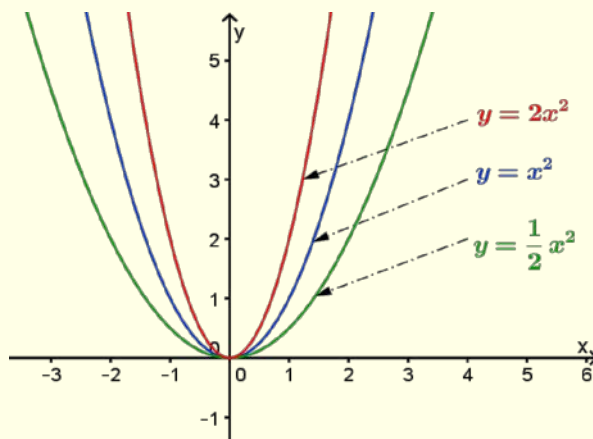


Οι παραβολές $y = ax^2$ και $y = -ax^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x x'$.

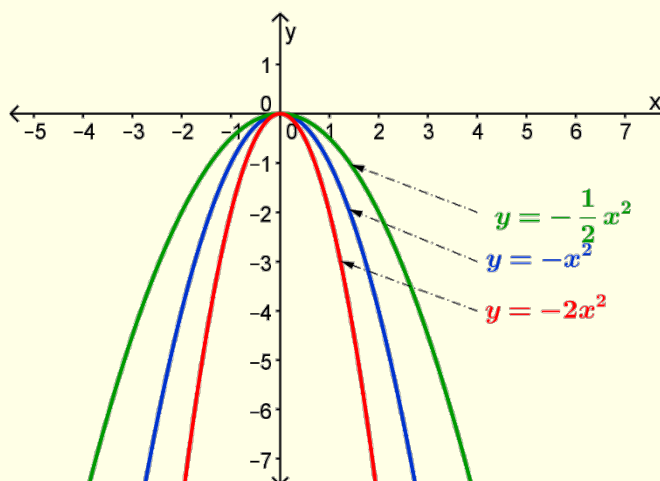


➤ Καθώς το $|a|$, αυξάνεται η καμπύλη «κλείνει».

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.



Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -2x^2$, $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$.

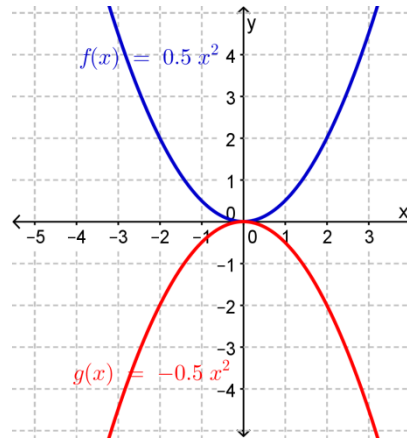


Παραδείγματα

1. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Να αναφέρετε για την καθεμιά:
 - (α) το πεδίο ορισμού (Π.Ο.)
 - (β) το πεδίο τιμών (Π.Τ.)
 - (γ) την κορυφή
 - (δ) τον άξονα συμμετρίαςΣτη συνέχεια, να βρείτε τη σχέση των δύο παραβολών.

Λύση:

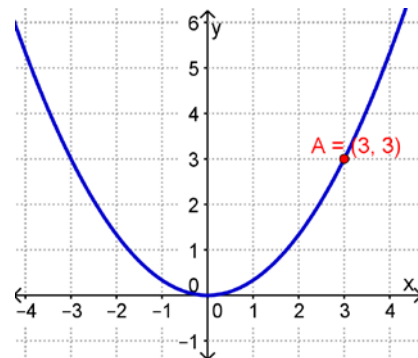
- (i) Για την $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ έχουμε:
- (α) Το Π.Ο. της f είναι το \mathbb{R} .
 - (β) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \geq 0$. Άρα Π.Τ. = $[0, +\infty)$
 - (γ) Η f έχει ελάχιστη τιμή το $f(0) = 0$ και άρα η κορυφή της είναι το σημείο $(0,0)$.
 - (δ) Άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x = 0$ (άξονας των y).



- (ii) Για την $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ έχουμε:
- (α) Το Π.Ο. της g είναι το \mathbb{R} .
 - (β) Η $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 \leq 0$. Άρα Π.Τ. = $(-\infty, 0]$
 - (γ) Η g έχει μέγιστη τιμή το $g(0) = 0$ και άρα η κορυφή της είναι το σημείο $(0,0)$.
 - (δ) Άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x = 0$ (άξονας των y)

Οι δύο παραβολές είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα xx' .

2. Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από το σημείο $A(3,3)$. Να βρείτε:
- (α) την εξίσωση της παραβολής
 - (β) το σημείο της παραβολής με τετμημένη -6
 - (γ) τα σημεία της παραβολής με τεταγμένη $\frac{3}{16}$
 - (δ) το κ ώστε το σημείο $B(\kappa + 1, 27)$ να ανήκει στην παραβολή

**Λύση:**

- (α) Η παραβολή έχει εξίσωση $y = ax^2$, γιατί έχει κορυφή το $(0,0)$. Περνά από το σημείο $(3,3)$, άρα η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου επαληθεύει την εξίσωση $y = ax^2$ δηλαδή $3 = a(3)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$. Επομένως, η εξίσωση της παραβολής είναι η $y = \frac{1}{3}x^2$.
- (β) Για $x = -6 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(-6)^2 = 12$. Επομένως, το σημείο με τετμημένη -6 είναι το $(-6, 12)$.

$$(\gamma) \text{ Για } y = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{3}{16} = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{4}$$

Επομένως, τα δύο σημεία με τεταγμένη $\frac{3}{16}$ είναι τα $(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}), (-\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$.

(δ) Αν το σημείο $B(\kappa + 1, 27)$ ανήκει στην παραβολή $y = \frac{1}{3}x^2$, τότε

$$27 = \frac{1}{3}(\kappa + 1)^2 \Leftrightarrow (\kappa + 1)^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 1)^2 - 81 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 1)^2 - 9^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 1 + 9)(\kappa + 1 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 10)(\kappa - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa = -10, \text{ ή } \kappa = 8.$$

Δραστηριότητες



1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y = \frac{3}{2}x^2$.

(α) Να γράψετε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

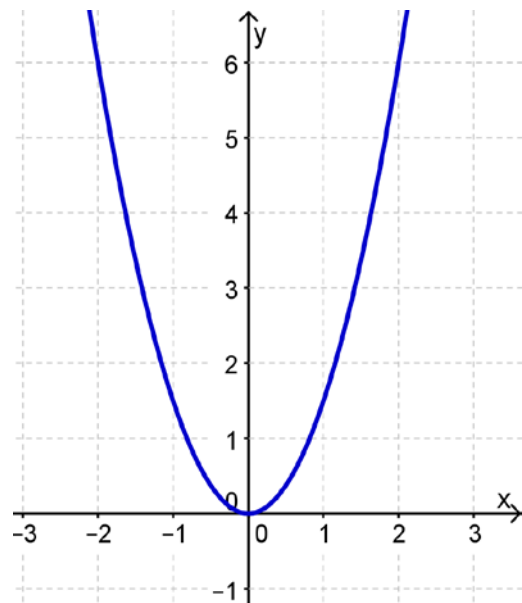
(β) Να γράψετε δύο συμμετρικά σημεία της παραβολής ως προς τον άξονα συμμετρίας της.

(γ) Να γράψετε τις συντεταγμένες της κορυφής της.

(δ) Να βρείτε κατά πόσο έχει μέγιστο ή ελάχιστο.

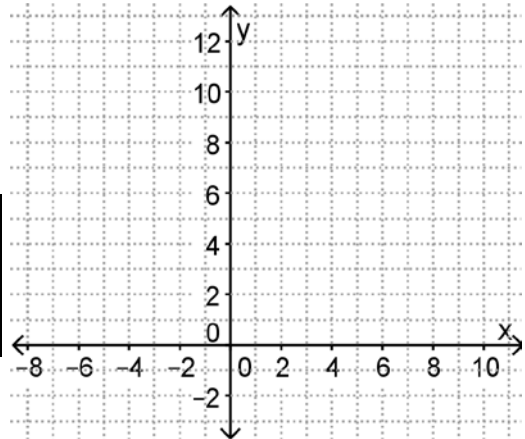
(ε) Να βρείτε την τεταγμένη του σημείου της παραβολής που έχει τετμημένη 3.

(στ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της παραβολής που έχουν τεταγμένη 6.



2. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

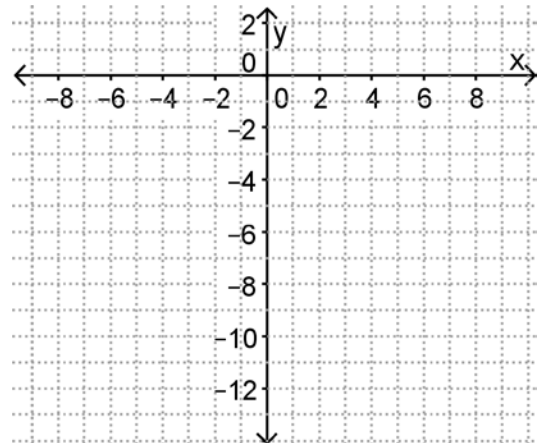
x	-2	-1	0	1	2
x^2					
$2x^2$					
$3x^2$					



Τι παρατηρείτε ως προς το άνοιγμα της κάθε παραβολής;

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές: $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = -3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

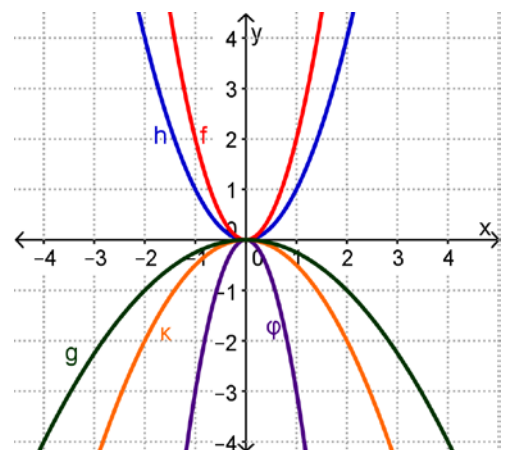
x	-2	-1	0	1	2
$-x^2$					
$-2x^2$					
$-3x^2$					



Τι παρατηρείτε ως προς το άνοιγμα της κάθε παραβολής;

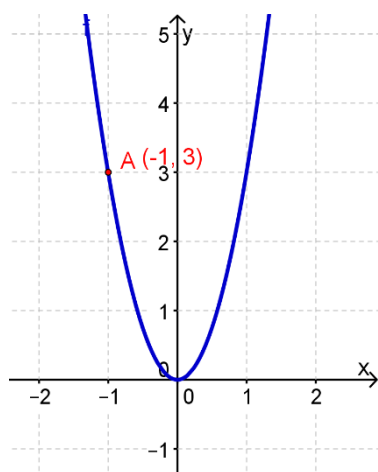
4. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών φ, κ, f, h, g . Να αντιστοιχίσετε τη γραφική παράσταση καθεμιάς από τις πιο κάτω παραβολές με την αντίστοιχη εξίσωση που τη χαρακτηρίζει:

Γραφική Παράσταση:	Εξίσωση:
(α) φ	1) $y = x^2$
(β) κ	2) $y = 2x^2$
(γ) f	3) $y = -3x^2$
(δ) g	4) $y = -\frac{1}{2}x^2$
(ε) h	5) $y = -\frac{1}{4}x^2$

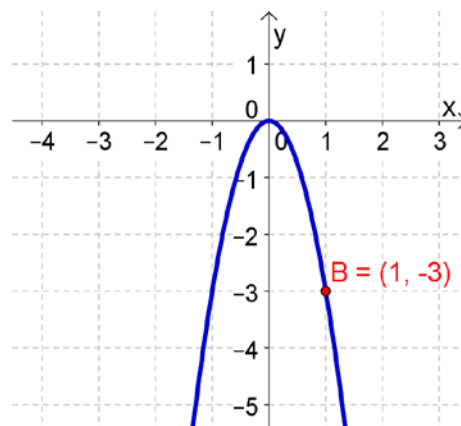


5. Να βρείτε την εξίσωση καθεμιάς από τις πιο κάτω παραβολές:

(α)



(β)



6. Να χαρακτηρίσετε με ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις.

- | | |
|---|-------------|
| (α) Η $y = 3x^2$ έχει μέγιστη τιμή. | ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ |
| (β) Αν η $y = ax^2$ περνά από το σημείο (1,2), τότε $a = 3$. | ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ |
| (γ) Η παραβολή $y = 2x^2$ έχει Π.Τ. το $[0, \infty)$. | ΟΡΘΟ /ΛΑΘΟΣ |

7. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του κ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (-8\kappa + 16)x^2$ να είναι παραβολή που να παρουσιάζει μέγιστο.

8. (α) Δίνεται η συνάρτηση $y = (\lambda + 1)x^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του λ έτσι ώστε το σημείο $A(-1,3)$ να ανήκει στη συνάρτηση.

(β) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ , ώστε η παραβολή με εξίσωση $y = (3\lambda - 12)x^2$, $x \in \mathbb{R}$ να περνά από το σημείο (2,12).

9. Η απόσταση S που διανύει σε χρόνο t , ένα σώμα που κάνει ελεύθερη πτώση, δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g \cong 10 \text{ m/s}^2).$$

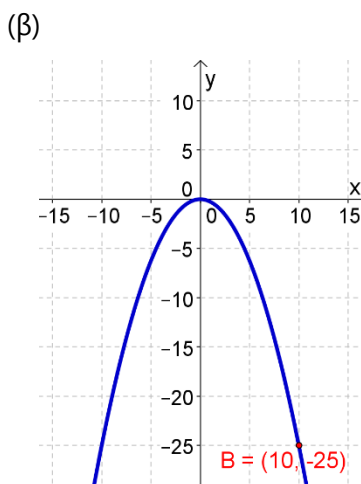
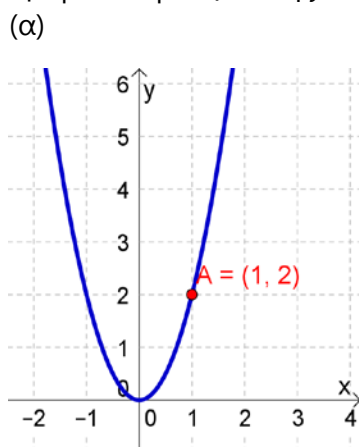
(α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απόστασης S συναρτήσει του χρόνου t .

(β) Να βρείτε το Π.Ο. και το Π.Τ. της συνάρτησης.

(γ) Τον χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει απόσταση 180 m;

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να σχεδιάσετε τις πιο κάτω παραβολές και να εξετάσετε κατά πόσο έχουν μέγιστο ή ελάχιστο σε κάθε περίπτωση.
(α) $f(x) = 6x^2$
(β) $g(x) = -5x^2$
2. Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών, την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας για τις συναρτήσεις $f(x) = 3x^2$ και $g(x) = -2x^2$. Να παραστήσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.
3. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ στις πιο κάτω περιπτώσεις, ώστε η παραβολή με εξίσωση $y = (3\lambda - 12)x^2$, $x \in \mathbb{R}$, να:
(α) περνά από το σημείο $(2,4)$
(β) παρουσιάζει ελάχιστο
(γ) παρουσιάζει μέγιστο
4. Στα πιο κάτω σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση δύο παραβολών με εξίσωση $y = ax^2$.



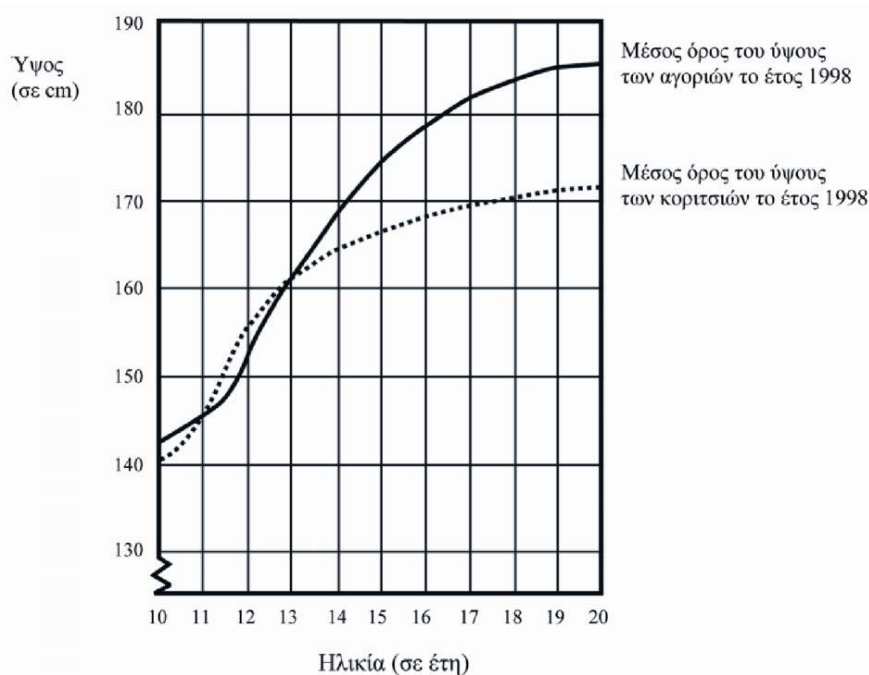
Να βρείτε σε κάθε περίπτωση:

- (i) την τιμή του α
 - (ii) το σημείο της καμπύλης με τετμημένη -5
5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (\beta^2 - \beta - 1)x^2$ περνά από το σημείο $P(-5, 25)$.
(α) Να βρείτε τις πιθανές τιμές του β .
(β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

6. Η κινητική ενέργεια $E_{κιν.}$, ενός σώματος μάζας m , που κινείται με ταχύτητα v δίνεται από τον τύπο $E_{κιν.} = \frac{1}{2} mv^2$.
- (α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ενέργειας $E_{κιν.}$ ως προς την ταχύτητα v για ένα σώμα που έχει μάζα 2 kg .
- (β) Να βρείτε το Π.Ο. και το Π.Τ. της συνάρτησης που περιγράφεται από την πιο πάνω γραφική παράσταση.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνεται η παραβολή με τύπο $y = x^2$ και η ευθεία $y = x + 6$. Να βρείτε τα σημεία τομής τους.
2. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται το μέσο ύψος των αγοριών και των κοριτσιών στην Ολλανδία κατά το έτος 1998.

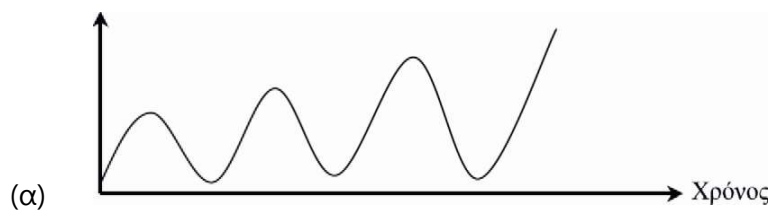


- (α) Μετά το έτος 1980, το μέσο ύψος των εικοσάχρονων κοριτσιών αυξήθηκε κατά $2,3 \text{ cm}$ φτάνοντας στα $170,6 \text{ cm}$. Να γράψετε παρακάτω ποιο ήταν το μέσο ύψος ενός εικοσάχρονου κοριτσιού το έτος 1980.
- (β) Να εξηγήσετε πώς αυτό το διάγραμμα δείχνει ότι κατά μέσον όρο, ο ρυθμός ανάπτυξης των κοριτσιών μειώνεται από τα 12 χρόνια τους και μετά.
- (γ) Σύμφωνα με αυτό το διάγραμμα, σε ποια χρονική περίοδο της ζωής τους τα κορίτσια είναι, κατά μέσον όρο, ψηλότερα από τα συνομήλικά τους αγόρια; *PISA 2003*

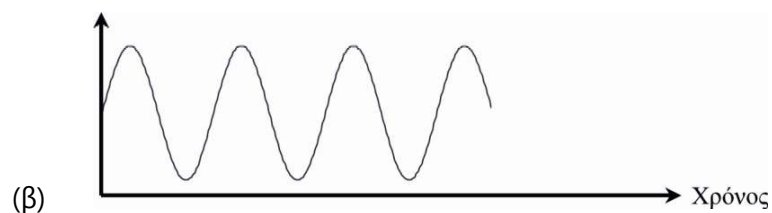
3. Ο Μιχάλης κάθεται πάνω σε μια κούνια. Αρχίζει να κάνει κούνια προσπαθώντας να φθάσει όσο το δυνατόν πιο ψηλά.

Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα αναπαριστά καλύτερα την απόσταση των ποδιών του από το έδαφος, καθώς κάνει κούνια;

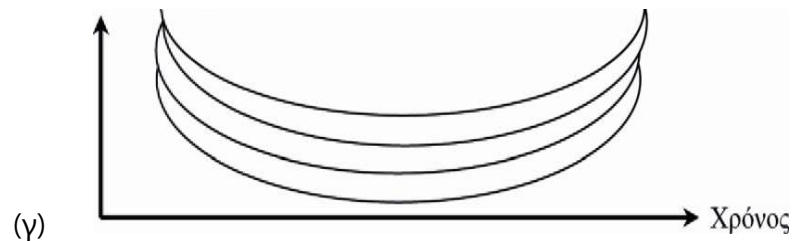
Απόσταση ποδιών



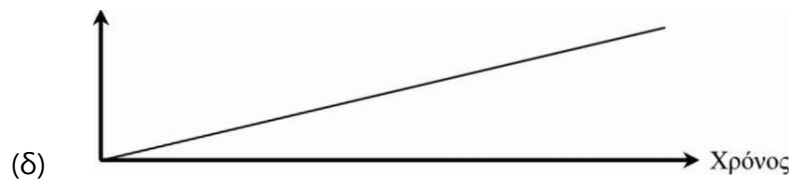
Απόσταση ποδιών



Απόσταση ποδιών



Απόσταση ποδιών



PISA 2003

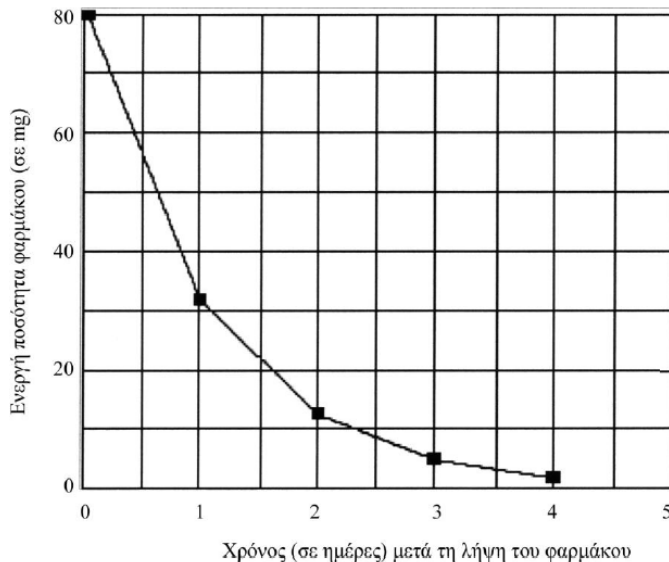
4. Σε ένα νοσοκομείο χορηγείται μια ένεση πενικιλίνης σε μια γυναίκα. Η πενικιλίνη διασπάται προοδευτικά, έτσι ώστε μετά από μια ώρα μόνο το 60% της πενικιλίνης θα παραμείνει ενεργό.

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο ρυθμό: στο τέλος κάθε ώρας παραμένει ενεργό μόνο το 60% της πενικιλίνης που υπήρχε στο τέλος της προηγούμενης ώρας. Ας υποθέσουμε ότι στη γυναίκα χορηγείται μια δόση πενικιλίνης 300 milligrams στις 8 η ώρα το πρωί.

- (α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, γράφοντας την ποσότητα πενικιλίνης που θα παραμείνει ενεργή στο αίμα της γυναίκας, ανά διαστήματα μίας ώρας, από τις 8 το πρωί μέχρι τις 11 το πρωί.

Ώρα	08:00	09:00	10:00	11:00
Πενικιλίνη (σε mg)	300			

Ο Πέτρος πρέπει να πάρει 80 mg από ένα φάρμακο, για να ελέγξει την πίεση στο αίμα του. Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει την αρχική ποσότητα φαρμάκου και την ποσότητα που παραμένει ενεργή στο αίμα του μετά από μία, δύο, τρεις και τέσσερις ημέρες.



- (β) Πόσο φάρμακο παραμένει ενεργό στο τέλος της πρώτης ημέρας; Κυκλώστε την απάντησή σας.
- A. 6 mg B. 12 mg
Γ. 26 mg Δ. 32 mg

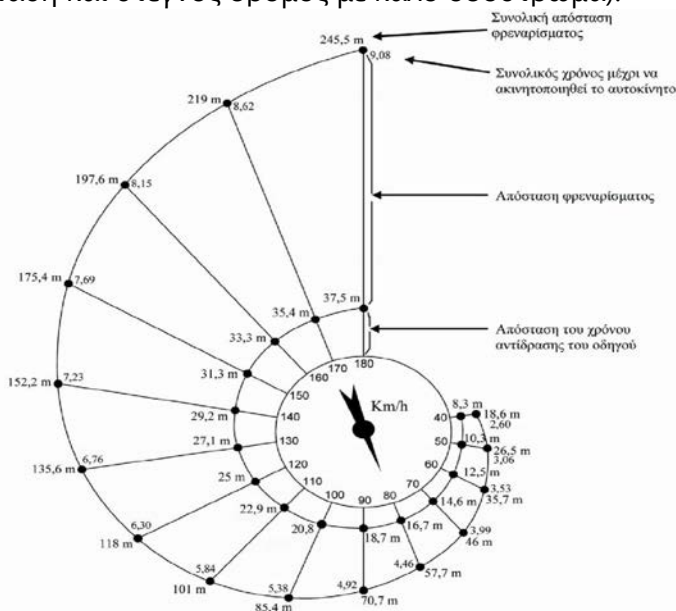
(γ) Από τη γραφική παράσταση της προηγούμενης ερώτησης μπορείτε να συμπεράνετε ότι ο λόγος της ποσότητας φαρμάκου που παραμένει ενεργή στο αίμα του Πέτρου προς την αντίστοιχη της προηγούμενης ημέρας, είναι σχεδόν ο ίδιος για κάθε ημέρα. Στο τέλος κάθε ημέρας ποιο από τα παρακάτω εκφράζει, κατά προσέγγιση, το ποσοστό φαρμάκου που παραμένει ακόμη ενεργό από την προηγούμενη ημέρα; Να βαλετε σε κύκλο την απάντησή σας.

- A. 20%
- B. 30%
- Γ. 40%
- Δ. 80%

PISA 2003

5. Θα ονομάσουμε συνολική απόσταση φρεναρίσματος, την απόσταση που διανύει ένα κινούμενο αυτοκίνητο, μέχρι να ακινητοποιηθεί. Η απόσταση αυτή είναι ίση, κατά προσέγγιση, με το άθροισμα:
- A. της απόστασης που διανύει το αυτοκίνητο όση ώρα χρειάζεται, για να αντιδράσει ο οδηγός, μέχρι να ακουμπήσει το πόδι του στο φρένο (απόσταση του χρόνου αντίδρασης του οδηγού).
 - B. της απόστασης που διανύει το αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός αρχίζει να πατάει το φρένο, μέχρι την ακινητοποίηση του αυτοκινήτου (απόσταση φρεναρίσματος).

Το παρακάτω διάγραμμα "σαλιγκαριού" δείχνει πώς οι τιμές των τριών αποστάσεων εξαρτώνται από τις τιμές της ταχύτητας, όταν ένα αυτοκίνητο τρέχει κάτω από ιδανικές συνθήκες (δηλ. οδηγός με άριστα αντανακλαστικά, φρένα και λάστιχα σε άριστη κατάσταση και στεγνός δρόμος με καλό οδόστρωμα).



- (α) Αν ένα αυτοκίνητο τρέχει με 110 km/h , ποια είναι η απόσταση του χρόνου αντίδρασης του οδηγού;
- (β) Αν ένα αυτοκίνητο τρέχει με 110 km/h , ποια είναι η συνολική απόσταση φρεναρίσματος;
- (γ) Αν ένα αυτοκίνητο τρέχει με 110 km/h , πόσο χρόνο θα χρειαστεί μέχρι να ακινητοποιηθεί;
- (δ) Αν ένα αυτοκίνητο τρέχει με 110 km/h , ποια είναι η απόσταση φρεναρίσματος;
- (ε) Μια οδηγός, ταξιδεύοντας με ιδανικές συνθήκες, ακινητοποιεί το αυτοκίνητό της σε συνολική απόσταση $70,7$ μέτρων. Με ποια ταχύτητα έτρεχε το αυτοκίνητο πριν αντιδράσει η οδηγός;

Αν ένα αυτοκίνητο τρέχει σε βρεγμένο δρόμο, χωρίς να αλλάξουν οι υπόλοιπες συνθήκες, τότε η απόσταση φρεναρίσματος (και όχι η απόσταση του χρόνου αντίδρασης του οδηγού) αυξάνεται κατά 40% .

Το παραπάνω διάγραμμα δείχνει ότι, αν ένα αυτοκίνητο τρέχει με ιδανικές συνθήκες και με 80 km/h , τότε η συνολική απόσταση φρεναρίσματος του αυτοκινήτου είναι $57,7 \text{ m}$.

- (στ) Αν το αυτοκίνητο τρέχει με την ίδια ταχύτητα, αλλά σε βρεγμένο δρόμο, χωρίς να αλλάξουν οι υπόλοιπες συνθήκες, ποια από τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις δείχνει πώς να υπολογίζουμε τη συνολική απόσταση φρεναρίσματος του αυτοκινήτου; Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

A. $57,7 \times 1,4$

B. $(57,7 - 16,7) \times 1,4$

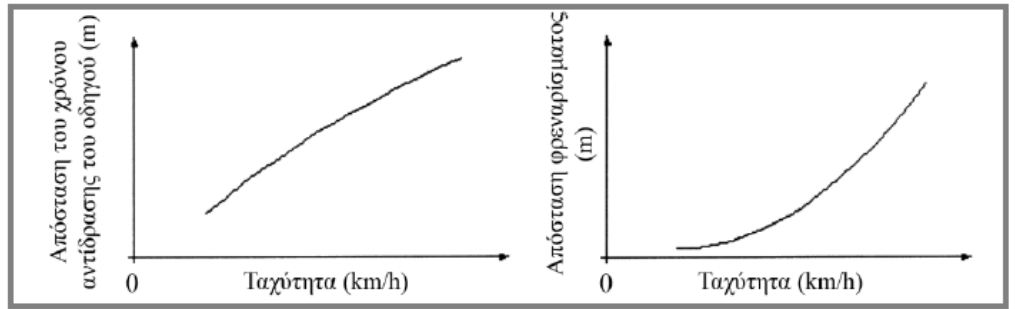
Γ. $16,7 + 57,7 \times 1,4$

Δ. $16,7 + (57,7 - 16,7) \times 1,4$

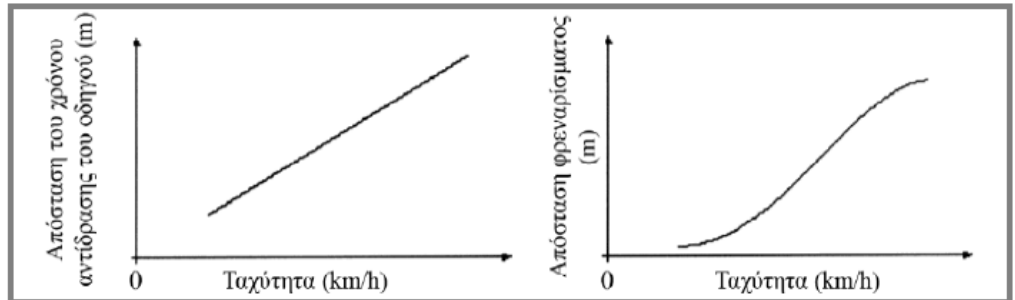
Στην επόμενη σελίδα βλέπετε τέσσερα ζεύγη γραφικών παραστάσεων. Σε αυτές οι οριζόντιοι άξονες δείχνουν τις τιμές της ταχύτητας (σε km/h) και οι κατακόρυφοι άξονες τις τιμές (σε μέτρα) για την απόσταση του χρόνου αντίδρασης του οδηγού και για την απόσταση φρεναρίσματος αντίστοιχα.

- (ζ) Ποιο ζεύγος γραφικών παραστάσεων απεικονίζει σωστά τις πληροφορίες του διαγράμματος «σαλιγκαριού»; Να βάλετε σε κύκλο την απάντησή σας.

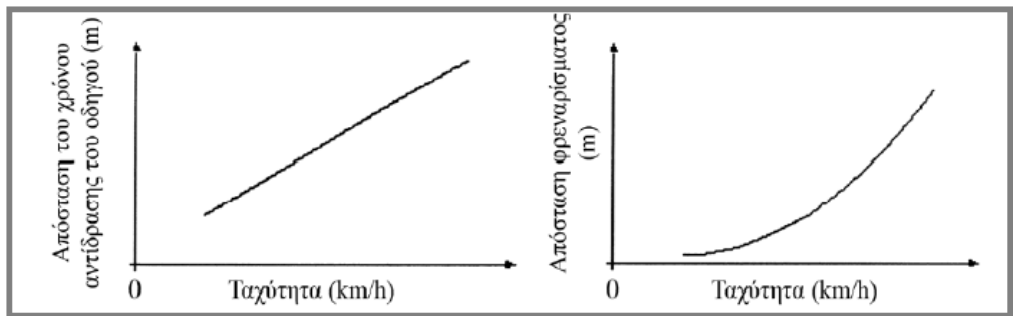
A.



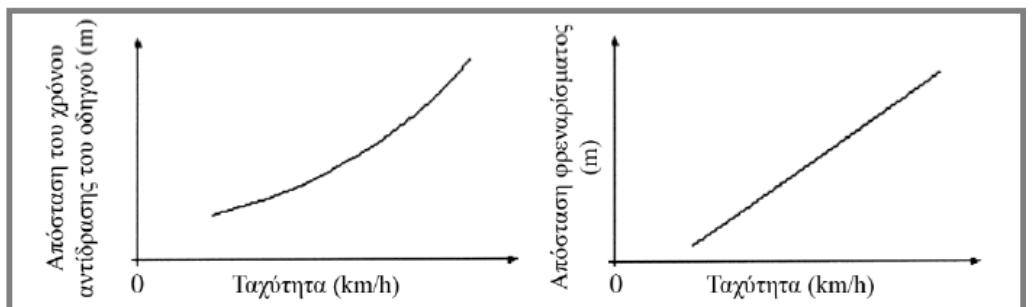
B.



Γ.



Δ.



PISA 2003

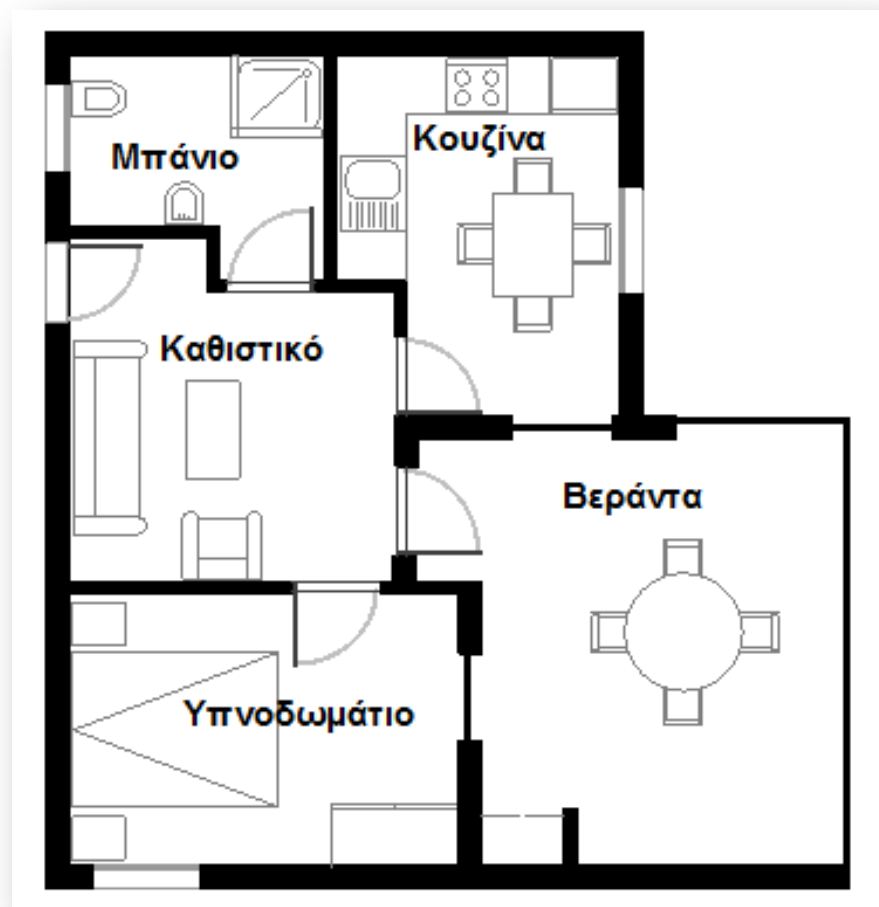
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε παραλληλόγραμμα με βάση τον ορισμό και τα κριτήρια.
- Να χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου στην επίλυση προβλημάτων.
- Να αναγνωρίζουμε τα είδη των παραλληλόγραμμων με βάση τον ορισμό και τα κριτήρια.
- Να αναγνωρίζουμε τραπέζια και ισοσκελή τραπέζια.
- Να γνωρίζουμε και να εφαρμόζουμε τα κριτήρια για το πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο ή ειδικό παραλληλόγραμμο ή τραπέζιο.
- Να αποδεικνύουμε ιδιότητες των τραπεζίων και ισοσκελών τραπεζίων και τις χρησιμοποιούμε στην επίλυση προβλημάτων.
- Να αποδεικνύουμε ιδιότητες στα τρίγωνα χρησιμοποιώντας ιδιότητες των παραλληλογράμμων και να τις εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων.



ΑΓΟΡΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

Αυτό είναι το αρχιτεκτονικό σχέδιο του διαμερίσματος που θέλουν να αγοράσουν οι γονείς του Γιώργου από ένα κτηματομεσιτικό γραφείο.



Κλίμακα: 1 cm αντιστοιχεί σε 1 m.

Ερώτηση: ΑΓΟΡΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

Για να υπολογίσεις το συνολικό εμβαδόν του διαμερίσματος (συμπεριλαμβανομένης της βεράντας και των τοίχων), μπορείς να μετρήσεις τις διαστάσεις του κάθε δωματίου, να υπολογίσεις το εμβαδόν του καθενός και να προσθέσεις όλα τα εμβαδά μαζί.

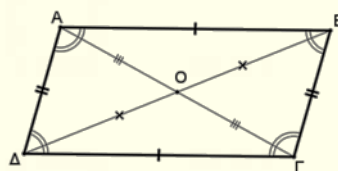
Υπάρχει, όμως, πιο εύκολη μέθοδος υπολογισμού του συνολικού εμβαδού, μετρώντας μόνο 4 μήκη. Να σημειώσεις στο πιο πάνω σχήμα τα τέσσερα μήκη που χρειάζεται να μετρηθούν, ώστε να υπολογιστεί το συνολικό εμβαδόν του διαμερίσματος.

PISA 2012

Έχουμε μάθει ...

- Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι 360° .

- Παραλληλόγραμμο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

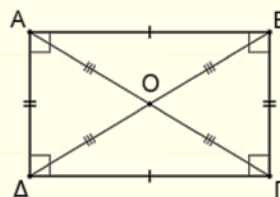


- Ιδιότητες παραλληλογράμμου:**

- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες ($AB = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = B\Gamma$).
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες ($\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$).
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλαδή το O είναι το μέσο των διαγωνίων του ($OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$).

- Ορθογώνιο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις τέσσερις γωνίες του ορθές.

Το ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.



- Ιδιότητες ορθογωνίου:**

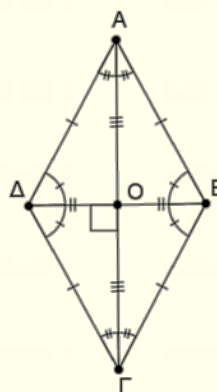
- Όλες τις ιδιότητες που ισχύουν στο παραλληλόγραμμο.
- Οι διαγώνιοι του είναι ίσες ($A\Gamma = B\Delta$).

- Ρόμβος** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες.

Κάθε ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο.

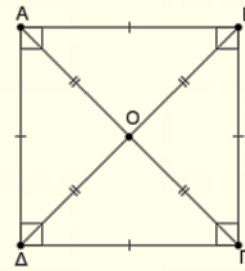
- Ιδιότητες ρόμβου:**

- Όλες οι ιδιότητες που ισχύουν στο παραλληλόγραμμο.
- Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες ($A\Gamma \perp B\Delta$).
- Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του (η $A\Gamma$ διχοτομεί τις γωνίες \hat{A} και $\hat{\Gamma}$, και η $B\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες \hat{B} και $\hat{\Delta}$).



- ♦ Τετράγωνο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές.

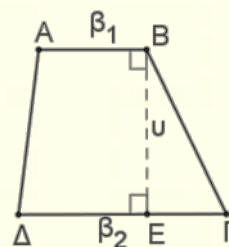
Κάθε τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο και ρόμβος.



- ♦ Σε κάθε τετράγωνο ισχύουν οι ιδιότητες που ισχύουν στο παραλληλόγραμμο, στο ορθογώνιο και στον ρόμβο.

- ♦ Τραπεζίο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει μόνο τις δύο πλευρές του παράλληλες.

