ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

Μαθηματικά

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Τεύχος Α'

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Λυκείου

Κοινού Κορμού

Α΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Α΄ Λυκείου Κοινού Κορμού, Α΄ Τεύχος

Συγγραφή Α΄ έκδοσης:	Αθανασίου Ανδρέας	Μαυροκορδάτου Μερόπη
	Αντωνιάδης Μάριος	Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
	Γιασουμής Νικόλας	Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
	Έλληνα Αγγέλα	Τιμοθέου Σάββας
	Λοϊζιάς Σωτήρης	Φιλίππου Ανδρέας
	Ματθαίου Κυριάκος	
Συγγραφή Β΄ έκδοσης:	Λοϊζιάς Σωτήρης	Τιμοθέου Σάββας
Επιμέλεια:	Πίκας Μάριος	Σαλονικίδης Ιωάννης

Συντονισμός: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
Βίδρας Αλέκος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Χατζηχρίστου Χρυσούλα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Ιωάννου Ιωάννης, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Μεγάλεμος Ιωάννης, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Επιμέλεια έκδοσης: Άστρα-Ιωάννου Μαρίνα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ Έκδοση 2016
Β΄ Έκδοση 2020

Εκτύπωση: Arrow Buildings Ltd

ISBN: 978-9963-54-240-6

50%

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Α΄ Λυκείου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει ...», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

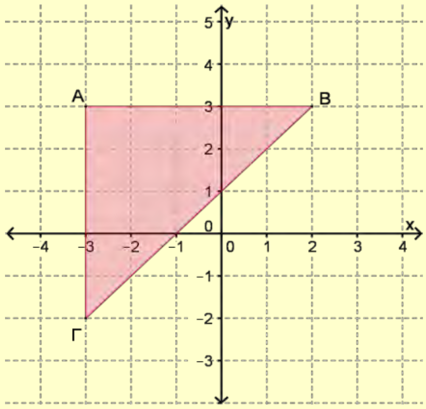
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΑΠΟ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$ και να δώσετε τις απαντήσεις σας στην πιο απλή μορφή.



2. Να τοποθετήσετε σε αριθμητική γραμμή τους πιο κάτω αριθμούς:

$$\sqrt{5},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{8},\ \sqrt[3]{29},\ \sqrt{29}$$

3. Η οργανωτική επιτροπή μιας συναυλίας θέλει να τοποθετήσει 900 καθίσματα σε ένα κλειστό γήπεδο. Τα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε τετράγωνη διάταξη. Πόσα καθίσματα θα τοποθετήσουν σε κάθε σειρά;

4. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κυκλικού χαλιού που έχει διάμετρο $10\ \mathrm{m}$.

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

   (α) $2x - 6 = 4x - 2$ (β) $3(x-4) = 2x - 5$

   (γ) $5(x+3) = 5x + 3$ (δ) $\dfrac{a-1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{3} + \dfrac{1}{6}$

6. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις, έτσι ώστε να είναι αδύνατες:

   (α) $(\lambda - 3)x = 7$ (β) $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x$

7. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό a σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις, έτσι ώστε να είναι αόριστες:

   (α) $(a+3)x = 0$ (β) $ax = 6x$

8. Να εξετάσετε για ποιες πραγματικές τιμές του x ορίζεται η καθεμιά από τις παραστάσεις:

$$A = \sqrt{3x-2}\,,\quad B = \sqrt{20-5x}$$

9. Δίνονται οι ανισώσεις $3x - 4 \geq x - 2$ και $2x + 3 < 13$.
   (α) Να βρείτε τις λύσεις της κάθε ανίσωσης.
   (β) Να παραστήσετε την κοινή λύση των δύο ανισώσεων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
   (γ) Ποια είναι η μικρότερη τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις;
   (δ) Να βρείτε 4 άλλες λύσεις που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις.
   (ε) Να βρείτε τη μεγαλύτερη ακέραια τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις.

10. Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πιο κάτω ευθειών και να τις παραστήσετε γραφικά:

(α)	$y = x + 2$	(β)	$y = 2x$
(γ)	$y = 3x - 2$	(δ)	$y + 3x = 1$
(ε)	$y = 2$	(στ)	$x = 3$

11. Η ευθεία $y = \alpha x$ περνά από το σημείο $A(-1, 3)$.
   (α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.
   (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες δύο σημείων που ανήκουν στην ευθεία $y = \alpha x$.

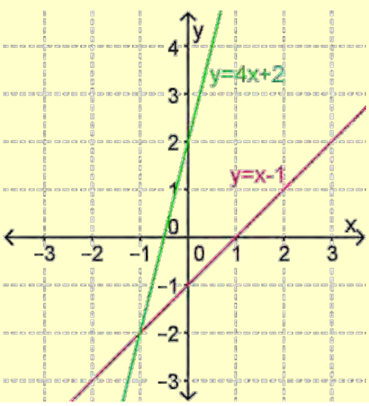
12. Η γραφική παράσταση της ευθείας $y = -2x + \beta$ περνά από το σημείο $A(-2, 6)$. Να υπολογίσετε την τιμή του β.

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία:
   (α) $(0, 1)$ και $(2, 4)$
   (β) $(0, 4)$ και $(-1, 4)$

14. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

(α) $\begin{array}{l} y = 3 + x \\ x + 2y = 6 \end{array}$ (β) $\begin{array}{l} y - 2x = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array}$

15. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών (ε_1): $y = x - 1$ και (ε_2): $y = 4x + 2$.
   Να λύσετε γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$



16. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+2)^2$ (β) $(2x-3y)^2$

(γ) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2$ (δ) $(x-3)(x+3)$

(ε) $(x+4)^3$ (στ) $(2x-1)(2x+1)$

17. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a+1)^2-(a+1)(a-1)=2(a+1)$.

18. Αν $a+\beta=-\frac{1}{3}$ και $a\beta=-\frac{7}{3}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $a^2+\beta^2=\dfrac{43}{9}$

(β) $(3a+1)^2+(3\beta+1)^2+10(a+\beta)=\dfrac{119}{3}$

(γ) $a^3+\beta^3=-\dfrac{64}{27}$

19. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $2x^3-2x$ (β) $y^2-x^2-10y+25$

(γ) $a^3x^3-\beta^3x^3+a^3-\beta^3$ (δ) $(x-2y)^2-(x+3y)^2$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $3x^2-15x = 0$ (β) $x^2+x = 6$

(γ) $(a-2)(2a+8)=-10$ (δ) $3x^2-5x+2 = 0$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+3x+2}$

(β) $\dfrac{(a+1)(a-2)^2-4(a+1)}{a^3+a^2}$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}=0$

(β) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x+2}{x+3}$

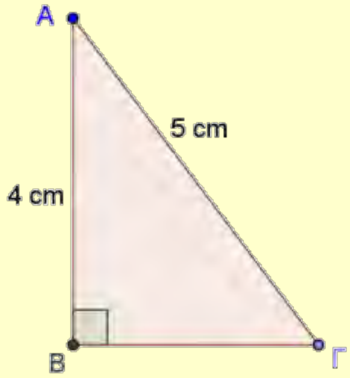
(γ) $\dfrac{2x-19}{x^2+x-6}-\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{5}{x+3}$

23. Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων τα τετράγωνα να έχουν άθροισμα 145.

24. Να δείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του.

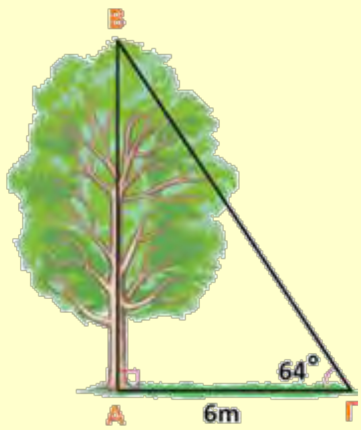
25. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΓ$). Στις προεκτάσεις της $ΒΓ$ παίρνουμε σημεία $Ε, Ζ$, έτσι ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι ισοσκελές.

26. Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να βρείτε:
   (α) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{A}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;
   (β) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{Γ}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;



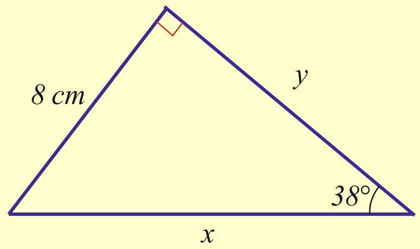
27. Να υπολογίσετε το συνθ και την $εφθ$ οξείας γωνίας $θ$ ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε ότι ημ$θ = \frac{3}{5}$.

28. Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος του δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση $6\,\mathrm{m}$ από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέγεθος της γωνίας προς την κορυφή του δέντρου ήταν 64°. Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου.
(Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί να υπολογιστούν κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων).

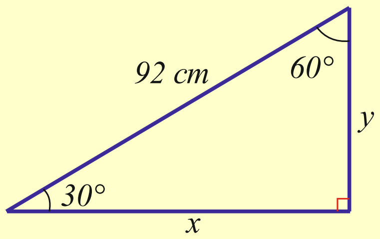


29. Να υπολογίσετε τους άγνωστους x και y στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)



(β)



ΕΝΟΤΗΤΑ 01

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Έχουμε μάθει…

- Να ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α.

  $\sqrt{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$, όπου $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$.

- Να ορίζουμε την κυβική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α.

  $\sqrt[3]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^3 = \alpha$, όπου $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$.

- Τις ιδιότητες των δυνάμεων.

  Αν $\alpha > 0,\ \beta > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{Z} - \{0\}$, τότε:

  $$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu},\ \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu},\ (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$$

  $$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu,\ \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$$

  $$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu},\ \nu > 0$$

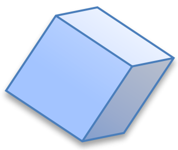
1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΝΙΟΣΤΗΣ ΡΙΖΑΣ

Εξερεύνηση

Ποιος φυσικός αριθμός βρίσκεται «πιο κοντά» στον αριθμό $\alpha = \sqrt{89}$;
Πώς μπορείτε να εξηγήσετε την απάντησή σας χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής;
Να επαναλάβετε τα πιο πάνω ερωτήματα για τον αριθμό $\beta = \sqrt[3]{89}$.

Διερεύνηση 1

- Γιατί οι αριθμοί $16, 64, 100$ ανήκουν στο σύνολο των τετράγωνων αριθμών; Ποια σχέση έχουν με το σχήμα του τετραγώνου;
  Να υπολογίσετε την πλευρά ενός τετραγώνου, του οποίου το εμβαδόν είναι $10{,}24\ \mathrm{cm}^2$.



- Γιατί οι αριθμοί $8, 27, 1000$ ανήκουν στο σύνολο των τέλειων κύβων; Ποια σχέση έχουν με το σχήμα του κύβου;
  Να υπολογίσετε την πλευρά ενός κύβου, του οποίου ο όγκος είναι $1728\ \mathrm{cm}^3$.

Διερεύνηση 2

- Να βρείτε δύο αριθμούς, έτσι ώστε το τετράγωνο του ενός να είναι ίσο με τον κύβο ενός άλλου. Να εξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.
- Να βρείτε δύο αριθμούς, έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ίσο με το τετράγωνο ενός άλλου αριθμού.

Έχουμε μάθει...

Στο Γυμνάσιο ορίσαμε τις έννοιες της τετραγωνικής και κυβικής ρίζας. Συγκεκριμένα, για $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$:

$$\sqrt{\alpha} = \beta \ \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$$

Από το πιο πάνω, έχουμε:

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta^2} = \beta,\ \ \alpha, \beta \geq 0$$

Για παράδειγμα, ισχύει $\sqrt{25} = 5$, αφού $5^2 = 25$.

Είναι γνωστό ότι υπάρχει ακόμα ένας αριθμός, ο οποίος αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει το 25. Έχουμε ότι $(-5)^2 = 25$, αλλά **δεν** γράφουμε ποτέ ότι $\sqrt{25} = \pm 5$. Διακρίνουμε, δηλαδή ότι το αποτέλεσμα της $\sqrt{25}$ είναι διαφορετικό από τις λύσεις της εξίσωσης $x^2 = 25$.

Συγκεκριμένα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι **δύο**, οι $x_1 = \sqrt{25} = 5$ και $x_2 = -\sqrt{25} = -5$, ενώ η $\sqrt{25}$ είναι **μοναδική** και είναι ίση με 5.

Επεκτείνοντας τις έννοιες της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας, μπορούμε με ανάλογο τρόπο να ορίσουμε την έννοια της νιοστής ρίζας και για άλλους φυσικούς αριθμούς.

Ορισμός

Η **νιοστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α, όπου ν θετικός ακέραιος, είναι ο μη αρνητικός αριθμός β, ο οποίος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη ν, δίνει τον αριθμό α.

Συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και ισχύει ότι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^{\nu} = \alpha \quad (\alpha \geq 0 \text{ και } \beta \geq 0,\ \nu \in \mathbb{N})$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\sqrt{25} = 5$, *διότι* $5^2 = 25$.
- $\sqrt[3]{8} = 2$, *διότι* $2^3 = 8$.
- $\sqrt[4]{81} = 3$, *διότι* $3^4 = 81$.
- $\sqrt[5]{-32}$ *δεν ορίζεται, διότι το υπόριζο είναι αρνητικό.*
- $\sqrt[6]{-64}$ *δεν ορίζεται, διότι το υπόριζο είναι αρνητικό.*

Η επεξήγηση του συμβολισμού της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού δίνεται πιο κάτω:

Δείκτης Ριζικού **Σύμβολο Ριζικού**

$$\underbrace{\sqrt[\nu]{\alpha}}$$ **Υπόριζος Ποσότητα**

νιοστή ρίζα του α

Παρατηρήσεις

- Από τον πιο πάνω ορισμό, και για $\alpha \geq 0$, έχουμε:
  - $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$
  - $\sqrt[\nu]{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
  - $\sqrt[\nu]{1} = 1$
  - $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$
- Μπορούμε πιο εύκολα να υπολογίσουμε μια νιοστή ρίζα, όταν το υπόριζο γράφεται ως δύναμη με εκθέτη ν.

  Για παράδειγμα:

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$
$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$
$$\sqrt[6]{x^{30}} = \sqrt[6]{(x^5)^6} = x^5,\ \ x > 0$$

Διερεύνηση της εξίσωσης $x^\nu = a$ (ν θετικός ακέραιος)

Η έννοια της νιοστής ρίζας είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη λύση της εξίσωσης που έχει τη μορφή $x^\nu = a,\ a \in \mathbb{R},\ \nu \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα:

- *Αν έχουμε την εξίσωση $x^2 = 16$, τότε από τον ορισμό της ρίζας παίρνουμε ότι $x = \sqrt{16} = 4$. Επομένως, η $x = 4$ είναι μία λύση ή ρίζα της εξίσωσης. Όμως, και το -4 είναι λύση της πιο πάνω εξίσωσης, αφού $(-4)^2 = 16$. Έτσι, όταν έχουμε την εξίσωση $x^2 = 16$, γράφουμε:*

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

- *Αν έχουμε την εξίσωση $x^4 = -16$, τότε προφανώς η εξίσωση δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$, αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που αν υψωθεί στην τέταρτη δύναμη, να δώσει αρνητικό αριθμό.*
- *Αν έχουμε την εξίσωση $x^3 = 8$, τότε από τον ορισμό της ρίζας παίρνουμε ότι $x = \sqrt[3]{8} = 2$. Επομένως, η $x = 2$ είναι μία λύση της εξίσωσης και μάλιστα μοναδική στο $\mathbb{R}$, διότι δεν υπάρχει άλλος πραγματικός αριθμός που αν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, να δώσει τον αριθμό 8. Έτσι, όταν έχουμε την εξίσωση $x^3 = 8$, γράφουμε:*

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

- *Αν έχουμε την εξίσωση $x^3 = -8$, τότε ο ορισμός της τρίτης ρίζας δεν μας επιτρέπει να γράψουμε $x = \sqrt[3]{-8}$, διότι το υπόριζο είναι αρνητικός αριθμός. Όμως, η πιο πάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$, την $x = -2$, διότι $(-2)^3 = -8$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε:*

$$x^3 = -8 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Γενικά:

- Αν ν **περιττός**, τότε η εξίσωση $x^\nu = a$ έχει πάντα μία μόνο πραγματική λύση, ανεξάρτητα από το αν ο a είναι θετικός, αρνητικός ή ίσος με μηδέν.
  Συγκεκριμένα, η μία μόνο πραγματική λύση της εξίσωσης είναι:
  - $x = \sqrt[\nu]{a}$, όταν $a > 0$
  - $x = -\sqrt[\nu]{-a}$, όταν $a < 0$. (Παρατηρούμε ότι ο $-a$, ως υπόριζο, είναι θετικός αριθμός.)
  - $x = \sqrt[\nu]{a} = 0$, όταν $a = 0$.

  Για παράδειγμα:
  - *Η εξίσωση $x^5 = 32$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, τον αριθμό $x = \sqrt[5]{32} = 2$.*
  - *Η εξίσωση $x^3 = -125$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, τον αριθμό $x = -\sqrt[3]{125} = -5$.*
- Αν ν **άρτιος**, τότε η εξίσωση $x^\nu = a$ ενδέχεται να έχει ή να μην έχει πραγματικές λύσεις, ανάλογα από το αν ο a είναι θετικός, αρνητικός ή ίσος με μηδέν.

Συγκεκριμένα, η εξίσωση $x^\nu = a,\ \nu$ άρτιος:

- δεν έχει πραγματικές λύσεις, όταν $a < 0$
- έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$, όταν $a > 0$
- μία μόνο πραγματική λύση, την $x = 0$, όταν $a = 0$.

Για παράδειγμα:

- *Η εξίσωση $x^4 = 81$ έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$.*
- *Η εξίσωση $x^4 = -81$ δεν έχει πραγματικές λύσεις.*
- *Η $x^4 = 0$ έχει μία μόνο πραγματική λύση, την $x = 0$.*

Παρατήρηση

Σε πολλές εξισώσεις ενδέχεται η νιοστή ρίζα να μην είναι ρητός αριθμός. Σε τέτοια περίπτωση, η λύση της εξίσωσης γράφεται με το σύμβολο της νιοστής ρίζας ή υπολογίζεται με την υπολογιστική μηχανή με κατάλληλα δεκαδικά ψηφία, όταν αυτό ζητηθεί.

Για παράδειγμα:

- $x^2 = 7 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{7}$
- $x^6 = 13 \Longrightarrow x = \pm\sqrt[6]{13}$
- $x^4 = -10$ *(Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις, γιατί $x^4 \geq 0$ και $-10 < 0$.)*
- $x^3 = 20 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{20}$
- $x^7 = -100 \Longrightarrow x = -\sqrt[7]{100}$
- $x^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

Χρησιμοποιώντας την υπολογιστική μηχανή, οι πιο πάνω λύσεις σε προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων είναι:

- $\pm\sqrt{7} \simeq \pm 2{,}65$
- $\pm\sqrt[6]{13} \simeq \pm 1{,}53$
- $\sqrt[3]{20} \simeq 2{,}71$
- $-\sqrt[7]{100} \simeq -1{,}93$
- $\pm\sqrt{\frac{2}{5}} \simeq \pm 0{,}63$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{36}$ (β) $\sqrt[3]{8}$ (γ) $\sqrt[4]{81}$ (δ) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

Λύση

(α) $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$

(β) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

(γ) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(δ) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2}$

Παράδειγμα 2

Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{2^{14}}$

(β) $\sqrt[3]{5^{30}}$

(γ) $\sqrt[5]{32x^{10}}$

(δ) $\sqrt[4]{\frac{16}{a^{12}}},\ a > 0$

Λύση

(α) $\sqrt{2^{14}} = \sqrt{(2^7)^2} = 2^7$

(β) $\sqrt[3]{5^{30}} = \sqrt[3]{(5^{10})^3} = 5^{10}$

(γ) $\sqrt[5]{32x^{10}} = \sqrt[5]{(2x^2)^5} = 2x^2$

(δ) Για $a > 0$, $\sqrt[4]{\frac{16}{a^{12}}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{a^3}\right)^4} = \frac{2}{a^3}$.

Παράδειγμα 3

Να ερμηνεύσετε λεκτικά τον αριθμό $\sqrt[3]{20}$ και στη συνέχεια να τον συγκρίνετε με την πέμπτη ρίζα του 30.

Λύση

Ο αριθμός $\sqrt[3]{20}$ είναι εκείνος ο πραγματικός αριθμός, ο οποίος όταν υψωθεί στη τρίτη δύναμη, τότε θα είναι ίσος με 20. Δηλαδή, αν $x = \sqrt[3]{20}$, τότε $x^3 = 20$.

Παρατηρούμε ότι ο πραγματικός αυτός αριθμός βρίσκεται εντός του διαστήματος $(2, 3)$, αφού ισχύει ότι $2^3 < 20 < 3^3$. Άρα:

$$2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

Η πέμπτη ρίζα του 30 ($\sqrt[5]{30}$) είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός y, με $y^5 = 30$. Παρατηρούμε ότι $1^5 < 30 < 2^5$. Άρα:

$$1 < \sqrt[5]{30} < 2$$

Επομένως, έχουμε τελικά ότι $\sqrt[5]{30} < \sqrt[3]{20}$.

Παράδειγμα 4

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^3 = 8$ (β) $x^3 = -8$ (γ) $x^4 = 81$

Λύση

(α) $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = 2$

(β) $x^3 = -8 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{8} \Rightarrow x = -2$

(γ) $x^4 = 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{81} \Rightarrow x = \pm 3$

Παράδειγμα 5

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x+1} = 4$ (β) $\sqrt[5]{y+2} = 2$

Λύση

(α) Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt{x+1} = 4$, πρέπει:

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δεύτερη δύναμη:

$$\sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x + 1 = 16 \Rightarrow x = 15, \text{ δεκτή} \quad (x > -1)$$

(β) Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt[5]{y+2} = 2$, πρέπει:

$$y + 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq -2$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη πέμπτη δύναμη:

$$\sqrt[5]{y+2} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{y+2}\right)^5 = 2^5 \Rightarrow y + 2 = 32 \Rightarrow y = 30, \text{ δεκτή} \quad (y \geq -2)$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{16}$ (β) $\sqrt[3]{27}$ (γ) $\sqrt[4]{16}$ (δ) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{100000}}$

2. Να γράψετε μια ισοδύναμη πρόταση για τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z:
(α) $x = \sqrt[5]{4}$ (β) $y = \sqrt[7]{2}$ (γ) $z = \sqrt[3]{14}$

3. Ένας αριθμός, όταν υψωθεί στην 5η δύναμη, ισούται με 10.
(α) Να γράψετε τον κατάλληλο συμβολισμό για αυτόν τον αριθμό.
(β) Με χρήση της υπολογιστικής μηχανής, να γράψετε τον αριθμό κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.

4. Να ερμηνεύσετε λεκτικά τους πιο κάτω πραγματικούς αριθμούς και να αναφέρετε ποιος είναι ο μεγαλύτερος, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(α) $\sqrt[4]{50}$ και $\sqrt[5]{50}$ (β) $\sqrt[3]{10}$ και $\sqrt[4]{15}$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{3^{12}}$ (β) $\sqrt[3]{6^{60}}$ (γ) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{x^{20}}}$ (δ) $\sqrt[6]{\dfrac{\beta^{18}}{1000000}},\ \beta \geq 0$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:
(α) $x^3 = 1000$ (β) $x^5 = -32$ (γ) $x^7 = 128$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:
(α) $x^4 = 10000$ (β) $x^6 = -1$ (γ) $x^8 = 256$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις, δίνοντας την απάντηση σε δύο δεκαδικά ψηφία όπου είναι αναγκαίο:
(α) $x^5 = 5$ (β) $x^4 = 110$ (γ) $x^8 = 256$

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:
(α) $(x+2)^4 = 81$ (β) $(1-x)^5 = -1024$ (γ) $2x^3 + 1 = 129$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:
(α) $\sqrt{2x+3} = 5$ (β) $\sqrt[3]{3x} = 6$ (γ) $3\sqrt[4]{x} - 2 = 7$

11. Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά $\frac{1}{2}$ αν υψωθεί στην 9η δύναμη δίνει 512.

12. Ποσό €3000 ανατοκίζεται με επιτόκιο $\tau\%$ και σε 5 χρόνια γίνεται €3828,84. Να υπολογίσετε την τιμή του τ από την εξίσωση:
$$3000(1+\tau)^5 = 3828{,}84$$

1.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΝΙΟΣΤΗΣ ΡΙΖΑΣ

Διερεύνηση

- Να εξηγήσετε γιατί **δεν** είναι ορθές οι πιο κάτω ισότητες:

  (α) Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$, ισχύει:
  $$\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$
  (β) Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha \geq \beta$, ισχύει:
  $$\sqrt{\alpha-\beta} = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$$

- Να μελετήσετε τις πιο κάτω ισότητες και να αναφέρετε κατά πόσο είναι ορθές ή όχι:

  (α) Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$, ισχύει:
  $$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$
  (β) Για κάθε $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, ισχύει:
  $$\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}$$

Ιδιότητες νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού

Με βάση τον ορισμό της νιοστής ρίζας και των ιδιοτήτων των δυνάμεων, μπορούμε να αποδείξουμε βασικές ιδιότητες που ισχύουν για τις νιοστές ρίζες.

Ιδιότητα 1

Ισχύει ότι
$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha,$$
για κάθε $\alpha \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος.

Απόδειξη

Θέτουμε $\sqrt[\nu]{\alpha} = x$. Από τον ορισμό, έχουμε ότι:
$$\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^{\nu} = \alpha$$
Άρα, προκύπτει ότι $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = x^{\nu} = \alpha$.

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{5} = 7$.

Ιδιότητα 2
Ισχύει ότι
$$\sqrt[\nu]{a\beta} = \sqrt[\nu]{a}\cdot\sqrt[\nu]{\beta},$$
για κάθε $a, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος.

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων, ισχύει ότι:
$$\left(\sqrt[\nu]{a}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = a\beta$$

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας, προκύπτει ότι:
$$\sqrt[\nu]{a\cdot\beta} = \sqrt[\nu]{a}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2\cdot 5} = \sqrt[3]{10}$
- $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{16\cdot 2} = \sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$

Ιδιότητα 3
Ισχύει ότι
$$\sqrt[\nu]{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{a}}{\sqrt[\nu]{\beta}},$$
για κάθε $a \geq 0$, $\beta > 0$ και ν θετικός ακέραιος.

Απόδειξη
Από τις ιδιότητες των δυνάμεων, ισχύει ότι:
$$\left(\frac{\sqrt[\nu]{a}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu} = \frac{\left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}} = \frac{a}{\beta}$$

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας, προκύπτει ότι:
$$\frac{\sqrt[\nu]{a}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{a}{\beta}}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{32 : 2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
- *Για* $\beta \neq 0$, $\sqrt[5]{\frac{100000}{\beta^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{100000}}{\sqrt[5]{\beta^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{10^5}}{\sqrt[5]{(\beta^2)^5}} = \frac{10}{\beta^2}$
- $\sqrt[3]{\frac{24}{27}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{3}$

Τις πιο πάνω ιδιότητες μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε, για να γράψουμε ριζικά σε απλούστερη μορφή.

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$
- $\sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Παράδειγμα 1

Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{2^{14}}$ (β) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ (γ) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$ (δ) $\sqrt{50}$

Λύση

(α) $\sqrt{2^{14}} = \sqrt{(2^7)^2} = 2^7$

(β) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$

(γ) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10$

(δ) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

Παράδειγμα 2

Να γράψετε τα πιο κάτω ριζικά στην πιο απλή τους μορφή:

(α) $\sqrt{20}$ (β) $\sqrt[4]{2^5}$

(γ) $\sqrt[3]{5^5 \cdot 2^7}$ (δ) $\sqrt[5]{a^{12}\beta^7\gamma^3}$, όπου $a, \beta, \gamma > 0$

Λύση

(α) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

(β) $\sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$

(γ) $\sqrt[3]{5^5 \cdot 2^7} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2 \cdot 2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{5^2 \cdot 2} = 5 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{50} = 20\sqrt[3]{50}$

(δ) $\sqrt[5]{a^{12} \cdot \beta^7 \cdot \gamma^3} = \sqrt[5]{a^{10} \cdot \beta^5 \cdot a^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^3} = \sqrt[5]{(a^2)^5} \cdot \sqrt[5]{\beta^5} \cdot \sqrt[5]{a^2\beta^2\gamma^3}$

$= a^2\beta \cdot \sqrt[5]{a^2\beta^2\gamma^3}$

Παράδειγμα 3

Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{50}-\sqrt{2}$

(β) $\left(5-\sqrt{x}\right)^2, x \geq 0$

(γ) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-4\sqrt{5}\right)$

(δ) $\left(7-\sqrt{3}\right)\left(7+\sqrt{3}\right)$

Λύση

(α) $\sqrt{50}-\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(β) $\left(5-\sqrt{x}\right)^2=5^2-2\cdot 5\cdot\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2=25-10\sqrt{x}+x$

(γ) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-4\sqrt{5}\right)=3-4\sqrt{15}+2\sqrt{15}-8\cdot 5=-37-2\sqrt{15}$

(δ) $\left(7-\sqrt{3}\right)\left(7+\sqrt{3}\right)=7^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=49-3=46$

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=4\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{200}$ μπορεί να πάρει τη μορφή:

(α) $\alpha\sqrt{\beta}$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$

(β) $\sqrt{\gamma},\ \gamma\in\mathbb{N}$

Λύση

(α) $A=4\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{200}=4\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{100\cdot 2}$

$$=12\sqrt{2}+5\sqrt{2}-10\sqrt{2}=7\sqrt{2} \qquad (\alpha=7,\beta=2)$$

(β) Από το (α) ερώτημα, έχουμε:

$$A=7\sqrt{2}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{98} \qquad (\gamma=98)$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{9+16}$ (β) $\sqrt{10^2-8^2}$

(γ) $\sqrt{4\cdot 25}$ (δ) $\sqrt[3]{108:4}$

2. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{9x^2},\ x>0$ (β) $\sqrt{x^2y^6},\ x,y>0$

(γ) $\sqrt[3]{16y^5:2y^2},\ y>0$ (δ) $\sqrt[5]{y^2}\cdot\sqrt[5]{y}\cdot\sqrt[5]{y^2},\ y>0$

3. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[5]{32}$ (β) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ (γ) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

(δ) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3},\ a\geq 0$ (ε) $\sqrt[4]{x^8}$ (στ) $\sqrt{200}$

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντηση σας.

(α)	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\sqrt{90}=9\sqrt{10}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\sqrt[\nu]{x}\ \div\ \sqrt[\nu]{y}=\sqrt[\nu]{\frac{x}{y}},\ (x,\ y>0,\ \nu$ φυσικός$)$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\sqrt{3}+\sqrt{7}=\sqrt{10}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$\sqrt{32}\div\sqrt{2}=4$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	$\sqrt{3^2+4^2}=3+4=7$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$\sqrt{2^2\cdot 5^4}=100$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(η)	$\sqrt{12}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{54}$ (β) $\sqrt{8a^3},\ a\geq 0$ (γ) $\sqrt[4]{x^5},\ x\geq 0$

(δ) $\sqrt[3]{16a^4},\ a\geq 0$ (ε) $\sqrt{a^2\beta^3\gamma^5},\ a,\beta,\gamma\geq 0$ (στ) $\sqrt[3]{\frac{16}{x^6}}$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt[3]{4}\cdot\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}\right)$ (β) $\left(2\sqrt{75}+3\sqrt{48}-9\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right):\sqrt{27}$

(γ) $\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$ (δ) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}$

7. Να υπολογίσετε το x^3, αν $x - 3\sqrt[3]{7} = 4\sqrt[3]{7}$.