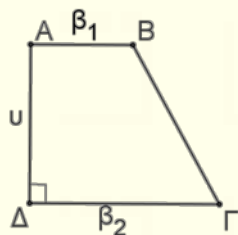
- Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου ονομάζονται βάσεις του τραπεζίου.
- Η απόσταση των δύο παράλληλων πλευρών του τραπεζίου ονομάζεται ύψος του τραπεζίου.



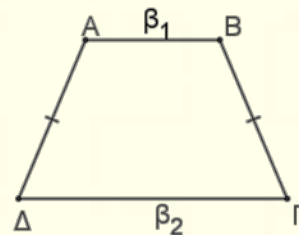
- ♦ Η διάμεσος του τραπεζίου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του.

- ♦ Το τραπεζίο που έχει ορθή γωνία ονομάζεται ορθογώνιο τραπεζίο.

- ♦ Το τραπεζίο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες ονομάζεται ισοσκελές τραπεζίο. Στο ισοσκελές τραπεζίο (α) οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες, (β) οι διαγωνίες του είναι ίσες.



Ορθογώνιο τραπεζίο



Ισοσκελές τραπεζίο



Μπορείτε να ανοίξετε τα πιο κάτω αρχεία για να θυμηθείτε τις ιδιότητες των τετραπλεύρων που αναφέρονται πιο πάνω:

- ♦ [C_En10_IdiotitesPARAL.ggb](#)
- ♦ [C_En10_IdiotitesORTHO.Ggb](#)
- ♦ [C_En10_IdiotitesROMVOS.ggb](#)
- ♦ [C_En10_IdiotitesTETRAGONO.ggb](#)
- ♦ [C_En10_IdiotitesTRAPEZIO.ggb](#)
- ♦ [C_En10_IdiotitesIsoskelesTrapezio.ggb](#)

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

Παραλληλόγραμμο

Διερεύνηση (1)



Σε ένα φύλλο χαρτί:

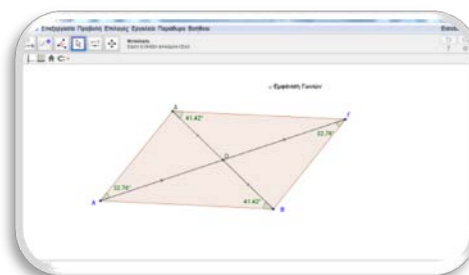
- Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$ και να ονομάσετε $Ο$ το μέσον του.
- Να φέρετε μία ευθεία $ε$ που να περνά από το $Ο$ και να σημειώσετε τα σημεία $Β$ και $Δ$ πάνω στην ευθεία $ε$ έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $ΒΟ$ και $ΟΔ$ να είναι ίσα.
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.
- ✓ Να διατυπώσετε μian εικασία που να διακρίνει πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Εναλλακτικά, μπορείτε να ακολουθήσετε τα πιο πάνω βήματα και να κάνετε την κατασκευή με το λογισμικό GeoGebra.



Μπορείτε ακόμα να ανοίξετε το αρχείο «C_En10_Paralilogramo.ggb».

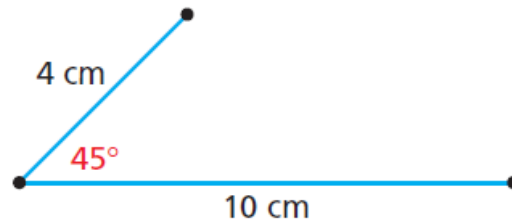
- ✓ Να επιλέξετε το κουμπί «Εμφάνιση Γωνιών», για να εξετάσετε την ορθότητα της εικασίας σας.



- ✓ Να μετακινήσετε το σημείο $Γ$ σε διάφορες θέσεις και να επιβεβαιώσετε τα συμπεράσματά σας.

Διερεύνηση (2)

- ✓ Να περιγράψετε πώς θα μπορούσατε να συνεχίσετε την πιο κάτω κατασκευή για να συμπληρωθεί ένα παραλληλόγραμμο. Να παρουσιάσετε διαφορετικούς τρόπους.



Μαθαίνω

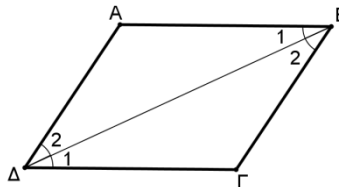
• Κριτήρια Παραλληλογράμμου

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις:

- (α) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες (ορισμός).
- (β) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (γ) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (δ) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (ε) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη: Κριτηρίων παραλληλογράμμου (β), (γ), (δ) και (ε)

(β) Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ και σχηματίζουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ τα οποία συγκρίνουμε.



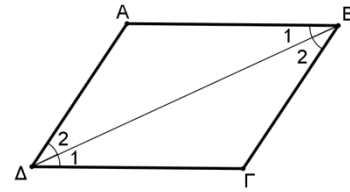
Ισχύει ότι:

- $AB = \Gamma\Delta$ (δεδομένο)
- $A\Delta = B\Gamma$ (δεδομένο)
- $B\Delta = B\Delta$ (κοινή πλευρά)

Άρα, τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα ($\Pi - \Pi - \Pi$), επομένως οι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2$.

Άρα, οι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(γ) Έστω ότι σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ στο οποίο ισχύει ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$. Φέρουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ και σχηματίζουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ τα οποία συγκρίνουμε.



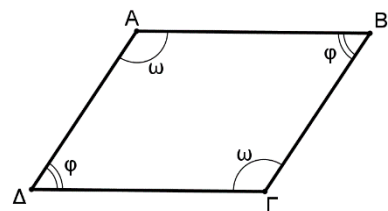
Ισχύει ότι:

- $AB = \Gamma\Delta$ (δεδομένο)
- $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ γωνίες, $AB \parallel \Gamma\Delta$)
- $B\Delta = B\Delta$ (κοινή πλευρά)

Άρα, τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα ($\Pi - \Gamma - \Pi$), επομένως $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2$. Άρα, $A\Delta \parallel B\Gamma$, αφού $\widehat{B}_2, \widehat{\Delta}_2$ εντός εναλλάξ γωνίες.

Έχουμε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$ δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(δ) Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει ότι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = \omega$ και $\widehat{\Delta} = \widehat{B} = \phi$.



Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 2\omega + 2\phi = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \omega + \phi = 180^\circ.$$

Επομένως, $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^\circ$.

Αφού \widehat{A} και $\widehat{\Delta}$ είναι εντός κι επί τα αυτά γωνίες, τότε $AB \parallel \Gamma\Delta$.

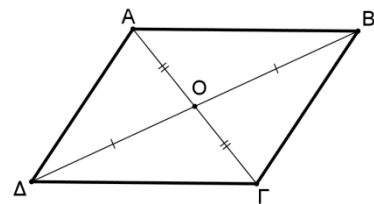
Με τον ίδιο τρόπο $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$ και \widehat{A}, \widehat{B} είναι εντός κι επί τα αυτά γωνίες, άρα $A\Delta \parallel B\Gamma$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(ε) Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AO = BO$ και $AO = GO$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOB και ΔOG , τα οποία έχουν:

- $AO = GO$ (δεδομένο)
- $BO = \Delta O$ (δεδομένο)
- $\widehat{AOB} = \widehat{\Delta OG}$ (κατακορυφήν γωνίες).



\Rightarrow τα τρίγωνα AOB και ΔOG είναι ίσα ($\Pi - \Gamma - \Pi$).

$$\Rightarrow AB = \Gamma\Delta \text{ και } \widehat{BAO} = \widehat{\Delta GO}.$$

Οι γωνίες $\widehat{BAO}, \widehat{\Delta GO}$ είναι εντός εναλλάξ των AB και $\Delta\Gamma \Rightarrow AB \parallel \Delta\Gamma$

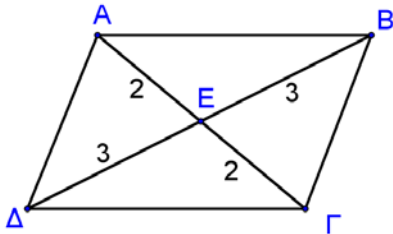
$$\Rightarrow AB \parallel \Delta\Gamma.$$

Επομένως το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με βάση το προηγούμενο κριτήριο.

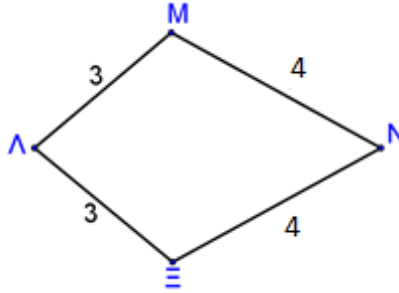
Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα και ποια όχι;

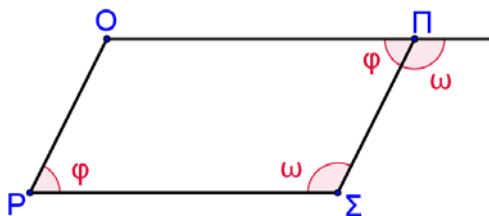
(α)



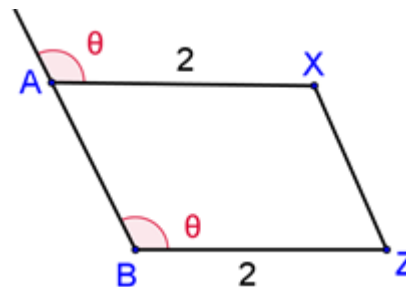
(β)



(γ)



(δ)



Λύση:

- (α) Είναι παραλληλόγραμμα, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
- (β) Δεν είναι παραλληλόγραμμα, γιατί οι απέναντι πλευρές του δεν είναι ίσες.
- (γ) Είναι παραλληλόγραμμα, γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες αφού $\hat{\phi} + \hat{\omega} = 180^\circ$.
- (δ) Είναι παραλληλόγραμμα, γιατί οι απέναντι πλευρές ΑΧ, ΒΖ είναι ίσες και παράλληλες (Έχουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες)

2. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(-6, -3)$, $B(2, -3)$, $\Gamma(4, 4)$ και $\Delta(-4, 4)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση:

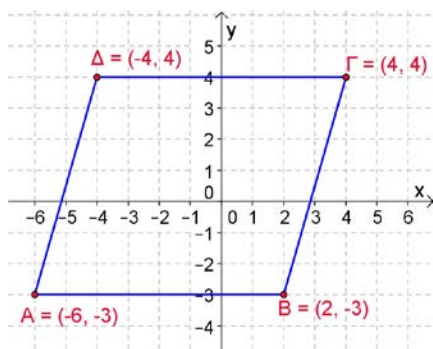
Α' τρόπος

Τοποθετούμε τις κορυφές σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τα AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλα αφού βρίσκονται πάνω στις παράλληλες ευθείες $y = -3$ και $y = 4$ αντίστοιχα.

Επίσης $AB = \Gamma\Delta = 8$ μονάδες.

Άρα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες και παράλληλες ($AB = \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$).



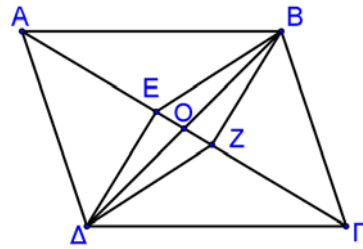
Β' τρόπος

Υπολογίζουμε τα μήκη των πλευρών του τετραπλεύρου, χρησιμοποιώντας τον τύπο $(KL) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, όπου $K(x_1, y_1)$ και $L(x_2, y_2)$

- $(AB) = \sqrt{(2 - (-6))^2 + (-3 - (-3))^2} = \sqrt{64} = 8$ μονάδες
- $(B\Gamma) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (4 - (-3))^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$ μονάδες
- $(\Gamma\Delta) = \sqrt{(-4 - 4)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{64} = 8$ μονάδες
- $(\Delta A) = \sqrt{(-4 - (-6))^2 + (4 - (-3))^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$ μονάδες

Άρα, $AB = \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = \Delta A \Rightarrow AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

3. Στο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Αν O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και $OE = OZ$, να αποδείξετε ότι $DE = BZ$.



Λύση:

Στο τετράπλευρο $DEBZ$:

- $DO = OB$ (οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται)
- $OE = OZ$ (δεδομένο)

Άρα, το τετράπλευρο $DEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

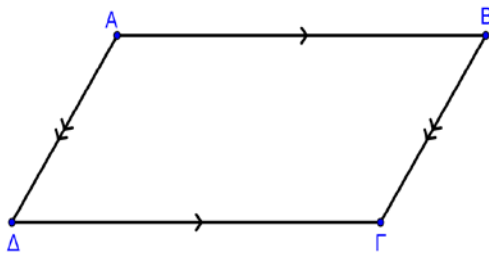
Επομένως $DE = BZ$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $DEBZ$.

Δραστηριότητες

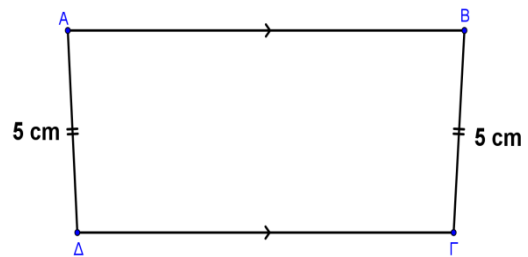


1. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμο και ποια όχι. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

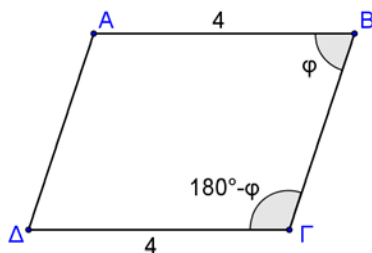
(α)



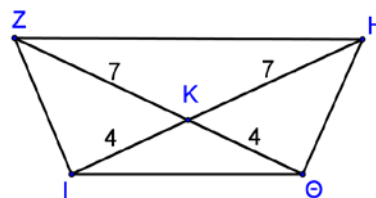
(β)



(γ)



(δ)



2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αν δύο πλευρές του είναι ίσες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν δύο γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Δύο διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι οξείες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Ο Μιχάλης και ο Γιάννης περιέγραψαν κάποιους τρόπους για το πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Να σχολιάσετε τους ισχυρισμούς τους.

Μιχάλης

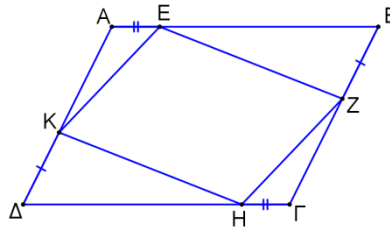
Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν ένα ζεύγος πλευρών είναι ίσες και ένα ζεύγος απέναντι πλευρών είναι παράλληλες.

Γιάννης

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν ένα ζεύγος πλευρών είναι ίσες και παράλληλες.

4. Σε τρίγωνο $ABΓ$ φέρουμε τη διάμεσο AM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABEΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.
5. Δίνονται τα σημεία $K(4,3)$, $Λ(9,0)$, $M(8,-5)$ και $N(3,-2)$. Να δείξετε ότι το $KΛMN$ είναι παραλληλόγραμμο και ακολούθως να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου του.
6. Δίνεται $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο. Να προεκτείνετε τις πλευρές AD , $BΓ$ κατά τμήματα $ΔE = \frac{AD}{3}$ και $BZ = \frac{BΓ}{3}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $AZΓE$ είναι παραλληλόγραμμο.

7. Στο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\text{K}$ είναι παραλληλόγραμμο.

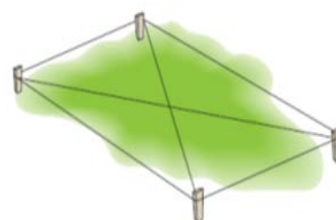


8. Να βρείτε τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής αν οι τρεις κορυφές ενός παραλληλογράμμου είναι $(-1,2)$, $(2,2)$ και $(0,-4)$.
9. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
 (α) το τετράπλευρο $A\text{E}\Gamma\text{Z}$ είναι παραλληλόγραμμο
 (β) οι $A\Gamma$, $B\Delta$, $E\text{Z}$ συντρέχουν (περνούν από το ίδιο σημείο)
10. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών παραλληλογράμμου είναι παράλληλες.
11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το A . Από τυχαίο σημείο M της βάσης του φέρουμε τη ME παράλληλη προς την $A\Gamma$ και την $M\Delta$ παράλληλη προς την AB (τα σημεία E και Δ ανήκουν στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα). Να αποδείξετε ότι:
 (α) κάθε μια από τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ισούται με το άθροισμα δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται
 (β) το άθροισμα των περιμέτρων των τριγώνων $E\text{B}\text{M}$ και $\Delta\text{M}\Gamma$ ισούται με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$

Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο

Διερεύνηση (1)

Σε ένα γυμνάσιο ο γυμναστής θέλει να χαράξει τις γραμμές του γηπέδου ποδοσφαίρου σε σχήμα ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έχει στη διάθεσή του σχοινί, τέσσερις σφήνες και μια μετροταινία.



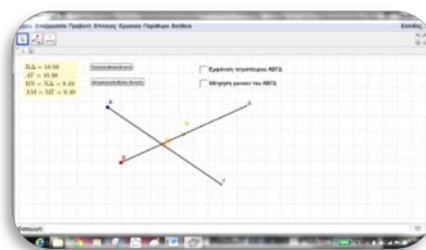
- ✓ Να συζητήσετε διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ο γυμναστής μπορεί να χαράξει τις γραμμές, ώστε το γήπεδο ποδοσφαίρου να είναι ορθογώνιο.

Διερεύνηση (2)



Να ανοίξετε το αρχείο: «[C_En10_Orthogonio.ggb](#)»

- Δίνονται δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΓ$ και $ΒΔ$ και τα μέσα τους $Μ$ και $Ν$, αντίστοιχα.
- ✓ Να μετακινήσετε το $Ν$ έτσι ώστε να συμπέσει με το $Μ$. Αυτό μπορείτε να το πετύχετε σύροντας, με το ποντίκι, το σημείο $Ν$ πάνω στο $Μ$ ή με τη χρήση του κουμπιού: «[Ταύτιση Μέσων \$Ν\$ και \$Μ\$](#) ».
- ✓ Να εμφανίσετε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ επιλέγοντας το κουτί: «[Εμφάνιση του τετραπλεύρου \$ΑΒΓΔ\$](#) ».
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.
- ✓ Να διατυπώσετε μια εικασία που να διακρίνει πότε ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο. Μπορείτε να επιλέξετε το κουτί: «[Εμφάνιση γωνιών του \$ΑΒΓΔ\$](#) », για να επιβεβαιώσετε την εικασία αυτή.
- ✓ Να μετακινήσετε το σημείο $Α$ σε διάφορες θέσεις και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία. Τι παρατηρείτε;



Μαθαίνω

• Κριτήρια Ορθογωνίου

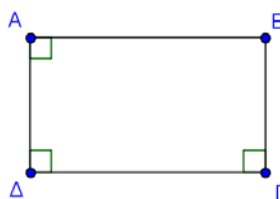
Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις:

- (α) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- (β) Όλες του οι γωνίες είναι ίσες.
- (γ) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- (δ) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Απόδειξη Κριτηρίων

Σε κάθε περίπτωση θα θεωρούμε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

(α) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες, τότε και η τέταρτη θα είναι ορθή διότι το άθροισμα όλων των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι 360° . Άρα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.



(β) Αν όλες του οι γωνίες είναι ίσες και αφού το άθροισμα των γωνιών του είναι 360° , τότε όλες οι γωνίες είναι ορθές. Άρα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

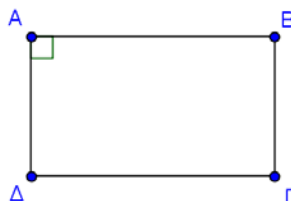
(γ) Έστω ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και έχει τη γωνία \hat{A} ορθή.

Τότε και η απέναντι της γωνία $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

Η \hat{B} είναι παραπληρωματική της \hat{A} , άρα $\hat{B} = 90^\circ$.

Η $\hat{\Delta} = \hat{B}$ άρα όλες του οι γωνίες είναι ορθές.

Άρα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.



(δ) Έστω ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $A\Gamma = B\Delta$.

Τα τρίγωνα ΔAB και $AB\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν:
 $A\Delta = B\Gamma$, AB κοινή πλευρά,

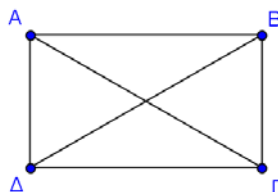
$$B\Delta = A\Gamma \text{ (}\Pi - \Pi - \Pi\text{)}.$$

Άρα $\hat{A} = \hat{B}$.

Επιπλέον $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ (εντός και επί τα αυτά γωνίες). Άρα $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$.

Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, άρα $\hat{\Delta} = \hat{B} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 90^\circ$.

Άρα, είναι όλες ορθές και το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.



Παραδείγματα

1. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε $AE \perp B\Gamma$ και $\Gamma Z \perp A\Delta$. Να αποδείξετε ότι το $AZ\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

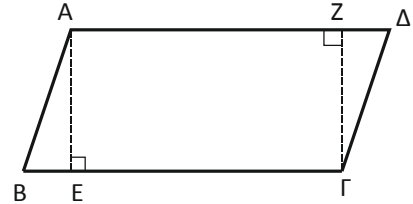
Λύση:

$AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

$$AE \perp B\Gamma \Rightarrow \hat{E} = 90^\circ$$

$E\hat{A}Z = 90^\circ$ (εντός και επί τα αυτά με την \hat{E})

$$\Gamma Z \perp A\Delta \Rightarrow \hat{Z} = 90^\circ$$

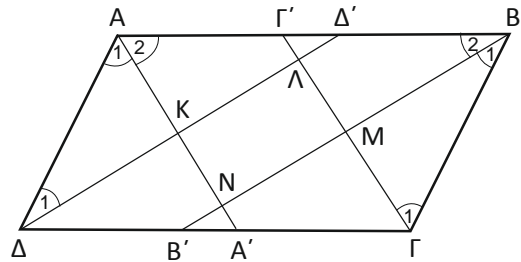


Άρα, το τετράπλευρο $AZ\Gamma E$ έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα είναι ορθογώνιο.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB > B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των διχοτόμων των γωνιών του είναι κορυφές ορθογώνιου.

Λύση:

Φέρουμε τις διχοτόμους AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$ των γωνιών \hat{A} , \hat{B} , $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου αντίστοιχα.



Έχουμε,

- $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$, (AA' διχοτόμος της \hat{A}),
- $\hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{\Delta}}{2}$, ($\Delta\Delta'$ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$).

Άρα, $\hat{A}_1 + \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{\Delta}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ ($\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$, εντός και επί τα αυτά)

Άρα, στο τρίγωνο $K\Delta\Delta'$, έχουμε $\hat{K} = 90^\circ$ ($\hat{A}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{K} = 180^\circ$).

Ομοίως, στο τρίγωνο ANB αποδεικνύεται ότι $\hat{N} = 90^\circ$ και στο τρίγωνο $B\Gamma\Gamma'$ αποδεικνύεται ότι $\hat{M} = 90^\circ$.

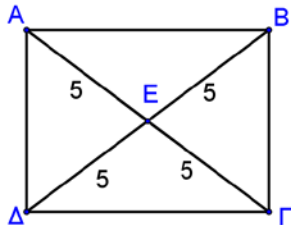
Το τετράπλευρο $KLMN$ έχει τρεις γωνίες ορθές. Άρα, είναι ορθογώνιο.

Δραστηριότητες

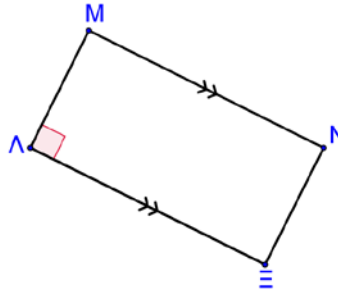


1. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι ορθογώνια.

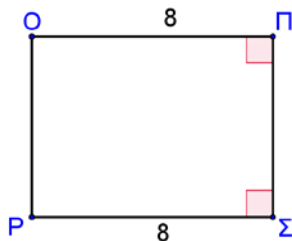
(α)



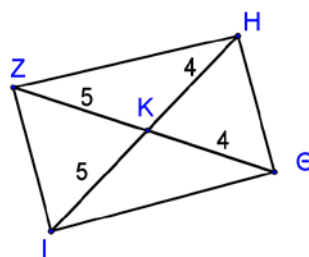
(β)



(γ)



(δ)



2. Να εξετάσετε κατά πόσο ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

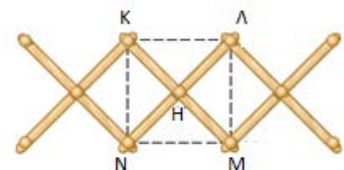
(α) έχει δύο γωνίες ορθές

(β) έχει τις διαγώνιούς του κάθετες

(γ) είναι παραλληλόγραμμο και έχει τις διαγώνιούς του ίσες

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

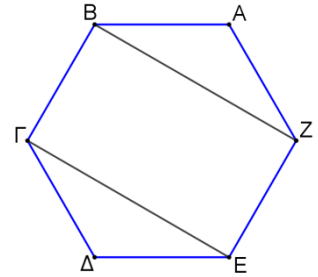
3. Στη διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου, η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου που είναι στερεωμένα με έντεκα ξύλινα καρφιά. Αν το H είναι το μέσο των ευθύγραμμων τμημάτων KM και LN , να εξηγήσετε τι είδους τετράπλευρο είναι το $KLMN$.



4. Σε ορθογώνιο $ABΓΔ$, E είναι το μέσο της AB και Z το μέσο της $ΓΔ$. Να δείξετε ότι $AEZΔ$ είναι ορθογώνιο.

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$ και E το μέσο της $A\Gamma$. Προεκτείνουμε τη ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
6. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Delta = 2A\Gamma$. Αν οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο O και τα σημεία E, Z είναι τα μέσα των OB και OD αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $A\epsilon\Gamma Z$ είναι ορθογώνιο.

7. Στο σχήμα το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E Z$ έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες. Να δείξετε ότι το $BZ\epsilon\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

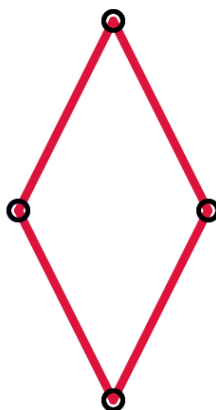


8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας B . Αν AH κάθετη στην εσωτερική διχοτόμο και $A\theta$ κάθετη στην εξωτερική διχοτόμο της γωνίας B αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHB\theta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ρόμβος

Διερεύνηση (1)

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ο σκελετός ενός χαρταετού. Ο Γιάννης παρατήρησε πως δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες και ισχυρίστηκε πως το σχήμα είναι ρόμβος.

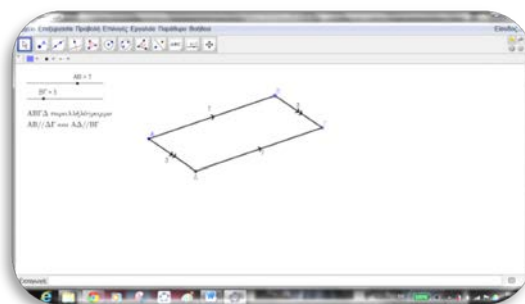


- ✓ Να εξετάσετε την ορθότητα του ισχυρισμού του Γιάννη.
- ✓ Να διατυπώσετε μια εικασία που να διακρίνει πότε ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος.

Διερεύνηση (2)



Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο:
«C_En10_Romvos.ggb».



- ✓ Να μετακινήσετε τους δρομείς «AB» και «BG» έτσι ώστε $AB = BG$ και να εξετάσετε το είδος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται.
- ✓ Να επιλέξετε το κουμπί «Εμφάνιση Διαγωνίων». Να διατυπώσετε διαφορετικές εικασίες που να διακρίνουν κατά πόσο ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος.
- ✓ Να μετακινήσετε το σημείο B και τους δρομείς «AB» και «BG» σε διάφορες θέσεις και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία. Τι παρατηρείτε;

Μαθαίνω

♦ Κριτήρια Ρόμβου

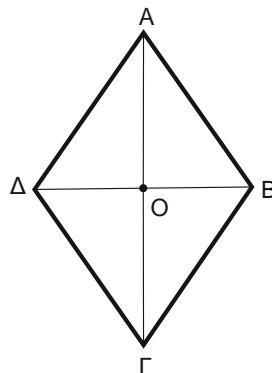
Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις:

- (α) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες (ορισμός).
- (β) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- (γ) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- (δ) Είναι παραλληλόγραμμο και η μια διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνιά του.

Απόδειξη Κριτηρίων:

- (β) Το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο άρα έχει τις απέναντι πλευρές ίσες. Αφού επιπλέον έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, τότε από τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου προκύπτει ότι έχει και τις απέναντι τους πλευρές ίσες.

Άρα, έχει και τις τέσσερις πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος.



- (γ) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $AG \perp B\Delta$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AO είναι ύψος ($AG \perp B\Delta$), αλλά είναι και διάμεσος αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Άρα, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επομένως $AB = A\Delta$.

Άρα, το τετράπλευρο είναι ρόμβος, σύμφωνα με το κριτήριο (β).

- (δ) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και η AG διχοτομεί την \hat{A} . Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AO είναι διχοτόμος (AG διχοτομεί την \hat{A}) αλλά είναι και διάμεσος αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

Άρα, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επομένως $AB = A\Delta$.

Άρα, το τετράπλευρο είναι ρόμβος, σύμφωνα με το κριτήριο (β).

Παραδείγματα

1. Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι είναι ρόμβος.

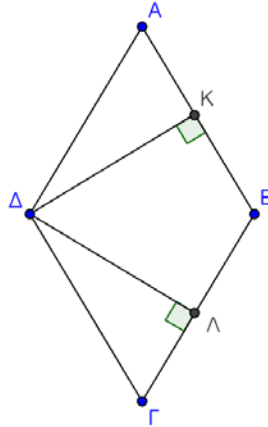
Λύση:

Έστω το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και $\Delta K, \Delta\Lambda$ είναι οι ίσες αποστάσεις των απέναντι πλευρών ($\Delta K = \Delta\Lambda$).

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔKA και $\Delta\Lambda\Gamma$ τα οποία έχουν:

- $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$
 - $\Delta K = \Delta\Lambda$ (δεδομένο)
 - $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου)
- \Rightarrow Τα τρίγωνα $\Delta KA, \Delta\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.
 $\Rightarrow \Delta A = \Delta\Gamma$ (αντίστοιχα στοιχεία).

Επομένως το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Άρα, $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.



2. Δίνεται παραλληλόγραμμο με τις διαγώνιους του να βρίσκονται πάνω στις ευθείες $y = 2x$ και $2y + x = 4$. Να αποδείξετε ότι είναι ρόμβος.

Λύση:

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Αν οι διαγώνιές του είναι κάθετες τότε θα είναι και ρόμβος. Άρα, αρκεί να εξετάσουμε κατά πόσο οι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες. Αν δηλαδή το γινόμενο των κλίσεων τους είναι ίσο με -1 .

- $\varepsilon_1: y = 2x \Rightarrow \lambda_1 = 2$
 - $\varepsilon_2: 2y + x = 4 \Rightarrow$
 $2y = -x + 4 \Rightarrow$
 $y = -\frac{x}{2} + 2 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}$
- $\Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$
 $\Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Αν ε_1 και ε_2 δύο ευθείες με κλίσεις λ_1 και λ_2 αντίστοιχα τότε:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$$

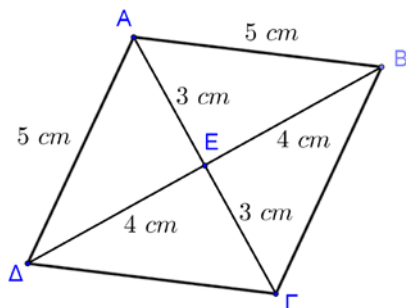
Πράγματι το τετράπλευρο είναι ρόμβος αφού είναι παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιους.

Δραστηριότητες

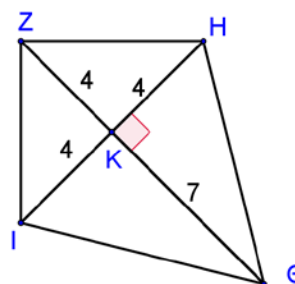


1. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι ρόμβος και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

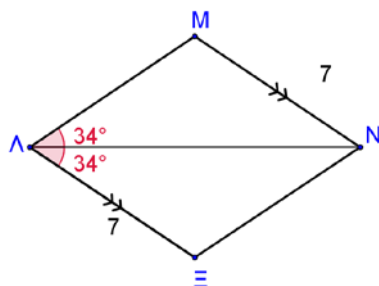
(α)



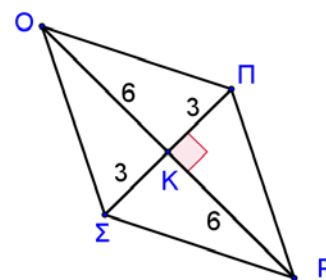
(β)



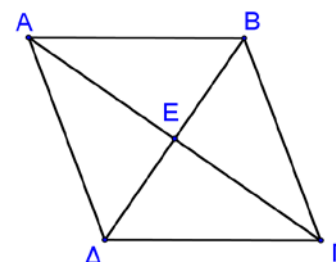
(γ)



(δ)

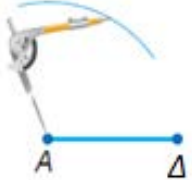
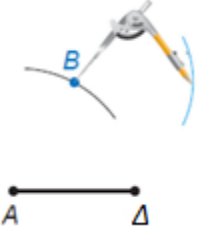
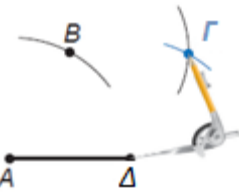
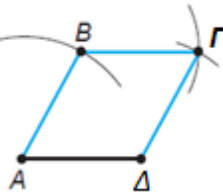


2. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα $AΔΓ$ και $ABΓ$ είναι ίσα. Αν τα τρίγωνα $AΔΓ$ ($AΔ = ΔΓ$) και $BΓΔ$ ($BΓ = ΓΔ$) είναι ισοσκελή, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι ρόμβος.



3. Δίνεται το τετράπλευρο $ABΓΔ$ με κορυφές $A(3,5)$, $B(-3,3)$, $Γ(3,1)$ και $Δ(9,3)$. Να δείξετε ότι το $ABΓΔ$ είναι ρόμβος.
4. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ ισχύει η σχέση $AB = 2BΓ$ και M, N τα μέσα των AB και $ΓΔ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $MBΓN$ είναι ρόμβος.

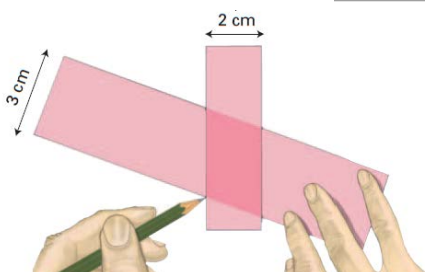
5. Πιο κάτω φαίνονται τα βήματα κατασκευής που ακολούθησε ο Ανδρέας για να κατασκευάσει έναν ρόμβο με κανόνα και διαβήτη. Να εξηγήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

ΒΗΜΑ 1:	ΒΗΜΑ 2:
 <p>«Κατασκευάζω ένα ευθύγραμμο τμήμα AD. Τοποθετώ τον διαβήτη στο A και γράφω τόξο με ακτίνα AD»</p>	 <p>«Ονομάζω B ένα τυχαίο σημείο πάνω στο τόξο. Τοποθετώ τον διαβήτη στο B και με την ίδια ακτίνα κατασκευάζω τόξο δεξιά του B»</p>
ΒΗΜΑ 3:	ΒΗΜΑ 4:
 <p>«Τοποθετώ τον διαβήτη στο Δ και με την ίδια ακτίνα κατασκευάζω τόξο που τέμνει το τόξο του βήματος 2 σε ένα σημείο Γ»</p>	 <p>«Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που σχηματίζεται είναι ρόμβος»</p>

6. Δίνεται $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και BZ διχοτόμος της γωνίας B (Z σημείο της $\Delta\Gamma$). Φέρουμε $\Gamma O \perp BZ$ και το προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο E . Να δείξετε ότι:
- το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές
 - τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OEB είναι ίσα
 - το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος

Τετράγωνο

Διερεύνηση (1)



Ο Πέτρος χρησιμοποίησε δύο ορθογώνιες ταινίες για να κατασκευάσει ένα τετράπλευρο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

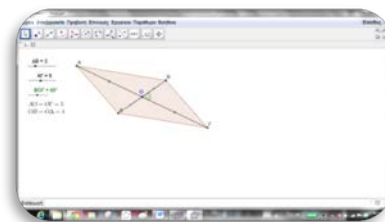
- ✓ Να εξετάσετε το είδος του τετραπλεύρου.
- ✓ Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσε να κατασκευάσει ένα ορθογώνιο, έναν ρόμβο και ένα τετράγωνο με αυτή την τεχνική, χρησιμοποιώντας ταινίες οποιουδήποτε πλάτους.

Διερεύνηση (2)



Να ανοίξετε το αρχείο «C_En10_Tetragono.ggb».

Οι δρομείς «ΑΓ», «ΔΒ» και «ΒΟΓ» μεταβάλλουν τα μήκη των αντίστοιχων διαγωνίων και τη μεταξύ τους γωνία.



- ✓ Να μετακινήσετε τους δρομείς «ΑΓ», «ΔΒ» και «ΒΟΓ» σε διάφορες θέσεις και να παρατηρήσετε το είδος του τετραπλεύρου που σχηματίζεται σε κάθε περίπτωση.
- ✓ Να διατυπώσετε διαφορετικές εικασίες που να διακρίνουν κατά πόσο ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

Μαθαίνω

• Κριτήρια Τετραγώνου

Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Συγκεκριμένα, ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν ισχύει μία από τις πιο κάτω προτάσεις:

- ✓ Είναι ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- ✓ Είναι ορθογώνιο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- ✓ Είναι ορθογώνιο και μία διαγώνιος του διχοτομεί μία γωνία του.
- ✓ Είναι ρόμβος και μία γωνία του είναι ορθή.
- ✓ Είναι ρόμβος και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Παραδείγματα

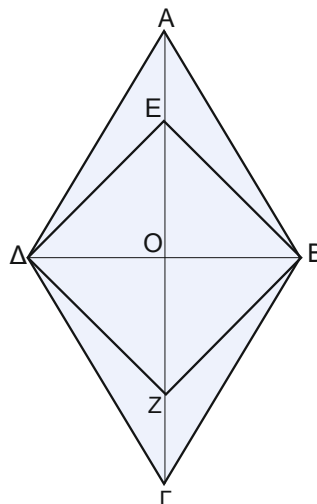
1. Δίνεται ρόμβος $ABΓΔ$ με κέντρο O . Παίρνουμε δύο σημεία E και Z της $ΑΓ$, τέτοια ώστε $OE = OZ = OB = OD$. Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΒΖ$ είναι τετράγωνο.

Λύση:

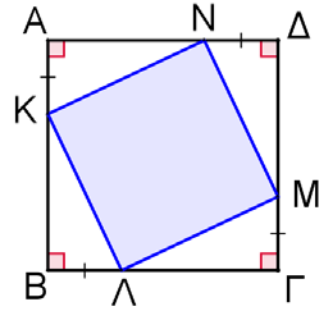
Στο τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ ισχύουν τα εξής:

- Οι διαγώνιοί του EZ και $BΔ$ διχοτομούνται ($OE = OZ = OB = OD$). Άρα, το $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου $ABΓΔ$ τέμνονται κάθετα, τότε και οι διαγώνιοι του $ΔΕΒΖ$ τέμνονται κάθετα. Άρα, $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, επομένως είναι ρόμβος.
- Αφού $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες ($OE = OZ = OB = OD$), τότε είναι και ορθογώνιο.

Επομένως, αφού το $ΔΕΒΖ$ είναι ορθογώνιο και ρόμβος, τότε είναι τετράγωνο.



2. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA παίρνουμε σημεία K, Λ, M και N αντίστοιχα, ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$. Να αποδείξετε ότι το $K\Lambda MN$ είναι τετράγωνο.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τέσσερα τρίγωνα $AKN, B\Lambda K, \Gamma\Lambda M$ και ΔMN :

- $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$ (Δεδομένο) (Π)
- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ($AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο) (Ο)
- $AN = BK = \Gamma\Lambda = \Delta M$ (Διαφορές ίσων τμημάτων) (Π)

Αφού,

$$AN = A\Delta - N\Delta$$

$$BK = AB - AK$$

$$\Gamma\Lambda = B\Gamma - B\Lambda$$

$$\Delta M = \Delta\Gamma - \Gamma M$$

Ίσες πλευρές | Δεδομένα
τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες (Π – Π – Ο).

Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ένα προς ένα ίσα. Άρα $KN = K\Lambda = \Lambda M = MN$, δηλαδή το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

Ισχύει: $\hat{A\hat{N}K} = \hat{\Delta\hat{M}N} = x$ και $\hat{A\hat{K}N} = \hat{\Delta\hat{N}M} = 90^\circ - x$ (γωνίες ορθογωνίων τριγώνων).

$$\hat{A\hat{N}K} + \hat{K\hat{N}M} + \hat{\Delta\hat{N}M} = 180^\circ \text{ (ευθεία γωνία)}$$

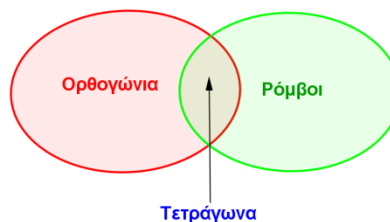
$$\hat{K\hat{N}M} = 180^\circ - \hat{A\hat{N}K} - \hat{\Delta\hat{N}M} = 180^\circ - x - 90^\circ + x = 90^\circ$$

Άρα, το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος και έχει μία ορθή γωνία (ορθογώνιο). Άρα, είναι τετράγωνο.