8. Αν $x = 1 + \sqrt{2}$ και $y = 1 - \sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:
   (α) $x + y$ (β) $x^2 - y^2$ (γ) xy (δ) $x^2 + y^2$

9. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{320}$ μπορεί να πάρει τη μορφή:
   (α) $a\sqrt[3]{\beta}$, με $a, \beta \in \mathbb{N}$
   (β) $\sqrt[3]{\gamma},\ \gamma \in \mathbb{N}$.

10. Αν $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, να δείξετε ότι $\varphi^2 = \varphi + 1$.

11. Να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ είναι ρητός, αν ο αριθμός a είναι θετικός ρητός.

12. Οι δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου έχουν μήκη $\left(4 + \sqrt{2}\right)$ και $\left(4 - \sqrt{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι το μήκος της υποτείνουσας του είναι φυσικός αριθμός.

1.3 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

Διερεύνηση

Από τον ορισμό της ρίζας έχουμε για $x > 0,\ y > 0$ ότι:

$$x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω πρόταση, να συμπληρώσετε τα πιο κάτω και να αναφέρετε το συμπέρασμα σας.

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \cdots \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}} = \cdots$$

$$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \cdots \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{3}} = \cdots$$

Έχουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},\ \ a > 0$$

Με ανάλογο τρόπο, έχουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a},\ \ a > 0$$

Πρόταση

Για $a \in \mathbb{R},\ \ a \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού, παίρνουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{\nu}}\right)^\nu = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $11^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{11}$

Τα πιο πάνω μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε και με διαφορετικό τρόπο στην περίπτωση που η βάση γράφεται ως δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό:

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\cdot\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$
- $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

Γενικά, αν ο εκθέτης μιας δύναμης είναι ο ρητός αριθμός

$$\frac{\mu}{\nu},\ \ \mu,\nu \in \mathbb{Z},\ \ \nu > 0$$

και η βάση είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός $a, (a > 0)$, τότε η παράσταση της μορφής

$$a^{\frac{\mu}{\nu}}$$

ονομάζεται **δύναμη με ρητό εκθέτη.**

Τον αριθμό $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ μπορούμε να τον δούμε με δύο διαφορετικούς τρόπους

$$\begin{cases} a^{\frac{\mu}{\nu}} = (a^{\mu})^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} \\ a^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(a^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu} = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\mu} \end{cases}$$

Πρόταση

Για $a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$ και $\mu,\nu \in \mathbb{Z},\ \nu > 0$ ισχύει:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\mu}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού, παίρνουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = a^{\mu} \Leftrightarrow a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

Παρατηρήσεις

- Αν μ,ν θετικοί ακέραιοι, τότε ισχύει:

$$0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$$

- Για κάθε φυσικό ν και $a > 0$, ισχύει:

$$a^{-\frac{1}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a}}$$

- Γενικά, όταν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, ορίζουμε:

$$a^{-\frac{\mu}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}$$

Παράδειγμα1

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $4^{\frac{1}{2}}$ (β) $9^{-\frac{1}{2}}$ (γ) $16^{\frac{3}{4}}$

Λύση

(α) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

(β) $9^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

(γ) $16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^{3} = 2^3 = 8$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12}$ (β) $2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2}$ (γ) $\sqrt{5} + 5^{\frac{3}{2}}$

Λύση

(α) $3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

(β) $2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{4}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$

(γ) $\sqrt{5} + 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{5^3} = \sqrt{5} + \sqrt{5^2 \cdot 5} = \sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^{\frac{1}{2}} = 3,\ \ x \geq 0$

(β) $x^{\frac{2}{3}} = 9,\ \ x \geq 0$

(γ) $y^{-\frac{3}{2}} = 8,\ \ y > 0$

Λύση

(α) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στη δύναμη 2, ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1. Για $x \geq 0$, έχουμε:

$$x^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$$

(β) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στην $\frac{3}{2}$, ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1. Για $x \geq 0$, έχουμε:

$$x^{\frac{2}{3}} = 9 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = (3^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 27$$

(γ) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στην $\frac{3}{2}$, ώστε ο εκθέτης του y να γίνει 1. Για $y > 0$, έχουμε:

$$y^{-\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow \left(y^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow y = 8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Δραστηριότητες

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω ριζικά σε δύναμη με ρητό εκθέτη:

(α) $\sqrt[3]{5^2}$ (β) $\sqrt{3}$ (γ) $\sqrt[5]{1000}$

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $16^{\frac{1}{2}}$ (β) $8^{\frac{1}{3}}$ (γ) $81^{\frac{1}{4}}$

(δ) $4^{\frac{3}{2}}$ (ε) $9^{-\frac{1}{2}}$ (στ) $1^{\frac{1}{20}}$

(ζ) $\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3}$ (η) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}}$ (θ) $8^{\frac{10}{6}}$

3. Να δείξετε ότι οι αριθμοί

$$a=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3,\ \beta=(4^3)^{\frac{1}{2}},\ \gamma=\sqrt{4^3},\ \delta=\left(\sqrt{4}\right)^3$$

είναι ίσοι μεταξύ τους. Ακολούθως, να γράψετε έναν αριθμό με ρητό εκθέτη, ο οποίος να είναι ίσος με τους αριθμούς a,β,γ και δ.

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντηση σας.

(α)	$5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$4^{\frac{1}{2}}=2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\sqrt[3]{5}\cdot 5^{\frac{2}{3}}=5$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η λύση της εξίσωσης $x^{\frac{1}{2}}=3,\ x>0$ είναι ο αριθμός $\sqrt{3}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η εξίσωση $x^3=-27$ είναι αδύνατη.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$\sqrt[3]{(-8)^2}=(-8)^{\frac{2}{3}}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $9^{\frac{1}{2}}\div 16^{\frac{1}{2}}$ (β) $(8\kappa^6)^{\frac{1}{3}}$

(γ) $25^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}$ (δ) $(64x^6)^{-\frac{2}{3}},\ x>0$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{\frac{1}{2}} = 5,\ x \geq 0$

(β) $x^{\frac{1}{3}} = 2,\ x > 0$

(γ) $x^{\frac{2}{3}} = 1,\ x \geq 0$

(δ) $(x+1)^{\frac{1}{3}} = 2,\ x \geq -1$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{-\frac{1}{2}} = 4,\ x \geq 0$

(β) $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27},\ x > 0$

8. Η απόσταση s (σε m) που διανύει ένα αυτοκίνητο το οποίο επιταχύνει δίνεται από τη σχέση $s(t) = 10t^{\frac{3}{2}}$, όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Να υπολογίσετε τον χρόνο που κινήθηκε το αυτοκίνητο, αν η απόσταση που διάνυσε είναι $640\ \mathrm{m}$.

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a + \beta + 2\sqrt{a\beta},\ \ a, \beta \geq 0$$

1.4 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΑΡΡΗΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ ΣΕ ΡΗΤΟ

Διερεύνηση

Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να ισχύουν οι ισότητες στα πιο κάτω:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{(\dots)}{5}, \qquad \frac{1}{3-\sqrt{7}}=\frac{3+\sqrt{7}}{(\dots\ \ \dots)}$$

Πώς μπορούμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή να το μετατρέψουμε σε ισοδύναμό του με ρητό παρονομαστή; Πώς θα μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή;

$$\frac{1}{\sqrt{7}}= \qquad , \qquad \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$$

Πολλές φορές χρειάζεται να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με παρονομαστή ρητό. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό**. Ο λόγος που εφαρμόζουμε αυτή τη διαδικασία είναι το γεγονός ότι ο παρονομαστής ενός κλάσματος εκφράζει «σε πόσα μέρη χωρίζεται ο αριθμητής». Άρα, θέλουμε ο παρονομαστής να είναι φυσικός αριθμός.

Για παράδειγμα, έχουμε:

(α) $\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{2}$.

(β) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τη παράσταση $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$. *Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα* $(a-\beta)(a+\beta)=a^2-\beta^2$, *μετατρέπουμε τον παρονομαστή από άρρητο σε ρητό.*

Γενικά, όταν έχουμε την άρρητη παράσταση $A=a-\beta$, όπου a,β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε πολλαπλασιάζουμε με την άρρητη παράσταση $B=a+\beta$. Έτσι, μέσα από την εφαρμογή της ταυτότητας

$$(a-\beta)(a+\beta)=a^2-\beta^2$$

οδηγούμαστε στη ρητή παράσταση $A\cdot B=a^2-\beta^2$.

Οι δύο άρρητες παραστάσεις A και B λέγονται **συζυγείς**.

Στο παράδειγμα (β) πιο πάνω, η παράσταση $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ *είναι η συζυγής της παράστασης* $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Παρατήρηση

- Αν a, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και κ, λ είναι ρητοί πραγματικοί αριθμοί, τότε οι παραστάσεις A και B στον πιο κάτω πίνακα είναι συζυγείς.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \cdot B}$
$\sqrt{a}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{a}-\sqrt{\beta}$	$a-\beta$
$\sqrt{a}+\beta$	$\sqrt{a}-\beta$	$a-\beta^2$
$a+\sqrt{\beta}$	$a-\sqrt{\beta}$	$a^2-\beta$
$\kappa\sqrt{\beta}+\lambda\sqrt{a}$	$\kappa\sqrt{\beta}-\lambda\sqrt{a}$	$\kappa^2\beta-\lambda^2 a$

Παράδειγμα 1

Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

(β) $\frac{2}{\sqrt{14}}$

(γ) $\frac{6}{3\sqrt{2}}$

Λύση

(α) $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(β) $\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=\frac{2\cdot\sqrt{14}}{\left(\sqrt{14}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{7}$

(γ) $\frac{6}{3\sqrt{2}}=\frac{6}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}$

Παράδειγμα 2

Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (β) $\frac{3}{1-\sqrt{2}}$ (γ) $\frac{2}{4+\sqrt{3}}+\frac{2}{4-\sqrt{3}}$

Λύση

(α) $$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1}=5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

(β) $$\frac{3}{1-\sqrt{2}}=\frac{3}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{3(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{3(1+\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{3(1+\sqrt{2})}{1-2}=-3(1+\sqrt{2})$$

(γ) $$\frac{2}{4+\sqrt{3}}+\frac{2}{4-\sqrt{3}}=\frac{2(4-\sqrt{3})+2(4+\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=\frac{8-2\sqrt{3}+8+2\sqrt{3}}{4^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{16}{16-3}=\frac{16}{13}$$

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ο αριθμός $A = 6 + \sqrt{3}$. Αν B είναι ο συζυγής αριθμός του A, τότε να υπολογίσετε τα πιο κάτω:
   (α) $A + B$
   (β) $A - B$
   (γ) AB

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:
   (α) $\frac{7}{\sqrt{7}}$ (β) $\frac{3}{\sqrt{15}}$
   (γ) $\frac{2}{5\sqrt{6}}$ (δ) $\frac{10}{\sqrt{2}}$

3. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:
   (α) $\frac{3}{\sqrt{7} - 1}$ (β) $\frac{3}{\sqrt{8} + \sqrt{2}}$
   (γ) $\frac{38}{5 + \sqrt{6}}$ (δ) $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

4. Να δείξετε ότι το άθροισμα
$$A = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{8}}$$
   μπορεί να γραφεί στην μορφή $\kappa\sqrt{2}$, όπου το κ είναι ένας φυσικός αριθμός.

5. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
   (α) $\frac{1}{3 - \sqrt{5}} + \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$
   (β) $\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

6. Να δείξετε ότι:
$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} + \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 4$$

Περίληψη

1. Η **νιοστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού a, όπου ν θετικός ακέραιος, είναι ο μη αρνητικός αριθμός β, ο οποίος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη ν, δίνει τον αριθμό a.
   Συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{a}$ και ισχύει ότι:

$$\sqrt[\nu]{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^{\nu} = a \quad (a \geq 0 \text{ και } \beta \geq 0,\ \nu \in \mathbb{N})$$

Δείκτης Ριζικού **Σύμβολο Ριζικού**

$$\underbrace{\sqrt[\nu]{a}}_{\text{νιοστή ρίζα του } a}$$

Υπόριζος Ποσότητα

2. Από τον πιο πάνω ορισμό, και για $a \geq 0$, έχουμε:
   - $\sqrt[1]{a} = a$
   - $\sqrt[\nu]{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
   - $\sqrt[\nu]{1} = 1$
   - $\sqrt[\nu]{a^{\nu}} = a$

3. **Διερεύνηση της εξίσωσης $x^{\nu} = a$ (ν θετικός ακέραιος)**

$a > 0$	Αν $\nu = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{N}$ (ν περιττός), τότε: $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$
	Αν $\nu = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{N}$ (ν άρτιος), τότε: $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$ ή $x = -\sqrt[\nu]{a}$
$a < 0$	Αν $\nu = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{N}$ (ν περιττός), τότε: $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{\lvert a \rvert} = -\sqrt[\nu]{-a}$
	Αν $\nu = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{N}$ (ν άρτιος), τότε η εξίσωση $x^{\nu} = a$ είναι αδύνατη.
$a = 0$	$x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = 0$

4. **Ιδιότητες ριζών**
   - $\left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu} = a$, για κάθε $a \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος.
   - $\sqrt[\nu]{a\beta} = \sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, για κάθε $a, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος.
   - $\sqrt[\nu]{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{a}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$, για κάθε $a \geq 0$, $\beta > 0$ και ν θετικός ακέραιος.

5. Μια παράσταση της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος ($\nu > 1$), ονομάζεται **δύναμη με ρητό εκθέτη**.
   Ισχύει ότι:
$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$
6. Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:
$$0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$$
7. Για κάθε φυσικό ν και $a \geq 0$ ισχύει:
$$a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$$
8. Για κάθε φυσικό ν και $a > 0$ ισχύει:
$$a^{-\frac{1}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a}}$$
9. Γενικά, όταν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, ορίζουμε:
$$a^{-\frac{\mu}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}$$
10. Πολλές φορές χρειάζεται να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με παρονομαστή ρητό. Η διαδικασία ονομάζεται **μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό**.
    Γενικά, όταν έχουμε την άρρητη παράσταση $A = a - \beta$, όπου a, β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε πολλαπλασιάζουμε με την άρρητη παράσταση $B = a + \beta$. Έτσι, μέσα από την εφαρμογή της ταυτότητας
$$(a - \beta)(a + \beta) = a^2 - \beta^2$$
    οδηγούμαστε στη ρητή παράσταση $A \cdot B = a^2 - \beta^2$.
    Οι δύο άρρητες παραστάσεις A και B λέγονται **συζυγείς**.
    Παρατήρηση
    - Αν a, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και κ, λ είναι ρητοί πραγματικοί αριθμοί, τότε οι παραστάσεις A και B στον πιο κάτω πίνακα είναι συζυγείς.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \cdot B}$
$\sqrt{a} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{a} - \sqrt{\beta}$	$a - \beta$
$\sqrt{a} + \beta$	$\sqrt{a} - \beta$	$a - \beta^2$
$a + \sqrt{\beta}$	$a - \sqrt{\beta}$	$a^2 - \beta$
$\kappa\sqrt{\beta} + \lambda\sqrt{a}$	$\kappa\sqrt{\beta} - \lambda\sqrt{a}$	$\kappa^2\beta - \lambda^2 a$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{25}$ (β) $\sqrt[3]{8}$ (γ) $\sqrt[4]{625}$ (δ) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

2. Να ερμηνεύσετε λεκτικά τον αριθμό $\sqrt{7}$.

3. Να εξηγήσετε γιατί δεν έχει νόημα το σύμβολο $\sqrt{-9}$.

4. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ (β) $\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$ (γ) $\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[3]{y^2}, \quad y\geq 0$

(δ) $\sqrt{x^5},\ x\geq 0$ (ε) $\sqrt{150}$ (στ) $\sqrt[3]{32}$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{32}-\sqrt{18}\right)$ (β) $\left(3\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{96}\right):\sqrt{150}$

(γ) $\sqrt[3]{5+\sqrt{7+\sqrt[4]{16}}}$ (δ) $\dfrac{16}{\sqrt{5}}+\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

6. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\sqrt{200}-2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+4\sqrt{50}$.

7. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\dfrac{7}{\sqrt{7}}$ (β) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (γ) $\dfrac{6}{3+\sqrt{3}}$ (δ) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

(ε) $\dfrac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (στ) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$ (ζ) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}+1}$, $a\geq 0$ και $a\neq 1$

8. Να υπολογίσετε το x^2, αν $x-4\sqrt{6}=\sqrt{6}$.

9. Αν $A=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ και $B=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $A-B$ (β) A^2-B^2 (γ) A^2+B^2

10. Να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ είναι ρητός, αν γνωρίζετε ότι ο αριθμός a είναι θετικός ρητός.

11. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x} = 9$ (β) $\sqrt[4]{x-1} = 1$

(γ) $\sqrt{4-x^2} - 2 = 0$ (δ) $\sqrt{x+1} = -5$

12. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^4 - 81 = 0$ (β) $2x^3 + 16 = 0$ (γ) $x^3 - 4x = 0$

13. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $4^{\frac{1}{2}}$ (β) $27^{\frac{1}{3}}$ (γ) $256^{\frac{1}{4}}$

(δ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ (ε) $1^{-\frac{1}{2}}$ (στ) $0^{\frac{1}{13}}$

(ζ) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ (η) $\sqrt[3]{\left(\frac{64}{125}\right)^{-2}}$

14. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $4^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ (β) $(81k^8)^{\frac{1}{4}},\ \ k \geq 0$

(γ) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ (δ) $(100x^4)^{\frac{1}{2}},\ x \geq 0$

15. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{\frac{1}{2}} = 2,\ x \geq 0$ (β) $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7},\ x > 0$

(γ) $x^{\frac{2}{3}} = 0,\ x \geq 0$ (δ) $(4x+1)^{\frac{1}{4}} = 1,\ x \geq -\frac{1}{4}$

16. Δίνονται οι αριθμοί $A = \left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6$. Να δείξετε ότι $A - B = 4$.

17. Αν $\sqrt{2^{13} + 2^{13}} = 2^{\kappa}$, τότε να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Λύση Προβλήματος

ΛΕΙΧΗΝΕΣ
Ένα από τα επακόλουθα της υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων, αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά που ονομάζονται λειχήνες.
Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται σε σχήμα περίπου κυκλικό.
Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η διάμετρος (δ) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της.

$$\delta = 7{,}0\sqrt{t-12}, \quad t \geq 12,$$

όπου (δ) η διάμετρος της λειχήνας σε mm και t ο αριθμός των ετών που έχουν περάσει μετά το λιώσιμο των πάγων.

Ερώτηση 1: ΛΕΙΧΗΝΕΣ
Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, να υπολογίσετε τη διάμετρο που θα έχει μια λειχήνα, 16 έτη μετά το λιώσιμο των πάγων. Να γράψετε την απάντησή σας στον χώρο που ακολουθεί.

....

Ερώτηση 2: ΛΕΙΧΗΝΕΣ
Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο μιας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος και είδε ότι ήταν $35\ \mathrm{mm}$.
Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος;
Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

....

Ερώτηση 3: ΛΕΙΧΗΝΕΣ
Σε πόσα χρόνια από σήμερα, μια λειχήνα που τώρα έχει διάμετρο $35\ \mathrm{mm}$ θα έχει διπλασιάσει τη διάμετρό της; Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

....

PISA 2000

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x+10}=2-x$ (β) $\sqrt{3x}-x+6=0$

(γ) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}=0$ (δ) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt{x+1}$

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρανομαστή:

$$A=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}\quad,\quad B=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}}$$

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2-\sqrt{2}$ είναι η κυβική ρίζα του αριθμού $20-14\sqrt{2}$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{1}{6}}=0$ (β) $x^{\frac{4}{5}}-9x^{\frac{2}{5}}=0$ (γ) $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{6}}=0$

5. Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu+1}}=\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}$$

Με τη βοήθεια του πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9$$

6. Αν $a,\beta>0$ και $a\neq\beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a\sqrt{a}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{a}-\sqrt{\beta}}=a+\beta+\sqrt{a\beta}$$

7. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι παραστάσεις, να υπολογίσετε τις τιμές των x,y,z όταν:

$$\sqrt{2x+4y+5z}+\sqrt{y-3}+\sqrt{z-2}=0$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 02

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

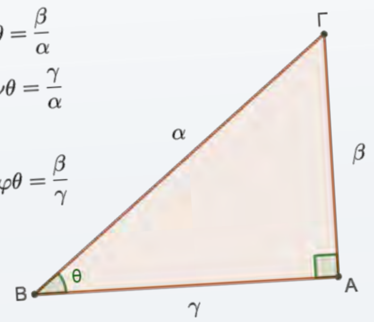
Έχουμε μάθει …

- Να ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας και να χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στη λύση ασκήσεων και πραγματικών προβλημάτων.

$$\eta\mu\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta}{\gamma}$$

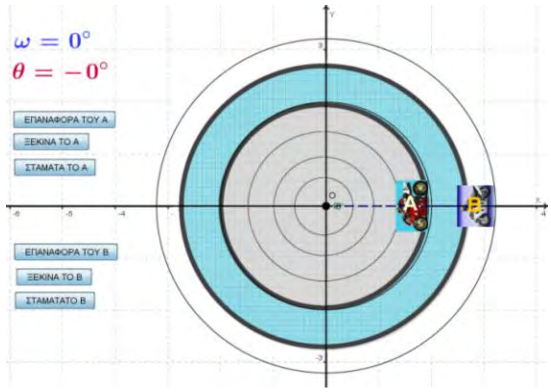


- Να επιλύουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, δηλαδή να υπολογίζουμε τα κύρια στοιχεία του, όταν δίνονται επαρκή στοιχεία του.

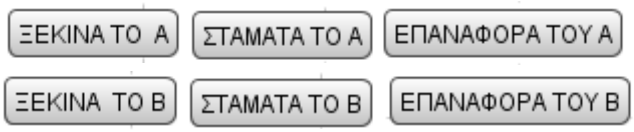
2.1 ΓΩΝΙΑ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΘΕΣΗ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En02_Motorcycles.ggb»*.

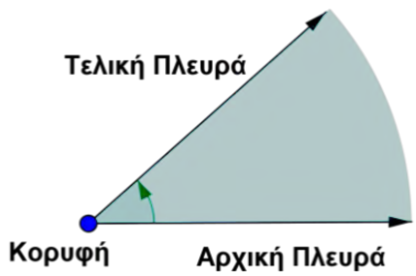


Οι μοτοσικλετιστές A και B βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία στον θετικό ημιάξονα Ox και κινούνται κυκλικά γύρω από την αρχή των αξόνων O.
Τα κουμπιά ξεκινούν και σταματούν την κίνηση των μοτοσικλετιστών.



- Να επιλέξετε τα πιο πάνω κουμπιά διαδοχικά και να περιγράψετε τη θέση του κάθε μοτοσυκλετιστή και τον τρόπο που κινείται.

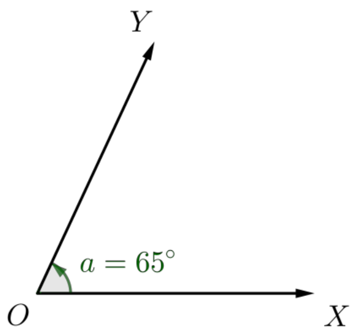
Στην Τριγωνομετρία, οι γωνίες στο επίπεδο δημιουργούνται από την περιστροφή μίας ημιευθείας γύρω από την κορυφή της, ξεκινώντας από την αρχική της θέση. Η αρχική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **αρχική πλευρά** της γωνίας και η τελική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **τελική πλευρά**. Οι γωνίες αυτές μπορούν να αναφέρονται και ως **τριγωνομετρικές γωνίες.**

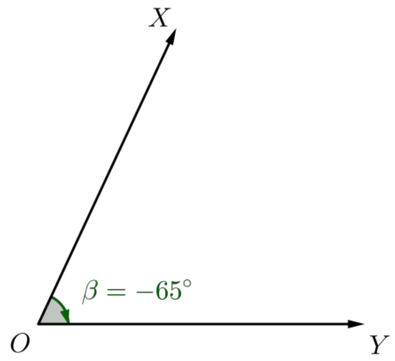


Ανάλογα με τη φορά που κινείται η αρχική πλευρά προς την τελική πλευρά η γωνία διακρίνεται σε θετική φορά (αριστερόστροφη) ή γωνία με αρνητική φορά (δεξιόστροφη). Γωνία με καθορισμένη φορά λέγεται **προσανατολισμένη**.

Ορισμός – Αλγεβρική τιμή τριγωνομετρικής γωνίας
Αλγεβρική τιμή μιας τριγωνομετρικής γωνίας είναι ο αριθμός που προκύπτει, όταν μετρήσουμε τη γωνία με μια μονάδα μέτρησης (π.χ μοίρα) και βάλουμε στο εξαγόμενο πρόσημο θετικό ή αρνητικό, αν η φορά διαγραφής της γωνίας είναι η θετική ή η αρνητική, αντίστοιχα.

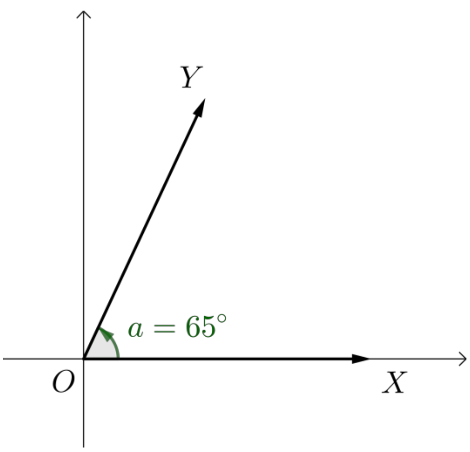
Για παράδειγμα, η αλγεβρική τιμή της γωνίας a είναι $+65^{\circ}$ και η αλγεβρική τιμή της γωνίας β είναι -65°.

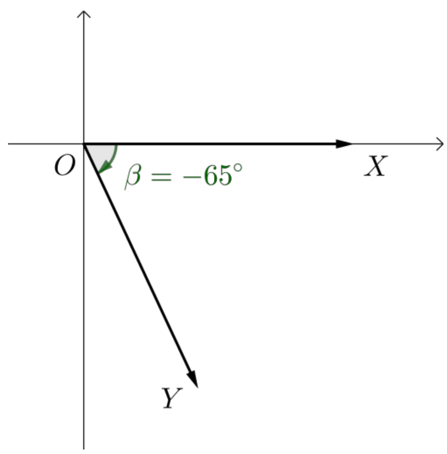


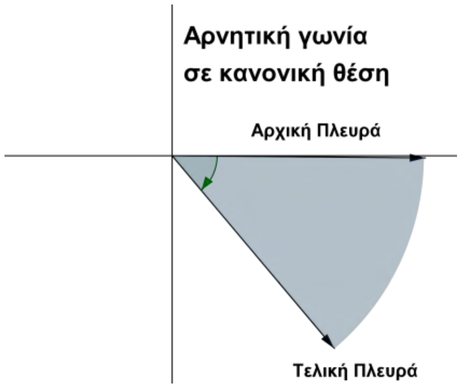


Ορισμός
Μία τριγωνομετρική γωνία είναι σε **κανονική θέση**, όταν η κορυφή της βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του ορθοκανονικού συστήματος και η αρχική πλευρά της συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων.

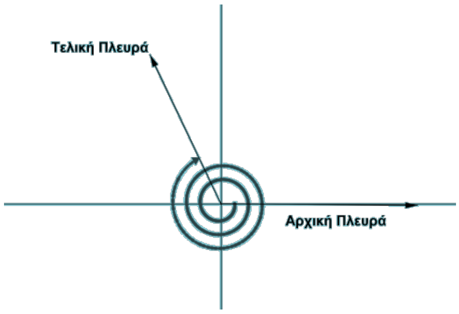
Για παράδειγμα, στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι γωνίες a και β, οι οποίες είναι τοποθετημένες σε κανονική θέση και έχουν αλγεβρική τιμή $+65^{\circ}$ και -65° αντίστοιχα.

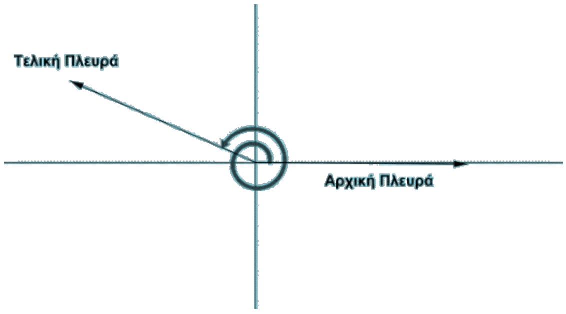






Γωνίες μεγαλύτερες μιας πλήρους περιστροφής



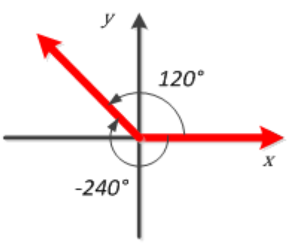


Παράδειγμα 1

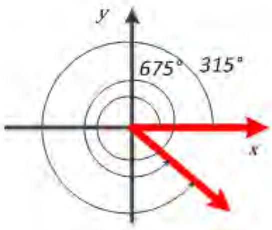
Να γράψετε δύο ζεύγη γωνιών οι οποίες είναι στην κανονική τους θέση και έχουν την ίδια τελική πλευρά. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η γωνία $120°$ έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $-240°$, αφού $-240° = -360° + 120°$.



Η γωνία $315°$ έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $675°$, αφού $675° = 360° + 315°$.



Παράδειγμα 2

Δύο θετικές γωνίες $x, y < 720°$ βρίσκονται σε κανονική θέση και έχουν την ίδια τελική πλευρά. Αν το μέτρο της μίας είναι τριπλάσιο από το μέτρο της άλλης, να βρείτε τις γωνίες x και y.