Δραστηριότητες

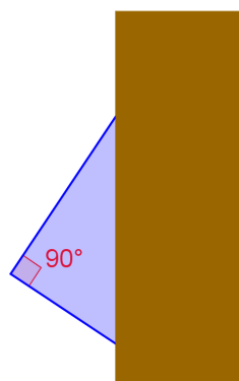


- (α) Να ερμηνεύσετε το διπλανό βένναιο διάγραμμα.
(β) Να κατασκευάσετε ένα άλλο βένναιο διάγραμμα που να περιέχει και το σύνολο των παραλληλογράμμων.



- Να εξετάσετε την ορθότητα των πιο κάτω προτάσεων.
 - Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι.
 - Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια.
 - Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα.
 - Όλα τα ορθογώνια είναι ρόμβοι.
- Η κυρία Ελένη θέλει να εξετάσει αν η κουζίνα της έχει πάτωμα σε σχήμα τετραγώνου, όπως είχε ζητήσει από τον αρχιτέκτονα. Αν καθεμιά από τις τέσσερις πλευρές του έχουν μήκος 4 m , ποιες άλλες μετρήσεις πρέπει να κάνει έτσι, ώστε να βεβαιωθεί πως το δάπεδο είναι τετράγωνο.
- Δίνονται τα σημεία $A(0,4)$, $B(2,2)$, $\Gamma(0,0)$ και $\Delta(-2,2)$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.
- Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει η σχέση $AB = 2B\Gamma$ και M, N τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι τετράγωνο.

- Η Μαρίλια ισχυρίζεται ότι το μπλε σχήμα, που ένα μέρος του είναι κρυμμένο, μπορεί να είναι τετράγωνο. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της. Ποια άλλα δεδομένα πρέπει να έχει στη διάθεσή της, για να μπορεί να αποδείξει ότι είναι τετράγωνο;



7. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τετραγώνου είναι κορυφές ενός άλλου τετραγώνου.
8. Στο παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ η $\hat{B} = 45^\circ$. Να φέρετε τη μεσοκάθετη της $ΓΔ$ η οποία τέμνει τις $ΑΔ$ και $ΒΓ$ ή τις προεκτάσεις τους, στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΓΖ$ είναι τετράγωνο.

Ειδικά Θεωρήματα στα Τρίγωνα

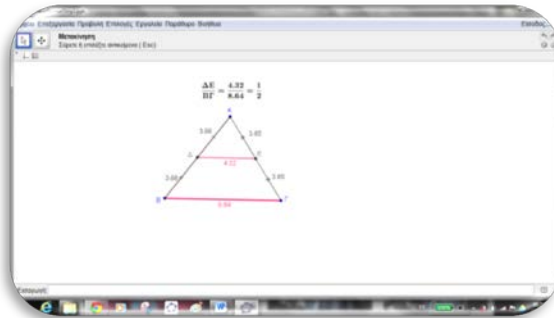
Διερεύνηση (1)

Να ανοίξετε τα πιο κάτω αρχεία:

• «C_En10_MesaPlevronTrig1.ggb»

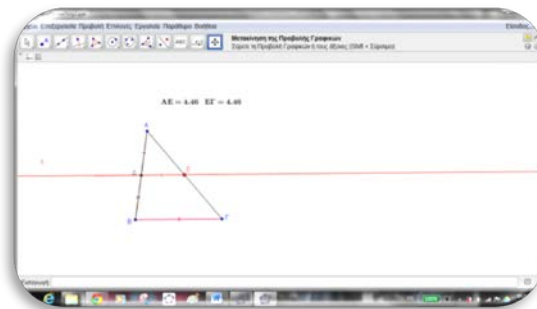


- ✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές A, B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και να παρατηρήσετε πώς μεταβάλλεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔE σε σχέση με τη $B\Gamma$.



• «C_En10_MesaPlevronTrig2.ggb»

- ✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές A, B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και να εξετάσετε τη θέση του σημείου E , πάνω στην πλευρά AG .

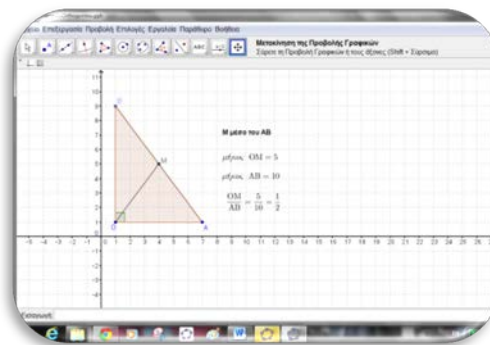


Διερεύνηση (2)



Να ανοίξετε το πιο κάτω αρχείο: «C_En10_DiamesosOrthogoniou.ggb»

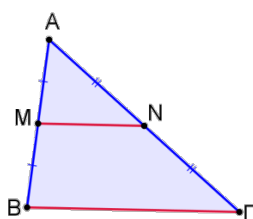
- ✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές O, A, B του τριγώνου OAB και να παρατηρήσετε πώς μεταβάλλεται το μήκος της υποτείνουσας AB και της διαμέσου OM .



- ✓ Τι παρατηρείτε για τον λόγο της διαμέσου OM προς την υποτείνουσα AB του ορθογώνιου τριγώνου;
- ✓ Να μετακινήσετε κατάλληλα τις κορυφές του τριγώνου $ABΓ$ ώστε η μια οξεία γωνία του τριγώνου να είναι ίση με 30° . Να παρατηρήσετε τη σχέση της Απέναντι Κάθετης των 30° με την Υποτείνουσα.

Μαθαίνω

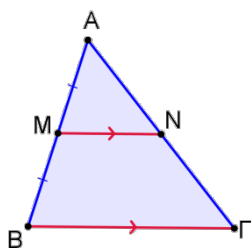
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της.



Παράδειγμα:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ } M \text{ μέσο της } AB \\ \bullet \text{ } N \text{ μέσο της } AG \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel \frac{BG}{2}$$

- Αν μία ευθεία διέρχεται από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου και είναι παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς του τριγώνου.

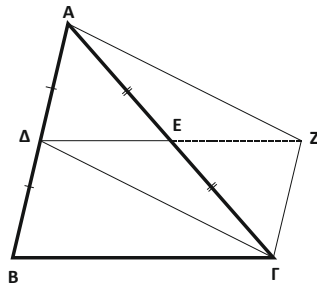


Παράδειγμα:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ } M \text{ μέσο της } AB \\ \bullet \text{ } MN \parallel BG \end{array} \right\} \Rightarrow N \text{ μέσο της } AG$$

Απόδειξη:

(α) Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήμα $EZ = ΔΕ$.
 Ισχύει ότι: $AE = EG$ (E μέσο του ΑΓ),
 $ΔΕ = EZ$ (από την κατασκευή)
 Άρα, το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται).
 Επομένως $AD \parallel ΓZ$,
 $AD = ΔB$ (Δ μέσο ΑΒ) } $\Rightarrow ΔB \parallel ΓZ$



Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i) $ΔZ \parallel ΒΓ$ άρα $ΔΕ \parallel ΒΓ$.

(ii) $ΔZ = ΒΓ$ ή $2ΔΕ = ΒΓ$ ή $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

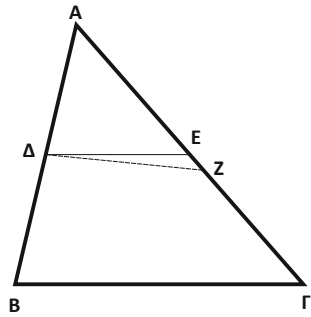
(β) Κατασκευάζουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ.

Έστω ότι το Ε δεν είναι το μέσο της ΑΓ.

Έστω ότι ένα άλλο σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΓ. Το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $ΔZ \parallel ΒΓ$. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο.

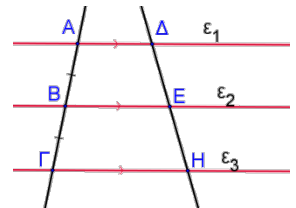
Άρα, το Ε είναι μέσο της ΑΓ.



▪ Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Παράδειγμα:

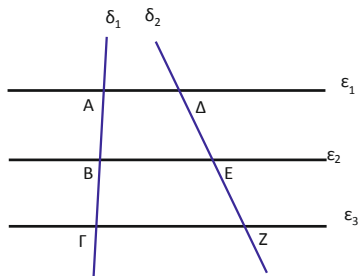
$$\left. \begin{array}{l} \bullet \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \\ \bullet AB = BG \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta E = EZ$$



Απόδειξη:

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι οποίες τέμνουν τη δ_1 στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

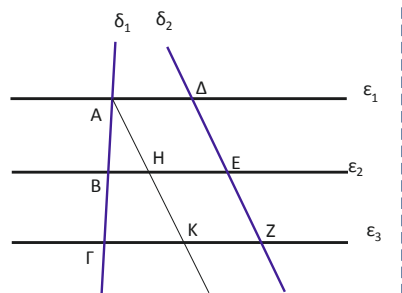
Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι $ΔΕ = ΕΖ$.



Φέρουμε $AK \parallel ΔZ$. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $AH = ΔΕ$ (1) και $HK = ΕΖ$ (2).

Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και $BH \parallel ΓΚ$. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή $AH = ΗΚ$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $ΔΕ = ΕΖ$.

Άρα, το E είναι μέσο της ΔZ .



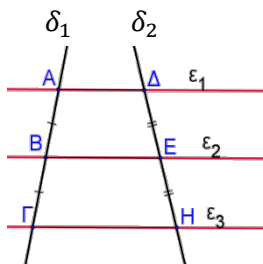
Παρατήρηση

Ισχύει και το αντίστροφο του πιο πάνω.

Θεωρούμε δύο ευθείες δ_1 και δ_2 που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 στα σημεία A, B και Δ, E , αντίστοιχα.

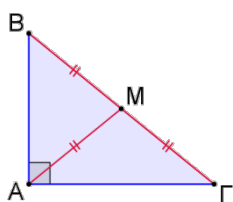
Αν Γ και H είναι σημεία των ευθειών δ_1 και δ_2 αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AB = B\Gamma$ και $\Delta E = EH$ τότε η ευθεία GH είναι παράλληλη προς τις ϵ_1 και ϵ_2 .

Αν $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ και $AB = B\Gamma$ και $\Delta E = EH$ τότε $GH \parallel \epsilon_1$ και $GH \parallel \epsilon_2$



- Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Παράδειγμα:



- ABG ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$
 - AM διάμεσος
- } $\Rightarrow AM = \frac{BG}{2}$

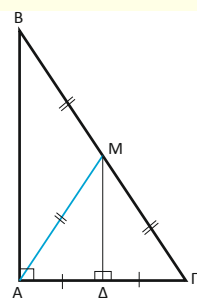
Απόδειξη:

Το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο, με διάμεσο την AM . Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{BG}{2}$.

Κατασκευάζουμε τη διάμεσο $M\Delta$ του τριγώνου AMG .

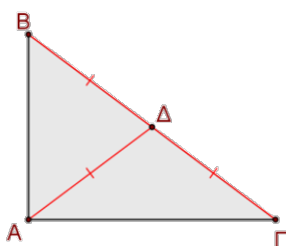
Το $M\Delta$ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ABG , οπότε $M\Delta \parallel AB$.

Εφόσον $AB \perp AG$, επομένως και $M\Delta \perp AG$. Άρα, το $M\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο AMG , οπότε $AM = M\Gamma$, δηλαδή $AM = \frac{BG}{2}$.



- Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Παράδειγμα:



- Σε ABG τρίγωνο
 - AD διάμεσος
 - $AD = BD = GD$
- } $\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$

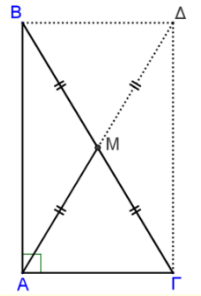
Απόδειξη:

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει διάμεσο την AM .

Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Delta$ έτσι ώστε $AM = M\Delta$.

Σχηματίζουμε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι του $AB\Delta\Gamma$ διχοτομούνται και είναι ίσες, αφού $AM = M\Delta = BM = M\Gamma$.

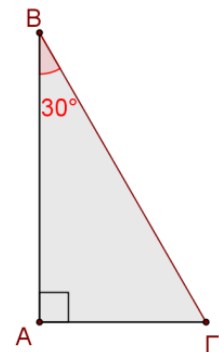
Άρα, το $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο. Επομένως $\hat{A} = 90^\circ$.



- Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Παράδειγμα:

- $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο
($\hat{A} = 90^\circ$)
 - $\hat{B} = 30^\circ$
- } $\Rightarrow AG = \frac{BG}{2}$
- $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο
($\hat{A} = 90^\circ$)
 - $AG = \frac{BG}{2}$
- } $\Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$



Απόδειξη:

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$.

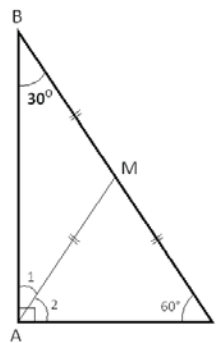
Θα αποδείξουμε ότι $AG = \frac{BG}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσο AM και είναι

$$AM = \frac{BG}{2} = M\Gamma.$$

Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

$$\text{Επομένως, } AG = M\Gamma = \frac{BG}{2}$$



Αντίστροφα

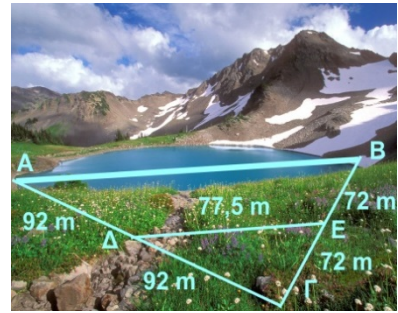
Φέρουμε τη διάμεσο AM , οπότε $AM = \frac{BG}{2} = M\Gamma = AG$ (αφού $AG = \frac{BG}{2}$).

Άρα, το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Επομένως $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Παραδείγματα

1. Η Άννα θέλει να μετρήσει πόσο απέχουν οι απέναντι όχθες της λίμνης (A και B), όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Πόση είναι η απόσταση AB;



Λύση:

Από το σχήμα φαίνεται ότι,

$$A\Delta = \Delta\Gamma = 92 \text{ m}, \quad BE = E\Gamma = 72 \text{ m}$$

Άρα, τα σημεία Δ, Ε είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ABΓ.

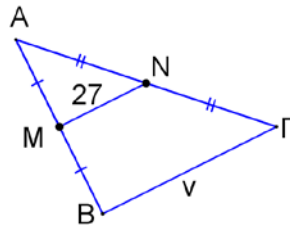
$$\text{Επομένως ισχύει ότι: } \Delta E \parallel = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2\Delta E$$

$$\Rightarrow AB = 2 \cdot 77,5 \text{ m}$$

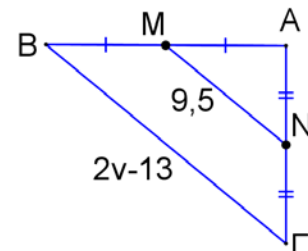
$$\Rightarrow AB = 155 \text{ m.}$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή του ν σε καθένα από τα πιο κάτω τρίγωνα.

(α)



(β)



Λύση:

(α) Από το σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα με μέτρο 27 ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου. Άρα, είναι το μισό της τρίτης πλευράς.

$$\Rightarrow \nu = 2 \cdot 27$$

$$\Rightarrow \nu = 54$$

(β) Με παρόμοιο τρόπο, το ευθύγραμμο τμήμα με μέτρο 9,5 ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου. Άρα, είναι το μισό της τρίτης πλευράς.

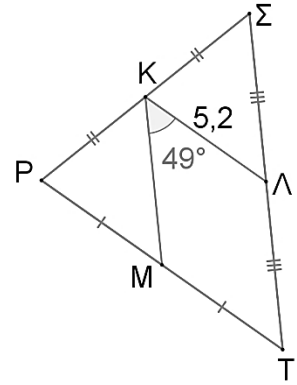
$$\Rightarrow 2\nu - 23 = 2 \cdot 9,5$$

$$\Rightarrow 2\nu - 23 = 19$$

$$\Rightarrow 2\nu = 42$$

$$\Rightarrow \nu = 21$$

3. Στο σχήμα K, Λ και M είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου PST . Αν $\widehat{MK\Lambda} = 49^\circ$, $\Sigma T = 7,4 \text{ cm}$ και $K\Lambda = 5,2 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος KM και το μέτρο της γωνίας $\Sigma\Lambda K$.



Λύση:

- Το K είναι το μέσο της πλευράς $P\Sigma$ του τριγώνου PST .
 - Το M είναι το μέσο της πλευράς PT του τριγώνου PST .
- } $\Rightarrow KM \parallel \Sigma T$

Δηλαδή,

$$KM = \frac{\Sigma T}{2} \Rightarrow KM = \frac{7,4}{2} = 3,7 \text{ cm}$$

και

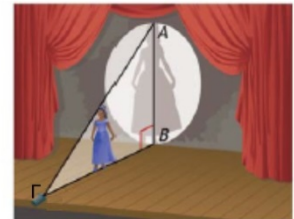
$$KM \parallel \Sigma T \Rightarrow \Sigma\hat{\Lambda}K = \Lambda\hat{K}M \text{ (εντός και εναλλάξ γωνίες)}$$

$$\Rightarrow \Sigma\hat{\Lambda}K = 49^\circ$$

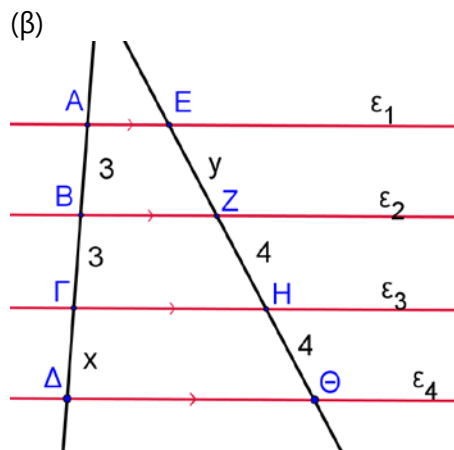
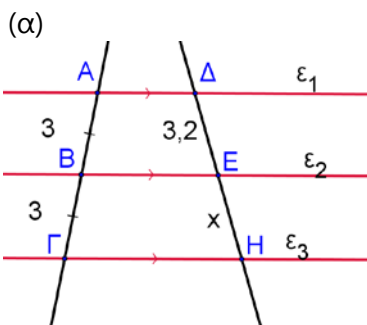
Δραστηριότητες



1. Ένας προβολέας στην άκρη της σκηνής φωτίζει τη σκηνή, όπως φαίνεται στη φωτογραφία. Η Κωνσταντία, που βρίσκεται πάνω στη σκηνή, έχει ύψος 152 cm . Στέκεται στη μέση της σκηνής (μέσο του $B\Gamma$). Να υπολογίσετε το ύψος που έχει η σκιά της Κωνσταντίας.

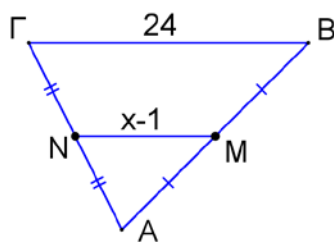


2. Να υπολογίσετε την τιμή του x και y σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

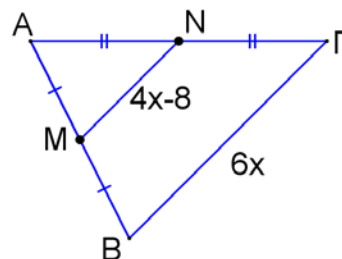


3. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε καθένα από τα πιο κάτω τρίγωνα:

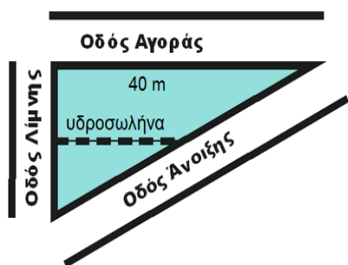
(α)



(β)



4. Το διάγραμμα δείχνει έναν τριγωνικό χώρο πρασίνου ανάμεσα στις οδούς Αγοράς, Λίμνης και Άνοιξης. Στον χώρο θα φυτευτεί γρασίδι και για να ποτίζεται, πρέπει να περάσει μια υδροσωλήνα πάνω στην οποία θα τοποθετηθούν τα ποτιστικά. Η υδροσωλήνα θα περάσει από το μέσο της πλευράς του τριγωνικού χώρου που βρίσκεται στην οδό Λίμνης και θα καταλήξει στο μέσο της πλευράς που βρίσκεται στην οδό Άνοιξης. Να βρείτε το μήκος της υδροσωλήνας που θα χρειαστεί.

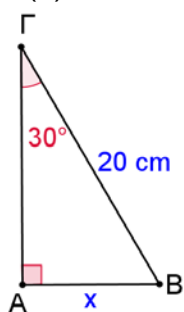


5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 35^\circ$. Αν AM διάμεσος του τριγώνου $ABΓ$, τότε η γωνία AMB ισούται με:

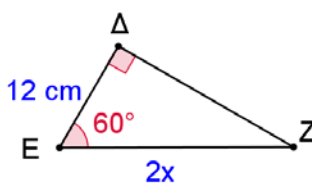
- (α) 55° (β) 70° (γ) 110° (δ) 100° (ε) 125°

6. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

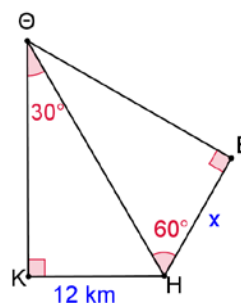
(α)



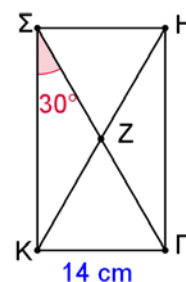
(β)



(γ)

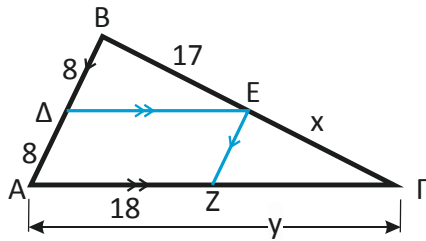


7. Στο σχήμα το $\Sigma KΠΗ$ είναι ορθογώνιο και Z το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν η γωνία $KΣΠ$ έχει μέτρο 30° και η πλευρά $KΠ$ έχει μήκος 14 cm , να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου KH .

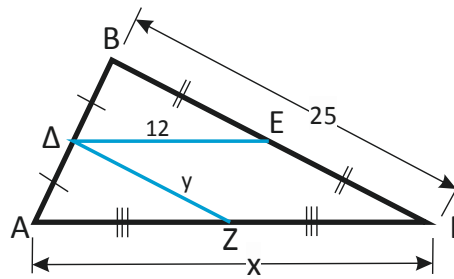


8. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

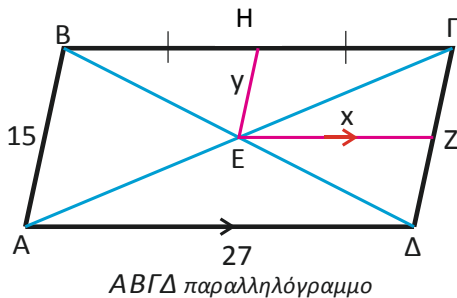
(α)



(β)



(γ)

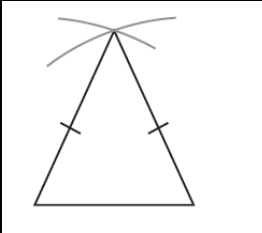
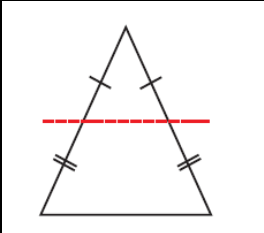
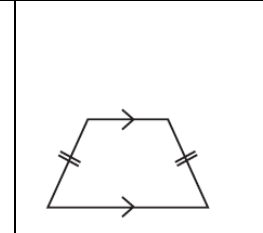


9. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma$ $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$ και Δ το μέσο της MB . Να προεκτείνετε την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Να δείξετε ότι $AMEB$ είναι ρόμβος.
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Το σημείο E είναι το μέσο της AB , το Z το μέσο της $A\Gamma$ και το Δ το μέσο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το $AE\Delta Z$ είναι ρόμβος.
11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Από το μέσο M της υποτεινούσας $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Να δείξετε ότι:
- (α) το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές
 (β) τα τρίγωνα ΔBM και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα
12. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Delta\Gamma$. Αν η γωνιά $A\Gamma\Delta = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι:
- (α) το $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο
 (β) το ΔBE είναι ισοσκελές τρίγωνο
 (γ) $A\Delta = \Delta O$ (όπου O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του $AB\Gamma\Delta$)

Τραπέζιο

Διερεύνηση (1)

Ο Παναγιώτης ακολουθεί τα πιο κάτω βήματα για να κατασκευάσει ένα ισοσκελές τραπέζιο.

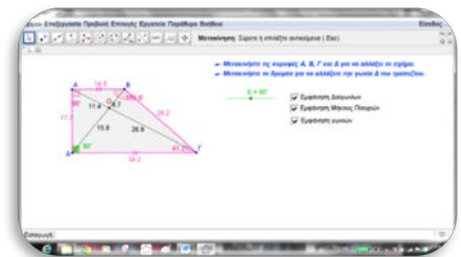
1 ^ο ΒΗΜΑ	2 ^ο ΒΗΜΑ	3 ^ο ΒΗΜΑ
		

- ✓ Να εξηγήσετε τον συλλογισμό του.



Να ανοίξετε το αρχείο: «C_En10_Trapezio.ggb».

- Να επιλέξετε τα κουτιά «Εμφάνιση Διαγωνίων» και «Εμφάνιση Μήκους Πλευρών».



- ✓ Να κατασκευάσετε διάφορα τραπέζια με ίσες διαγωνίους και να παρατηρήσετε το μήκος των μη παράλληλων πλευρών τους.

- Να επιλέξετε το κουτί «Εμφάνιση γωνιών».

- ✓ Να κατασκευάσετε διάφορα τραπέζια με ίσες τις παρά τις βάσεις γωνίες. Τι παρατηρείτε για το μήκος των μη παράλληλων πλευρών τους;

Διερεύνηση (2)

Σε ένα φύλλο χαρτί:

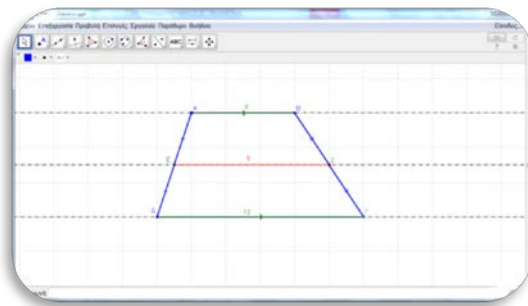
- Να κατασκευάσετε ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$.
- Να σημειώσετε με E και Z τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών AD και $B\Gamma$ αντίστοιχα.
- Να φέρετε το ευθύγραμμο τμήμα EZ .
- Να μετρήσετε τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, \Gamma\Delta$ και EZ .



✓ Να διερευνήσετε τη σχέση των ευθύγραμμων τμημάτων ως προς το μέτρο τους και τη θέση τους.

Μπορείτε να εξετάσετε τον ισχυρισμό και με τη βοήθεια του αρχείου:

«C_En10_TrapezioDiamesos.ggb».



Μαθαίνω

Κριτήρια ισοσκελούς τραπεζίου

Ένα τραπέζιο είναι **ισοσκελές**, αν ισχύει ένα από τα πιο κάτω:

(α) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του είναι ίσες.

(β) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Απόδειξη Κριτηρίων

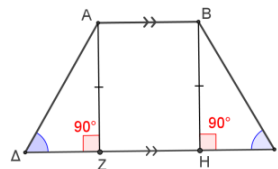
(α) Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Φέρουμε τα ύψη AZ και BH του τραπεζίου τα οποία είναι ίσα (απόσταση παραλλήλων).

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma H$:

$\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$ (ύψη τραπεζίου)

$\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (δεδομένο)

$AZ = BH$ (ύψη τραπεζίου)



Άρα, τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma H$ είναι ίσα ($\Pi - \Gamma - O$).

Άρα, $A\Delta = B\Gamma$ και επομένως $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο.

(β) $ABΓΔ$ τραπέζιο ($AB \parallel ΔΓ$) με $ΑΓ = ΒΔ$.
Φέρουμε τα ύψη AZ και BH του τραpezίου τα οποία είναι ίσα (απόσταση παραλλήλων).

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AZΓ$ και $BHΔ$:

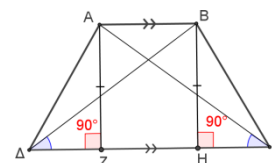
$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \hat{H} = 90^\circ \text{ (ύψη τραpezίου)} \\ ΑΓ &= ΒΔ \text{ (δεδομένο)} \\ ΑΖ &= ΒΗ \text{ (ύψη τραpezίου)} \end{aligned}$$

Άρα, $B\hat{Δ}Γ = Α\hat{Γ}Δ$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΒΓΔ$:

$$\begin{aligned} ΔΓ &\text{ (κοινή πλευρά)} \\ ΑΓ &= ΒΔ \text{ (δεδομένο)} \\ B\hat{Δ}Γ &= Α\hat{Γ}Δ \text{ (γωνίες ίσων τριγώνων)} \end{aligned}$$

Άρα, $ΑΔ = ΒΓ$. Άρα, $ΑΒΓΔ$ ισοσκελές τραpezίο.



Άρα, τα τρίγωνα $AZΓ$ και $BHΔ$ είναι ίσα ($\Pi - \Pi - O$).

Άρα, τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΒΓΔ$ είναι ίσα ($\Pi - \Gamma - \Pi$).

▪ Η **διάμεσος του τραpezίου** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του.

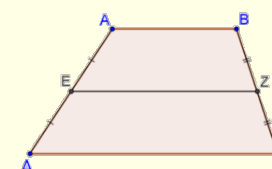
▪ Η **διάμεσος του τραpezίου** είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ίση με το ημίαθροισμά τους.

Παράδειγμα:

Αν η EZ είναι διάμεσος του τραpezίου $ΑΒΓΔ$, τότε:

(α) $EZ \parallel ΑΒ$ και $EZ \parallel ΓΔ$

(β) $EZ = \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2}$



Απόδειξη

(α) Το $ΑΒΓΔ$ είναι τραpezίο ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) και EZ είναι η διάμεσός του.

Οι ευθείες $ΑΒ$, EZ και $ΔΓ$ τέμνουν τις ευθείες $ΑΔ$ και $ΒΓ$ και ορίζουν ίσα τμήματα σε καθεμιά από αυτές ($ΑΕ = ΕΔ$, $ΒΖ = ΖΓ$).

Άρα, $ΑΒ \parallel ΕΖ \parallel ΓΔ$.

(β) Κατασκευάζουμε τη διαγώνιο $ΒΔ$ που τέμνει την EZ στο K .

Τότε:

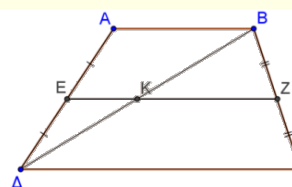
• Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ το E είναι μέσο της $ΑΔ$ και $EΚ \parallel ΑΒ$, οπότε το K είναι μέσο της $ΒΔ$ και $EΚ = \frac{ΑΒ}{2}$. (1)

• Όμοια στο τρίγωνο $ΒΔΓ$ το K είναι μέσο της $ΒΔ$ και $KΖ \parallel ΓΔ$, οπότε το Z είναι μέσο της $ΒΓ$ και $KΖ = \frac{ΓΔ}{2}$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

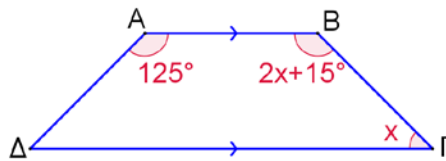
$$EΖ = EΚ + KΖ = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΓΔ}{2} = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$$

$$\Leftrightarrow EΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$$



Παραδείγματα

1. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\hat{A} = 125^\circ$, $\hat{B} = 2x + 15^\circ$ και $\hat{\Gamma} = x$. Να βρείτε το είδος του τραπέζιου.



Λύση:

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (οι εντός επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές)

$$\Rightarrow 2x + 15^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 165^\circ \Rightarrow x = 55^\circ$$

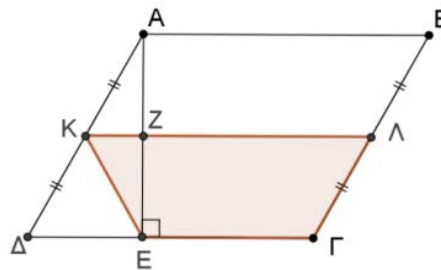
$$\hat{\Gamma} = 55^\circ \text{ και}$$

$$\hat{\Delta} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}) = 360^\circ - 305^\circ = 55^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{B} = 125^\circ$$

Άρα, $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και το ύψος του AE . Αν K, Λ είναι τα μέσα των AD και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $E\Gamma\Lambda K$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τα } K, \Lambda \text{ είναι μέσα των } AD \text{ και } B\Gamma \text{ αντίστοιχα} \\ B\Gamma \parallel AD \text{ (} AB\Gamma\Delta \text{ παραλληλόγραμμο)} \end{array} \right\} \Rightarrow K\Delta \parallel \Lambda\Gamma \text{ (1)}$$

$\Rightarrow K\Lambda\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο (αφού έχει δυο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες)

$\Rightarrow K\Lambda\Gamma E$ τραπέζιο αφού $K\Lambda \parallel E\Gamma$.

Απομένει να δείξουμε ότι $KE = \Lambda\Gamma$.

$\triangle ADE$ ορθογώνιο τρίγωνο
Το K είναι το μέσο της πλευράς AD

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADE \text{ ορθογώνιο τρίγωνο} \\ \text{Το } K \text{ είναι το μέσο της πλευράς } AD \end{array} \right\} \Rightarrow KE = \frac{AD}{2} = K\Delta \text{ (2)}$$

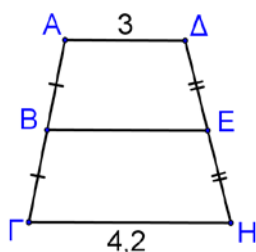
Από (1) και (2) έχουμε $KE = \Lambda\Gamma$.

Άρα, το $K\Lambda\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

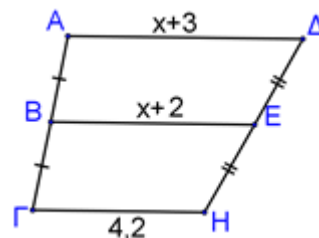


1. Να υπολογίσετε το μήκος των διαμέσων των τραπεζίων στα πιο κάτω σχήματα.

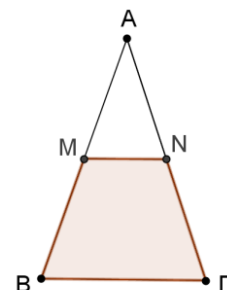
(α)



(β)

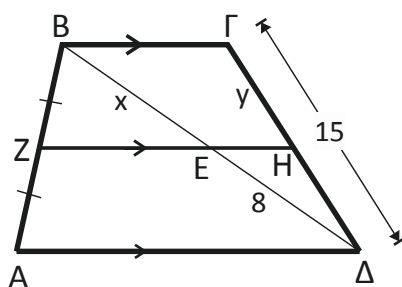


2. Στο σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M, N τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $BMN\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

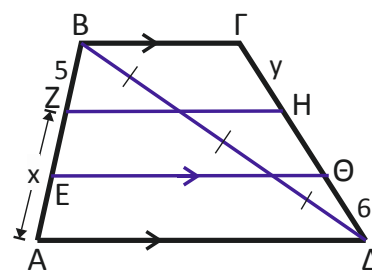


3. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y στα πιο κάτω σχήματα.

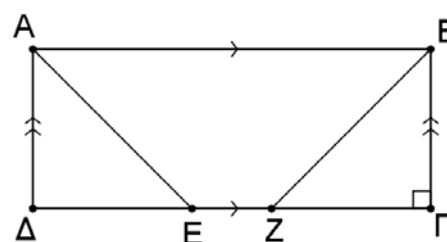
(α)



(β)



4. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $\Delta E = Z\Gamma$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

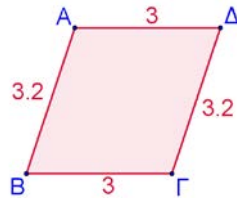


5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ABΓΔ$. Τα $E, Z, Θ$ και H είναι τα μέσα των $AD, AB, BΓ$ και $ΓΔ$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $EZHΘ$ είναι ρόμβος.
6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M μέσο της $BΓ$, Δ μέσο της BM και E μέσο της AB .
- (α) Να δείξετε ότι το $MΔEA$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- (β) Αν η διάμεσος του τραπέζιου $AEΔM$ ισούται με $(x^2 - 3) \text{ cm}$, η $\Delta E = (2x - 3) \text{ cm}$ και η $AM = (4x + 17) \text{ cm}$, να υπολογίσετε τα μήκη των βάσεων του τραπέζιου.
- (γ) Να υπολογίσετε το μήκος της $BΓ$.

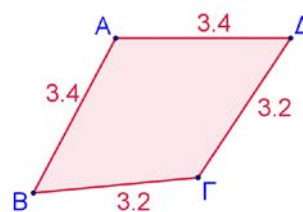
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε τα πιο κάτω τετράπλευρα ως προς το είδος τους (παραλληλόγραμμο, ρόμβος, ορθογώνιο, τετράγωνο) και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

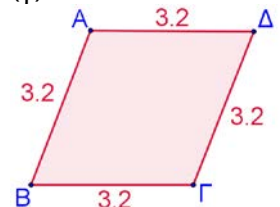
(α)



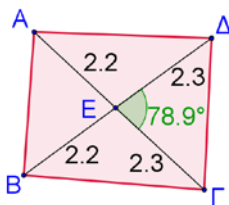
(β)



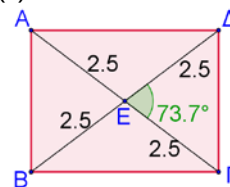
(γ)



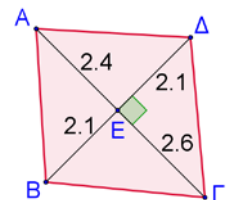
(δ)



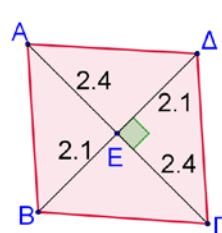
(ε)



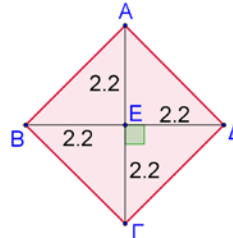
(στ)



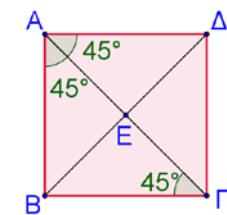
(ζ)



(η)

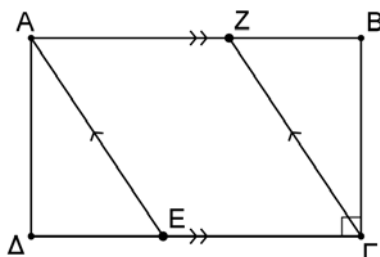


(θ)

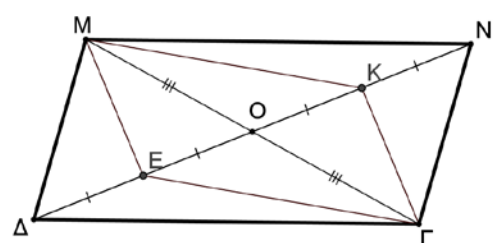


2. Να εντοπίσετε παραλληλόγραμμο στα πιο κάτω σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)

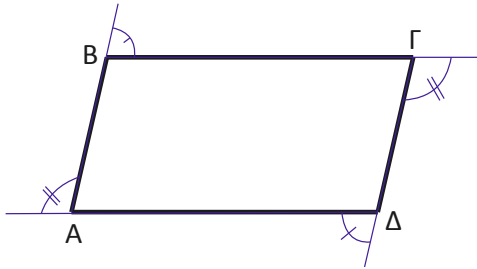


(β)

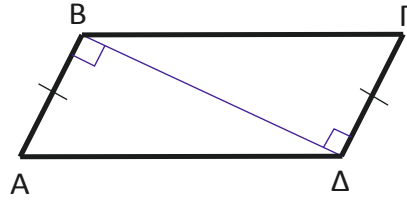


3. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

(α)

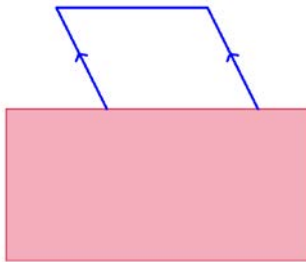


(β)

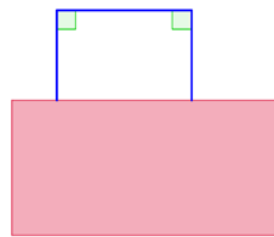


4. Ένα μέρος των (μπλε) τετραπλεύρων είναι κρυμμένο όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα. Να εξετάσετε τι είδους τετράπλευρο θα μπορούσε να είναι το καθένα.

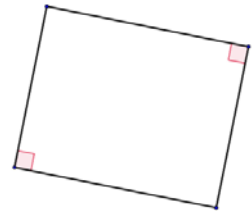
(α)



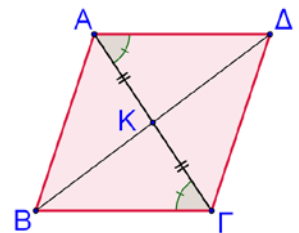
(β)



5. Ο Άγγελος ισχυρίζεται ότι το διπλανό τετράπλευρο είναι ορθογώνιο. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.



6. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, $AK = K\Gamma$ και $K\hat{A}\Delta = K\hat{\Gamma}B$. Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο



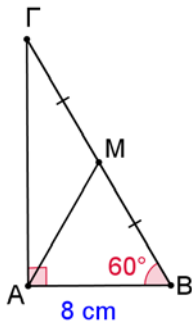
7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $AD = AB$ και την $A\Gamma$ κατά τμήμα $AE = A\Gamma$. Να δείξετε ότι το $B\Gamma\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

8. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν H είναι το σημείο τομής των AZ και BE , θ το σημείο τομής των ΔZ και ΓE , να αποδείξετε ότι το $E\theta ZH$ είναι ρόμβος.

9. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών:
 (α) ενός ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου
 (β) ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου
 (γ) ενός τετραγώνου είναι κορυφές τετραγώνου

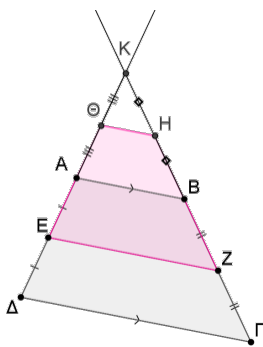
10. Να εξετάσετε για κάθε περίπτωση, το είδος του τετραπλεύρου $KLMN$ με κορυφές τα πιο κάτω σημεία:

- (α) $K(0,3), \Lambda(-3,0), M(0,-3), N(3,0)$
 (β) $K(-4,0), \Lambda(-3,3), M(2,2), N(1,-1)$



11. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) το M είναι μέσο της $B\Gamma$ και η γωνία $B = 60^\circ$. Αν $AB = 8\text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος της διάμεσου AM και την περίμετρο του τριγώνου.

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και $B\Gamma = 10\text{ cm}$. Να φέρετε τη διάμεσο AM και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

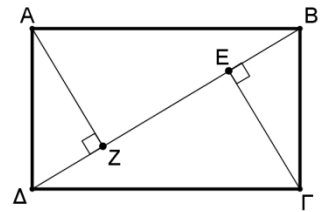


13. Στο διπλανό σχήμα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και η EZ είναι η διάμεσός του. Οι μη παράλληλες πλευρές του $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο K . Τα H, θ είναι τα μέσα των KA και KB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $EZH\theta$ είναι τραπέζιο.

14. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$. Αν η προέκταση της BM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο θ , να δείξετε ότι:

- (α) $\Delta\theta = B\Gamma$
 (β) το τετράπλευρο $B\Gamma\theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

15. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε κάθετες AZ και ΓE πάνω στη διαγώνιο $B\Delta$. Να δείξετε ότι το $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



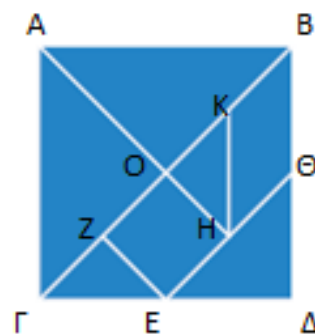
16. Δίνεται $E\Delta\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο με $EA = E\Delta$. Να προεκτείνετε την πλευρά EA κατά τμήμα AB έτσι ώστε $AB = EA$ και την πλευρά $E\Delta$ κατά τμήμα $\Delta\Gamma$ έτσι ώστε $\Delta\Gamma = E\Delta$. Να δείξετε ότι $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο.
17. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) τέμνονται στο O . Αν E, Z, H, θ είναι τα μέσα των OA, OB, OG, OD , αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $EZH\theta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
18. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ το σημείο O είναι το κέντρο του και η ευθεία ϵ διέρχεται από το O και τέμνει την AB στο E και τη $\Gamma\Delta$ στο Z . Να δείξετε ότι το O είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος EZ .
19. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, το M είναι το μέσο της $B\Gamma$. Να δείξετε ότι $AM < \frac{A\Gamma + AB}{2}$. (Υπόδειξη: να προεκτείνετε το AM ώστε, $M\Delta = AM$)

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

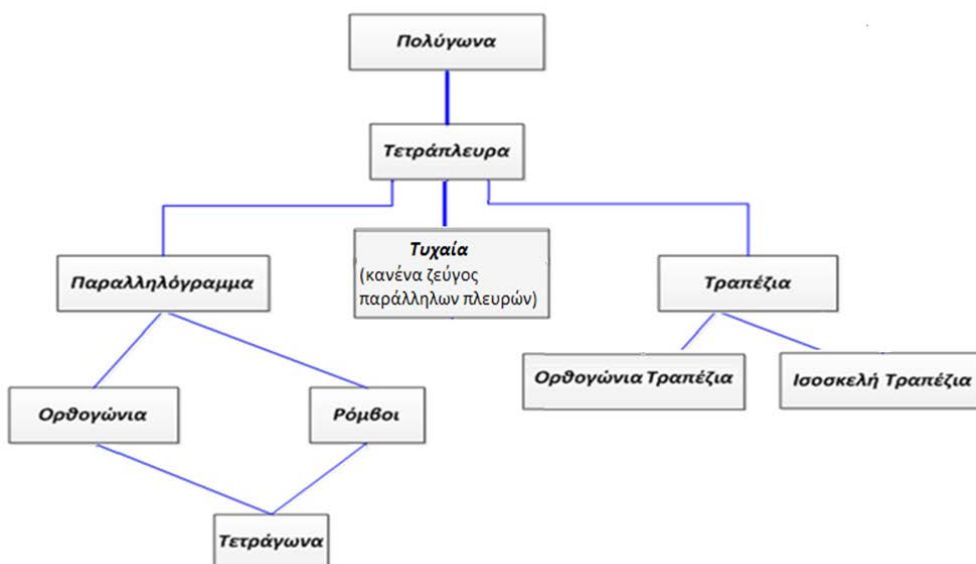
1. Τα μήκη των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι $x + 5$, $15 - x$, $2x + 10$, $x + 15$. Να υπολογίσετε το x .
2. Το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο ($A = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος AD και τη διάμεσο AM . Αν $GE \perp AM$, να δείξετε ότι:
 - (α) $GE = ED = DA$
 - (β) ΔEGA ισοσκελές τραπέζιο

Το ταγκράμ (Tangram) είναι ένα κινέζικο παιχνίδι τύπου puzzle, που αποτελείται από επτά κομμάτια τα λεγόμενα τανς (tans) τα οποία όταν τοποθετηθούν κατάλληλα μπορούν να δημιουργήσουν συγκεκριμένα σχήματα.

3. Στο σχήμα φαίνεται ένα «ταγκράμ» αποτελείται από επτά επιμέρους σχήματα. Πέντε από αυτά είναι τρίγωνα ορθογώνια και ισοσκελή ($KOH, AOB, ΓZE, AOG, \theta ED$) και ένα είναι τετράγωνο ($ZOHE$). Αν τα τρίγωνα $KOH = ΓZE$ και $AOB = AOG$, να αποδείξετε ότι το $KB\theta H$ είναι παραλληλόγραμμο.



4. Μια ταξινόμηση των τετραπλεύρων είναι αυτή που φαίνεται διαγραμματικά πιο κάτω. Να εκφράσετε την πιο κάτω ταξινόμηση με Βέννιο Διάγραμμα.



Προτεινόμενη βιβλιογραφία:

«ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ, Ο.Ε.Δ.Β. - ΑΘΗΝΑ, Σελ. 118-120

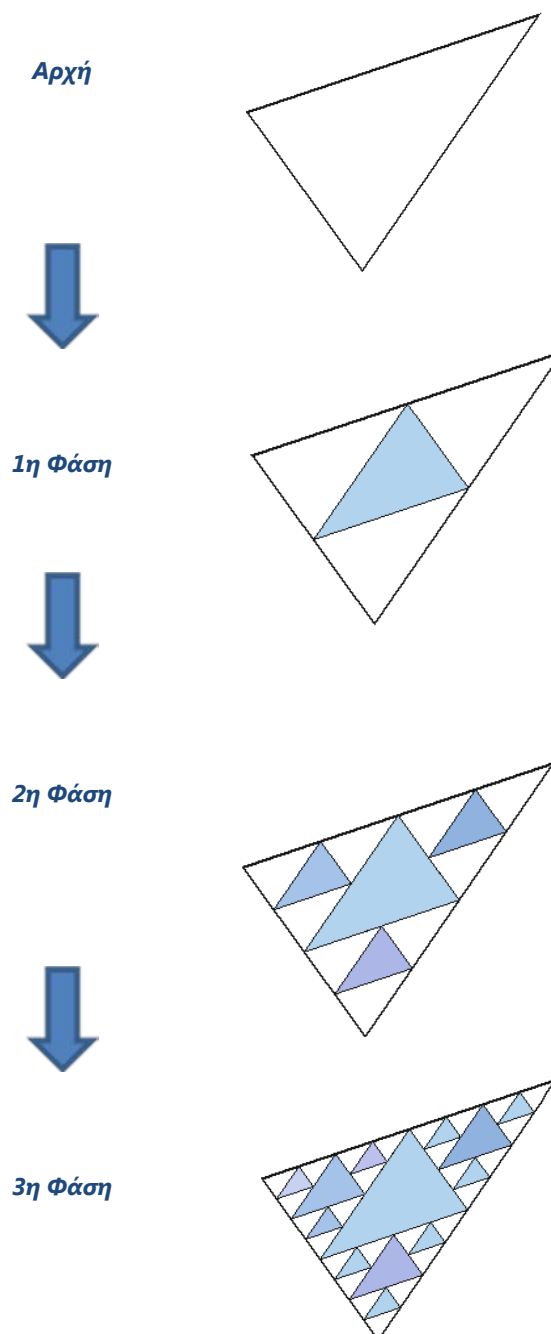
5. Για να δημιουργήσετε τη σχεδίαση που φαίνεται στο σχήμα, να σκιάσετε το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου.

Στη συνέχεια, να επαναλαμβάνετε τη διαδικασία για καθένα από τα ασκίαστα τρίγωνα. Η περίμετρος του αρχικού τριγώνου είναι 1.

(α) Πόση είναι η περίμετρος του σκιασμένου τριγώνου στη φάση 1;

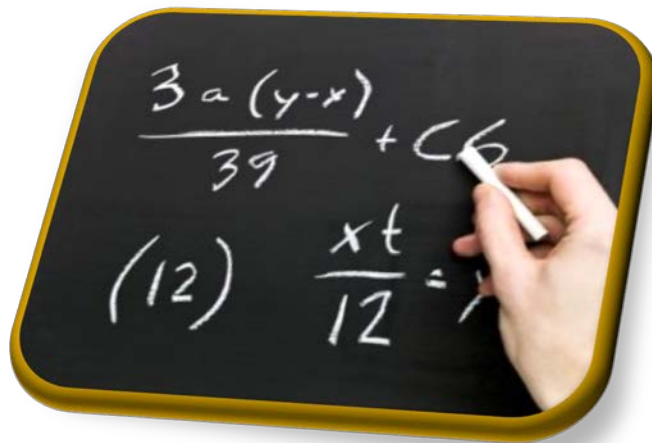
(β) Πόση είναι η συνολική περίμετρος όλων των σκιασμένων τριγώνων στη φάση 2;

(γ) Πόση είναι η συνολική περίμετρος όλων των σκιασμένων τριγώνων στη φάση 3;



Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Β' τεύχος



ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Ευθεία – Γραμμικά Συστήματα

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ – ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ		Σελίδα 13
Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) 4 μ. $M(1, -2)$	(β) 10 μ. $M(-3, 2)$
	(γ) 13 μ. $M(-\frac{1}{2}, -8)$	(δ) $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ μ. $M(0, 0)$
2.	Π.χ. AB με $A(2, 1000)$ και $B(-2, -1000)$	
3.	$\Gamma(10, -3)$	
4.	$\beta = 7, \beta = -1$	
5.	(α) $K(2, 2)$	(β) $\Gamma = 2\sqrt{13}\pi$ μ.
6.	$E = 45$ τ. μ.	
7.	(α) $\Pi = \sqrt{32} + 2\sqrt{26} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{26}$ μ.	(β) Ισοσκελές $AG = BG$
	(γ) $GM = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ μ.	
10.	$y = 3x - 1$	
11.	(α) $B\Gamma = 4\sqrt{2}$ μ.	(β) $E = 4$ τ. μ.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ		Σελίδα 20
Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) ix	(β) vi
	(γ) v	(δ) vii
	(ε) i	(στ) $viii$
	(ζ) iii	(η) ii
	(θ) x	
2.	(α) Παράλληλες	(β) Τέμνονται
3.	(α) ΟΧΙ	(β) ΟΧΙ
	(γ) ΝΑΙ	
4.	(α) $y = -\frac{x}{3} - 1$	(β) $x = 3$
	(γ) $y = 1$	
5.	(α) $y = -2x$	(β) $y = \frac{3}{2}x - 1$
	(γ) $y = 2x - 5$	(δ) $x = 2$
	(ε) $y = -2$	

6. $a = 2$

7. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ ενώ η ε_3 τέμνει τις ε_1 και ε_2

8. $\alpha = 1$

9. (α) Π.χ. $y = 3x - 1000$

(β) Π.χ. $y = -x + 100$

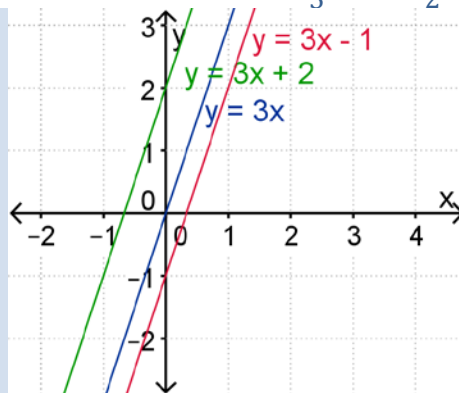
(γ) Π.χ. $y = 4x + 100$

(δ) Π.χ. $y = 2x + 100$

10. (α) $\lambda_{AB} = -2, \lambda_{AG} = -\frac{1}{3}, \lambda_{BG} = \frac{1}{2}$

(γ) $y = 3x$

11.



12. $y = 3x - 3$

13. $\varepsilon_1: y = -x$, $\varepsilon_2: y = -x + 3$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Σελίδα 28

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. Δεν είναι λύση

2. Γ

3. (α) (2,3)

(β) Δεν έχει λύση

(γ) (0,2)

(δ) Άπειρες λύσεις

4. (α) Π.χ. $y - 3x = 5$

(β) Π.χ. $2y - 4x = 6$

(γ) Π.χ. $y - 2x = 103$

5. Π.χ. $y = -4x$
 $x + y = 3$

6. (α) Καμία λύση

(β) Μία λύση

7. (γ)

8. Αφού έχει ήδη δύο λύσεις τότε θα έχει άπειρες λύσεις

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Σελίδα 35

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1. (α) $x = 14, y = 2$	(β) $x = 0, y = 3$
(γ) $x = 5, y = 5$	(δ) Άπειρες λύσεις
(ε) $x = 2, y = -3$	(στ) $x = 7, y = \frac{4}{3}$
(ζ) $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{2}$	(η) $x = -2, y = 1$
(θ) $x = 2, y = 4$	(ι) $x = 3, y = -2$
2. Π.χ. $y = 3x$ $y + x = 5$	Π.χ. $y - 3x = 4$ $y + 3x = 5$
3. (γ)	
4. Πατάτες: €1,20 Μπιφτέκι €3,00	
5. $X = 102^\circ, Y = 78^\circ$	
6. (α) Σε 4 λεπτά.	(β) Σε ύψος 70 m.
7. (α) $x = 3, y = 0$	(β) $x = 7, y = 1$
(γ) $x = 3, y = 5$	(δ) $x = -1, y = 0$
8. 11 χαρτονομίσματα των 5€	
9. 10 παιδιά	
10. 4 βολές των τριών πόντων	
11. 4 cm, 6 cm	
12. 98,1 m	

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

Σελίδα 38

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1. (α) Παράλληλες	(β) Δεν είναι παράλληλες
(γ) Παράλληλες	
2. (α) $3y + x = 9$	(β) $y = 3$
3. $a = -1, κ \neq -3$	
4. BM: $y = 2$	
5. (α) Μία λύση	(β) Άπειρες λύσεις
6. (α) $ \overline{AB} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10},$ $ \overline{BT} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$	(γ) $ \overline{ΓΔ} = \sqrt{13}$
7. (α) $x = -3, y = 5$	(β) $x = 2, y = 4$
(γ) $x = \frac{11}{3}, y = 6$	(δ) $x = 1, y = 3$

	(ε)	Δεν έχει λύση	(στ)	$x = -8, y = 9$
	(ζ)	Άπειρες λύσεις	(η)	$x = 5, y = 1$
	(θ)	$\alpha = 4, \beta = 5$	(ι)	$\alpha = 3, \beta = -2$
8.		12 και 8		
9.		Άνδρες 24 Γυναίκες 8		
10.	(α)	Π.χ. $y = 3x + 3$ $y = 3x - 1$	(β)	Π.χ. $y = 3x + 3$ $2y = 6x + 6$
11.	(α)	$y = -x - 1$ $y = -x + 2$ Δεν έχει λύση	(β)	$y = x$ $y = -x + 2$ Λύση: $x = 1, y = 1$
12.	(α)	x : ερωτήσεις ορθού/λάθους y : ερωτήσεις επιλογής $y = 2x$ $2x + 4y = 100$	(β)	$x = 10, y = 20$
	(γ)	Είναι αρκετός		
13.		$\mu = 3$		
14.		$\alpha = 5, \beta = 1$		
15.	(α)	Εταιρεία Α	(β)	Και οι δύο είχαν τον ίδιο ρυθμό αύξησης των κερδών
	(γ)	Ποτέ		
16.		21 μ.		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Σελίδα 41

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

- Για $\lambda = 1$ ταυτίζονται και για $\lambda \neq 1$ τέμνονται
- $\Delta(7,3)$
- $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$
- 53
- $\lambda = -2, \kappa = -1$

8.



9. Άνω των 40 ετών

10. (α) Γ

(β) Χωριστά

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Στερεομετρία

ΜΕΤΡΗΣΗ ΧΩΡΟΥ		Σελίδα 73		
Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1. (α) ΣΩΣΤΟ	(β) ΛΑΘΟΣ			
(γ) ΛΑΘΟΣ	(δ) ΣΩΣΤΟ			
3. (α) ABH	(β) $AB, ΓΔ, EΘ, ΖΗ$			
(γ) $HΘ$	(δ) Δ			
(ε) $B, Γ$	(στ) 12			
4. 7 κ.μ. , 10 κ.μ. , 15 κ.μ.				
5.	m^3	4,25	0,012	0,000234
	dm^3	4250	12	0,234
	cm^3	4250000	12000	234
6. (α) $E = 5, K = 6, A = 9$	(β) $E = 10, K = 16, A = 24$			

ΟΡΘΟ ΠΡΙΣΜΑ

Σελίδα 81

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	$E_{ολ} = 150 \text{ cm}^2, V = 125 \text{ cm}^3$	
2.	2 m	
3.	$V = 144 \text{ cm}^3$	
4.	(α)	$v = 10 \text{ cm}$
	(β)	$E_{\pi} = 260 \text{ cm}^2$
	(γ)	$E_{ολ} = 344 \text{ cm}^2$
5.	(α)	ΣΩΣΤΟ
	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ
	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΣΩΣΤΟ
6.	$V = 1215 \text{ cm}^3$	
7.	$V = 960 \text{ cm}^3$	
8.	$V = 125 \text{ cm}^3, E_{\pi} = 100 \text{ cm}^2$	
9.	15 ώρες	
10.	Αυξηθεί κατά 1 m	
11.	€3465	
12.	κόστος \cong €80,48	
13.	(α)	3
	(β)	$2 \text{ m}, 2 \text{ m}, 4 \text{ m}$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

Σελίδα 88

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α)	$V = 384 \text{ cm}^3, E_{ολ} = 384 \text{ cm}^2$
	(β)	$V = 3072 \text{ cm}^3, E_{ολ} = 1536 \text{ cm}^2$
2.	$V = 64 \text{ cm}^3, E_{ολ} = 144 \text{ cm}^2$	
3.	€13,2	
4.	$V = \frac{1562500\sqrt{39}}{3} \cong 3252603 \text{ m}^3$	
5.	$h = 11 \text{ cm}$	
6.	$V = \frac{135\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^3$	
7.	$V = (216 + 12\sqrt{7}) \text{ cm}^3, E_{ολ} = 228 \text{ cm}^2$	

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Σελίδα 93

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. $E_{\kappa} = 80\pi \text{ cm}^2, V = 200\pi \text{ cm}^3$
2. $E_{\kappa} = 36\pi \text{ cm}^2$
3. €21,20
4. $E_{\sigma\upsilon\nu} = 256\pi \text{ cm}^2$
5. $V \cong 141300 \text{ cm}^3 = 141,3 \text{ l}$
6. $V_{\text{πέτρας}} = 400\pi \text{ cm}^3$
7. Λάθος Συλλογισμός
Το δεύτερο δοχείο έχει διπλάσια χωρητικότητα από ότι το πρώτο δοχείο.
8. $E_{\text{ολ}} = 120\pi \text{ cm}^2$
9. $4\pi \text{ cm} \cong 12,56 \text{ cm}$