Λύση

Το μέτρο της μίας γωνίας είναι τριπλάσιο από το μέτρο της άλλης. Άρα:

$$x = 3y$$

Οι δύο θετικές γωνίες έχουν την ίδια τελική πλευρά. Αφού $x, y < 720°$, τότε:

$$x = 360° + y$$

Έτσι, από τις πιο πάνω σχέσεις, παίρνουμε ότι:

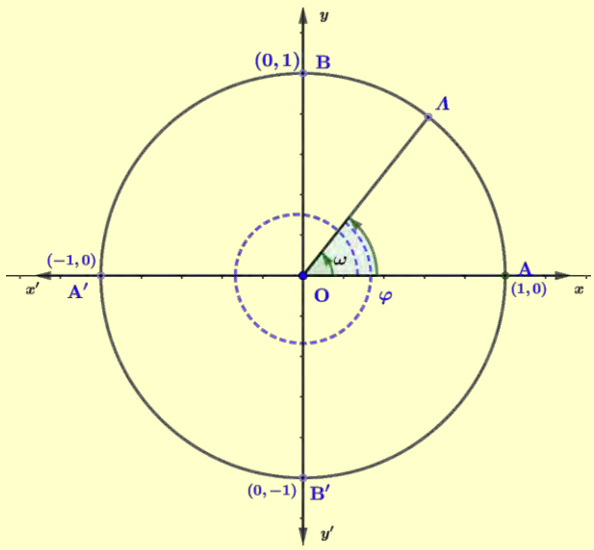
$$3y = 360° + y \Rightarrow 2y = 360° \Rightarrow y = 180°,\ \ x = 540°$$

Δραστηριότητες

1. Να κατασκευάσετε τις πιο κάτω γωνίες σε κανονική θέση:
   (α) $100°$ (β) $-45°$ (γ) $450°$ (δ) $-210°$

2. Να γράψετε δύο γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά με τις πιο κάτω γωνίες:
   (α) $135°$ (β) $-20°$ (γ) $240°$

3. Στο πιο κάτω σχήμα, φαίνονται οι γωνίες ω και φ.

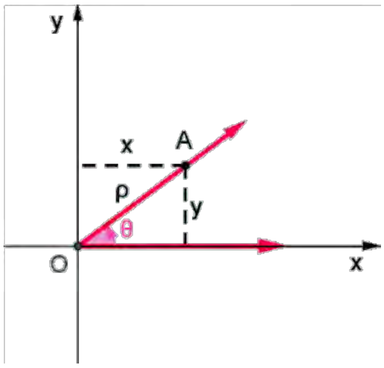


   (α) Αν $A\hat{O}\Lambda = \omega$, να εκφράσετε τη γωνία φ συναρτήσει της γωνίας ω.
   (β) Η γωνία $720° + \omega$ είναι σε κανονική θέση. Να τοποθετήσετε την αρχική και την τελική της πλευρά.
   (γ) Η γωνία $-360° + \omega$ είναι σε κανονική θέση. Να τοποθετήσετε την αρχική και την τελική της πλευρά.

4. Δύο θετικές γωνίες $\mathrm{x}, \mathrm{y} < 720°$ βρίσκονται σε κανονική θέση και έχουν την ίδια τελική πλευρά. Αν το μέτρο της μίας είναι τετραπλάσιο από το μέτρο της άλλης, να βρείτε τις γωνίες x και y.

2.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΘΕΣΗ

Στο πιο κάτω σχήμα, η γωνία θ είναι σε κανονική θέση και το σημείο $A(x, y)$ (το οποίο διαφέρει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$) βρίσκεται πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας.



Η απόσταση του σημείου $A(x, y)$ από την αρχή των αξόνων είναι ίση με ρ, όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho > 0$. Από το σχήμα, με τη βοήθεια του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθογώνιο τρίγωνο, παρατηρούμε ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας θ είναι:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho},\ \ \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho},\ \ \varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}$$

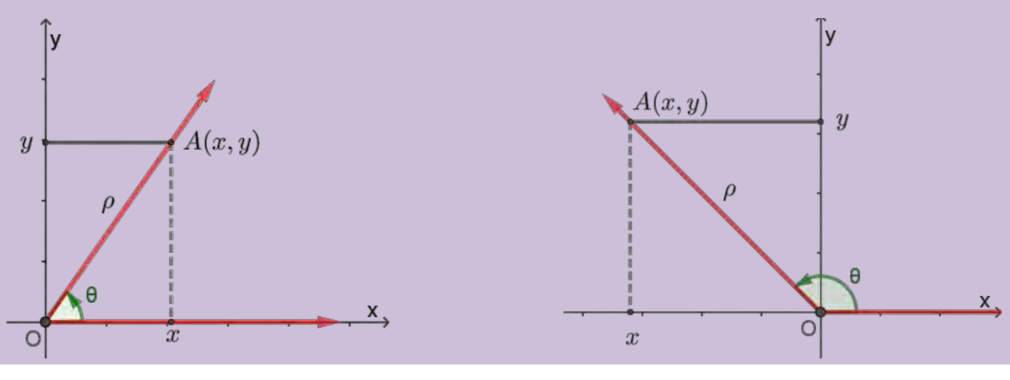
Γενικεύοντας τα πιο πάνω, ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς κάθε γωνίας θ, η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση.

Ορισμός

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας θ, η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση και $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της, ορίζονται ως

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho},\ \ \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho},\ \ \varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}\ \ \ (x \neq 0),$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho > 0$.



Συνεφαπτομένη της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\sigma\varphi\theta$. Δηλαδή:

$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{y},\ \ y \neq 0$$

Παρατηρήσεις

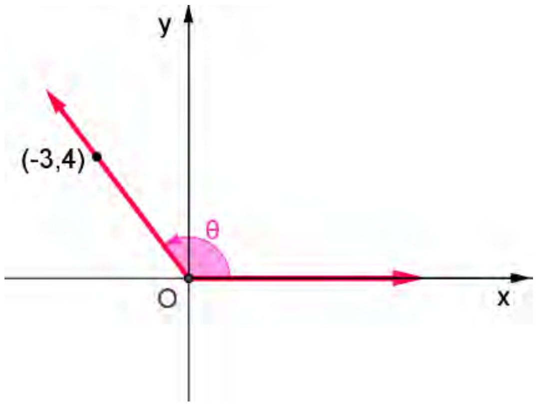
- Με βάση τα πιο πάνω, έχουμε ότι:

$$\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

  Δηλαδή, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\varepsilon\varphi\theta$ και $\sigma\varphi\theta$, όταν αυτοί ορίζονται, είναι αντίστροφοι.
- Υπάρχουν άπειρες γωνίες σε κανονική θέση, οι οποίες έχουν την ίδια τελική πλευρά. Επομένως, όλες αυτές οι γωνίες έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

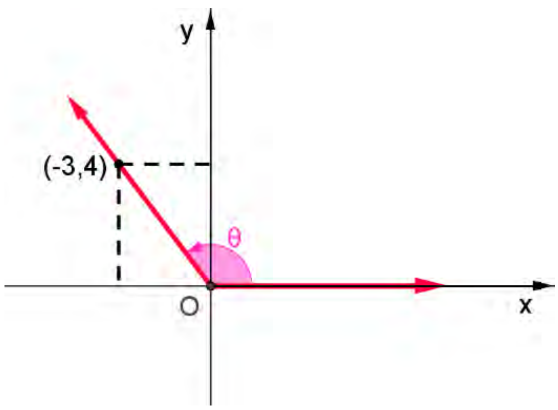
Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.



Λύση

Έχουμε το σημείο $(-3, 4)$ με συντεταγμένες $x = -3$ και $y = 4$.



Για να υπολογίσουμε το $\eta\mu\theta$ και το $\sigma\upsilon\nu\theta$, υπολογίζουμε την απόσταση ρ του σημείου από την αρχή των αξόνων. Έχουμε:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ μονάδες}$$

Από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, έχουμε ότι:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{4}{5}\,, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}\,, \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}\,, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

Παράδειγμα 2

(α) Να αναφέρετε το μέτρο δύο γωνιών, που βρίσκονται σε κανονική θέση και η τελική πλευρά να διέρχεται από τα σημεία:

i. $A(2,0)$ ii. $B(0,3)$ iii. $\Gamma(-5,0)$ iv. $\Delta(0,-1)$

(β) Να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των πιο πάνω γωνιών.

Λύση

(α) Για μία γωνιά που βρίσκεται σε κανονική θέση:

i. Για τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, έχουμε:

$$\theta_1 = 0^\circ,\ \ \theta_2 = 360^\circ$$

ii. Για τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $B(0,3)$, έχουμε:

$$\theta_1 = 90^\circ,\ \ \theta_2 = -270^\circ$$

iii. Για τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-5,0)$, έχουμε:

$$\theta_1 = 180^\circ,\ \ \theta_2 = 540^\circ$$

iv. Για τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $\Delta(0,-1)$, έχουμε:

$$\theta_1 = 270^\circ,\ \ \theta_2 = -90^\circ$$

(β) Σε κάθε περίπτωση, οι γωνίες θ_1 και θ_2 έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Έτσι, έχουμε:

i. Για τελική πλευρά γωνίας που διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, έχουμε:

$$\eta\mu\theta_1 = 0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = 1, \quad \varepsilon\varphi\theta_1 = 0, \quad \sigma\varphi\theta_1 \text{ (δεν ορίζεται)}$$

ii. Για τελική πλευρά γωνίας που διέρχεται από το σημείο $B(0,3)$, έχουμε:

$$\eta\mu\theta_1 = 1, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = 0, \quad \varepsilon\varphi\theta_1 \text{ (δεν ορίζεται)}, \quad \sigma\varphi\theta_1 = 0$$

iii. Για τελική πλευρά γωνίας που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-5,0)$, έχουμε:

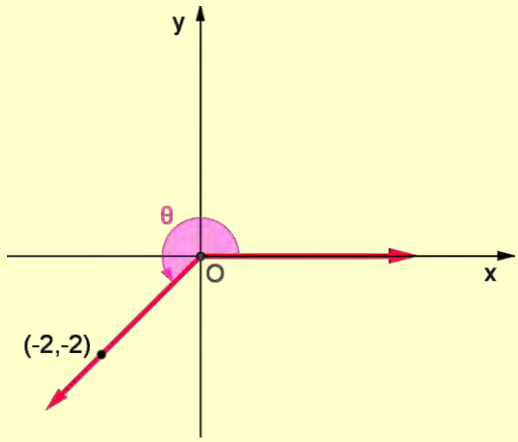
$$\eta\mu\theta_1 = 0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = -1, \quad \varepsilon\varphi\theta_1 = 0, \quad \sigma\varphi\theta_1 \text{ (δεν ορίζεται)}$$

iv. Για τελική πλευρά γωνίας που διέρχεται από το σημείο $\Delta(0,-1)$, έχουμε:

$$\eta\mu\theta_1 = -1, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = 0, \quad \varepsilon\varphi\theta_1 \text{ (δεν ορίζεται)}, \quad \sigma\varphi\theta_1 = 0$$

Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω σχήμα, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.



2. Μια γωνία θ σε κανονική θέση έχει τελική πλευρά, η οποία διέρχεται από το σημείο A. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ, όταν το σημείο A έχει συντεταγμένες:
   (α) $A(1, -1)$
   (β) $A(-\sqrt{3}, 1)$
   (γ) $A(-10, 0)$

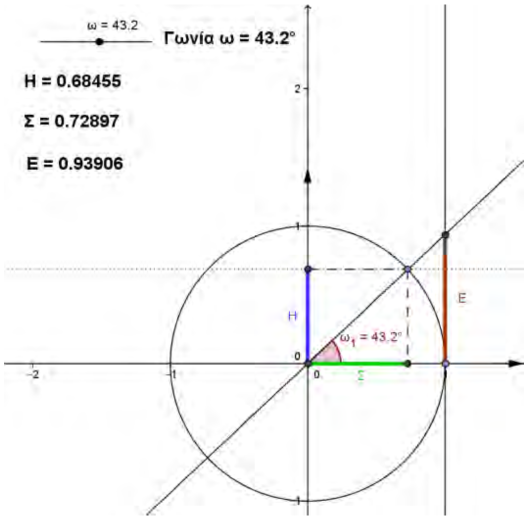
3. Να αναφέρετε δύο διαφορετικά σημεία με ακέραιες συντεταγμένες, τα οποία να βρίσκονται στην τελική πλευρά μιας γωνίας σε κανονική θέση με μέτρο 135°. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής.

4. Να κατασκευάσετε γωνία με μέτρο $45°$, η οποία να βρίσκεται σε κανονική θέση. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κοινού σημείου της τελικής πλευράς της γωνίας και του κύκλου με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα ίση με μία μονάδα.

2.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En02_TrigKyklos.ggb»*.



Δίνεται κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία ακέραια μονάδα.

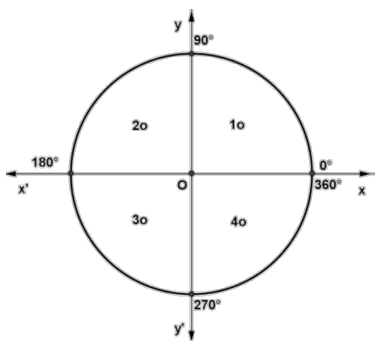
- Να επιλέξετε τον δρομέα «ω», για να δώσετε διάφορες τιμές στη γωνία ω.
- Να παρατηρήσετε τις τιμές των «H, Σ, E» και να τις συνδέσετε με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi\omega$.

Ορισμός

Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία μονάδα.

Παρατηρήσεις

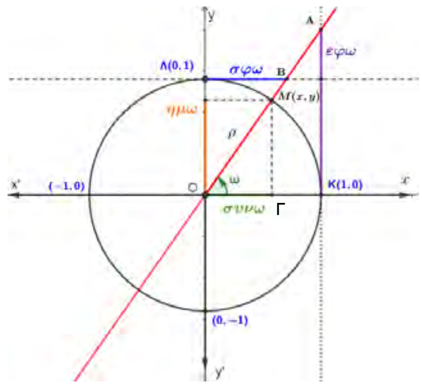
- Οι άξονες xx', yy' χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα τεταρτημόρια, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



- Τα σημεία, τα οποία βρίσκονται στους άξονες, δεν ανήκουν σε κάποιο τεταρτημόριο. Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x,y)$ $(OM=\rho=1)$, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $OM\Gamma$ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{x}{1}=x\,,\quad \eta\mu\omega=\frac{y}{1}=y$$

Στην Τριγωνομετρία ο άξονας των τετμημένων $x'x$ ονομάζεται και **άξονας των συνημιτόνων**, ενώ ο άξονας των τεταγμένων $y'y$ ονομάζεται και **άξονας των ημιτόνων**.



- Από τα πιο πάνω, προκύπτει ότι:

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί συνω και ημω παίρνουν τιμές μόνο στο διάστημα $[-1,1]$. Δηλαδή:

$$-1\le\sigma\upsilon\nu\omega\le 1,\quad -1\le\eta\mu\omega\le 1$$

Για παράδειγμα, ***δεν*** *μπορεί να υπάρξει γωνία ω, τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{3}{2}\ \text{ ή }\ \eta\mu\omega=-2,$$

αφού οι τιμές $\frac{3}{2}$ *και* -2 *βρίσκονται εκτός του διαστήματος* $[-1,1]$.

- Η προέκταση της τελικής πλευράς μιας γωνίας ω, η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x,y)$, τέμνει και την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $K(1,0)$ στο σημείο A. Από το ορθογώνιο τρίγωνο KOA, έχουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{KA}{KO}=\frac{KA}{1}=KA$$

Η εφαπτομένη του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο $K(1,0)$ ονομάζεται **άξονας των εφαπτομένων**.

- Η προέκταση της τελικής πλευράς της γωνίας ω, η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x,y)$, τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $\Lambda(0,1)$ στο σημείο B. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΛOB, έχουμε ότι:

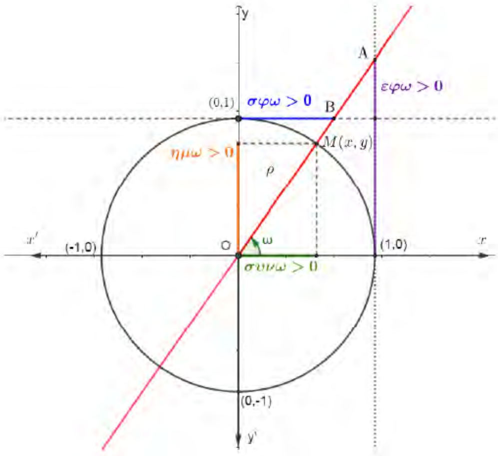
$$\sigma\varphi\omega=\frac{\Lambda B}{\Lambda O}=\frac{\Lambda B}{1}=\Lambda B$$

Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $\Lambda(0,1)$ ονομάζεται **άξονας των συνεφαπτομένων**.

Το πρόσημο του ημιτόνου και συνημιτόνου μπορεί να βρεθεί με την προβολή της τελικής πλευράς της γωνίας πάνω στους άξονες των ημιτόνων και συνημιτόνων, αντίστοιχα, και το πρόσημο της εφαπτομένης και συνεφαπτομένης με την τομή της προέκτασης της τελικής πλευράς της γωνίας με τους άξονες των εφαπτομένων και συνεφαπτομένων, αντίστοιχα.

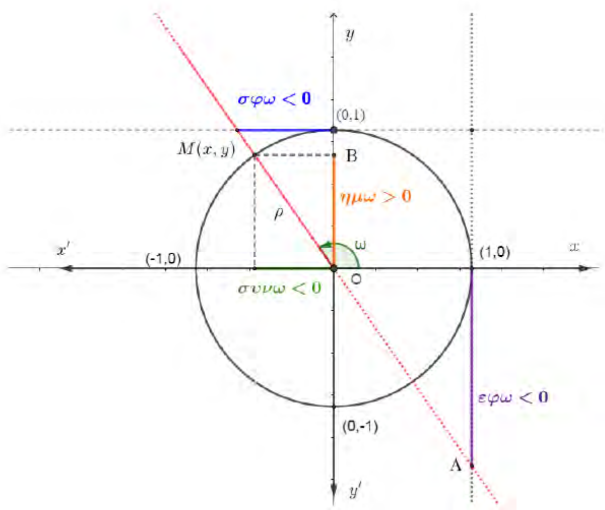
- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο 1° τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x > 0$ και $y > 0$.
  Συνεπώς:

$$\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \quad \varepsilon\varphi\omega > 0, \quad \sigma\varphi\omega > 0$$



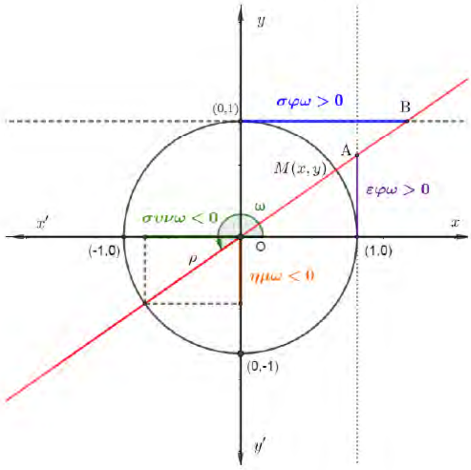
- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο 2° τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x < 0$ και $y > 0$.
  Συνεπώς:

$$\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \quad \varepsilon\varphi\omega < 0, \quad \sigma\varphi\omega < 0$$



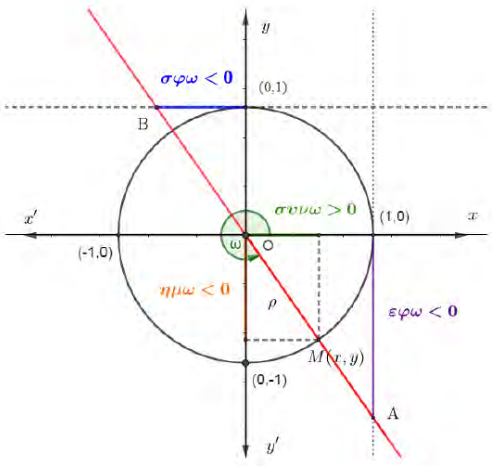
- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο 3° τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x,y)$ έχει $x<0$ και $y<0$.
  Συνεπώς:

$$\eta\mu\omega<0,\quad \sigma\upsilon\nu\omega<0,\quad \varepsilon\varphi\omega>0,\quad \sigma\varphi\omega>0$$



- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο 4° τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x,y)$ έχει $x>0$ και $y<0$.
  Συνεπώς:

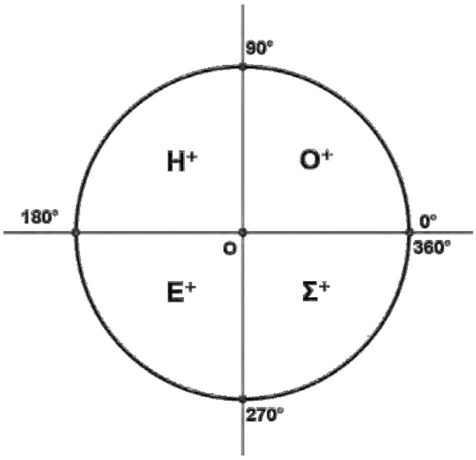
$$\eta\mu\omega<0,\quad \sigma\upsilon\nu\omega>0,\quad \varepsilon\varphi\omega<0$$



Όλα τα πιο πάνω συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα.

	1° τεταρτημόριο	2° τεταρτημόριο	3° τεταρτημόριο	4° τεταρτημόριο
ημω	+	+	−	−
συνω	+	−	−	+
εφω	+	−	+	−

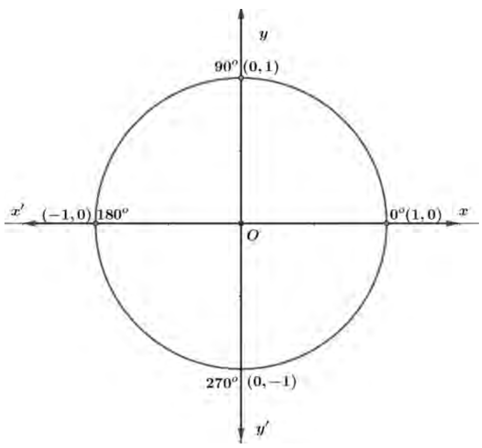
- Ο τριγωνομετρικός αριθμός $σφω$ έχει το ίδιο πρόσημο με τον τριγωνομετρικό αριθμό $εφω$, αφού:
$$σφω = \frac{1}{εφω}$$
- Με βάση τα πιο πάνω, η εύρεση του προσήμου των τριγωνομετρικών αριθμών συνοψίζεται στον πιο κάτω μνημονικό κανόνα όπου:
   - Στο 1° τεταρτημόριο όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί.
   - Στο 2° τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το ημίτονο.
   - Στο 3° τεταρτημόριο θετική είναι μόνο η εφαπτομένη.
   - Στο 4° τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το συνημίτονο.



Σημείωση
Ο τριγωνομετρικός αριθμός συνεφαπτομένη έχει το ίδιο πρόσημο με τον τριγωνομετρικό αριθμό εφαπτομένη.

Παράδειγμα 1
Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο των $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$.

Λύση



- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $0°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(1, 0)$. Άρα:
$ημ0° = 0$ (τεταγμένη του $(1, 0)$)
$συν0° = 1$ (τετμημένη του $(1, 0)$)
- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $90°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(0, 1)$. Άρα:
$ημ90° = 1$ (τεταγμένη του $(0, 1)$)
$συν90° = 0$ (τετμημένη του $(0, 1)$)

- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $180°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(-1, 0)$. Άρα:
  $ημ180° = 0$ (τεταγμένη του $(-1, 0)$)

  $συν180° = -1$ (τετμημένη του $(-1, 0)$)
- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $270°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(0, -1)$. Άρα:
  $ημ270° = -1$ (τεταγμένη του $(0, -1)$)
  $συν270° = 0$ (τετμημένη του $(0, -1)$)
- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $360°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(1, 0)$. Άρα:
  $ημ360° = 0$ (τεταγμένη του $(1,0)$)
  $συν360° = 1$ (τετμημένη του $(1,0)$)

	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$ημ$	0	1	0	-1	0
$συν$	1	0	-1	0	1

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας με μέτρο $117°$.

Λύση

Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $117°$ είναι στο $2^{ο}$ τεταρτημόριο. Άρα:

$$ημ117° > 0,\ \ συν117° < 0,\ \ εφ117° < 0,\ \ σφ117° < 0$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται το σημείο A με συντεταγμένες $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(β) Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο A, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $ημ\omega, συν\omega, εφ\omega$ και $σφ\omega$.

Λύση

(α) Για να ανήκει το σημείο $A\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, πρέπει να ισχύει $\rho = (OA) = 1$. Έχουμε:

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Συνεπώς, το σημείο A ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(β) Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $ημω$ και $συνω$ ορίζονται ως η τεταγμένη και η τετμημένη του σημείου A, αντίστοιχα. Συνεπώς:

$$ημω = y_A = \tfrac{4}{5} \text{ και } συνω = x_A = -\tfrac{3}{5}$$

Ο τριγωνομετρικός αριθμός $εφω$ ορίζεται ως το πηλίκο της τεταγμένης του σημείου A ως προς την τετμημένη του. Συνεπώς:

$$εφω = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

Ο τριγωνομετρικός αριθμός $σφω$ ορίζεται ως το πηλίκο της τετμημένης του σημείου A ως προς την τεταγμένη του. Συνεπώς:

$$σφω = \frac{x_A}{y_A} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Παράδειγμα 4

Η τελική πλευρά μιας γωνίας θ που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο A με συντεταγμένες (a, β), με το A να ανήκει στο 2^{ο} τεταρτημόριο. Να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $ημ\theta, συν\theta, εφ\theta$ και να αναφέρετε το πρόσημό τους σε κάθε περίπτωση.

Λύση

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $ημ\theta$ και $συν\theta$ ορίζονται ως η τεταγμένη και η τετμημένη του σημείου A, αντίστοιχα. Συνεπώς:

$$ημ\theta = \beta \text{ και } συν\theta = a$$

Το σημείο A βρίσκεται στο 2^{ο} τεταρτημόριο. Άρα:

$$ημ\theta = \beta > 0 \text{ και } συν\theta = a < 0$$

Ο τριγωνομετρικός αριθμός $εφ\theta$ ορίζεται ως το πηλίκο της τεταγμένης του σημείου A ως προς την τετμημένη του. Συνεπώς:

$$εφ\theta = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\beta}{a} < 0$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Αν $ημθ$ και $συνθ$ είναι αρνητικοί αριθμοί, τότε και η $εφθ$ είναι αρνητικός αριθμός.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $θ = 200^{\circ}$, τότε $ημθ < 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Δεν υπάρχει γωνία $θ$, για την οποία να ισχύει $εφθ < 0$ και $σφθ > 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$συν0^{\circ} > 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν $εφθ > 0$ και $ημθ < 0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας $θ$ είναι στο 2^{ο} τεταρτημόριο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η τελική πλευρά της γωνίας $-200°$ σε κανονική θέση είναι στο 2^{ο} τεταρτημόριο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Ο τριγωνομετρικός αριθμός $σφ(-210°)$ είναι θετικός.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Το ημίτονο μιας γωνίας $θ$ δεν μπορεί να είναι ίσο με:
   (α) $\frac{1}{2}$ (β) $-\frac{3}{2}$ (γ) $-\frac{1}{2}$ (δ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών με μέτρο $30°,\ 236°, -52°,\ 370°, -150°$.

4. Η τελική πλευρά μιας γωνίας $ω$ που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο A με συντεταγμένες $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $ημω, συνω, εφω$ και $σφω$.

5. Η τελική πλευρά μιας γωνίας $ω$ που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο A με συντεταγμένες $(κ, λ)$. Να αποδείξετε ότι:

$$εφω + σφω = \frac{κ^2 + λ^2}{κλ}$$

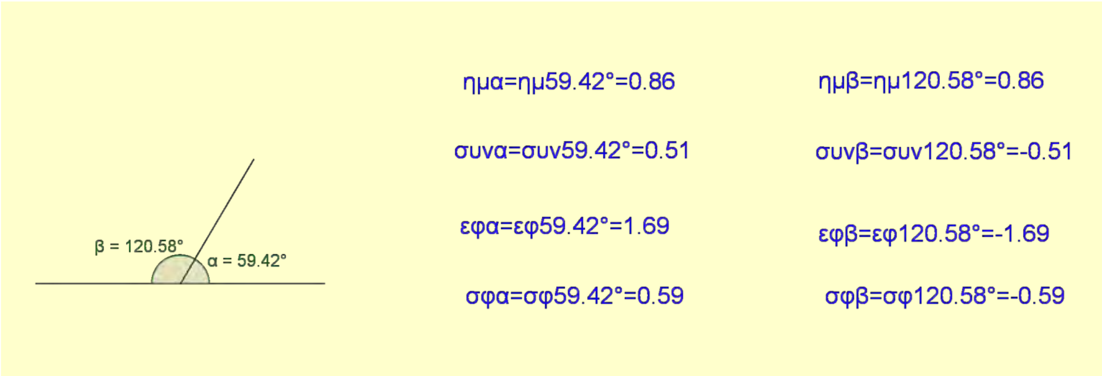
6. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας $θ$, αν:
   (α) $ημθ > 0$ και $συνθ < 0$
   (β) $εφθ < 0$ και $συνθ < 0$
   (γ) $σφθ > 0$ και $ημθ < 0$

7. Αν $180° < x < 270°$, να δείξετε ότι $εφx > συνx$.

2.4 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΓΩΝΙΑΣ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Διερεύνηση 1

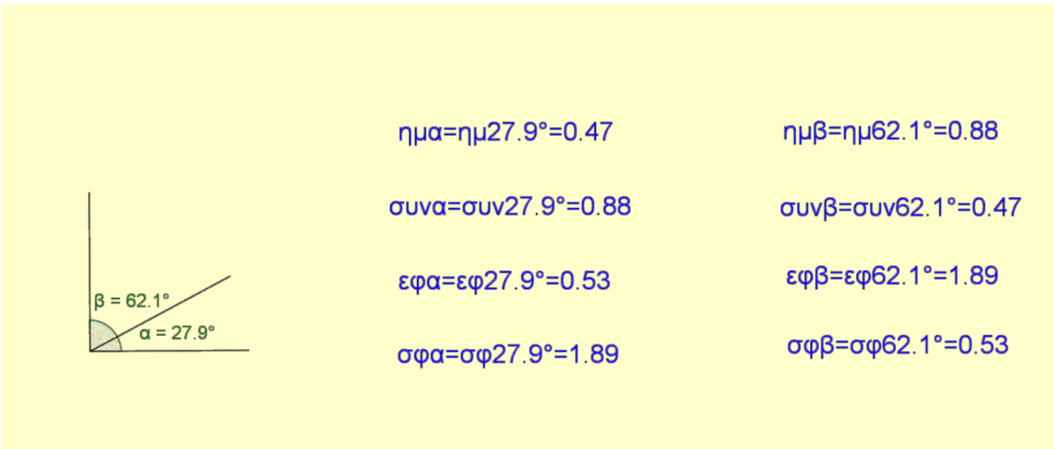
Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En02_Parapliromatikes.ggb»*.



- Να μετακινείτε τον δρομέα, ώστε να αλλάζει η γωνία ω. Τι παρατηρείτε;
- Ποια σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δύο παραπληρωματικών γωνιών;

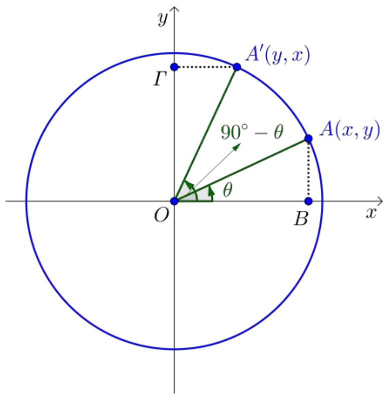
Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En02_Simpliromatikes.ggb»*.



- Να μετακινείτε τον δρομέα, ώστε να αλλάζει τη γωνία ω. Τι παρατηρείτε;
- Ποια σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δύο συμπληρωματικών γωνιών;

Αν έχουμε δύο συμπληρωματικές γωνίες, τότε μπορούμε να τις αναπαραστήσουμε ως δύο οξείες γωνίες στον τριγωνομετρικό κύκλο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα AOB και $A'O\Gamma$ είναι ίσα, αφού $OA = OA' = 1$ και $A\hat{O}B = A'\hat{O}\Gamma = \theta$. Άρα, έχουμε ότι $A(x,y)$, $A'(y,x)$ και:

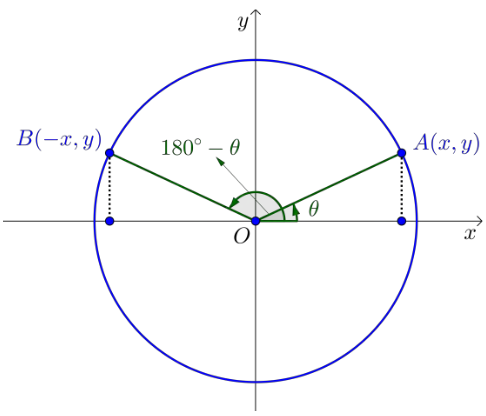
$$\eta\mu(90^\circ-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta = x$$
$$\sigma\upsilon\nu(90^\circ-\theta) = \eta\mu\theta = y$$

Γενικά, για μια οξεία γωνία θ, η συμπληρωματική της είναι $90^\circ-\theta$ και ισχύουν:

$$\eta\mu\left(90^\circ-\theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta$$
$$\sigma\upsilon\nu\left(90^\circ-\theta\right) = \eta\mu\theta$$
$$\varepsilon\varphi\left(90^\circ-\theta\right) = \sigma\varphi\theta$$
$$\sigma\varphi\left(90^\circ-\theta\right) = \varepsilon\varphi\theta$$

Για παράδειγμα, ισχύει $\eta\mu 20^\circ = \sigma\upsilon\nu 70^\circ$*, αφού οι γωνίες των* 70° *και* 20° *είναι συμπληρωματικές.*

Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δυο παραπληρωματικών γωνιών θ και $180^\circ-\theta$, παρατηρούμε ότι στον τριγωνομετρικό κύκλο η τελική πλευρά της θ αντιστοιχεί στο σημείο $A(x,y)$ και η τελική πλευρά της παραπληρωματικής της γωνίας των $180^\circ-\theta$ αντιστοιχεί στο σημείο $B(-x,y)$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Δηλαδή, έχουμε $y_A = y_B$ και $x_B = -x_A$. Η σχέση μεταξύ των τεταγμένων και των τετμημένων των δύο σημείων A και B μας δίνει ότι:

Γενικά, για μια οξεία γωνία θ, η παραπληρωματική της είναι $180° - \theta$ και ισχύουν:

$$\text{ημ}(180° - \theta) = \text{ημ}\theta$$
$$\text{συν}(180° - \theta) = -\text{συν}\theta$$
$$\text{εφ}(180° - \theta) = -\text{εφ}\theta$$
$$\text{σφ}(180° - \theta) = -\text{σφ}\theta$$

Παράδειγμα 1

Να δείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι $\text{ημ}40° = \text{ημ}140°$.

Λύση

Οι γωνίες $40°$ και $140°$ είναι παραπληρωματικές, αφού $40° + 140° = 180°$. Άρα, ισχύει ότι $\text{ημ}40° = \text{ημ}140°$.

Παράδειγμα 2

Να μετατρέψετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς σε τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας:

(α) $\text{ημ}170°$ (β) $\text{συν}100°$ (γ) $\text{σφ}125°$

Λύση

(α) Η παραπληρωματική γωνία των $170°$ είναι $180° - 170° = 10°$.
Άρα, $\text{ημ}170° = \text{ημ}10°$.

(β) Η παραπληρωματική γωνία των $100°$ είναι $180° - 100° = 80°$.
Άρα, $\text{συν}100° = -\text{συν}80°$.

(γ) Η παραπληρωματική γωνία των $125°$ είναι $180° - 125° = 55°$.
Άρα, $\text{σφ}125° = -\text{σφ}55°$.

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι $\text{εφ}(180° - \omega) = -\text{εφ}\omega$.

Λύση

1ος τρόπος

Οι γωνίες $(180° - \omega)$ και ω είναι παραπληρωματικές, γιατί $(180° - \omega) + \omega = 180°$.
Άρα, ισχύει ότι $\text{εφ}(180° - \omega) = -\text{εφ}\omega$.

2ος τρόπος

$$\text{εφ}(180° - \omega) = \frac{\text{ημ}(180 - \omega)}{\text{συν}(180 - \omega)} = \frac{\text{ημ}\omega}{-\text{συν}\omega} = -\frac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega} = -\text{εφ}\omega$$

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση

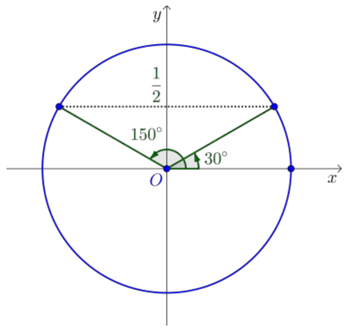
$$ημx = \frac{1}{2},$$

αν $0° \leq x \leq 180°$.

Λύση

Με τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής βρίσκουμε ότι $x = 30°$. Γνωρίζουμε ότι αν δύο γωνίες α και β είναι παραπληρωματικές, τότε $ημ\alpha = ημ\beta$. Η παραπληρωματική γωνία των $30°$ είναι $180° - 30° = 150°$.

Επομένως, οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης είναι $x = 30°$ και $x = 150°$.



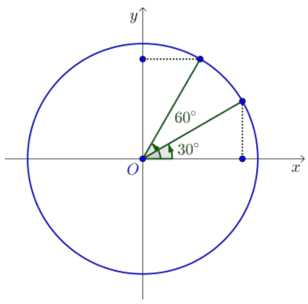
Παράδειγμα 5

Να αποδείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι $ημ30° = συν60°$.

Λύση

Οι γωνίες $30°$ και $60°$ είναι συμπληρωματικές, γιατί $30° + 60° = 90°$.

Άρα, ισχύει ότι $ημ30° = συν60°$.



Παράδειγμα 6

Να αποδείξετε ότι $εφ(90° - \omega) = σφ\omega$.

Λύση

Οι γωνίες $(90° - \omega)$ και ω είναι συμπληρωματικές, γιατί $(90° - \omega) + \omega = 90°$.

Άρα, ισχύει ότι $εφ(90° - \omega) = σφ\omega$.

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισότητες:
(α) $\eta\mu 110^{\circ} = \eta\mu \ldots$ (β) $\sigma\upsilon\nu 100^{\circ} = \ldots 80^{\circ}$ (γ) $\eta\mu 85^{\circ} = \sigma\upsilon\nu \ldots$

2. Να αποδείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, τις παρακάτω ισότητες:
(α) $\eta\mu 155° = \eta\mu 25°$ (β) $\varepsilon\varphi 100° = -\varepsilon\varphi 80°$ (γ) $\sigma\upsilon\nu 45° = \eta\mu 45°$

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης A με ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη B.

A		B	
		1.	$\eta\mu 40°$
α.	$\eta\mu 140°$	2.	$\sigma\upsilon\nu 40°$
		3.	$\varepsilon\varphi 40°$
β.	$\sigma\upsilon\nu 140°$	4.	$-\eta\mu 40°$
		5.	$-\sigma\upsilon\nu 40°$
γ.	$\varepsilon\varphi 140°$	6.	$-\varepsilon\varphi 40°$

α.	β.	γ.

4. Να γράψετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς ως τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας:
(α) $\eta\mu 175°$ (β) $\sigma\upsilon\nu 110°$ (γ) $\varepsilon\varphi 123°$ (δ) $\sigma\varphi 95°$

5. Αν για τη γωνία x ισχύει $0° \leq x \leq 180°$, να συμπληρώσετε τις πιο κάτω προτάσεις:
(α) Αν $\eta\mu x = \eta\mu 60°$, τότε $x =$................
(β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 20°$, τότε $x =$................
(γ) Αν $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi 30°$, τότε $x =$...............

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις στο διάστημα $0° \leq x \leq 180°$.
(α) $\eta\mu x = \eta\mu 50°$ (β) $2\eta\mu x = \sqrt{2}$ (γ) $\eta\mu x = 3$

7. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$.

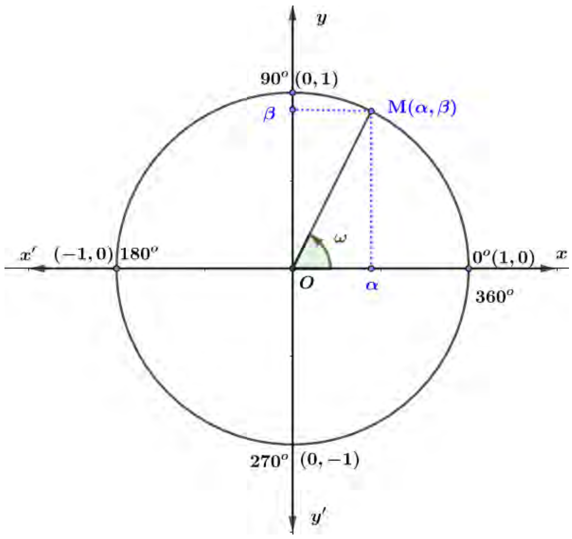
8. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu(90° - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$.

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $A = 30°$ και $\eta\mu B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών B και Γ του τριγώνου.

2.5 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Διερεύνηση

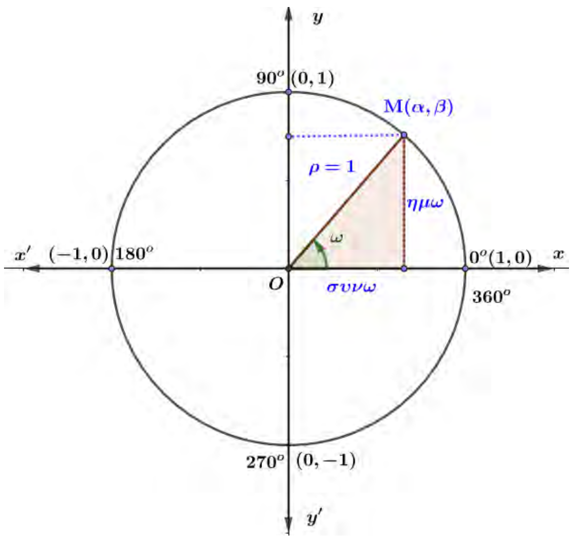
Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος. Η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον κύκλο στο σημείο $M(\alpha, \beta)$.



(α) Να εκφράσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω και συνω, συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M.

(β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω και συνω.

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«ALyk_En02_TrigTaut_ggb»*.



Να μετακινήσετε το σημείο M και να ελέγξετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε στο ερώτημα (β) είναι δυνατόν να γενικευθεί και στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η γωνία ω ανήκει στο 2$^{\text{ο}}$, 3$^{\text{ο}}$ και 4$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο.

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Αποδεικνύεται ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες σχέσεις τις οποίες ονομάζουμε **τριγωνομετρικές ταυτότητες**.

$$εφω = \frac{ημω}{συνω}\ ,\quad σφω = \frac{συνω}{ημω}\ ,\quad ημ^2ω + συν^2ω = 1$$

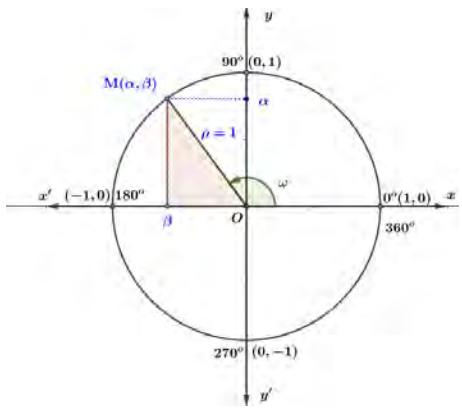
Απόδειξη

- Αν OM είναι η τελική πλευρά μια γωνίας $ω$ και M είναι η τομή της με τον τριγωνομετρικό κύκλο με συντεταγμένες $M(a, β)$, έχουμε:

  $$a = συνω,\ \ β = ημω,\ \ \frac{β}{a} = εφω$$

  Επομένως,

  $$εφω = \frac{β}{a} = \frac{ημω}{συνω}$$



- Η συνεφαπτομένη της γωνίας $ω$ ορίζεται ως:

  $$σφω = \frac{1}{εφω} = \frac{συνω}{ημω}$$

- Η τελική πλευρά της γωνίας $ω$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(a, β)$.

  Έχουμε ότι:

  $$a = συνω,\ \ β = ημω,\ \ OM = 1,\ \ (OM)^2 = β^2 +\ a^2 \Rightarrow 1 = β^2 + a^2$$

  Έτσι:

  $$συν^2ω +\ ημ^2ω = 1$$

Παρατηρήσεις

- Η τριγωνομετρική ταυτότητα $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ ισχύει για εκείνες τις γωνίες $ω$, για τις οποίες το $συνω \neq 0$. Για παράδειγμα, η ταυτότητα δεν ισχύει, όταν $ω = 90°$.
- Η τριγωνομετρική ταυτότητα $σφω = \frac{συνω}{ημω}$ ισχύει για εκείνες τις γωνίες $ω$, για τις οποίες το $ημω \neq 0$. Για παράδειγμα, η ταυτότητα δεν ισχύει, όταν $ω = 0°$.

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0}$$

$$\boxed{\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \quad \eta\mu\omega \neq 0}$$

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta$ και $\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$. Άρα, $\eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta$ και $\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta$.

Παράδειγμα 2

Αν

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{5}{13}, \quad 0° < \theta < 90°,$$

να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \Rightarrow \eta\mu\theta = \pm\frac{12}{13}$$

Η τελική πλευρά της γωνίας θ ανήκει στο 1^{o} τεταρτημόριο $(0° < \theta < 90°)$. Άρα:

$$\eta\mu\theta = \frac{12}{13} \qquad (\eta\mu\theta > 0)$$

Ακολούθως, παίρνουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

Παράδειγμα 3

Αν

$$\eta\mu\theta = \frac{3}{5}, \quad 90° < \theta < 180°,$$

να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$ημ^2θ + συν^2θ = 1 \;\Rightarrow\; συν^2θ = 1 - ημ^2θ \Rightarrow συν^2θ = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow συνθ = \pm\frac{4}{5}$$

Η τελική πλευρά της γωνίας $θ$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο ($90° < θ < 180°$). Άρα:

$$συνθ = -\frac{4}{5} \qquad (συνθ < 0)$$

Ακολούθως, παίρνουμε ότι:

$$εφθ = \frac{ημθ}{συνθ} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}, \quad σφθ = \frac{1}{εφθ} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$εφx + σφx = \frac{1}{ημx \cdot συνx}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\text{Α΄ μέλος} = εφx + σφx = \frac{ημx}{συνx} + \frac{συνx}{ημx} = \frac{ημ^2x + συν^2x}{ημx \cdot συνx} = \frac{1}{ημx \cdot συνx} = \text{Β΄ μέλος}$$

(Αρχίσαμε από το Α′ μέλος και με κατάλληλους μετασχηματισμούς και πράξεις καταλήξαμε στο Β′ μέλος.)

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισότητες:

(α) $ημ^2 70^\circ + συν^2 70^\circ = \ldots$ (β) $εφ30° = \dfrac{ημ30°}{συν \ldots}$

(γ) $σφ15^\circ\, εφ15^\circ = \ldots$ (δ) $\dfrac{1}{εφ20^\circ} = σφ \ldots$

(ε) $\dfrac{1}{εφ20^\circ} = εφ \ldots$

2. Να αποδείξετε ότι:

(α) $5ημ^2\theta + 5συν^2\theta = 5$ (β) $5ημ^2\theta - 7συν^2\theta = 12ημ^2\theta - 7$

3. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	$ημ^2 15° + συν^2 15° = 1$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$εφx\ σφx = -1$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $ημω = 1$, τότε $συνω = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\dfrac{ημ10°}{ημ80°} = εφ10°$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν $ημ\theta = \frac{1}{2}$ και $συν\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, τότε $σφθ=\sqrt{3}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $ημx\ σφx = συνx$ (β) $\dfrac{ημx}{συνx\ εφx} = 1$

(γ) $συν^2\theta + συν^2\theta\ εφ^2\theta = 1$ (δ) $ημ^2\theta(1 + σφ^2\theta) = 1$

(ε) $(1 - συν\theta)(1 + συν\theta) = ημ^2\theta$

5. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

$\dfrac{2ημa}{συνa} =$

Α. $\dfrac{ημ2a}{συνa}$ **Β.** $\dfrac{2ημ1}{συν1}$ **Γ.** 2 **Δ.** $2εφa$ **Ε.** $2σφa$

6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (α) $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{12}{13}, \qquad 0° < \varphi < 90°$

   (β) $\eta\mu\varphi = -\frac{8}{17}, \quad 180° < \varphi < 270°$

7. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$ και $180° < \theta < 270°$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{4\sigma\varphi\theta - 5\eta\mu\theta}{10\sigma\upsilon\nu\theta}$$

8. Αν $x = 2\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = 2\eta\mu\omega$, να δείξετε ότι $x^2 + y^2 = 4$.

9. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

   (α) $\frac{1 + \varepsilon\varphi x}{1 + \sigma\varphi x} = \varepsilon\varphi x$

   (β) $\frac{\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x} \div (\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x) = \eta\mu x$

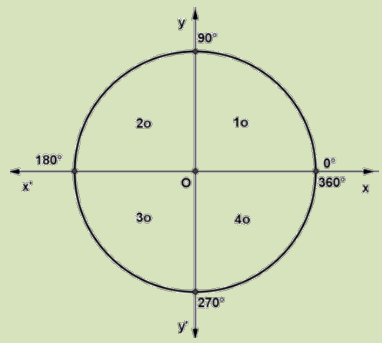
10. Αν $x = \varepsilon\varphi\omega$ και $\frac{1}{y} = \sigma\upsilon\nu\omega$, να δείξετε ότι $x^2 + 1 = y^2$.

Περίληψη

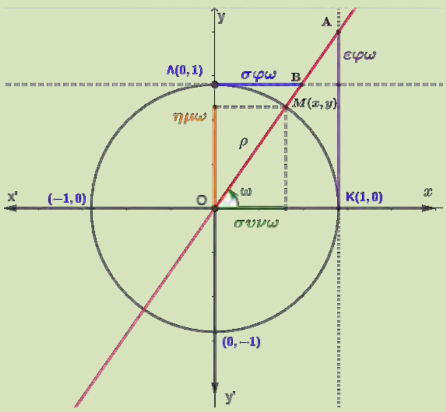
1. Στην Τριγωνομετρία, οι γωνίες στο επίπεδο δημιουργούνται από την περιστροφή μίας ημιευθείας γύρω από την κορυφή της, ξεκινώντας από την αρχική της θέση. Η αρχική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **αρχική πλευρά** της γωνίας και η τελική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **τελική πλευρά**. Οι γωνίες αυτές μπορούν να αναφέρονται και ως **τριγωνομετρικές γωνίες.**

2. Ανάλογα με τη φορά που κινείται η αρχική πλευρά προς την τελική πλευρά η γωνία διακρίνεται σε θετική φορά (αριστερόστροφη) ή γωνία με αρνητική φορά (δεξιόστροφη). Γωνία με καθορισμένη φορά λέγεται **προσανατολισμένη**.
3. **Αλγεβρική τιμή** μιας τριγωνομετρικής γωνίας είναι ο αριθμός που προκύπτει, όταν μετρήσουμε τη γωνία με μια μονάδα μέτρησης (π.χ μοίρα) και βάλουμε στο εξαγόμενο πρόσημο θετικό ή αρνητικό, αν η φορά διαγραφής της γωνίας είναι η θετική ή η αρνητική, αντίστοιχα.
4. Μία τριγωνομετρική γωνία είναι σε **κανονική θέση**, όταν η κορυφή της βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του ορθοκανονικού συστήματος και η αρχική πλευρά της συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων.
5. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας θ, η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση και $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της, ορίζονται ως
$$\text{ημ}\theta = \frac{y}{\rho},\ \ \text{συν}\theta = \frac{x}{\rho},\ \ \text{εφ}\theta = \frac{y}{x}\quad (x \neq 0),$$
όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho > 0$.
6. **Συνεφαπτομένη** της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\sigma\varphi\theta$. Δηλαδή:
$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{y},\ \ y \neq 0$$
7. **Τριγωνομετρικός κύκλος** ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία μονάδα.

8. Οι άξονες xx', yy' χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα τεταρτημόρια, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



9. Οι άξονες των τεταγμένων, των τετμημένων, η εφαπτομένη του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο $K(1,0)$ και η εφαπτομένη του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο $\Lambda(0,1)$ ορίζονται ως οι άξονες των ημιτόνων, των συνημιτόνων, των εφαπτομένων και των συνεφαπτομένων, αντίστοιχα.



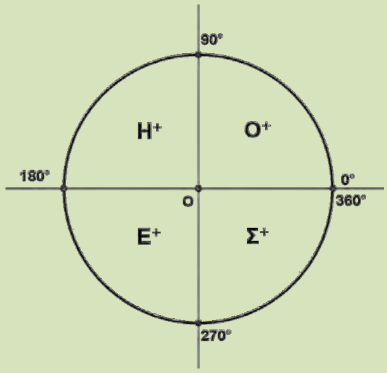
Από τα πιο πάνω, προκύπτει ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $συνω$ και $ημω$ παίρνουν τιμές μόνο στο διάστημα $[-1,1]$. Δηλαδή:

$$-1 \leq συνω \leq 1, \quad -1 \leq ημω \leq 1$$

10. Με τη βοήθεια των αξόνων των ημιτόνων, συνημιτόνων και εφαπτομένων, βρίσκουμε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών, τα οποία συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα:

	$1^{ο}$ τεταρτημόριο	$2^{ο}$ τεταρτημόριο	$3^{ο}$ τεταρτημόριο	$4^{ο}$ τεταρτημόριο
$ημω$	+	+	−	−
$συνω$	+	−	−	+
$εφω$	+	−	+	−

- Ο τριγωνομετρικός αριθμός σφω έχει το ίδιο πρόσημο με τον τριγωνομετρικό αριθμό εφω.
- Με βάση τα πιο πάνω, η εύρεση του προσήμου των τριγωνομετρικών αριθμών συνοψίζεται στον πιο κάτω μνημονικό κανόνα όπου:
  - Στο 1^{o} τεταρτημόριο όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί.
  - Στο 2^{o} τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το ημίτονο.
  - Στο 3^{o} τεταρτημόριο θετική είναι μόνο η εφαπτομένη.
  - Στο 4^{o} τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το συνημίτονο.



11. Γενικά, για μια οξεία γωνία θ, η συμπληρωματική της είναι $90° - \theta$ και ισχύουν:

$$\eta\mu(90^\circ - \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$$
$$\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) = \eta\mu\theta$$
$$\varepsilon\varphi(90^\circ - \theta) = \sigma\varphi\theta$$
$$\sigma\varphi(90^\circ - \theta) = \varepsilon\varphi\theta$$

12. Γενικά, για μία οξεία γωνία θ, η παραπληρωματική της είναι $180° - \theta$ και ισχύουν:

$$\eta\mu(180^\circ - \theta) = \eta\mu\theta$$
$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$$
$$\varepsilon\varphi(180^\circ - \theta) = -\varepsilon\varphi\theta$$
$$\sigma\varphi(180^\circ - \theta) = -\sigma\varphi\theta$$

13. **Τριγωνομετρικές ταυτότητες**

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0}$$

$$\boxed{\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \quad \eta\mu\omega \neq 0}$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:
$ημ(90° - a) - συν(90° - a) + ημa - συνa =$

Α. $2ημa$ **Β.** $-2συνa$ **Γ.** 0 **Δ.** $ημa$ **Ε.** $-συνa$

2. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
(α) $(ημφ + συνφ)^2 + (ημφ - συνφ)^2 = 2$
(β) $1 - \frac{ημ^2θ}{εφ^2θ} = ημ^2θ$
(γ) $ημθ - ημθ\, συν^2θ = ημ^3θ$
(δ) $\frac{συνx}{1 - ημx} - \frac{συνx}{1 + ημx} = 2εφx$

3. Αν $270° < x < 360°$, να δείξετε ότι $ημx\, συν^2x + 2ημx\, συνx + ημx + εφx < 0$.

4. Αν $180° < x < 270°$, να δείξετε ότι $εφx - ημx > συνx - σφx$.

5. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
(α) $(ημφ + συνφ)^2 = 1 + 2ημφ\, συνφ$
(β) $(ημθ + συνθ)(ημθ - συνθ) = 1 - 2συν^2θ$
(γ) $\frac{ημ^2x - συν^2x\, ημ^2x}{ημ^2x} = ημ^2x$
(δ) $\frac{ημx\, συνx + ημx}{συνx + συν^2x} = εφx$
(ε) $\frac{ημθ\, συνθ}{1 - συν^2θ} = σφx$

6. Δίνεται ότι $συνθ = -\frac{8}{17}$ και $ημθ > 0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$A = \frac{34ημθ + 17συνθ}{8εφθ - 15σφθ}$$

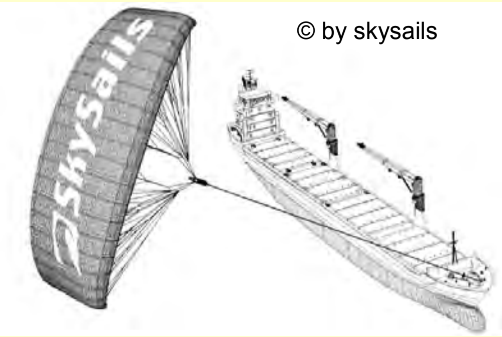
7. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση:
Αν $ημx = a$ και $0° < x < 90°$, τότε:

Α. $συνx = 1 - a$ **Β.** $συνx = 1 - a^2$
Γ. $συνx = \sqrt{1 - a^2}$ **Δ.** $συνx = -\sqrt{1 - a^2}$

Λύση Προβλήματος

ΠΑΝΙΑ

Ενενήντα πέντε τοις εκατό του παγκόσμιου εμπορίου διακινείται θαλάσσια από περίπου 50000 πετρελαιοφόρα, φορτηγά πλοία και πλοία μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων. Τα περισσότερα από αυτά τα πλοία χρησιμοποιούν πετρέλαιο για την κίνησή τους. Οι μηχανικοί σχεδιάζουν να αναπτύξουν μηχανισμούς αεροδυναμικής υποστήριξης των πλοίων. Η εισήγησή τους εστιάζεται στη χρήση πανιών στα πλοία, ώστε να αξιοποιείται η δύναμη του ανέμου. Αυτό θα οδηγήσει σε μείωση της κατανάλωσης αργού πετρελαίου και της επίδρασης των καυσίμων στο περιβάλλον.



Ερώτηση 1:

Ένα πλεονέκτημα της χρήσης πανιών ναυσιπλοΐας είναι ότι το πανί υπερίπταται σε ύψος 150 m. Σε αυτό το ύψος, η ταχύτητα του ανέμου είναι κατά προσέγγιση 25% μεγαλύτερη από την ταχύτητα στο κατάστρωμα του πλοίου.
Με ποια, κατά προσέγγιση, ταχύτητα πνέει ο άνεμος στο πανί, όταν η ταχύτητα του ανέμου στο κατάστρωμα ενός πλοίου μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων είναι 24 km/h;

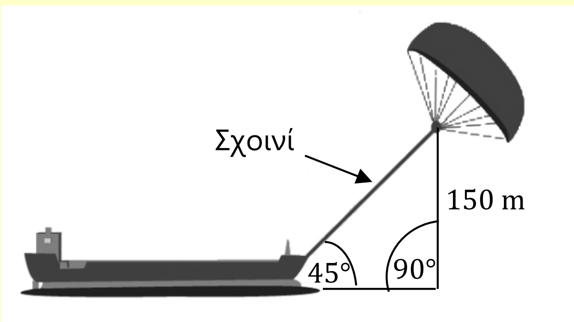
Α. 6 km/h
Β. 18 km/h
Γ. 25 km/h
Δ. 30 km/h
Ε. 49 km/h

....

Ερώτηση 2:

Πόσο περίπου πρέπει να είναι το μήκος του σχοινιού του πανιού, για να ρυμουλκεί το πλοίο υπό γωνία 45° και να βρίσκεται κατακόρυφα σε ύψος 150 m, όπως φαίνεται στο διάγραμμα;

Α. 173 m
Β. 212 m
Γ. 285 m
Δ. 300 m



Σημείωση: Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.
© by skysails

Ερώτηση 3:
Λόγω του υψηλού κόστους του αργού πετρελαίου, το οποίο κοστίζει 0,42 ζετς το λίτρο, οι ιδιοκτήτες του πλοίου Νέο Κύμα σκέφτονται να εξοπλίσουν το πλοίο τους με πανιά ναυσιπλοΐας.
Υπολογίζεται ότι ένα τέτοιο πανί, μπορεί να περιορίσει την κατανάλωση αργού πετρελαίου συνολικά γύρω στο 20%.

Όνομα: Νέο Κύμα

Είδος: Μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων

Μήκος: 117 μέτρα

Πλάτος: 18 μέτρα

Χωρητικότητα: 12 000 τόνοι

Μέγιστη ταχύτητα: 19 κόμβοι

Ετήσια κατανάλωση πετρελαίου χωρίς τη χρήση πανιού: περίπου 3 500 000 λίτρα

Το κόστος εξοπλισμού του πλοίου Νέο Κύμα με ένα πανί είναι 2 500 000 ζετς.

Μετά από πόσα χρόνια η εξοικονόμηση από την κατανάλωση αργού πετρελαίου θα καλύψει το κόστος του πανιού; Να υποστηρίξεις την απάντησή σου με τους απαραίτητους υπολογισμούς.

Αριθμός ετών: ....

PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

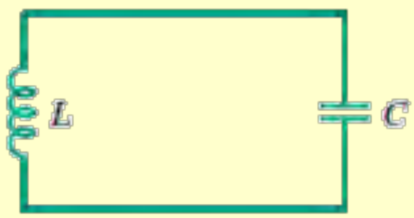
1. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες:
   (α) να ισχύει συγχρόνως $ημx = 0$ και $συνx = 0$
   (β) να ισχύει συγχρόνως $ημx = 1$ και $συνx = 1$
   (γ) να ισχύει συγχρόνως $ημx = \frac{1}{3}$ και $συνx = \frac{1}{3}$
   (δ) να ισχύει συγχρόνως $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $συνx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $εφ1°\, εφ2°\, εφ3° \cdots εφ87°\, εφ88°\, εφ89° = 1$
   (β) $(ημ1° - συν1°) + (ημ2° - συν2°) + \cdots + (ημ89° - συν89°) = 0$

3. Να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση έχει τιμή ανεξάρτητη του x:
$$A = ημ^2(180° - x) + συν(180° - x)\, συνx + 2ημ^2(90° - x)$$

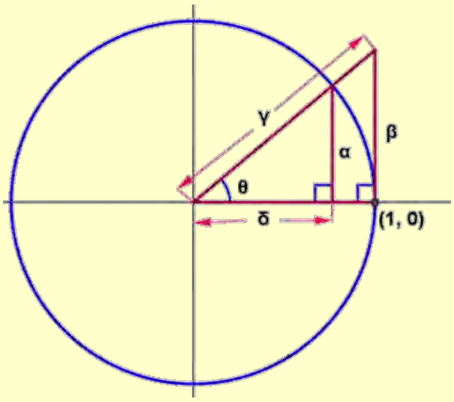
4. Αν $εφα = 3εφβ$, να αποδείξετε ότι:
$$\frac{εφα + εφβ}{1 - εφα\, εφβ} = \frac{4ημβ\, συνβ}{1 - 4ημ^2β}$$

5. Με τον δέκτη ενός ραδιοφώνου επιλέγεις έναν ραδιοφωνικό σταθμό, ρυθμίζοντας τη συχνότητα. Ένας δέκτης περιέχει ένα πηνίο L και έναν πυκνωτή C, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο κατά τον χρόνο t δίδεται από τον τύπο $L(t) = k\, ημ^2(2\pi Ft)$ και η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή κατά τον χρόνο t δίδεται από τον τύπο $C(t) = k\, συν^2(2\pi Ft)$, όπου F είναι η συχνότητα του ραδιοφωνικού σταθμού και k είναι σταθερός αριθμός. Η συνολική ενέργεια E στο κύκλωμα δίνεται από τον τύπο $E(t) = L(t) + C(t)$.
Να αποδείξετε ότι η ενέργεια E είναι σταθερή.

6. Να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων a, β, γ και δ, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα, συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ.



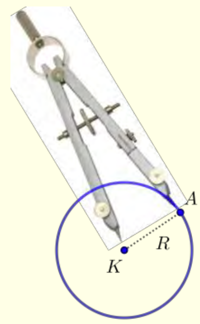
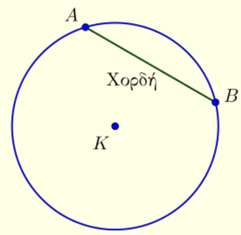
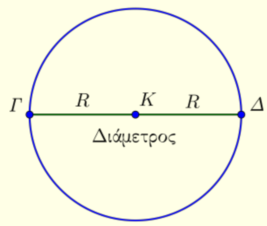
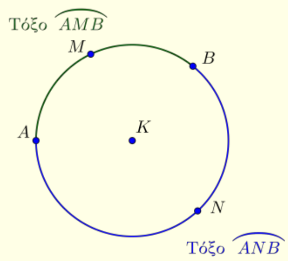
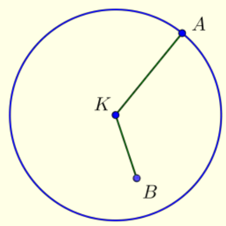
7. Αν ημ$a = \frac{4}{5}$ και συν$a < 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

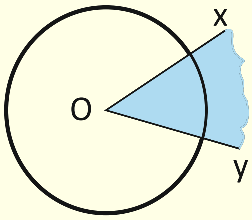
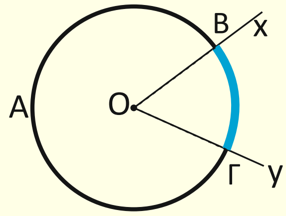
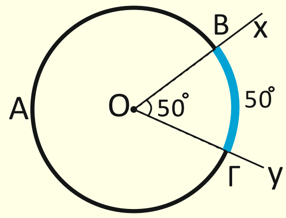
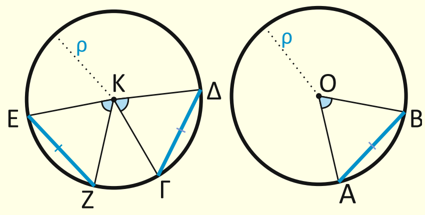
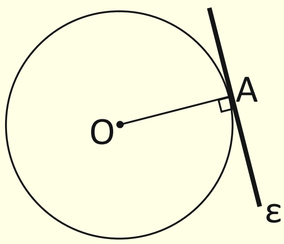
$$A = 10\text{συν}(180° - a) + 3\text{εφ}(180° - a)$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 03

ΚΥΚΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Έχουμε μάθει...		
Κύκλος	▪ **Κύκλος** ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Η σταθερή απόσταση ονομάζεται **ακτίνα** του κύκλου και το σταθερό σημείο **κέντρο** του κύκλου. *Π.χ. Το K είναι το κέντρο του κύκλου και R η ακτίνα του. Για συντομία γράφουμε κύκλος (K, R).*	
Χορδή	▪ **Χορδή κύκλου** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στον κύκλο. *Π.χ. Το AB είναι χορδή του κύκλου.*	
Διάμετρος	▪ **Διάμετρος κύκλου** είναι η χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου. Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο κάθε διαμέτρου. Η διάμετρος του κύκλου είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου και έχει μήκος διπλάσιο από την ακτίνα. *Π.χ. Η χορδή $\Gamma\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) και $\Gamma\Delta = 2R$.*	
Τόξο	▪ **Τόξο κύκλου** ονομάζεται κάθε μέρος του κύκλου που περιέχεται μεταξύ δύο σημείων του. *Π.χ. Τα σημεία A και B χωρίζουν τον κύκλο σε δύο τόξα. Τα δύο τόξα συμβολίζονται $\overset{\frown}{AMB}$ και $\overset{\frown}{ANB}$, όπου M και N είναι ενδιάμεσα σημεία των αντίστοιχων τόξων.* Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα τόξα που ονομάζονται **ημικύκλια**.	
Κυκλικός Δίσκος	▪ **Κυκλικός δίσκος** είναι ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει. Κάθε σημείο του κυκλικού δίσκου απέχει από το κέντρο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα. *Π.χ. $KA = R$ και $KB < R$*	

Έχουμε μάθει...		
Επίκεντρη γωνία	▪ **Επίκεντρη γωνία** ονομάζεται κάθε γωνία που έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου. *Π.χ. Η γωνία* xOy *είναι επίκεντρη γωνία.*	
Αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης	▪ Το τόξο του κύκλου που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας επίκεντρης γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας.** *Π.χ. Το τόξο* $ΒΓ$ *είναι το αντίστοιχο τόξο της γωνίας* $Β\hat{O}Γ$.	
Μέτρο τόξου	▪ **Το μέτρο ενός τόξου** ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας. Το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες ή ακτίνια. *Π.χ.* $\widehat{ΒΓ} = x\hat{O}y = 50° = \frac{5\pi}{18}$ rad	
Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου	▪ Στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους): • σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα και αντίστροφα. *Π.χ.* $Ε\hat{K}Ζ = Γ\hat{K}Δ = Α\hat{O}Β$ $\Leftrightarrow \widehat{ΕΖ} = \widehat{ΓΔ} = \widehat{ΑΒ}$ • σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές και αντίστροφα. *Π.χ.* $\widehat{ΕΖ} = \widehat{ΓΔ} = \widehat{ΑΒ}$ $\Leftrightarrow ΕΖ = ΓΔ = ΑΒ$	
Εφαπτομένη	▪ Εφαπτομένη του κύκλου ονομάζεται η ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο. Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής. *Π.χ. Η ευθεία* (ε) *είναι η εφαπτομένη του κύκλου* (O, R) *στο σημείο* A *και η ακτίνα* OA *είναι κάθετη στην* (ε).	

Έχουμε μάθει...

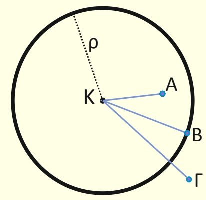
Θέση σημείου ως προς κύκλο

Η θέση σημείου ως προς κύκλο (K,ρ) καθορίζεται ως εξής:

(α) $(KA) < \rho$ $\Leftrightarrow$ Το σημείο A βρίσκεται μέσα στον κύκλο.

(β) $(KB) = \rho$ $\Leftrightarrow$ Το σημείο B ανήκει στον κύκλο.

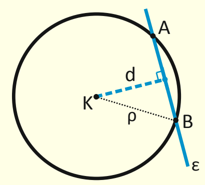
(γ) $(K\Gamma) > \rho$ $\Leftrightarrow$ Το σημείο Γ βρίσκεται εκτός κύκλου.



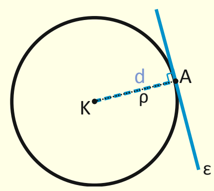
Θέση ευθείας ως προς κύκλο

Η θέση της ευθείας (ε) που βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο του κύκλου (K,ρ) καθορίζεται ως εξής:

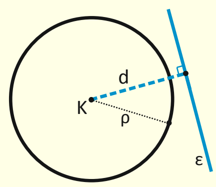
(α) $d < \rho$ $\Leftrightarrow$ Η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.



(β) $d = \rho$ $\Leftrightarrow$ Η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου.
Έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.



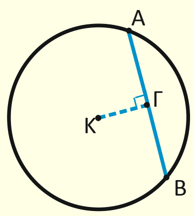
(γ) $d > \rho$ $\Leftrightarrow$ Η ευθεία (ε) είναι ξένη με τον κύκλο.
Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



Απόστημα χορδής

Απόστημα χορδής κύκλου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από το κέντρο του προς τη χορδή.

Π.χ. Το ευθύγραμμο τμήμα $K\Gamma$ είναι το απόστημα $(K\Gamma \perp AB)$.



3.1 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

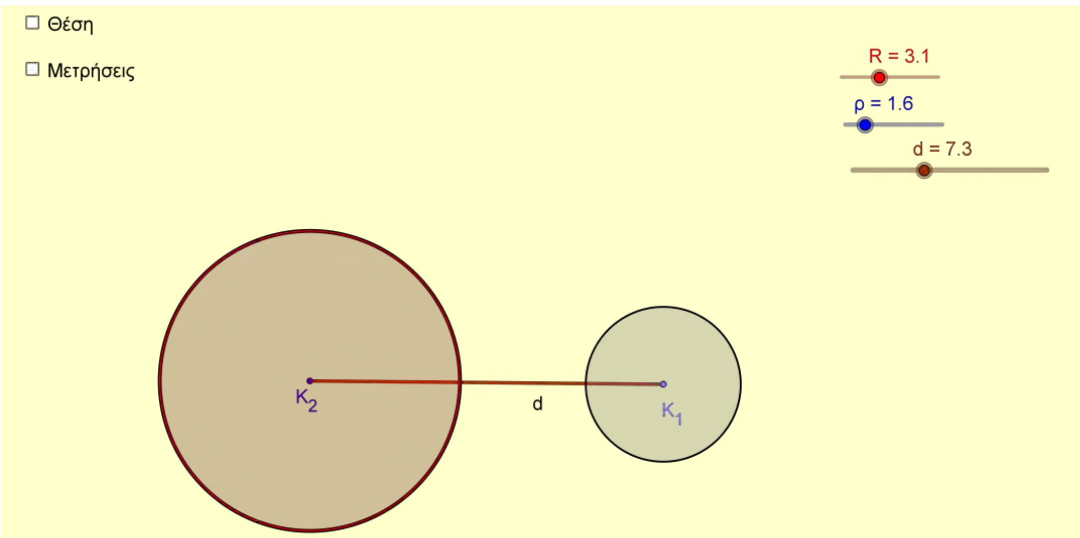
Εξερεύνηση

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται **το μεσαιωνικό αστρονομικό ρολόι** που βρίσκεται στην Πράγα της Τσεχίας. Το σημερινό ρολόι είναι ένα πιστό αντίγραφο του αρχικού, το οποίο καταστράφηκε στον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο.

Να περιγράψετε τη θέση δύο οποιονδήποτε κύκλων, όπως αυτοί εμφανίζονται στο μεσαιωνικό αστρονομικό ρολόι.

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En03_Thesis2Kyklon.ggb»*.



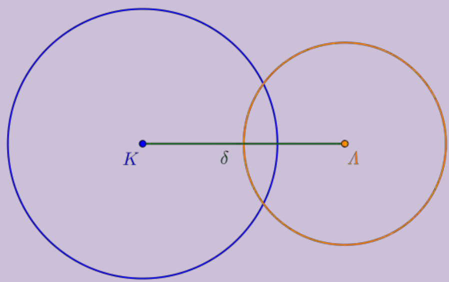
- Να μετακινήσετε τον δρομέα *«d»*, για να μεταβάλετε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων, έτσι ώστε οι κύκλοι:
  (α) να έχουν δύο κοινά σημεία
  (β) να έχουν ένα κοινό σημείο
  (γ) να μην έχουν σημεία τομής.
- Ποια είναι η σχέση που συνδέει την απόσταση των δύο κέντρων με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο ακτίνων σε κάθε περίπτωση;

Για τη σχετική θέση δύο κύκλων συγκρίνουμε το μηκος της διακέντρου των δύο κύκλων με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους.

Ορισμός

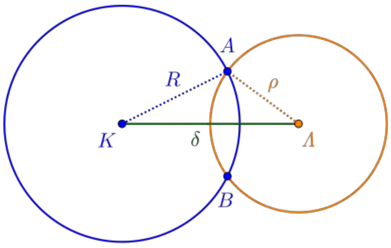
Διάκεντρος δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων. Το μήκος της συμβολίζεται με δ.

Για παράδειγμα, στους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) ισχύει ότι $\delta = K\Lambda$.



Αν έχουμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$, τότε οι πιθανές σχετικές θέσεις των δύο κύκλων είναι:

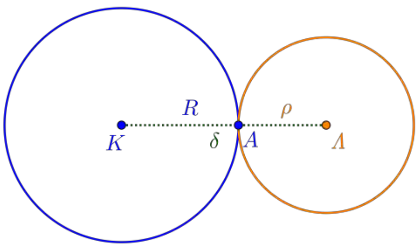
- Αν δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τότε οι κύκλοι τέμνονται.



Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R - \rho < \delta < R + \rho$$

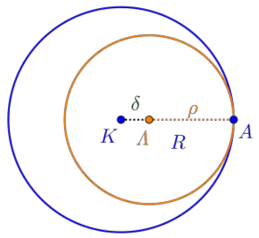
- Αν δύο κύκλοι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε εφάπτονται εξωτερικά. Το κοινό σημείο λέγεται σημείο επαφής των δύο κύκλων.



Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R + \rho = \delta$$

- Αν δύο κύκλοι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο (σημείο επαφής) και το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με τη διαφορά των ακτίνων τους, τότε εφάπτονται εσωτερικά.

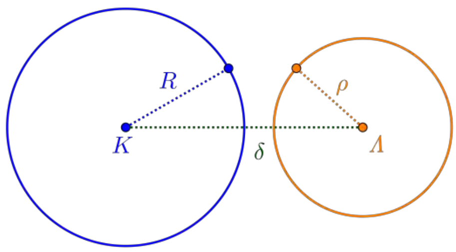


Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και $(Λ, \rho)$ σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R - \rho = \delta$$

Παρατήρηση: Αν $R = \rho$ και $\delta = 0$, τότε οι κύκλοι ταυτίζονται.

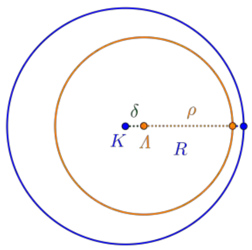
- Αν δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε είναι ξένοι εξωτερικά. Δηλαδή, ο ένας κύκλος βρίσκεται έξω από τον άλλο.



Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και $(Λ, \rho)$ σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

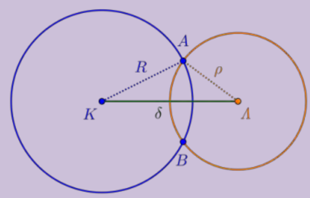
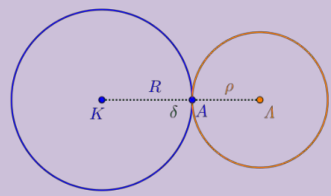
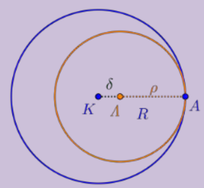
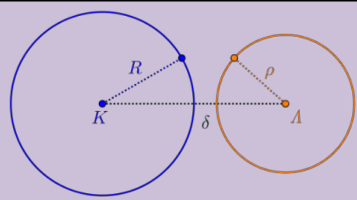
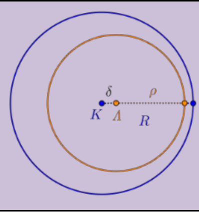
$$R + \rho < \delta$$

- Αν δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι μικρότερο από τη διαφορά των ακτίνων τους, τότε είναι ξένοι εσωτερικά. Δηλαδή, ο ένας κύκλος βρίσκεται μέσα στον άλλο.



Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και $(Λ, \rho)$ σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R - \rho > \delta$$

Σχέση διακέντρου – ακτινών $(\boldsymbol{R \geq \rho})$	**Σχετική θέση δύο κύκλων**	**Σχήμα**
$R-\rho<\delta<R+\rho$	Οι κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) τέμνονται.	
$\delta=R+\rho$	Οι κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά.	
$\delta=R-\rho$	Οι κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) εφάπτονται εσωτερικά.	
$\delta>R+\rho$	Οι κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) είναι ξένοι εξωτερικά.	
$\delta<R-\rho$	Οι κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) είναι ξένοι εσωτερικά.	

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) Κύκλοι $(K, R=4\text{ cm})$ και $(\Lambda,\rho=6\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda=7\text{ cm}$.

(β) Κύκλοι $(K, R=4\text{ cm})$ και $(\Lambda,\rho=6\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda=10\text{ cm}$.

Λύση

(α) Αφού $R+\rho=6+4=10\text{ cm}$, $|R-\rho|=2\text{ cm}$ και $\delta=7\text{ cm}$, έχουμε:

$$|R-\rho|<\delta<R+\rho$$

Επομένως, οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

(β) Αφού $\delta=10\text{ cm}$ και $R+\rho=10\text{ cm}$, έχουμε:

$$R+\rho=\delta$$

Επομένως, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Δραστηριότητες

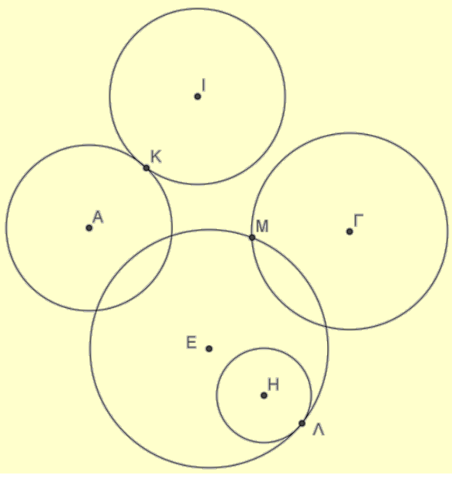
1. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
   (α) Κύκλοι $(K, 3\text{ cm})$ και $(\Lambda, 5\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 8\text{ cm}$.
   (β) Κύκλοι $(K, 3\text{ cm})$ και $(\Lambda, 5\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 10\text{ cm}$.
   (γ) Κύκλοι $(K, 3\text{ cm})$ και $(\Lambda, 5\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 1\text{ cm}$.
   (δ) Κύκλοι $(M, 5\text{ cm})$ και $(N, 8\text{ cm})$ με απόσταση $MN = 3\text{ cm}$.
   (ε) Κύκλοι $(M, 2\text{ cm})$ και $(N, 3\text{ cm})$ με απόσταση $MN = 4\text{ cm}$.
   (στ) Κύκλοι $(M, 4\text{ cm})$ και $(N, 7\text{ cm})$ με απόσταση $MN = 12\text{ cm}$.
   (ζ) Κύκλοι $(M, 4\text{ cm})$ και $(N, 7\text{ cm})$ με απόσταση $MN = 3\text{ cm}$.
   (η) Κύκλοι $(M, 4\text{ cm})$ και $(N, 6\text{ cm})$ με απόσταση $MN = 10\text{ cm}$.

2. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου των κύκλων $(K, 4\text{ cm})$ και $(\Lambda, 5\text{ cm})$, ώστε:
   (α) οι κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά
   (β) οι κύκλοι να εφάπτονται εσωτερικά.

3. Δίνεται κύκλος με κέντρο $(\Lambda, 10\text{ km})$ και κύκλος $(M, 18\text{ km})$. Αν οι δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, να βρείτε το διάστημα στο οποίο ανήκουν οι τιμές του μήκους $M\Lambda$.

4. Να κατασκευάσετε τους κύκλους σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις. Στη συνέχεια, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων:
   (α) Κύκλοι $(K, 3\text{ cm})$ και $(\Lambda, 4\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 7\text{ cm}$.
   (β) Κύκλοι $(K, 3\text{ cm})$ και $(\Lambda, 4\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 8\text{ cm}$.
   (γ) Κύκλοι $(K, 3\text{ cm})$ και $(\Lambda, 4\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 6\text{ cm}$.
   (δ) Κύκλοι $(K, 3\text{ cm})$ και $(\Lambda, 4\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 1\text{ cm}$.
   (ε) Κύκλοι $(K, 3\text{ cm})$ και $(\Lambda, 4\text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 2\text{ cm}$.

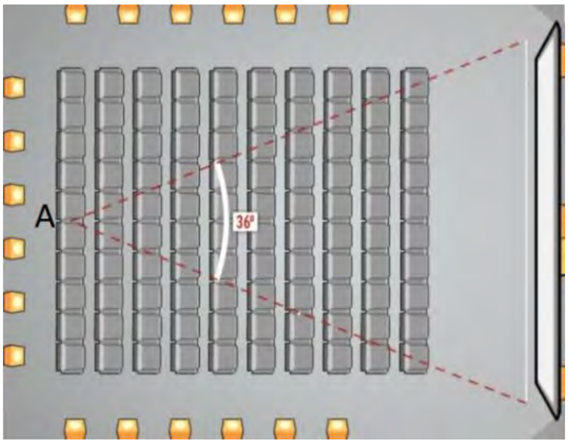
5. Στο διπλανό σχήμα, να γράψετε τη σχετική θέση μεταξύ των κύκλων:
   (α) (A, AK) και (I, IK)
   (β) (A, AK) και (E, EM)
   (γ) (A, AK) και $(H, H\Lambda)$
   (δ) $(E, E\Lambda)$ και $(H, H\Lambda)$



3.2 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ – ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Εξερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα, φαίνεται η κάτοψη μιας αίθουσας κινηματογράφου.



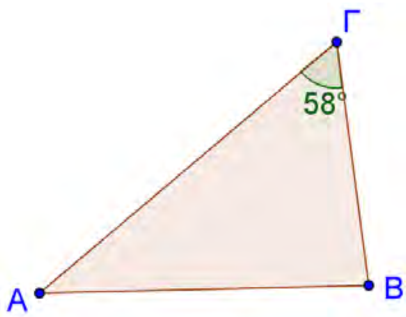
Ένας φωτογράφος τοποθέτησε μια φωτογραφική μηχανή (A), που έχει άνοιγμα φακού 36°, στο μέσο της τελευταίας σειράς έτσι ώστε να βλέπει όλη την οθόνη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη συνέχεια, θα τοποθετήσει ακόμα μια φωτογραφική μηχανή (B) με φακό ανοίγματος 72°.

(α) Σε ποιες άλλες θέσεις θα μπορούσε να τοποθετήσει τη φωτογραφική μηχανή (A), ώστε να καλύπτει ολόκληρη την οθόνη;

(β) Σε ποια θέση πρέπει να τοποθετήσει τη φωτογραφική μηχανή (B), ώστε να καλύπτει ολόκληρη την οθόνη;

Διερεύνηση 1

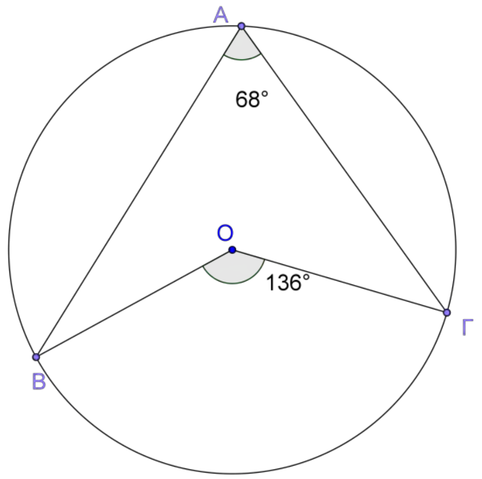
Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En03_DGeoorthi.ggb»*.



- Να μετακινήσετε την κορυφή $Γ$ σε διάφορες θέσεις.
- Πότε νομίζετε ότι η γωνία $Γ$ γίνεται ορθή;

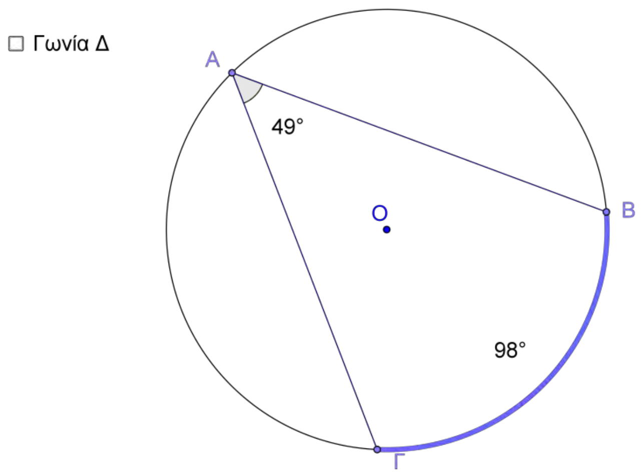
Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En03_DGeoEggegrammeniEpikentri.ggb»*.



- Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

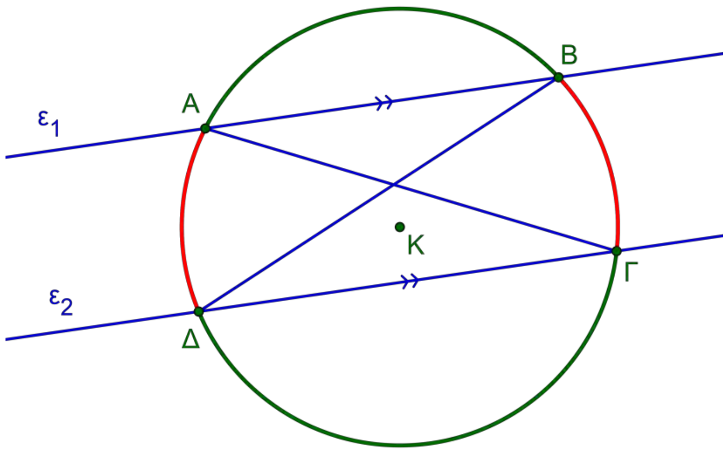
Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn03_DGeoEggegrameniIdioToxo.ggb»*.



- Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Διερεύνηση 3

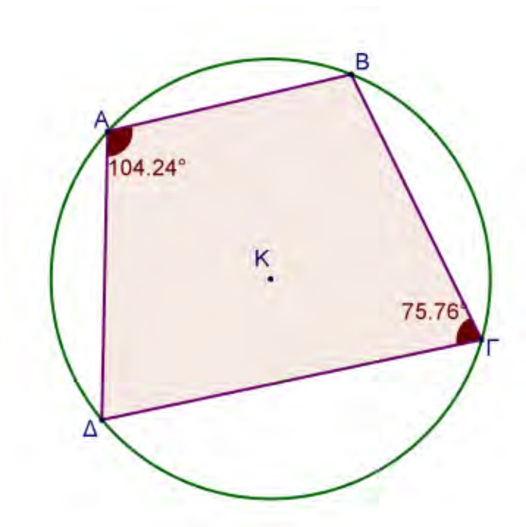
Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En03_IsaToxa.ggb»*.



- Να συγκρίνετε τα τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών.

Διερεύνηση 4

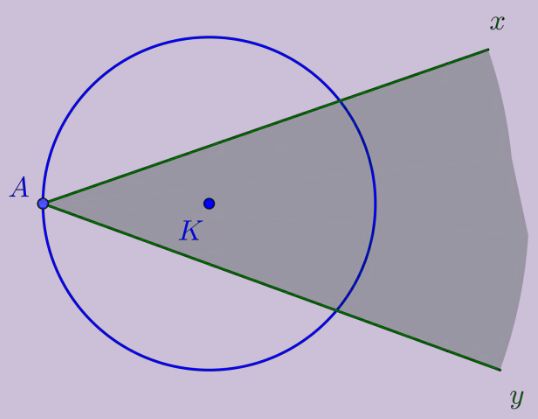
Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En03_Tetrapleyro.ggb»*.



- Να μετακινήσετε την κορυφή A του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ σε διάφορες θέσεις στον κύκλο.
- Να συγκρίνετε τις απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

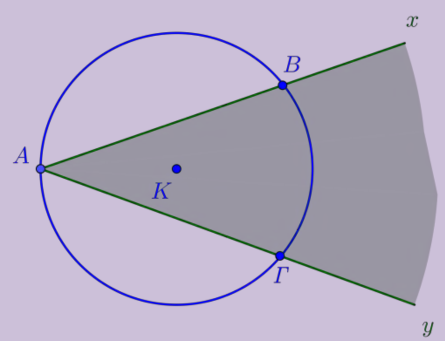
Ορισμός

Εγγεγραμμένη γωνία κύκλου ονομάζεται η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου.

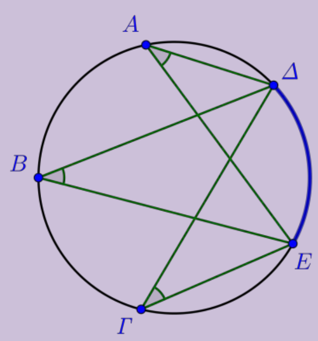


Παρατηρήσεις

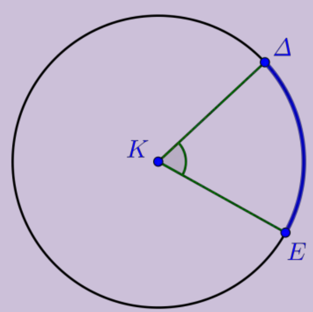
- Αν B και Γ είναι τα σημεία τομής της $x\hat{A}y$ με τον κύκλο, τότε θα λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $BA\Gamma$ βαίνει στο τόξο $B\Gamma$.



- Σε κάθε τόξο αντιστοιχούν άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες.



- Σε κάθε τόξο αντιστοιχεί μόνο μία επίκεντρη γωνία.

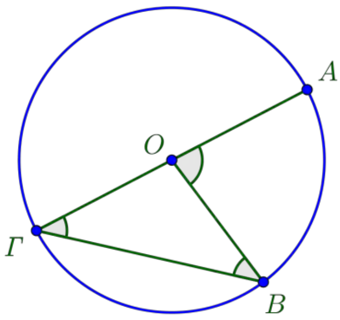


Θεώρημα
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Απόδειξη
Έστω κύκλος (O, R) και ένα τόξο του AB. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία AOB και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο AB. Τότε, θα αποδείξουμε ότι $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- Μελετούμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου (O, R) ανήκει σε μιαν πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $A\Gamma B$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

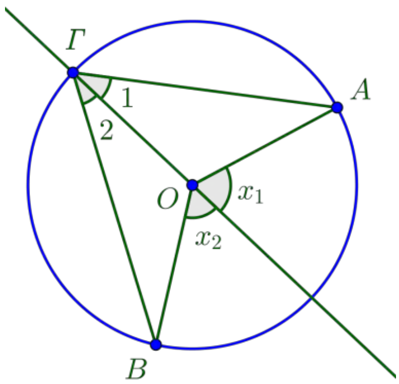


  Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $BO = \Gamma O$. Άρα:
  $$B\hat{\Gamma}O = \Gamma\hat{B}O$$

  Η επίκεντρη γωνία AOB είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $BO\Gamma$. Επομένως, ισχύει ότι:
  $$A\hat{O}B = B\hat{\Gamma}O + \Gamma\hat{B}O$$

  Από τις δύο πιο πάνω σχέσεις, παίρνουμε ότι:
  $$A\hat{O}B = B\hat{\Gamma}O + \Gamma\hat{B}O = 2B\hat{\Gamma}O = 2A\hat{\Gamma}B$$

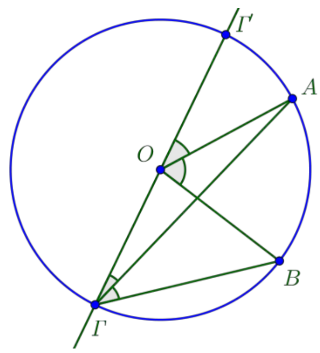
- Μελετούμε την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου (O, R) βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\Gamma B$. Φέρουμε την ευθεία ΓO, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα $AO\Gamma$ και $BO\Gamma$. Η επίκεντρη γωνία AOB χωρίζεται σε δύο γωνίες, τις $\hat{x}_1$ και $\hat{x}_2$, οι οποίες είναι εξωτερικές γωνίες των ισοσκελών τριγώνων $AO\Gamma$ και $BO\Gamma$, αντίστοιχα.
  Έχουμε:



  $$\hat{x}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{A} = 2\hat{\Gamma}_1$$
  $$\hat{x}_2 = \hat{\Gamma}_2 + \hat{B} = 2\hat{\Gamma}_2$$

  Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο πιο πάνω εξισώσεις, έχουμε:
  $$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 2\hat{\Gamma}_1 + 2\hat{\Gamma}_2 = 2(\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2) \Rightarrow A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$$

- Τέλος, μελετούμε την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου (O,R) βρίσκεται στο εξωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\Gamma B$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Φέρουμε την ευθεία ΓO, η οποία τέμνει ξανά τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ'. Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $BO=\Gamma O$. Άρα:

$$B\hat{\Gamma}O = \Gamma\hat{B}O$$

Η επίκεντρη γωνία $BO\Gamma'$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $BO\Gamma$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$B\hat{O}\Gamma' = B\hat{\Gamma}O + \Gamma\hat{B}O$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$A\hat{O}\Gamma' = 2A\hat{\Gamma}\Gamma'$$

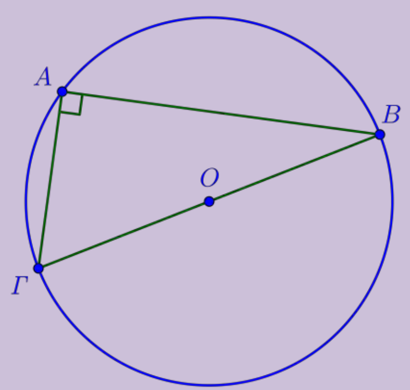
Από τις πιο πάνω σχέσεις, παίρνουμε ότι:

$$B\hat{O}\Gamma' = B\hat{\Gamma}O + \Gamma\hat{B}O = 2B\hat{\Gamma}O = 2B\hat{\Gamma}A + 2A\hat{\Gamma}\Gamma' = 2B\hat{\Gamma}A + A\hat{O}\Gamma'$$
$$\Rightarrow B\hat{O}\Gamma' - A\hat{O}\Gamma' = 2B\hat{\Gamma}A \Rightarrow A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$$

Από το πιο πάνω Θεώρημα, προκύπτουν άμεσα κάποια πορίσματα.

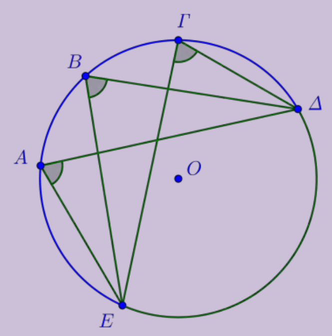
Πορίσματα

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



Για παράδειγμα, η γωνία $BA\Gamma$ είναι ορθή, αφού η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $BO\Gamma$ είναι ευθεία γωνία.

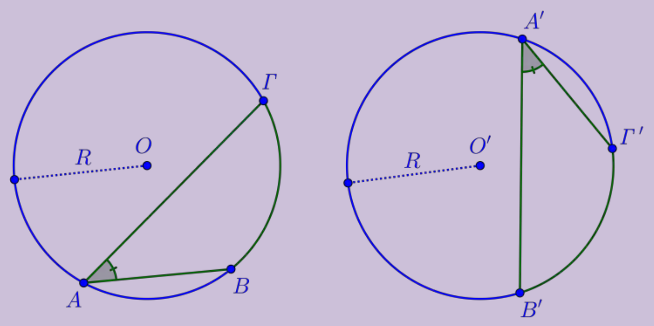
- Εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους.



Για παράδειγμα, οι εγγεγραμμένες γωνίες $\Delta A E, \Delta B E$ και $\Delta \Gamma E$ που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΔE είναι ίσες, διότι:

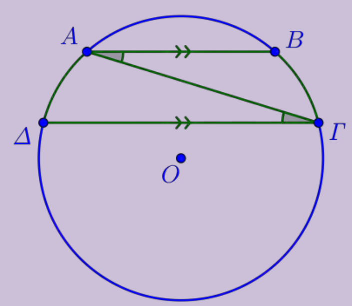
$$\Delta \hat{A} E = \frac{\Delta \hat{O} E}{2}, \ \ \Delta \hat{B} E = \frac{\Delta \hat{O} E}{2}, \ \ \Delta \hat{\Gamma} E = \frac{\Delta \hat{O} E}{2}$$

- Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα ίσων κύκλων ή του ίδιου κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους και αντίστροφα.



Για παράδειγμα, $B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A'}\Gamma' \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma} = \widehat{B'\Gamma'}$.

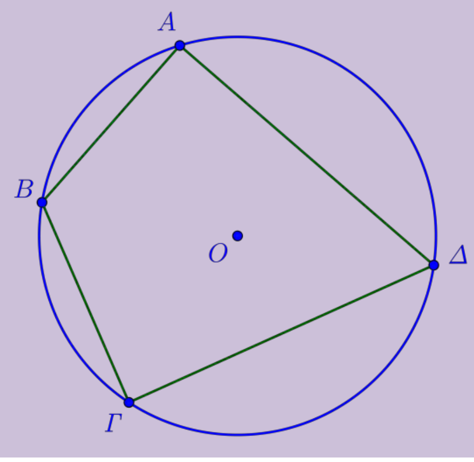
- Τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων χορδών είναι ίσα.



Για παράδειγμα, $AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Delta}$.

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο σε κύκλο**, όταν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

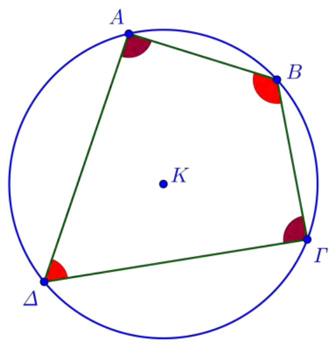


Θεώρημα

Κάθε τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.

Απόδειξη

Η εγγεγραμμένη γωνία A βαίνει στο τόξο $ΒΓΔ$. Άρα,



$$\hat{A} = \frac{\widehat{ΒΓΔ}}{2},$$

αφού το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου.

Με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει ότι:

$$\hat{Γ} = \frac{\widehat{ΒΑΔ}}{2}$$

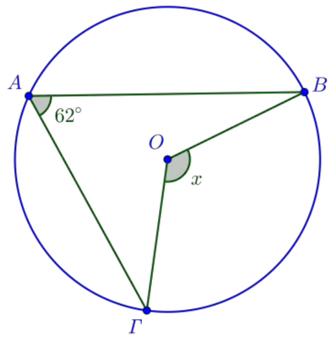
Επομένως, έχουμε ότι:

$$\hat{A} + \hat{Γ} = \frac{\widehat{ΒΓΔ}}{2} + \frac{\widehat{ΒΑΔ}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $\hat{B} + \hat{Δ} = 180°$.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τη γωνία x στο πιο κάτω σχήμα.



Λύση

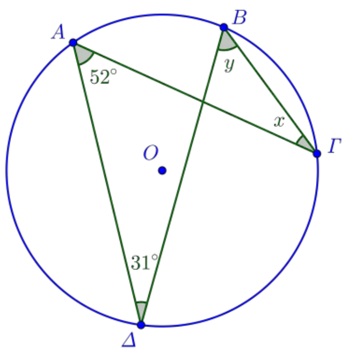
Η εγγεγραμμένη γωνία $ΒΑΓ$ βαίνει στο μικρό τόξο $ΒΓ$. Επίσης, η επίκεντρη γωνία $ΒΟΓ$ βαίνει στο μικρό τόξο $ΒΓ$. Επομένως:

$$B\hat{A}Γ = \frac{B\hat{O}Γ}{2}$$ *(Θεώρημα εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας)*

$$\Rightarrow 62^{\circ} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 124^{\circ}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y στο πιο κάτω σχήμα.



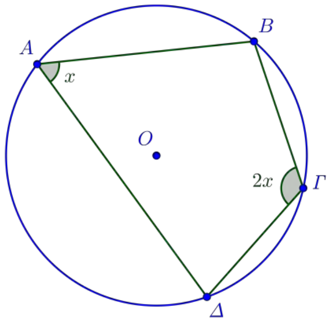
Λύση

Οι γωνίες $Γ$ και $Δ$ είναι ίσες, γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο, το μικρό τόξο $ΑΒ$.
Άρα, $x = 31^{\circ}$.

Οι γωνίες $Α$ και $Β$ είναι ίσες, γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο, το μικρό τόξο $ΓΔ$.
Άρα, $y = 52^{\circ}$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τη γωνία x στο πιο κάτω σχήμα.



Λύση

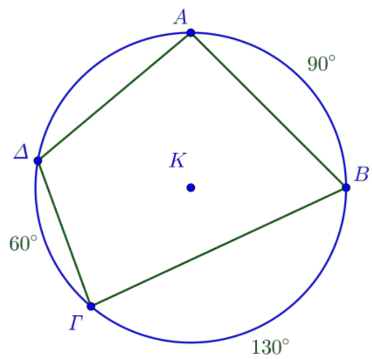
Οι γωνίες A και $Γ$ είναι παραπληρωματικές, ως απέναντι γωνίες στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$.

Επομένως:

$$A + Γ = 180° \Rightarrow x + 2x = 180° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$$

Παράδειγμα 4

Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\widehat{AB} = 90^{\circ}, \widehat{ΒΓ} = 130^{\circ}$ και $\widehat{ΓΔ} = 60^{\circ}$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.



Λύση

Αρχικά, έχουμε ότι:

$$\widehat{AB} + \widehat{ΒΓ} + \widehat{ΓΔ} + \widehat{ΔΑ} = 360° \Rightarrow 90° + 130° + 60° + \widehat{ΔΑ} = 360° \Rightarrow \widehat{ΔΑ} = 80°$$

Η γωνία $\widehat{ΒΑΔ}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και αντιστοιχεί στο τόξο $\widehat{ΒΓΔ} = 190°$. Άρα, $\widehat{ΒΑΔ} = 95°$, αφού το μέτρο μίας εγγεγραμμένης σε κύκλο γωνίας είναι ίσο με το μισό μέτρο του αντίστοιχου τόξου του κύκλου.

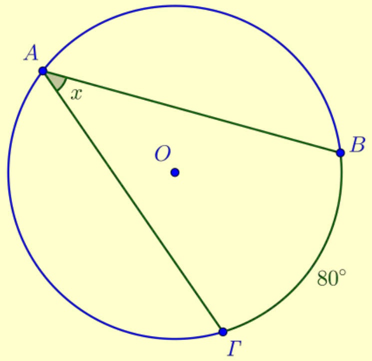
Με ανάλογο τρόπο, παίρνουμε ότι $\widehat{ΑΒΓ} = 70°, \widehat{ΒΓΔ} = 85°$ και $\widehat{ΓΔΑ} = 110°$, εφόσον $\overset{\frown}{ΑΔΓ} = 140°, \overset{\frown}{ΔΑΒ} = 170°$ και $\overset{\frown}{ΑΒΓ} = 220°$.

Εναλλακτικά, βρίσκουμε αρχικά ότι $\widehat{ΒΑΔ} = 95°$ και $\widehat{ΑΔΓ} = 110°$. Ακολούθως, συμπεραίνουμε άμεσα ότι $\widehat{ΒΓΔ} = 85°$ και $\widehat{ΑΒΓ} = 70°$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα *«Ένα κυρτό τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές»*. Έτσι, με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε τον υπολογισμό του μέτρου του μικρού τόξου $\overset{\frown}{ΔΑ}$.

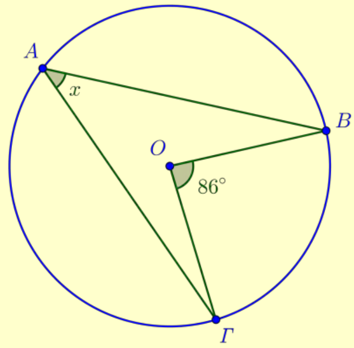
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

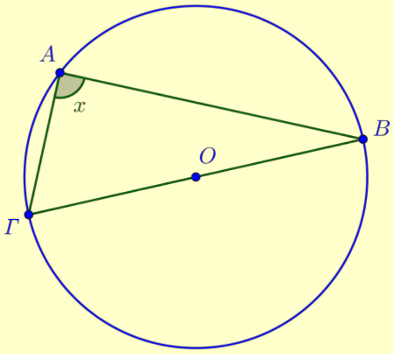
(α)



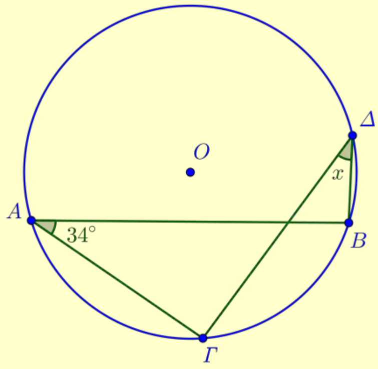
(β)



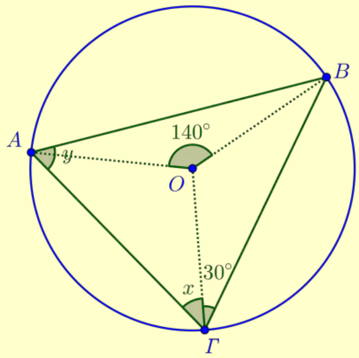
(γ)



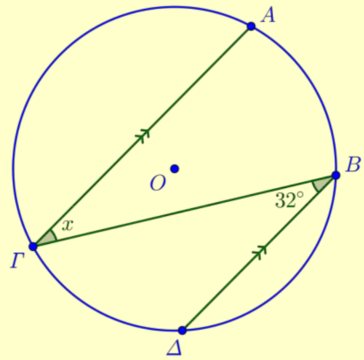
(δ)



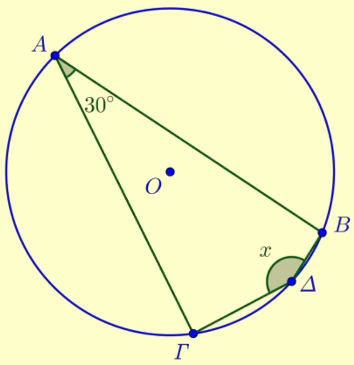
(ε)



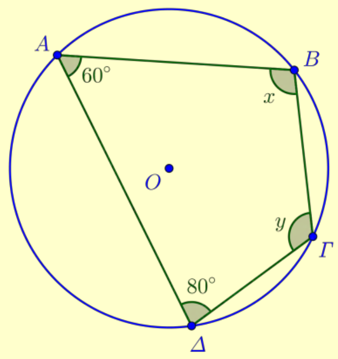
(στ)



(ζ)



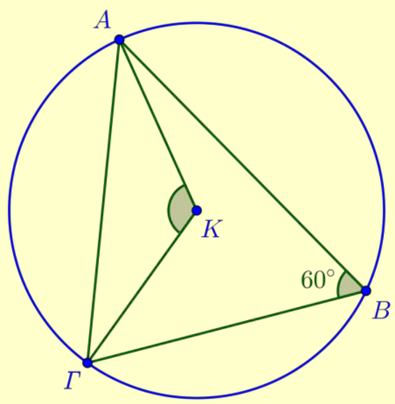
(η



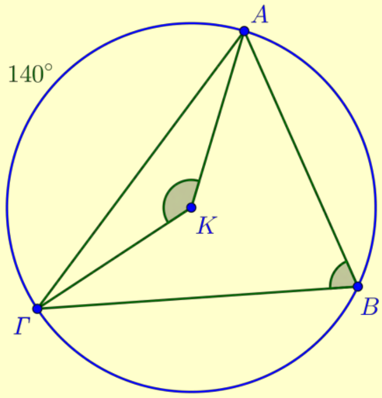
2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που είναι ίσες βαίνουν σίγουρα στο ίδιο τόξο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν μία εγγεγραμμένη γωνία είναι ορθή, τότε βαίνει σε ημικύκλιο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Σε κύκλους $(K,4)$ και $(\Lambda,8)$ αν οι επίκεντρες γωνίες τους AKB και $\Gamma\Lambda\Delta$ είναι αντίστοιχα ίσες, τότε και οι επίκεντρες βαίνουν σε ίσα τόξα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Στο πιο κάτω σχήμα, το σημείο K είναι το κέντρο του κύκλου και η γωνία $AB\Gamma$ έχει μέτρο 60°. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $AK\Gamma$ και το μέτρο του μικρότερου τόξου $A\Gamma$.



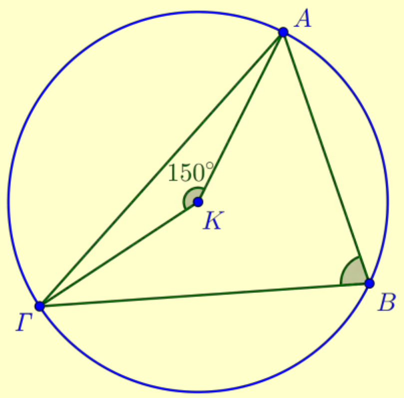
4. Στο πιο κάτω σχήμα, το μέτρο του μικρότερου τόξου $A\Gamma$ του κύκλου (K,ρ) είναι 140°. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών $AK\Gamma$ και $AB\Gamma$



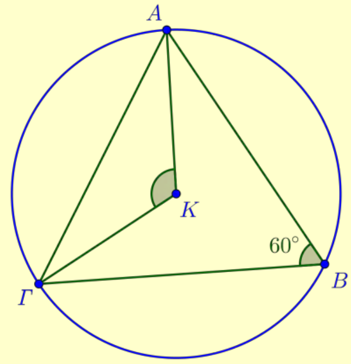
5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και ισχύει ότι $\hat{A} = 70^{\circ}$ και $\hat{B} = 60^{\circ}$, τότε το μέτρο του τόξου $ΑΒ$ είναι 100°.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$ είναι η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη γωνία αντίστοιχα που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου, τότε ισχύει $\hat{\varphi} = 2\hat{\omega}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Τα σημεία $Α, Β$ και $Γ$ είναι διαδοχικά πάνω σε κύκλο, έτσι ώστε τα τόξα $ΑΒ$, $ΒΓ$ και $ΓΑ$ να είναι ίσα μεταξύ τους. Το μέτρο του τόξου $ΑΒΓ$ είναι 240°.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε είναι ορθογώνιο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και ισχύει ότι $\hat{A} = 2\hat{B}$, τότε $\hat{A} = 60^{\circ}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Αν $Σ$ είναι σημείο εκτός ενός κύκλου και οι τέμνουσες $ΣΑΒ$, $ΣΓΔ$ του κύκλου σχηματίζουν τόξα $\widehat{AB} = 30^{\circ}$ και $\widehat{ΓΔ} = 70^{\circ}$, τότε ισχύει ότι $\hat{Σ} = 20^{\circ}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

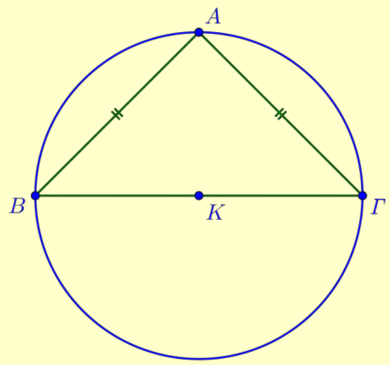
6. Στο πιο κάτω σχήμα, το σημείο $Κ$ είναι το κέντρο του κύκλου και η γωνία $ΑΚΓ$ έχει μέτρο $150°$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $ΑΒΓ$ και το μέτρο του μεγαλύτερου τόξου $ΑΓ$.



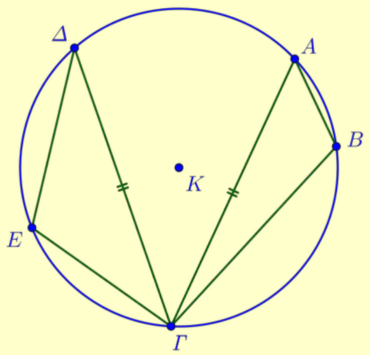
7. Στο πιο κάτω σχήμα, το σημείο K είναι το κέντρο του κύκλου και η γωνία $AB\Gamma$ έχει μέτρο $60°$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου $AK\Gamma$.



8. Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma = 4\ \mathrm{cm})$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ). Αν η πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου, τότε να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.



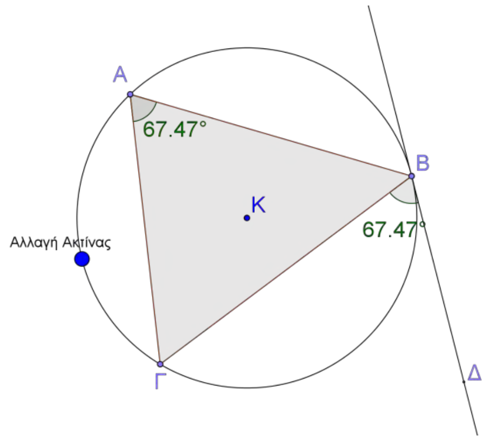
9. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος (K, R) και $A\Gamma = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\Gamma E\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ίσες.



2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Διερεύνηση

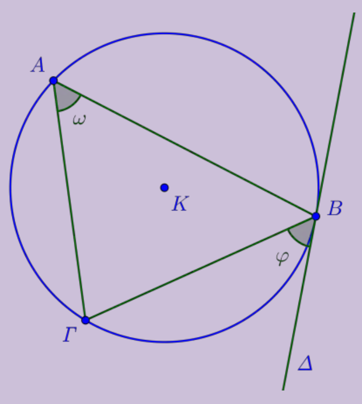
Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En03_DGeoXordiEfaptomeni.ggb»* ή να κατασκευάσετε σε χαρτί έναν κύκλο (K, R).



- Να εγγράψετε στον κύκλο (K, R) τρίγωνο $AB\Gamma$ (A, B, Γ σημεία του κύκλου).
- Να φέρετε την εφαπτομένη $B\Delta$ του κύκλου (K, R) στο σημείο B.
- Να μετρήσετε τις γωνίες $\Gamma B\Delta$ και ΓAB.
- Ποια είναι η σχέση μεταξύ των γωνιών $\Gamma B\Delta$ και ΓAB;
- Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου σε διάφορες θέσεις.
- Να αλλάξετε το μέγεθος του κύκλου.

Θεώρημα

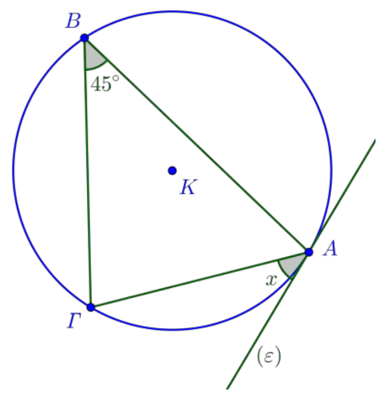
Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας.



Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα, έχουμε ότι $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$.

Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας x.



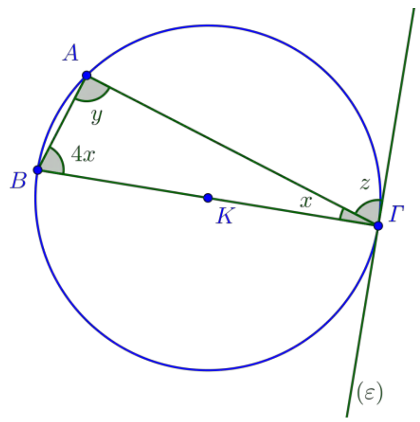
Λύση

Η οξεία γωνία x σχηματίζεται από τη χορδή $A\Gamma$ του κύκλου και την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο άκρο A της χορδής $A\Gamma$.

Άρα, από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης, η γωνία x είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία $AB\Gamma = 45°$, η οποία βαίνει στο μικρότερο τόξο της χορδής $A\Gamma$. Δηλαδή, $x = 45°$.

Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω σχήμα, η γωνία A βαίνει σε ημικύκλιο και η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y και z.



Λύση

Η γωνία A βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως, $y = 90^\circ$.

Έχουμε ότι:

$$4x + x + 90^\circ = 180^\circ \qquad \textit{(Άθροισμα γωνιών τριγώνου)}$$
$$\Rightarrow 5x = 90^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$$

1^{ος} τρόπος

Από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης, προκύπτει ότι:

$$z = B = 4x \Rightarrow z = 72^{\circ}$$

2^{ος} τρόπος

Οι γωνίες x και z είναι συμπληρωματικές, εφόσον γνωρίζουμε ότι η $K\Gamma$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Επομένως:

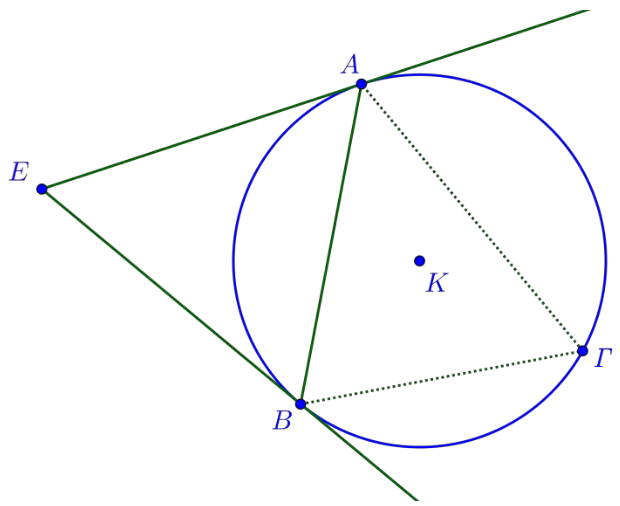
$$z = 90° - x \Rightarrow z = 90° - 18° \Rightarrow z = 72°$$

Παράδειγμα 3

Από σημείο E εκτός του κύκλου (K, ρ) φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα EA και EB προς τον κύκλο. Να αποδείξετε ότι $EA = EB$.

Λύση

Τα EA και EB είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου και οι ΓA και ΓB είναι χορδές κύκλου με το σημείο Γ να είναι τυχαίο και να ανήκει στον κύκλο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης, προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} E\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B \\ E\hat{B}A = A\hat{\Gamma}B \end{array}\right\} \Rightarrow E\hat{A}B = E\hat{B}A$$

Άρα, το τρίγωνο EAB είναι ισοσκελές με $EA = EB$.

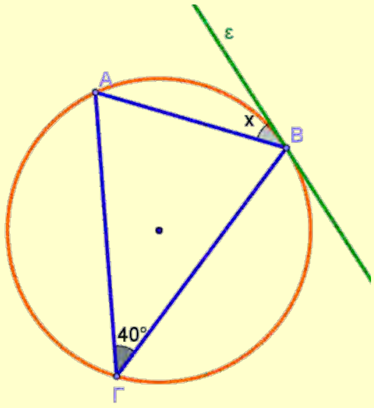
Παρατήρηση

Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο έξω από τον κύκλο είναι ίσα μεταξύ τους.

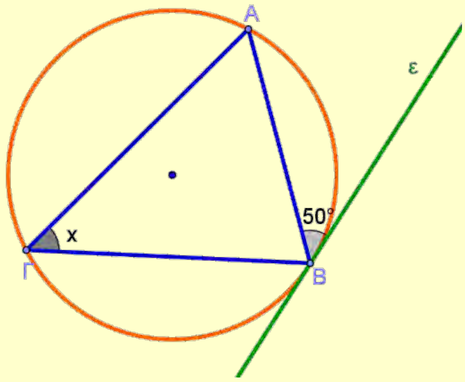
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την τιμή του x για καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, αν η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου.

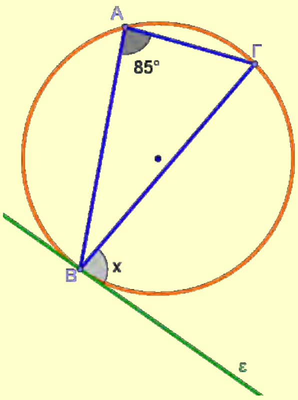
(α)



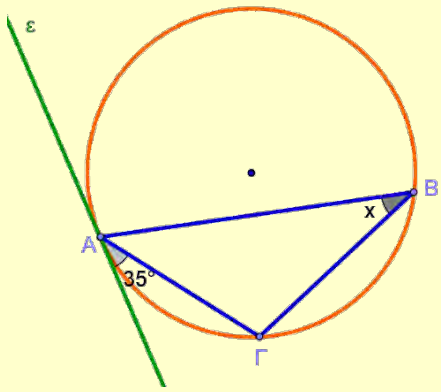
(β)



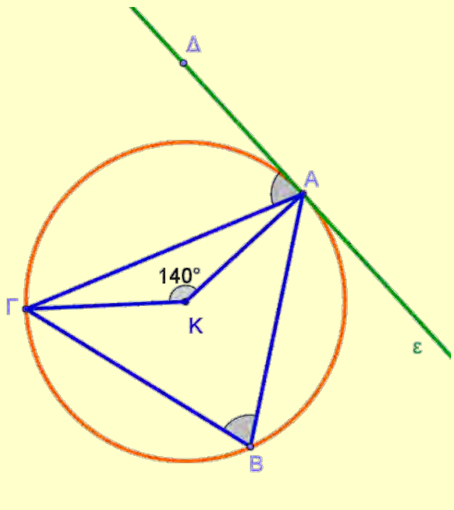
(γ)



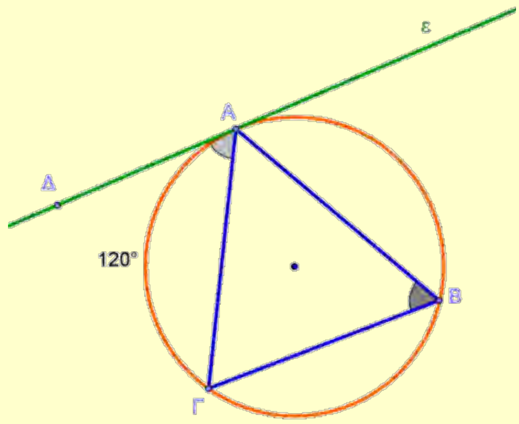
(δ)



2. Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) και η γωνία $AK\Gamma$ έχει μέτρο $A\widehat{K}\Gamma = 140°$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$.

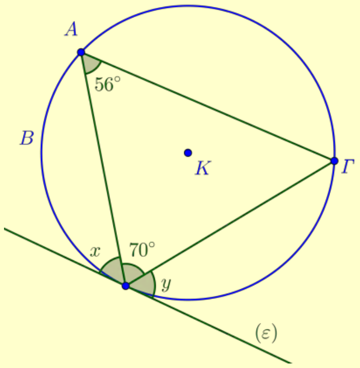


3. Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) και το μικρότερο τόξο $A\Gamma$ έχει μέτρο $\widehat{A\Gamma} = 120°$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$.

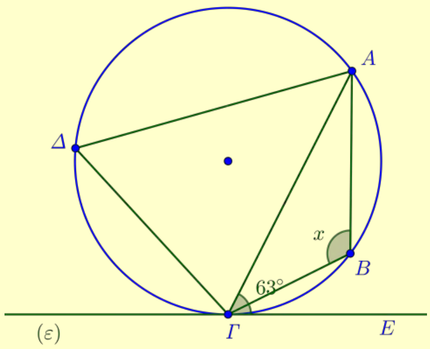


4. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και του y, για καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, αν (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου.

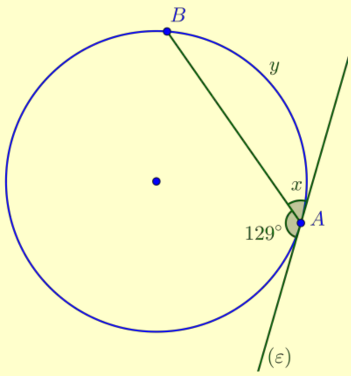
(α)



(β)

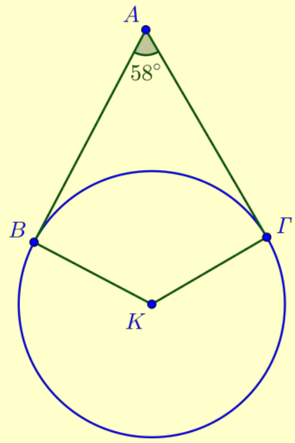


(γ)



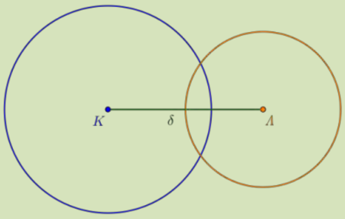
5. Δίνεται κύκλος $(K, 4\,\text{cm})$ και η χορδή του AB. Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη του BE. Η οξεία γωνία που σχηματίζει η χορδή AB με την BE είναι $E\hat{B}A = 70^{\circ}$. Να υπολογίσετε τη γωνία AKB.

6. Από σημείο A που βρίσκεται εκτός του κύκλου (K, P) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$. Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 58^{\circ}$, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $B\Gamma$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $BK\Gamma$.

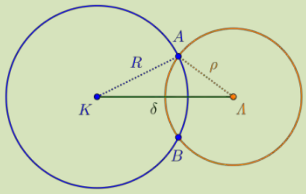
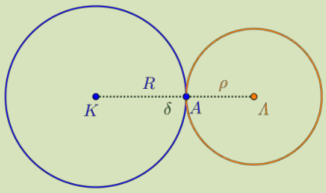
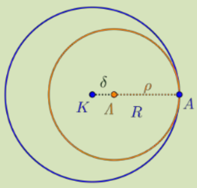
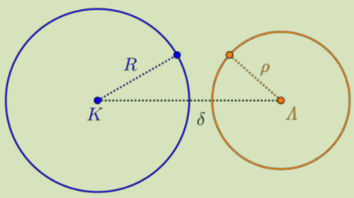
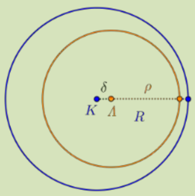


Περίληψη

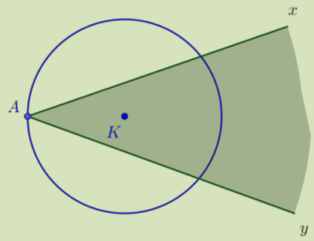
1. **Διάκεντρος** δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων. Το μήκος της συμβολίζεται με δ.
Για παράδειγμα, στους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) ισχύει ότι $\delta = K\Lambda$.



2. **Σχετική θέση δύο κύκλων**

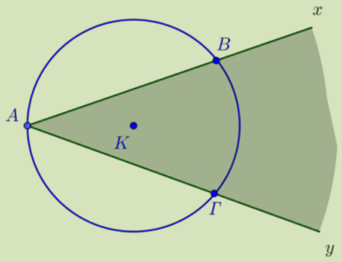
Σχέση διακέντρου – ακτινών $(\boldsymbol{R \geq \rho})$	**Σχετική θέση δύο κύκλων**	**Σχήμα**
$R - \rho < \delta < R + \rho$	Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται.	
$\delta = R + \rho$	Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά.	
$\delta = R - \rho$	Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εσωτερικά.	
$\delta > R + \rho$	Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εξωτερικά.	
$\delta < R - \rho$	Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εσωτερικά.	

3. **Εγγεγραμμένη γωνία κύκλου** ονομάζεται η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου.

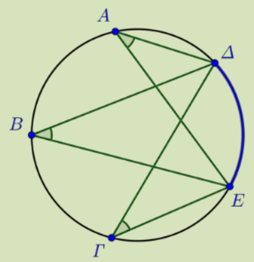


Παρατηρήσεις

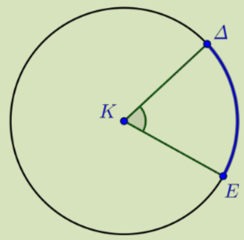
- Αν B και Γ είναι τα σημεία τομής της $x\hat{A}y$ με τον κύκλο, τότε θα λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $BA\Gamma$ βαίνει στο τόξο $B\Gamma$.



- Σε κάθε τόξο αντιστοιχούν άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες.

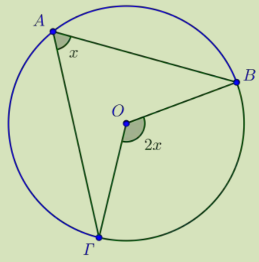


- Σε κάθε τόξο αντιστοιχεί μόνο μία επίκεντρη γωνία.



4. **Θεώρημα**

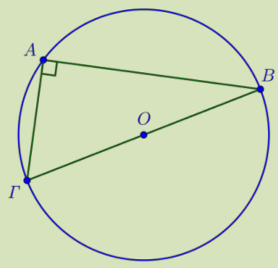
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.



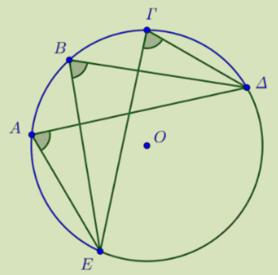
Για παράδειγμα, $B\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2} B\hat{O}\Gamma$.

5. **Πορίσματα**

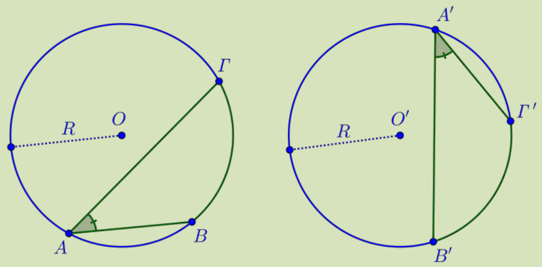
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



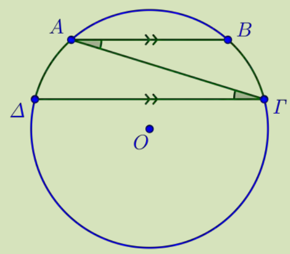
- Εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους.



- Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα ίσων κύκλων ή του ίδιου κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους και αντίστροφα.

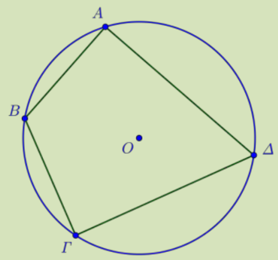


- Τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων χορδών είναι ίσα.



6. **Ορισμός**

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο σε κύκλο**, όταν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

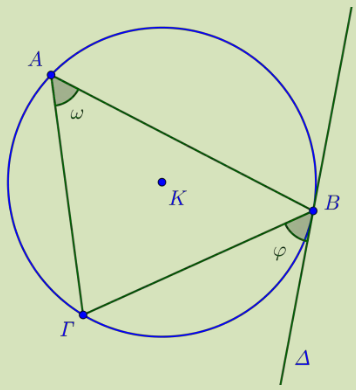


7. **Θεώρημα**

Κάθε τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.

8. **Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης**

Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που αντιστοιχεί στο τόξο, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας.

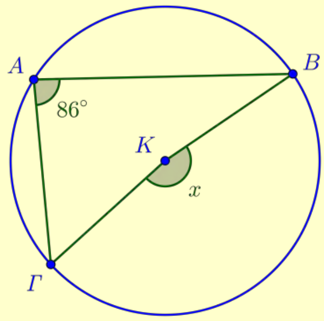


Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα, έχουμε ότι $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$.

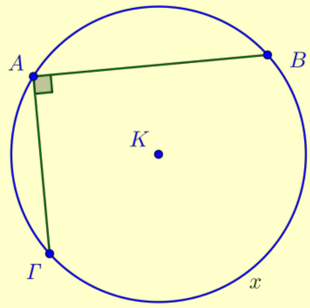
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

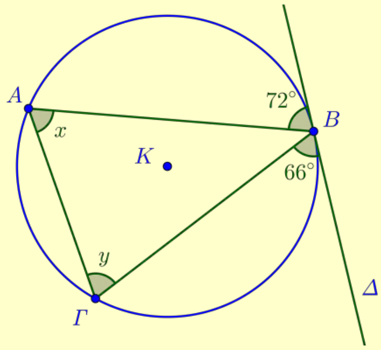
(α)



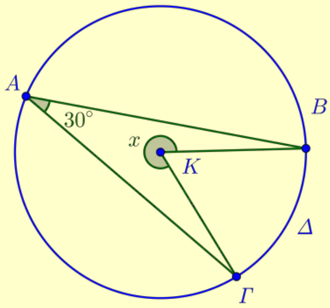
(β)



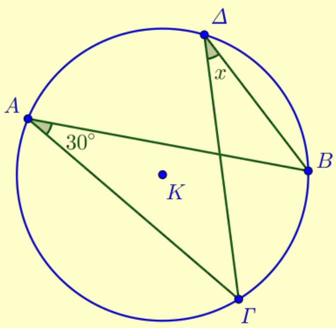
(γ)



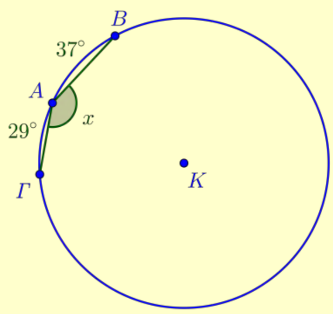
(δ)



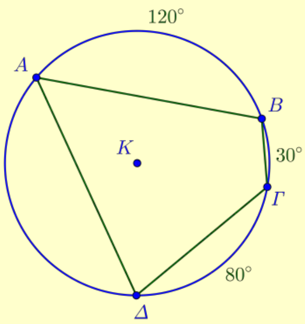
(ε)



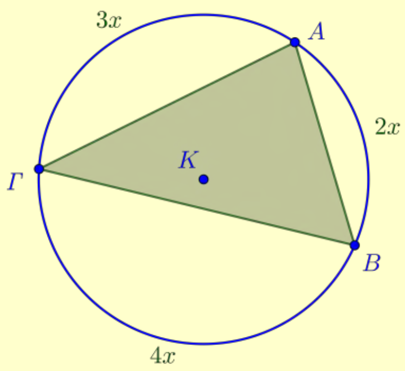
(στ)



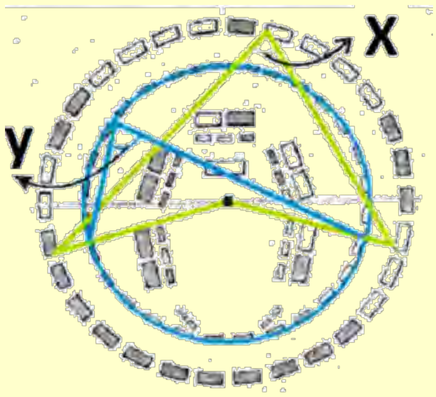
2. Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\widehat{AB} = 120^\circ, \widehat{B\Gamma} = 30^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 80^\circ$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.



3. Στο πιο κάτω σχήμα, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$.

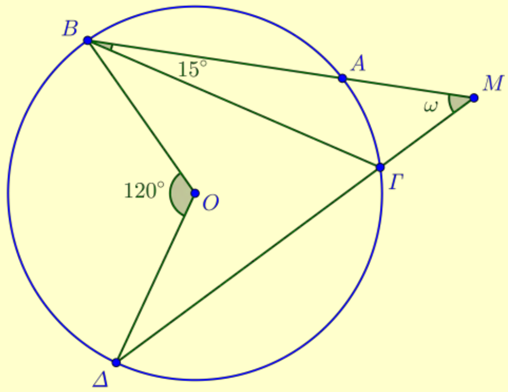


4. Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται η κάτοψη του αγγλικού μνημείου Stonehedge, που είναι φτιαγμένο από βράχους. Τμήματα του μνημείου δημιουργούν δύο ομόκεντρους κύκλους.

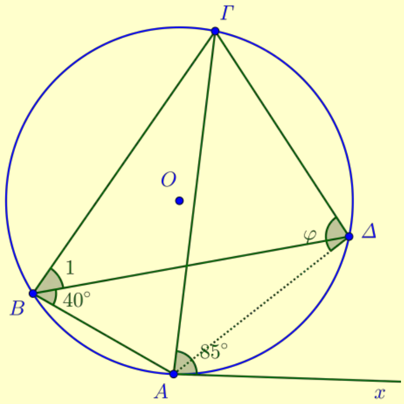


Να αποδείξετε ότι οι γωνίες x και y είναι ίσες.

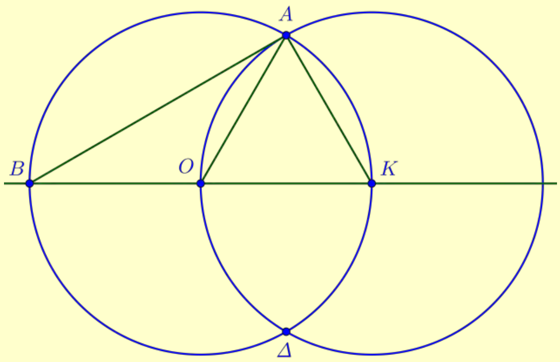
5. Στο πιο κάτω σχήμα, η επίκεντρη γωνία $ΒΟΔ$ είναι 120° και η γωνία $ΓΒΑ$ είναι 15°. Να υπολογίσετε τις γωνίες $ΒΓΔ$ και $ΒΜΔ$.



6. Στο διπλανό σχήμα, η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) στο σημείο του A. Αν δίνεται ότι $\Gamma\hat{A}x = 85°$ και $\Delta\hat{B}A = 40°$, τότε:
   (α) να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45°$ και
   (β) να υπολογίσετε τη γωνία φ.



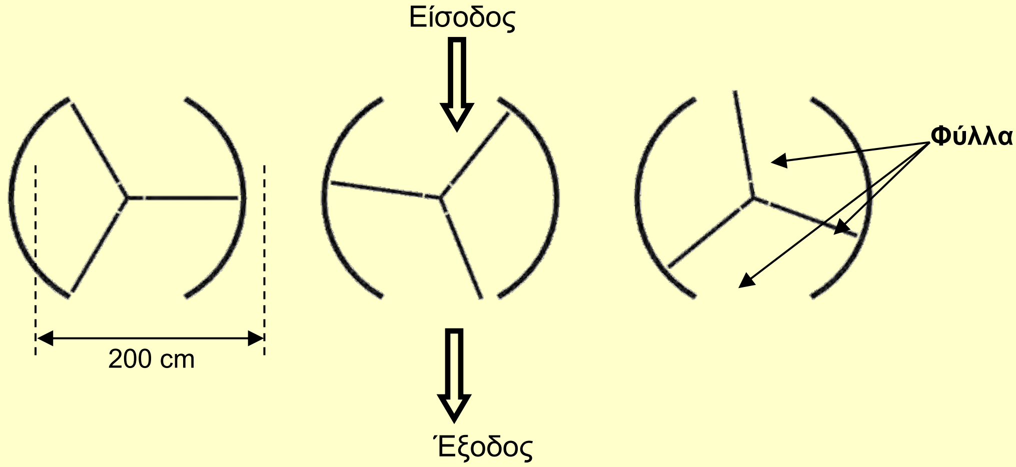
7. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ), με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ.
   (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.
   (β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK.



Λύση Προβλήματος

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΠΟΡΤΑ

Μια περιστρεφόμενη πόρτα περιλαμβάνει τρία φύλλα που περιστρέφονται σε έναν κυκλικό χώρο. Η εσωτερική διάμετρος αυτού του χώρου είναι 2 μέτρα (200 εκατοστόμετρα). Τα τρία φύλλα της πόρτας χωρίζουν τον χώρο σε τρεις ίσους τομείς. Οι πιο κάτω τρεις κατόψεις δείχνουν τα φύλλα της πόρτας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.

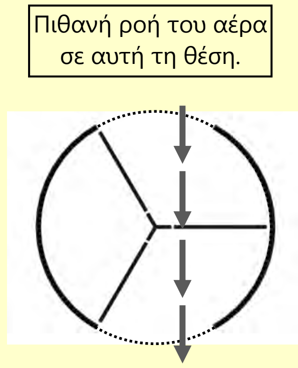


Ερώτηση 1:

Ποιο είναι το άνοιγμα της γωνίας, σε μοίρες, που σχηματίζεται από δύο φύλλα της πόρτας;

....

Ερώτηση 2:



Τα δύο ανοίγματα της πόρτας (τα διακεκομμένα τόξα στο διάγραμμα) έχουν το ίδιο μέγεθος. Στην περίπτωση που αυτά τα ανοίγματα είναι πολύ μεγάλα, τα περιστρεφόμενα φύλλα δεν μπορούν να σφραγίσουν τον χώρο και έτσι μπορεί να υπάρξει ελεύθερη ροή αέρα μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, προκαλώντας ανεπιθύμητη απώλεια ή συσσώρευση θερμότητας. Αυτό φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Ποιο είναι το μέγιστο μήκος του τόξου, σε εκατοστόμετρα (cm), που μπορεί να έχει κάθε άνοιγμα της πόρτας, ώστε να μην μπορεί να υπάρξει ελεύθερη ροή αέρα μεταξύ της εισόδου και της εξόδου;

....

Ερώτηση 3:

Η πόρτα κάνει 4 περιστροφές σε ένα λεπτό. Υπάρχει χώρος για δύο άτομα σε καθένα από τους τρεις τομείς. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ατόμων που μπορούν να εισέλθουν από την πόρτα στο κτήριο σε 30 λεπτά;

PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

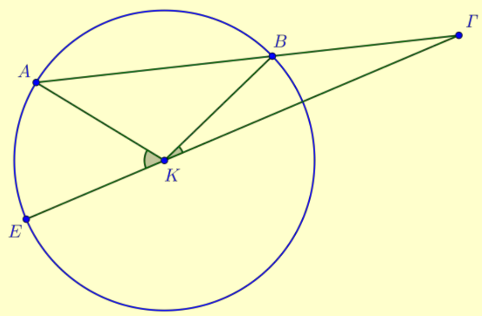
1. Να δείξετε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με τη διαφορά των ακτίνων τους.

2. Να αποδείξετε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων τους.

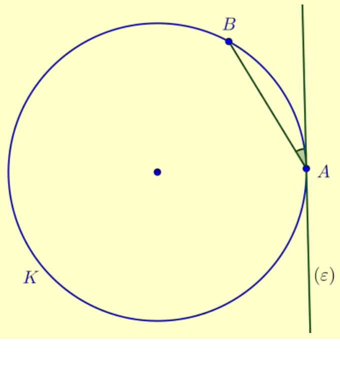
3. Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ και εφάπτονται εξωτερικά. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους στα σημεία A και B, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $KAB\Lambda$ είναι:
   (α) τραπέζιο, όταν οι κύκλοι είναι άνισοι
   (β) ορθογώνιο, όταν οι κύκλοι είναι ίσοι.

4. Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο ίσων τεμνόμενων κύκλων είναι η μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.

5. Κατασκευάζουμε κύκλο $(K, 5\ \mathrm{cm})$ και μια χορδή του AB. Στην προέκταση της AB προς το B, παίρνουμε τμήμα $B\Gamma = 5\ \mathrm{cm}$. Η προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος ΓK προς το K τέμνει τον κύκλο στο E. Να δείξετε ότι $E\widehat{K}A = 3 \cdot B\widehat{K}\Gamma$.

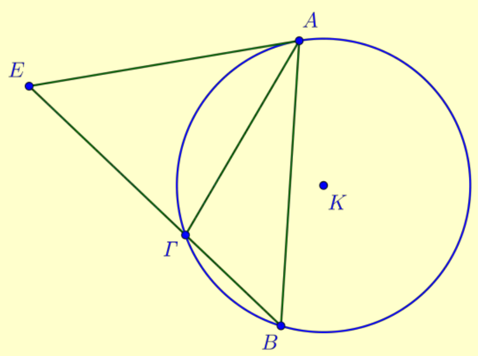


6. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που δημιουργείται από τη χορδή AB και την εφαπτομένη (ε) του κύκλου (Λ, ρ) στο σημείο A, αν ισχύει ότι $\widehat{AKB} = 5 \cdot \widehat{AMB}$. Τα M και K είναι σημεία του κύκλου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



7. Να κατασκευάσετε κύκλο με κέντρο K και διάμετρο $AB = 7\ \mathrm{cm}$. Να γράψετε ένα σημείο Γ στην περιφέρεια του κύκλου, τέτοιο ώστε η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 30^{\circ}$. Να φέρετε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ και να σημειώσετε με Δ την τομή της εφαπτομένης με την προέκταση της AB. Να δείξετε ότι το $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

8. Από σημείο E εκτός κύκλου (K, ρ) φέρουμε την εφαπτομένη EA, όπου A είναι το σημείο επαφής και την τέμνουσα $E\Gamma B$. Αν $AB = EA$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.



ΕΝΟΤΗΤΑ 04

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Διερεύνηση 1

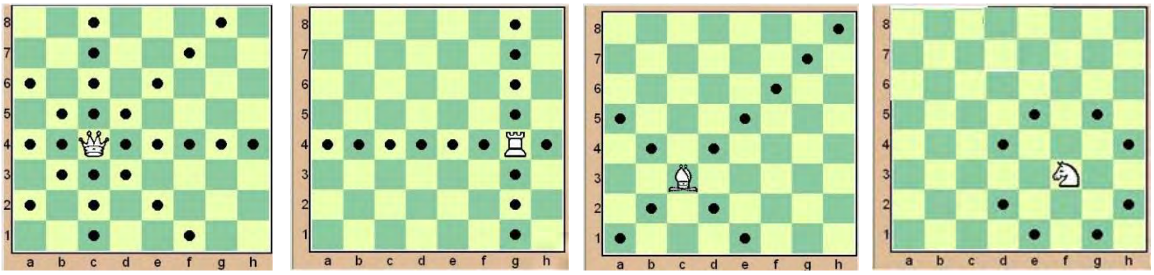
Το παιχνίδι του σκακιού παίζεται μεταξύ δύο αντιπάλων που κινούν εναλλάξ τα κομμάτια τους πάνω σε μια τετράγωνη επιφάνεια που λέγεται «σκακιέρα». Ο παίκτης με τα λευκά κομμάτια αρχίζει το παιχνίδι.

Ο αντικειμενικός σκοπός (στόχος) κάθε παίκτη είναι να «επιτεθεί» στον Βασιλιά του αντιπάλου του με τέτοιο τρόπο, ώστε ο αντίπαλος να μην έχει κίνηση.

Στο ξεκίνημα του παιχνιδιού ο ένας παίκτης έχει 16 ανοιχτόχρωμα κομμάτια (τα «λευκά κομμάτια») και ο άλλος έχει 16 σκουρόχρωμα κομμάτια (τα «μαύρα κομμάτια»).

Κομμάτια	**Σύμβολο**	**Αρχική διάταξη στη σκακιέρα**
Βασιλιάς		
Βασίλισσα		
Πύργος		
Αξιωματικός		
Άλογο		
Πιόνι		

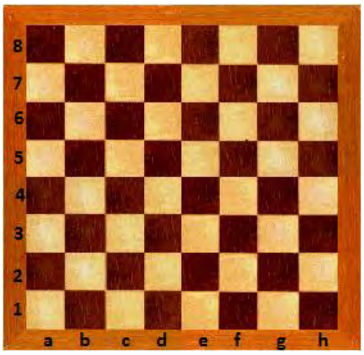
Το κάθε κομμάτι μπορεί να κινηθεί σε μια νέα θέση, σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες (κανονικές κινήσεις) που διέπουν το σκάκι. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται ο τρόπος που κινούνται η βασίλισσα, ο πύργος, το άλογο και ο αξιωματικός.



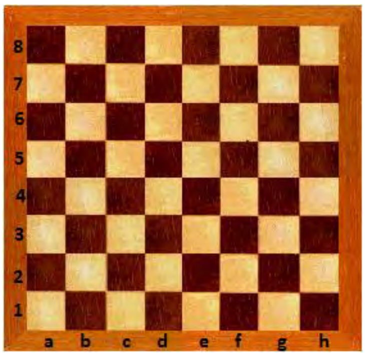
Η βασίλισσα κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια, ο πύργος κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια και κατακόρυφα, ο αξιωματικός κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο διαγώνια και το άλογο κινείται σε ένα από τα πλησιέστερα τετράγωνα από αυτό που βρίσκεται, αλλά όχι στην ίδια οριζόντια ή κατακόρυφη ή διαγώνιο.

- Στη σκακιέρα A να τοποθετήσετε μια βασίλισσα στη θέση $(f,7)$ και να περιγράψετε την κίνηση της βασίλισσας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στη σκακιέρα B να τοποθετήσετε ένα άλογο στη θέση $(d,4)$ και να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στη σκακιέρα Γ να τοποθετήσετε έναν πύργο στη θέση $(c,3)$ και να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στη σκακιέρα Δ να τοποθετήσετε έναν αξιωματικό στη θέση $(e,6)$ και να περιγράψετε την κίνηση του αξιωματικού σε τρεις διαφορετικές θέσεις.

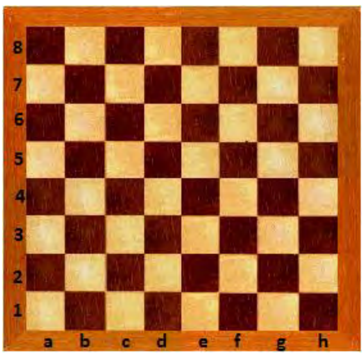
A



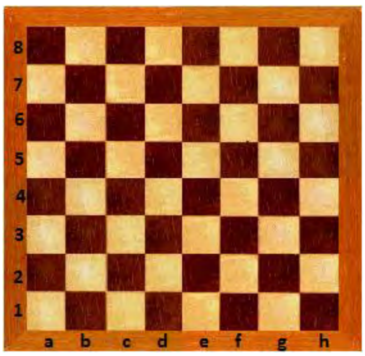
B



Γ

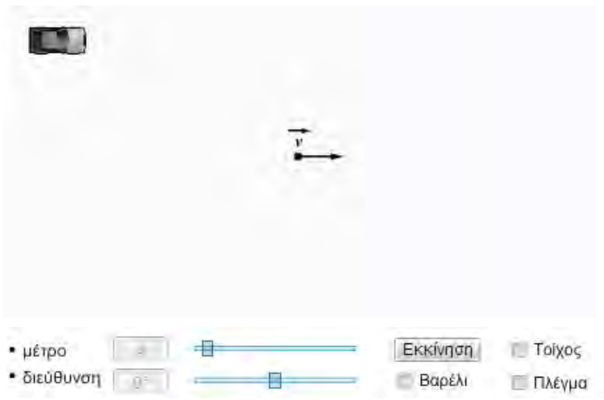


Δ



Διερεύνηση 2

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_1.1»*.



- Να επιλέξετε το εικονίδιο *«Εκκίνηση»*, για να αρχίσει το αυτοκίνητο να κινείται με ορισμένη ταχύτητα και προς ορισμένη κατεύθυνση. Με το εικονίδιο *«Εκκίνηση»* μπορείτε να σταματήσετε το αυτοκίνητο.
- Με τον δρομέα *«Μέτρο»* μεταβάλλεται η ταχύτητα με την οποία κινείται το αυτοκίνητο και με τον δρομέα *«Διεύθυνση»* περιστρέφεται το αυτοκίνητο και καθορίζεται η πορεία που θα ακολουθήσει.
- Να επιλέξετε τα εικονίδια *«Τοίχος»* και *«Βαρέλι»* και να οδηγήσετε το αυτοκίνητο ώστε να συγκρουστεί με το βαρέλι, αποφεύγοντας τους τοίχους.
- Να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου σε κάθε περίπτωση.

Τα μεγέθη χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες:

Α. **Μονόμετρο μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται μόνο από το μέτρο του.

Για παράδειγμα, το μήκος, η μάζα, ο όγκος, η θερμοκρασία είναι μονόμετρα μεγέθη.

Η πλήρης περιγραφή ενός μονόμετρου μεγέθους απαιτεί:

(α) μια μονάδα μέτρησης και

(β) έναν αριθμό που δηλώνει πόσες φορές η μονάδα περιέχεται στο μέγεθος αυτό.

Για παράδειγμα, για να εκφράσουμε τη μάζα ενός ανθρώπου, χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το χιλιόγραμμο (Άνθρωπος μάζας 80 kg).

Β. Διανυσματικό μέγεθος ή **διάνυσμα** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται από το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά του.

Για παράδειγμα, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση, η δύναμη είναι διανυσματικά μεγέθη.

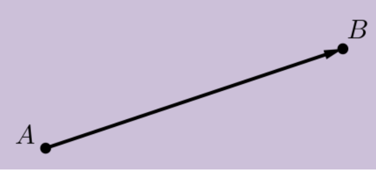
Η πλήρης περιγραφή ενός διανυσματικού μεγέθους απαιτεί:

(α) μέτρο,
(β) διεύθυνση και
(γ) φορά.

Για παράδειγμα, η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου έχει μέτρο $100\,\mathrm{km/h}$*, διεύθυνση τον αυτοκινητόδρομο Λευκωσίας – Λεμεσού και φορά από Λεμεσό προς Λευκωσία.*

Ορισμός

Αν A και B είναι δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το A και πέρας το B λέγεται **εφαρμοστό διάνυσμα** με σημείο εφαρμογής το A και συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$



Σχόλια

- Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει τα εξής στοιχεία:
  - **Διεύθυνση:** Η ευθεία (ε) που ορίζεται από τα άκρα A, B (**φορέας του διανύσματος**).
  - **Φορά:** Καθορίζεται από την αρχή και το τέλος ενός διανύσματος. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει αρχή το A και τέλος το B, ενώ το διάνυσμα αρχή $\overrightarrow{BA}$ έχει αρχή το B και τέλος το A.
  - **Μέτρο:** Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός ή μηδέν.
- Ένα διάνυσμα λέγεται **μηδενικό**, όταν η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν. Το συμβολίζουμε με $\vec{\mathbf{0}}$ και έχει μέτρο μηδέν. Δηλαδή, $|\vec{0}| = 0$.
- **Μοναδιαίο** λέγεται το διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα.

Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ *είναι μοναδιαίο αν* $|\overrightarrow{AB}| = 1$.

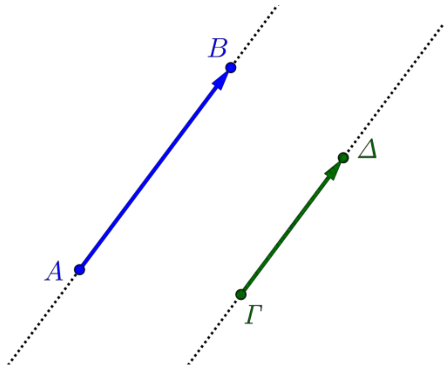
Ορισμός

Παράλληλα ή **συγγραμμικά** ονομάζονται τα μη-μηδενικά διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση.

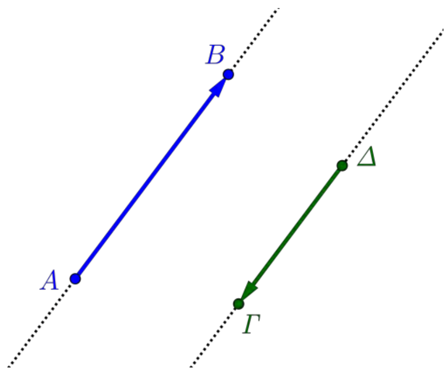
Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα, γράφουμε $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- Τα **ομόρροπα**, τα οποία έχουν την **ίδια φορά**.
  Για παράδειγμα, τα παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα, γιατί έχουν την ίδια φορά. Γράφουμε $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



- Τα **αντίρροπα**, τα οποία έχουν **αντίθετη φορά**.
  Για παράδειγμα, τα παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι αντίρροπα, γιατί έχουν αντίθετη φορά. Γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



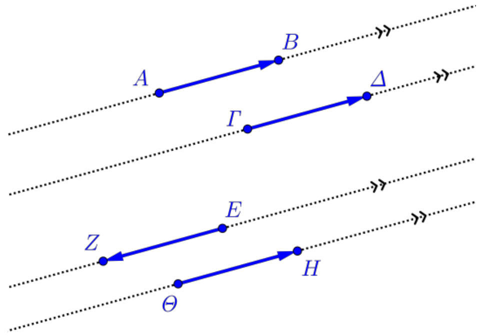
Ορισμοί

(α) **Ίσα** είναι τα διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.

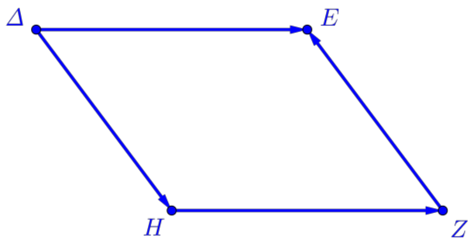
(β) **Αντίθετα** είναι δύο διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά.

Για παράδειγμα:

- *Στο πιο κάτω σχήμα, τα παράλληλα διανύσματα* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ *και* $\overrightarrow{\Theta H}$ *είναι ίσα, ενώ το διάνυσμα* $\overrightarrow{EZ}$ *είναι αντίθετο με τα υπόλοιπα τρία διανύσματα.*
  Γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Theta H} = -\overrightarrow{EZ}$.

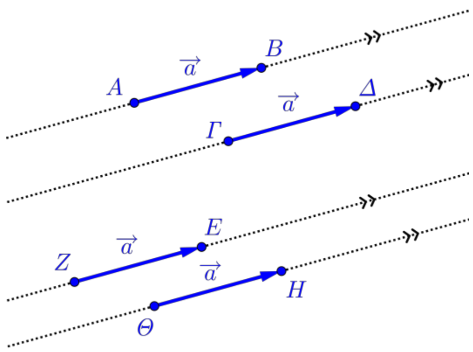


- *Στο πιο κάτω παραλληλόγραμμο ΔEZH τα διανύσματα* $\overrightarrow{\Delta E}$ *και* $\overrightarrow{HZ}$ *είναι ίσα, ενώ τα διανύσματα* $\overrightarrow{\Delta H}$ *και* $\overrightarrow{ZE}$ *είναι αντίθετα.*
  Γράφουμε $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{HZ}$, $\overrightarrow{\Delta H} = -\overrightarrow{ZE}$.



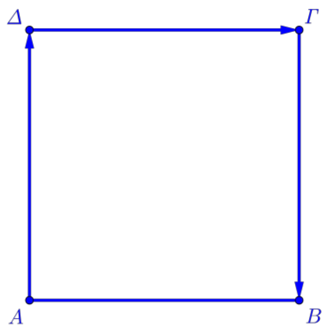
Επίσης, ισχύει $\overrightarrow{\Delta O} = \overrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{EO} = -\overrightarrow{HO}$ *κλπ.*

Ορισμός
Κάθε εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ του επιπέδου έχει άπειρα διανύσματα ίσα με αυτό. Το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου που είναι ίσα με το $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **ελεύθερο διάνυσμα** και μπορεί να συμβολιστεί με $\vec{a}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (ή οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα ίσο με αυτό) θεωρείται **αντιπρόσωπος** του ελεύθερου διανύσματος.



Παράδειγμα 1

Δίνεται το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



(α) Να γράψετε δύο διανύσματα, τα οποία έχουν ως αρχή το σημείο $Β$.

(β) Να γράψετε ένα διάνυσμα, που να είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΓ}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Να γράψετε τις σχέσεις που συνδέουν τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$.

Λύση

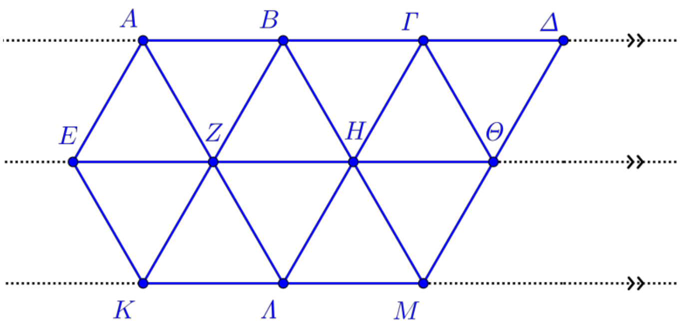
(α) Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΒΑ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ έχουν ως αρχή το σημείο $Β$.

(β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$ είναι ίσο με το $\overrightarrow{ΔΓ}$, γιατί έχουν την ίδια διεύθυνση (ως απέναντι πλευρές τετραγώνου), την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο (ως πλευρές τετραγώνου).

(γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$ είναι αντίθετα. Έχουν την ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και το ίδιο μέτρο ($ΓΒ \parallel ΑΔ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, $\overrightarrow{ΓΒ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{ΑΔ}$, $|\overrightarrow{ΓΒ}| = |\overrightarrow{ΑΔ}|$).

Παράδειγμα 2

Το πιο κάτω σχήμα αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $2\,\text{cm}$. Τα σημεία $Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ$ και $Μ$ είναι οι κορυφές των τριγώνων.



(α) Να βρείτε ένα ζεύγος ομόρροπων διανυσμάτων και ένα ζεύγος αντίρροπων διανυσμάτων.

(β) Να βρείτε ένα ζεύγος ίσων διανυσμάτων και ένα ζεύγος αντίθετων διανυσμάτων.

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΓ}$, $\overrightarrow{ΒΚ}$ και $\overrightarrow{ΘΕ}$.

Λύση

(α) Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΔ$ και $ΕΘ$ είναι παράλληλα. Έτσι, τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΖΗ}$ είναι ομόρροπα, γιατί είναι παράλληλα και έχουν την ίδια φορά.

Ομοίως, τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΗΖ}$ είναι αντίρροπα, γιατί είναι παράλληλα και έχουν αντίθετη φορά.

(β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΖΘ}$ είναι ίσα, γιατί είναι παράλληλα, έχουν την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο ($|\overrightarrow{ΑΓ}| = |\overrightarrow{ΖΘ}| = 4 \text{ cm}$).

Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΚΒ}$ και $\overrightarrow{ΔΜ}$ είναι αντίθετα, γιατί είναι παράλληλα, έχουν την αντίθετη φορά και το ίδιο μέτρο ($|\overrightarrow{ΚΒ}| = |\overrightarrow{ΔΜ}| = 4 \text{ cm}$).

Δηλαδή, ισχύει $\overrightarrow{ΚΒ} = -\overrightarrow{ΔΜ}$.

(γ) Το μήκος του $ΑΓ$ είναι ίσο με 4 cm. Άρα, έχουμε ότι $|\overrightarrow{ΑΓ}| = 4$.

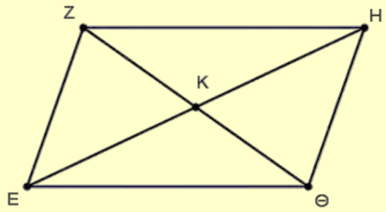
Το μήκος του $ΒΚ$ είναι ίσο με 4 cm. Άρα, έχουμε ότι $|\overrightarrow{ΒΚ}| = 4$.

Το μήκος του $ΘΕ$ είναι ίσο με 6 cm. Άρα, έχουμε ότι $|\overrightarrow{ΘΕ}| = 6$.

Δραστηριότητες

1. Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις περιγράφει μονόμετρο και ποια διανυσματικό μέγεθος;
   (α) Ένα καρπούζι ζυγίζει 8 kg.
   (β) Ένα πλοίο κινείται με ταχύτητα 80 ναυτικά μίλια την ώρα νοτιοανατολικά του λιμανιού.
   (γ) Ο πυρετός μου έφθασε τους $39°C$.
   (δ) Το σπίτι του Ανδρέα βρίσκεται 1,5 km μακριά από το δικό μου.
   (ε) Το σπίτι του Ανδρέα βρίσκεται 1,5 km δυτικά από το δικό μου.
   (στ) Κοιμήθηκα μόνο 4 ώρες χθες.

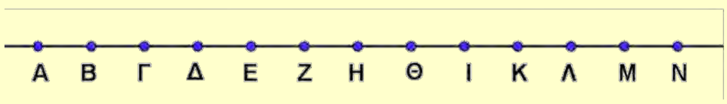
2. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $EZH\Theta$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

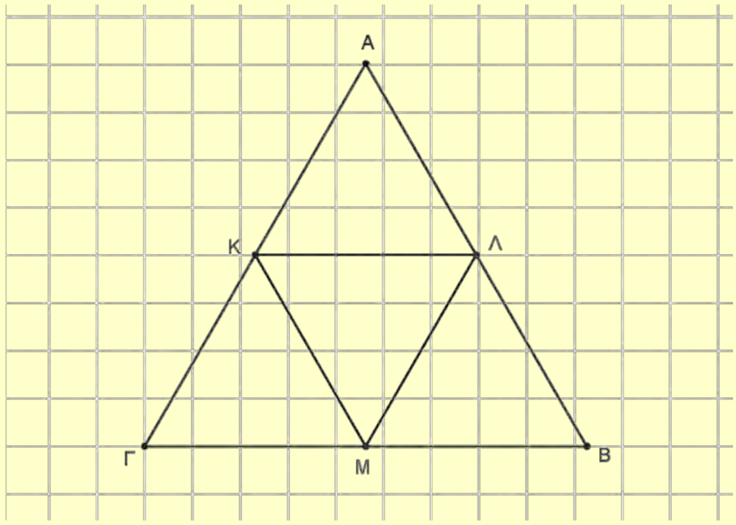
(α)	$\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Theta H}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\overrightarrow{ZK} = \overrightarrow{\Theta K}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\lvert\overrightarrow{ZH}\rvert = \lvert\overrightarrow{\Theta E}\rvert$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{KH}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Στο πιο κάτω σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων είναι ίσες με 1 cm.

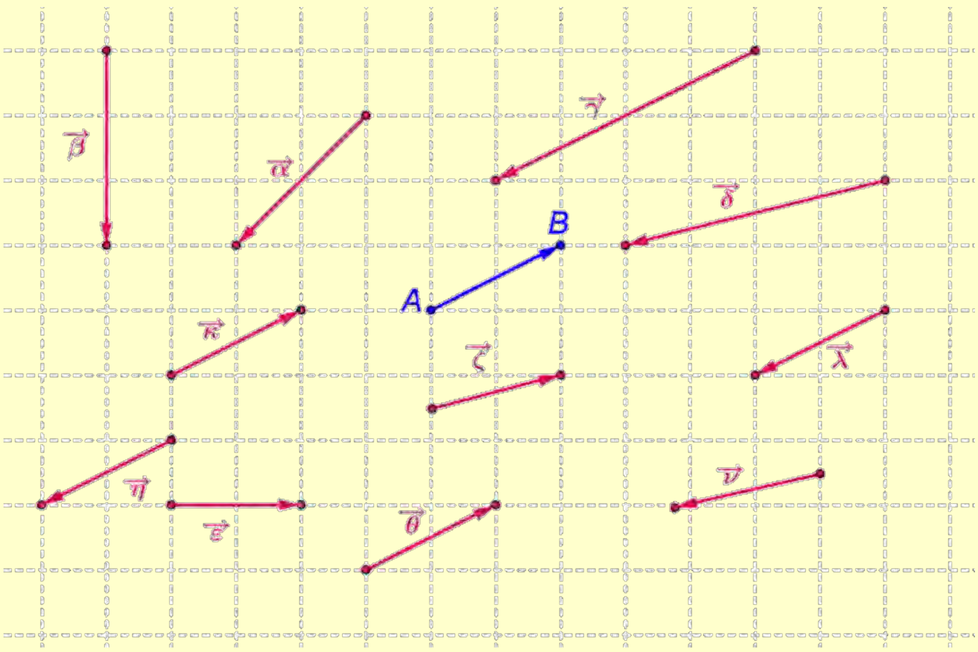


   (α) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων:
$$\overrightarrow{\Delta E},\ \overrightarrow{\Delta Z},\ \overrightarrow{\Delta \Theta},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{B\Gamma},\ \overrightarrow{B\Delta},\ \overrightarrow{BZ},\ \overrightarrow{K\Theta},\ \overrightarrow{NI}$$
   (β) Ποια από τα πιο πάνω διανύσματα είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα;
   (γ) Να γράψετε ένα διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{\Gamma E}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\overrightarrow{\Gamma E}$.

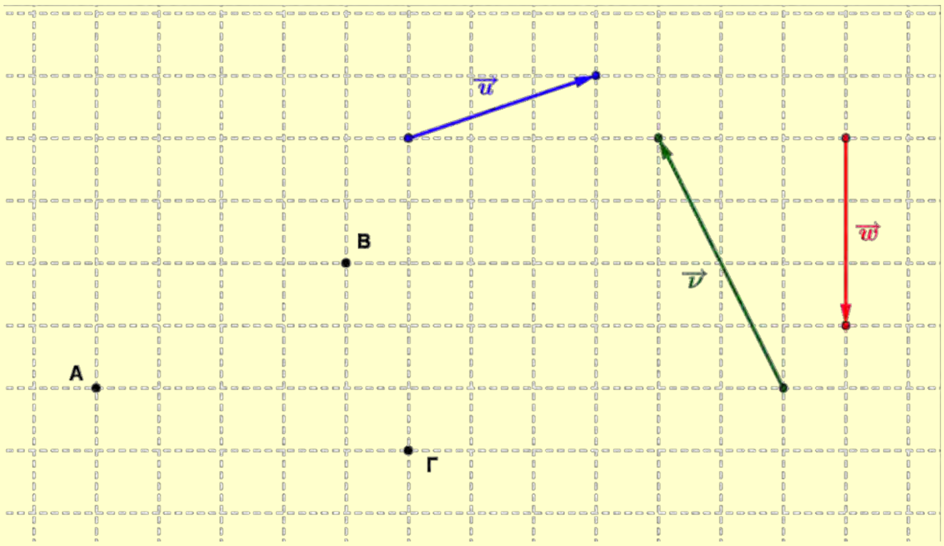
4. Στο πιο κάτω σχήμα όλα τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα με πλευρά μήκους 1 cm.
   (α) Να βρείτε όλα τα ίσα και τα αντίθετα διανύσματα που σχηματίζονται από τις κορυφές των τριγώνων.
   (β) Να σχεδιάσετε, με βάση το σχήμα, τα διανύσματα:
      i. $-\overrightarrow{KM}$
      ii. $\overrightarrow{K\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$
      iii. $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{M\Gamma}$
      iv. $-\overrightarrow{MB}$



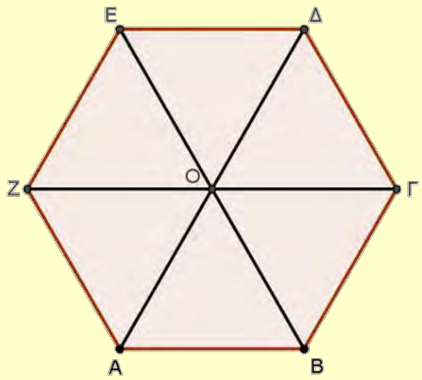
5. Με βάση το πιο κάτω σχήμα:
   (α) Να βρείτε διανύσματα που είναι ίσα με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.
   (β) Να βρείτε διανύσματα που είναι αντίθετα με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.



6. Να σχεδιάσετε στο πιο κάτω σχήμα ένα διάνυσμα, το οποίο να:
   (α) είναι ίσο με το $\vec{u}$ και να αρχίζει από το σημείο A
   (β) είναι αντίθετο του $\vec{v}$ και να αρχίζει από το σημείο B
   (γ) έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του $\vec{w}$, χωρίς να είναι ίσο με το $\vec{w}$, και να έχει αρχίζει από το σημείο $Γ$.



7. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται το εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ με όλες τις πλευρές του ίσες με 2 cm και τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



Αν $ΖΓ \parallel ΕΔ$, $ΑΔ \parallel ΖΕ$, $ΕΒ \parallel ΔΓ$, να γράψετε δύο διανύσματα, τα οποία να:
(α) είναι ίσα
(β) είναι αντίθετα
(γ) είναι παράλληλα με το $\overrightarrow{ΒΓ}$
(δ) είναι αντίρροπα με το $\overrightarrow{ΕΖ}$
(ε) έχουν μέτρο 4.

4.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Διερεύνηση

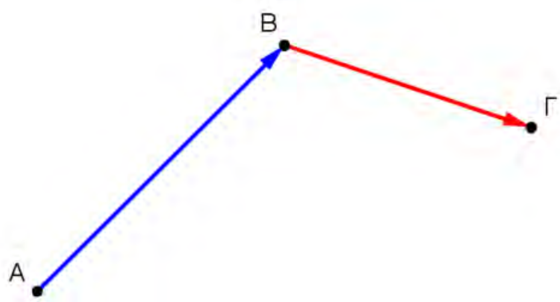
Δύο παιδιά έχουν δέσει ένα καροτσάκι με δύο σχοινιά, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα. Θα τραβήξουν ταυτόχρονα τα σχοινιά, για να το μετακινήσουν. Προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το καροτσάκι;

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο
«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_3.1».

Αφού επιλέξετε το εικονίδιο, να παρακολουθήσετε την κίνηση του καροτσιού σε διαδοχικά βήματα. Να περιγράψετε την κίνηση του καροτσιού.

Ορισμός
Δύο διανύσματα λέγονται **διαδοχικά**, όταν το τέλος του ενός διανύσματος είναι η αρχή του άλλου.

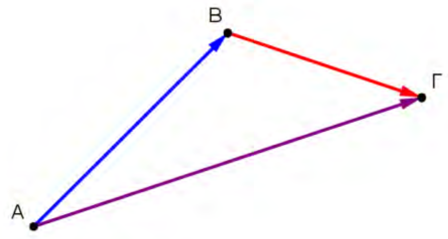
Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ στο πιο κάτω σχήμα είναι διαδοχικά, αφού το τέλος του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι η αρχή του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.



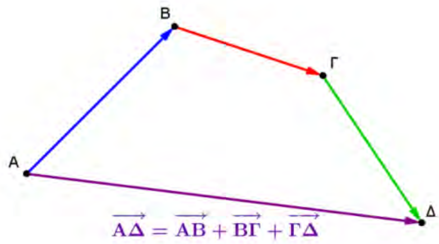
- **Άθροισμα διανυσμάτων**

  Άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του δεύτερου διανύσματος.

  Για παράδειγμα, το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ στο πιο κάτω σχήμα είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και γράφεται $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.



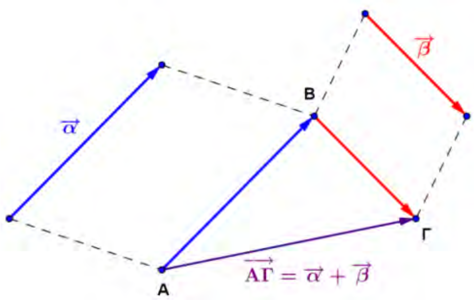
Αν έχουμε να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διαδοχικά διανύσματα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, τότε το άθροισμά τους έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του τελευταίου διανύσματος.



Το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ και γράφεται $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$.

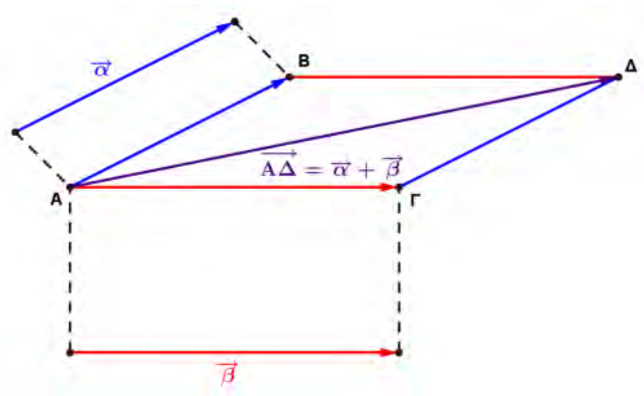
Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$, ώστε να είναι διαδοχικά. Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$



Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τη **μέθοδο του παραλληλογράμμου**:

- Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, ώστε να έχουν κοινή αρχή.
- Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ που έχει πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$.
- Το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων και τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων.



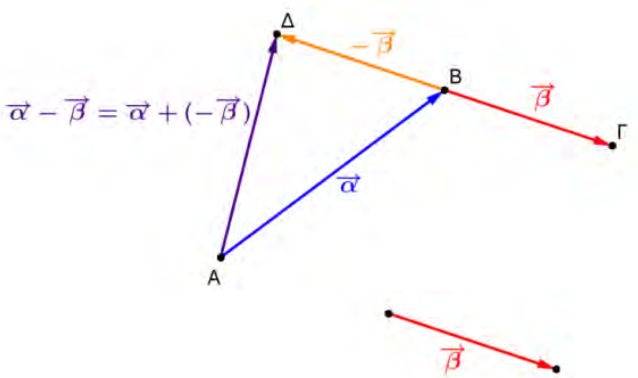
- **Διαφορά δύο διανυσμάτων**

  Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$. Δηλαδή:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι διαδοχικά. Ακολούθως, σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta} = -\vec{\beta}$, το οποίο είναι αντίθετο με το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$. Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$. Δηλαδή, έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = \vec{\alpha} + \left(-\vec{\beta}\right) = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$$



- **Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα**

  Αν λ είναι ένας πραγματικός μη μηδενικός αριθμός ($\lambda \neq 0$) και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα, τότε ονομάζουμε **γινόμενο του $\boldsymbol{\lambda}$ επί το $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$** και το συμβολίζουμε $\boldsymbol{\lambda \cdot \vec{\alpha}}$ το διάνυσμα, το οποίο:

  - είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$, ($\vec{\alpha} \neq \vec{0}$) και
  - έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.

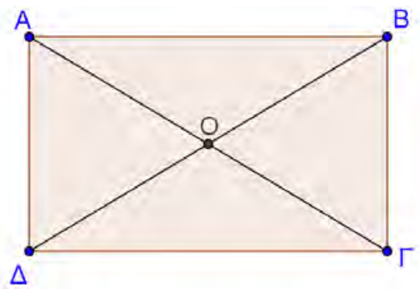
  Παρατηρήσεις

  - Από τον ορισμό του γινομένου αριθμού επί διάνυσμα, προκύπτει ότι αν $\vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$, $\lambda \neq 0$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.
  - Το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
  - Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε το $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

- **Ιδιότητες των πράξεων διανυσμάτων**
  - ✓ Ιδιότητες πρόσθεσης
    - $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ *(Μεταθετική)*
    - $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ *(Προσεταιριστική)*
    - $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ *(Ουδέτερο στοιχείο)*
    - $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$ *(Αντίθετο στοιχείο)*
  - ✓ Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα
    - $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$
    - $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$
    - $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$.



Να βρείτε το διάνυσμα που αντιστοιχεί στα πιο κάτω:

(α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$

(β) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta A}$

(γ) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}$

(δ) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{O\Delta}$

(ε) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}$

Λύση

(α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$

(β) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

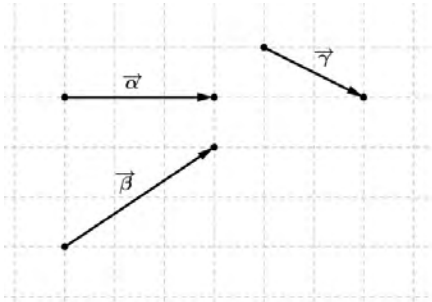
(γ) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Delta}$

(δ) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{AO} + \left(-\overrightarrow{O\Delta}\right) = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

(ε) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{A\Gamma}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{\Gamma B}$

Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.



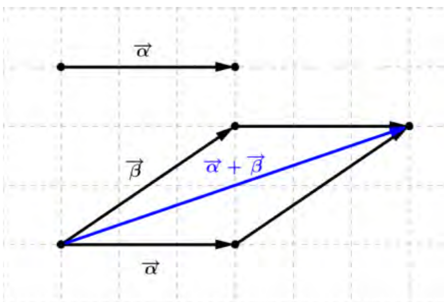
Να σχεδιάσετε τα διανύσματα:

(α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

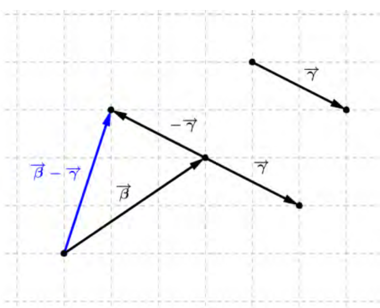
(β) $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

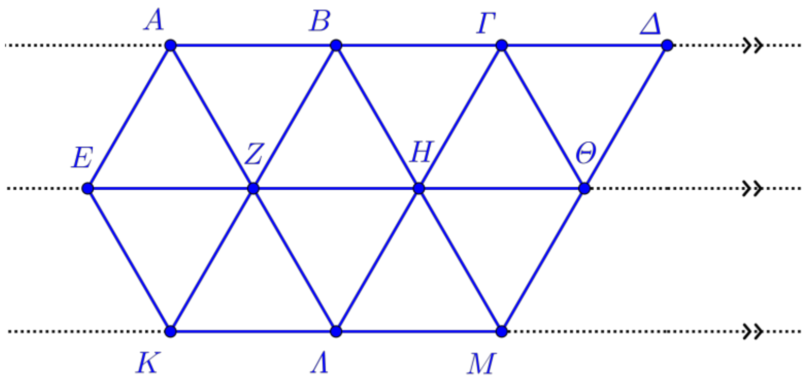


(β) Έχουμε ότι:



Παράδειγμα 3

Το πιο κάτω σχήμα αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $2\,\mathrm{cm}$. Τα σημεία $Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ$ και $Μ$ είναι οι κορυφές των τριγώνων.



Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

(α) $\overrightarrow{ΕΑ} + \overrightarrow{ΕΗ} = \overrightarrow{Ε\,\ldots}$ (β) $\overrightarrow{ΛΗ} + \overrightarrow{ΗΕ} = \overrightarrow{Λ\,\ldots}$

(γ) $\overrightarrow{ΕΖ} - \overrightarrow{ΖΛ} = \overrightarrow{\ldots\,\ldots}$ (δ) $\overrightarrow{ΕΘ} + \overrightarrow{ΛΗ} = \overrightarrow{Ε\,\ldots}$

Λύση

(α) Το $ΕΑΓΗ$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα, σύμφωνα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{ΕΑ} + \overrightarrow{ΕΗ} = \overrightarrow{ΕΓ}$$

(β) Ισχύει ότι

$$\overrightarrow{ΛΗ} + \overrightarrow{ΗΕ} = \overrightarrow{ΛΕ},$$

γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{ΛΗ}$ και $\overrightarrow{ΗΕ}$ είναι διαδοχικά.

(γ) Έχουμε ότι:

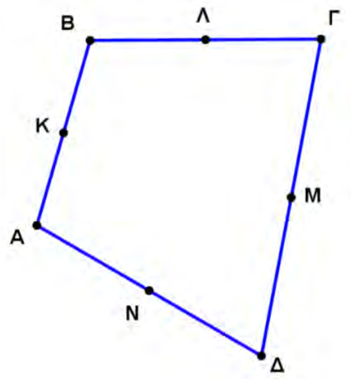
$$\overrightarrow{ΕΖ} - \overrightarrow{ΖΛ} = \overrightarrow{ΕΖ} + \overrightarrow{ΛΖ} \qquad \textit{(προσθέτουμε το αντίστροφο του } \overrightarrow{ΖΛ}\textit{)}$$
$$= \overrightarrow{ΕΖ} + \overrightarrow{ΖΑ} = \overrightarrow{ΕΑ}$$

(δ) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\overrightarrow{ΛΗ} = \overrightarrow{ΕΑ}$. Άρα, σύμφωνα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{ΕΘ} + \overrightarrow{ΛΗ} = \overrightarrow{ΕΘ} + \overrightarrow{ΕΑ} = \overrightarrow{ΕΔ}$$

Παράδειγμα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $Κ, Λ, Μ$ και $Ν$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