ΚΩΝΟΣ

Σελίδα 97

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) $V = 100\pi \text{ cm}^3, E_{\text{ολ}} = 90\pi \text{ cm}^2$ (β) $V = 96\pi \text{ m}^3, E_{\text{ολ}} = 96\pi \text{ m}^2$
2. $E_{\kappa} = 15\sqrt{549}\pi = 45\sqrt{61}\pi \text{ cm}^2$
3. €942,48
4. $E_{\kappa} = 65\pi \text{ cm}^2, V = 100\pi \text{ cm}^3$
5. ΟΡΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ
6. 19 ποτηράκια
7. $V = 100\pi \text{ cm}^3$
8. (α) $V \cong 178,8 \text{ cm}^3$ (β) $V \cong 536 \text{ cm}^3$
9. $V = 96\pi \text{ m}^3$
10. $V \cong 54,7 \text{ m}^3$
11. $V = 36\pi \text{ cm}^3$
12. $V = 96\pi \text{ cm}^3$

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$V = \frac{1372\pi}{3} \text{ cm}^3$, $E = 196\pi \text{ cm}^2$
2.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ
3.	(α) $V = 72\pi \text{ cm}^3$ (β) $V = \frac{1210\pi}{3} \text{ cm}^3$
	(γ) $V = \frac{64\pi}{3} \text{ cm}^3$
4.	$49\pi \text{ cm}^2$, 8
5.	52%
6.	ΟΡΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Π.χ. ZHE, ABΔ (β) Π.χ. ABΔ, EΔΓ
	(γ) ZH, ΔΓ
2.	(α) $V = 40 \text{ cm}^3$ (β) $V = 45 \text{ cm}^3$
	(γ) $V = 40\pi \text{ cm}^3 \cong 125,6 \text{ cm}^3$
3.	(α) $V = 408 \text{ m}^3$, $E_{ολ} = 456 \text{ m}^2$
	(β) $V = 4312\pi \text{ m}^3$, $E_{ολ} = 1008\pi \text{ m}^2$
	(γ) $V = 800\pi \text{ m}^3$, $E_{ολ} = 360\pi \text{ m}^2$
	(δ) $V = 400 \text{ m}^3$, $E_{ολ} = 360 \text{ m}^2$
4.	4 cm, 8 cm, 12 cm
5.	$V = 1152 \text{ cm}^3$
6.	$E_{ολ} = 864 \text{ dm}^2 = 8,64 \text{ m}^2$
7.	(α) 33,5 λεπτά (β) 804 λεπτά = 13 ώρες και 24 λεπτά
	(γ) 17,9 cm
8.	(α) $V = 40 \text{ dm}^3$ (β) $V = 90 \text{ dm}^3$
	(γ) $V = 360 \text{ dm}^3$
9.	Η κυλινδρική
10.	$94,2 \text{ m}^2$
11.	€5636,50
12.	(α) 12000 (β) 50%
13.	5

14. (α) $V_{Κώνοι} = \frac{2\pi r^3}{3}$, $V_{Σφαίρας} = \frac{4\pi r^3}{3}$, $V_{Κύλινδρος} = 2\pi r^3$
 (β) $E_{σφαίρας} = 4\pi r^2$, $E_{κυλίνδρου} = 6\pi r^2$, $E_{κώνοι} = 2\pi r^2(1 + \sqrt{2})$
15. $V = 72\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$, $E_{ολ} = 108\pi \text{ cm}^2$
16. $E_{ολ} = 56\pi + 4\sqrt{97}\pi \text{ cm}^2$, $V = 128\pi \text{ cm}^3$
17. 7,47 cm
18. $V = \frac{5a^3}{3}\pi \text{ cm}^3$, $E_{ολ} = (5a^2 + \sqrt{17}a^2) \text{ cm}^2$
19. Ορθός Συλλογισμός

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Σελίδα 107

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$V = 96 \text{ cm}^3$
2.	$E_{ολ} = \alpha^2\sqrt{3} \text{ cm}^2$
3.	$E_{κ} = 585\pi \text{ cm}^2$, $V = 2700\pi \text{ cm}^3$
4.	(α) $3946,577 \text{ cm}^2$ (β) €13,81
5.	(β) $\frac{1}{6}$ (γ) $\frac{\pi v^3}{6} \text{ κ. μ.}$
8.	(α) ΟΧΙ (β) ΝΑΙ (γ) ΝΑΙ (δ) ΟΧΙ
9.	(α) 12 κύβοι (β) 27 κύβοι (γ) 26 κύβοι (δ) 96 κύβοι
10.	(α) 144 m^2 (β) 6 m
11.	Β
12.	(α) 50 έως 90 μέτρα (β) Γ (γ) Δ (δ) Σωστή κάτοψη που περιστρέφεται γύρω από το σωστό σημείο με κίνηση αντίθετη προς την κίνηση των δεικτών του ρολογιού. Δεκτές γωνίες από 40° έως 50°.

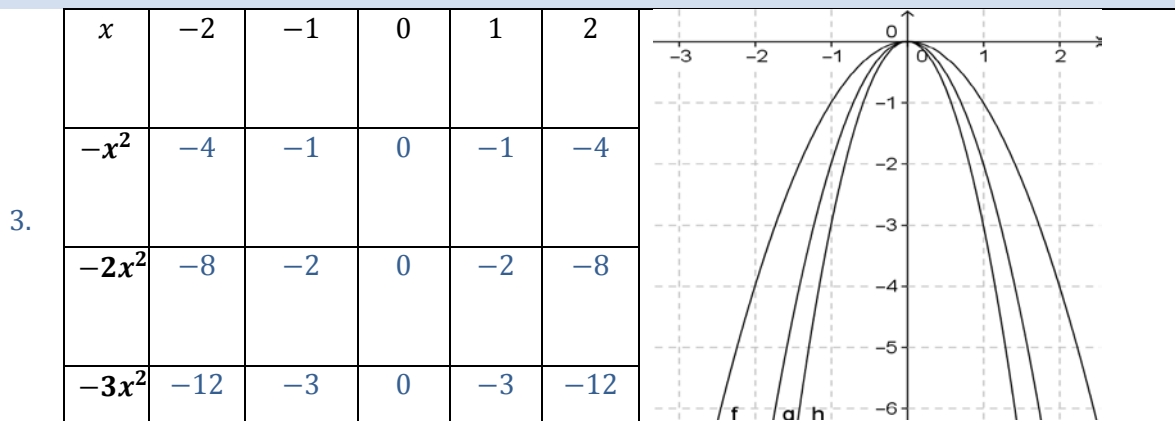
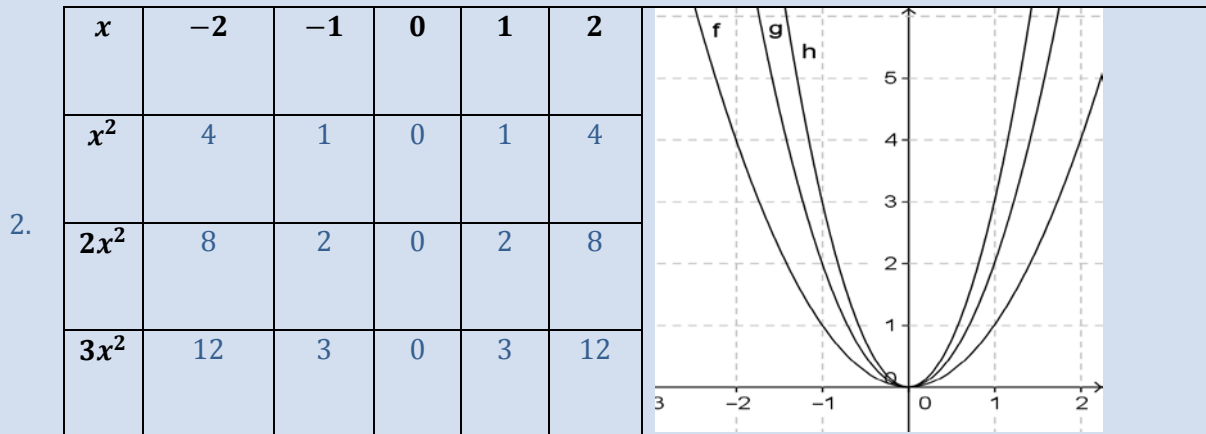
ΕΝΟΤΗΤΑ 8: Παραβολή

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Σελίδα 122

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $x = 0$ (β) π.χ. $(-1, \frac{3}{2})$ και $(1, \frac{3}{2})$
 (γ) $(0,0)$ (δ) Ελάχιστο
 (ε) $y = 13,5$ (στ) $(-2,6)$ και $(2,6)$



4. (α) $\rightarrow 3$ (β) $\rightarrow 4$ (γ) $\rightarrow 2$
 (δ) $\rightarrow 5$ (ε) $\rightarrow 1$

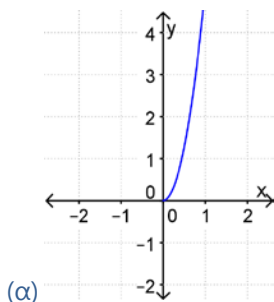
5. (α) $y = 3x^2$ (β) $y = -3x^2$

6. (α) Λάθος (β) Λάθος (γ) Ορθό

7. $\kappa > 2$

8. (α) $\lambda = 2$ (β) $\lambda = 5$

9.



(α)

(β)

Π.Ο. $[0, \infty)$

Π.Τ. $[0, \infty)$

(γ) $t = 6 \text{ s}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

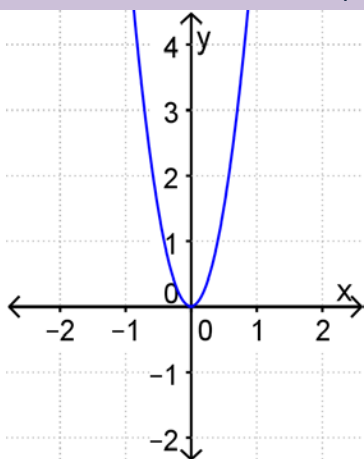
Σελίδα 125

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

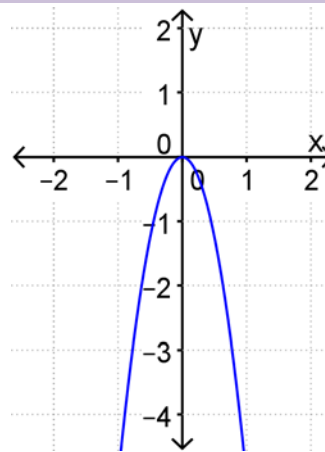
1.

(α)



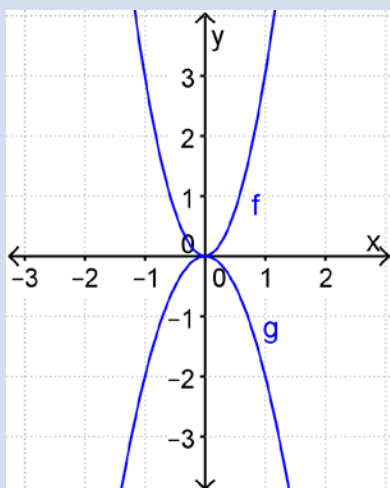
Ελάχιστο $(0,0)$

(β)



Μέγιστο $(0,0)$

2.



$f(x)$:

Π.Ο. = \mathbb{R} .

Π.Τ. = $[0, +\infty)$

Κορυφή $(0,0)$

Αξονας συμμετρίας: η ευθεία $x = 0$

$g(x)$:

Π.Ο. = \mathbb{R} .

Π.Τ. = $(-\infty, 0]$

Κορυφή $(0,0)$

Αξονας συμμετρίας: η ευθεία $x = 0$

3.

(α) $\lambda = \frac{13}{3}$

(β)

$\lambda > 4$

(γ) $\lambda < 4$

4.

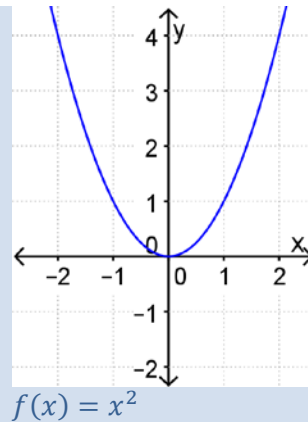
(α) (i) $a = 2$
(ii) $(-5, 50)$

(β)

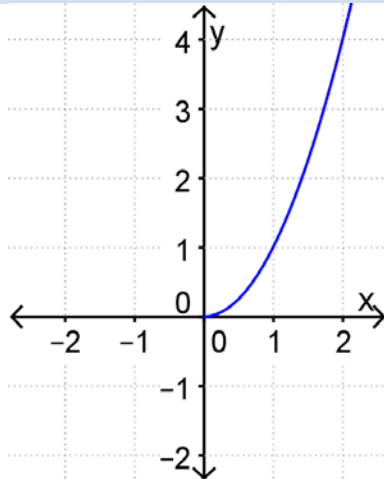
(i) $a = -\frac{1}{4}$
(ii) $(-5, -\frac{25}{4})$

5. (α) $\beta = 2$ ή $\beta = -1$

(β)



6. (α)



(β)

Π.Ο. $[0, \infty)$
Π.Τ. $[0, \infty)$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

Σελίδα 127

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. $(-2,4)$ $(3,9)$

2. (α) $168,3 \text{ cm}$

(γ) Μεταξύ 11 και 13 ετών

3. A

4. (α)

Ώρα	08:00	09:00	10:00	11:00
Πενικιλίνη (σε mg)	300	180	108	64,8

(β) Δ

(γ) Γ

5. (α) $22,9 \text{ m}$

(β) 101 m

(γ) $5,84 \text{ s}$

(δ) $78,1 \text{ m}$

(ε) $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(στ) Δ

(ζ) Γ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9: Παραλληλόγραμμο - Τραπεζία

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ			Σελίδα 143
Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α)	Είναι παραλληλόγραμμο	
	(β)	Δεν είναι παραλληλόγραμμο	
	(γ)	Είναι παραλληλόγραμμο	
	(δ)	Δεν είναι παραλληλόγραμμο	
2.	(α)	Λάθος	
	(β)	Λάθος	
	(γ)	Σωστό	
	(δ)	Λάθος	
	(ε)	Λάθος	
5.	(6, -1)		
8.	(-3, -4) ή (3, -4)		

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ			Σελίδα 149
Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α)	Είναι ορθογώνιο	
	(β)	Είναι ορθογώνιο	
	(γ)	Είναι ορθογώνιο	
	(δ)	Δεν είναι ορθογώνιο	
2.	(α)	Δεν είναι ορθογώνιο	
	(β)	Δεν είναι ορθογώνιο	
	(γ)	Είναι ορθογώνιο	
3.		Τετράγωνο	

ΡΟΜΒΟΣ			Σελίδα 154
Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α)	Είναι ρόμβος	
	(β)	Δεν είναι ρόμβος	
	(γ)	Είναι ρόμβος	
	(δ)	Είναι ρόμβος	

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

(β)

1.



2.

(α) Ορθό

(β) Ορθό

(γ) Ορθό

(δ) Λάθος

3.

Π.χ. Να μετρήσει τις διαγώνιους.

6.

Π.χ. 2 απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1.

304 cm

2.

$x = 3,2$ και $y = 4$

3.

(α) $x = 13$

(β) $x = 8$

4.

20 m

5.

(γ)

6.

(α) $x = 10$ cm

(β) $x = 12$ cm

(γ) $x = 12$ km

7.

$KH = 28$ m

8.

(α) $x = 17, y = 36$

(β) $x = 24, y = 12,5$

(γ) $x = 13,5, y = 7,5$

ΤΡΑΠΕΖΙΟ		Σελίδα 174
----------	--	------------

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α)	$BE = 3,6$
	(β)	$BE = 5,2$
3.	(α)	$x = 8, y = 7,5$
	(β)	$x = 10, y = 6$
6.	(β)	$\Delta E = 7 \text{ cm}, AM = 37 \text{ cm}$
	(γ)	$B\Gamma = 74 \text{ cm}$

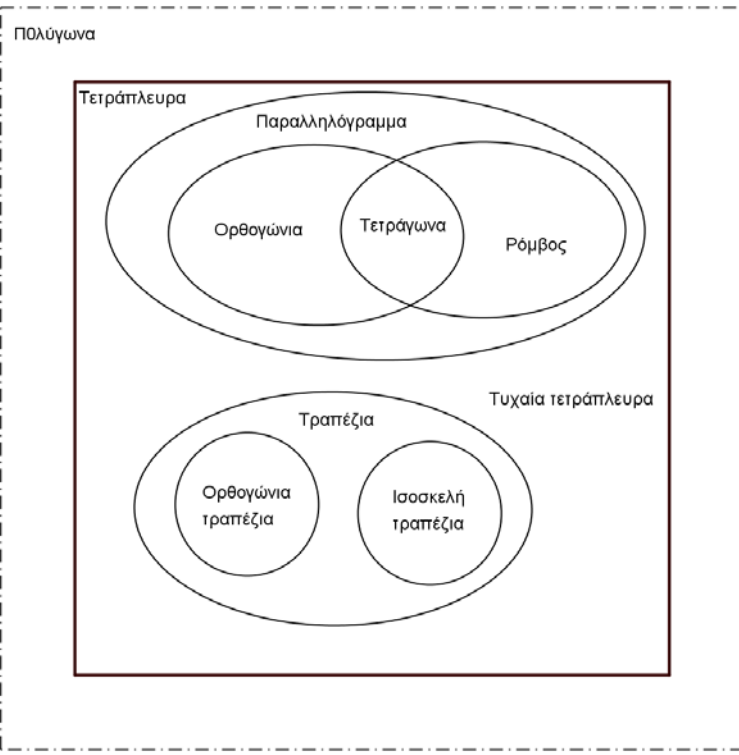
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ		Σελίδα 176
-------------------------	--	------------

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α)	Παραλληλόγραμμα
	(β)	Τυχαίο
	(γ)	Ρόμβος
	(δ)	Τυχαίο
	(ε)	Ορθογώνιο
	(στ)	Τυχαίο
	(ζ)	Ρόμβος
	(η)	Τετράγωνο
	(θ)	Τυχαίο
2.	(α)	$A\epsilon\Gamma Z$ Παραλληλόγραμμα
	(β)	$M\text{N}\Gamma\Delta$ και $M\text{K}\Gamma\epsilon$ Παραλληλόγραμμα
4.	(α)	Παραλληλόγραμμα ή Τραπεζίο ή Ρόμβος
	(β)	Ορθογώνιο ή Ορθογώνιο τραπέζιο ή Τετράγωνο
5.		Λάθος Ισχυρισμός
11.		$AM = 8 \text{ cm}, \Pi = (24 + 8\sqrt{3}) \text{ cm}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ		Σελίδα 180
-----------------------------	--	------------

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.		$x = 5$

4.



5.

(α)

$$\frac{1}{2}$$

(β)

$$\frac{5}{4}$$

(γ)










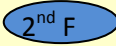












$$\frac{19}{8}$$

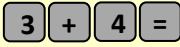

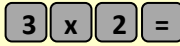
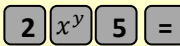
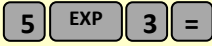

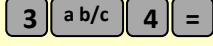

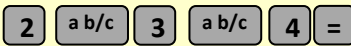
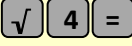
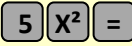
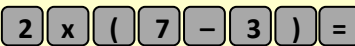
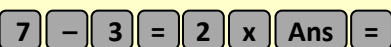

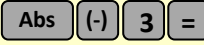




ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

\in	ανήκει
\notin	δεν ανήκει
\forall	για κάθε
\exists	υπάρχει
\cup	ένωση συνόλων
\cap	τομή συνόλων
\subset	γνήσιο υποσύνολο
\subseteq	υποσύνολο
\emptyset ή $\{ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
\neq	άνισο
\equiv	ταυτοτικά ίσο
\cong	κατά προσέγγιση ίσο
\mathbb{N}	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{N}_0	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{Z}	ακέραιοι αριθμοί $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
\mathbb{Z}^+	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{Z}^-	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
\mathbb{Q}	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta: \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0\}$
\mathbb{Q}^+	θετικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{Q}_0^+	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
\mathbb{Q}^-	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{R}	πραγματικοί αριθμοί
\Rightarrow	απλή συνεπαγωγή
\Leftrightarrow	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
\perp	κάθετες
\parallel	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή



		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
		Υποδιαστολή
		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
	ή  ή 	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
	ή 	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
		Εισαγωγή Προσήμου –
	ή 	Κλάσμα
	ή 	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
		Σβήσιμο μνήμης
		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3 + 4$		3+4 7
$2,34 - 1,1$		2.34 - 1.1 1.24
$3 \cdot 2$		3X2 6
2^5		2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$		5E3 ή 5X103 5000
$\frac{3}{4}$	 ή 	$\frac{3}{4}$ 3J4
$2\frac{3}{4}$	 ή 	$2\frac{3}{4}$ 2 J 3 J 4
$\sqrt{4}$		$\sqrt{4}$ 2
5^2		5^2 25
$2 \cdot (7 - 3)$		2X(7 - 3) 8
$2 \cdot (7 - 3)$		2XAns 8
$2 - (-3)$		$2 - (-3)$ 5
$ -3 $		$ -3 $ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	 ή 	$\frac{1}{4}$
$9 - 6 : 2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 	$9 - 6 : 2 M +$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9 - 6 : 2) - 6 : (9 - 6 : 2)$		$3 X M - 6 : M$ 17

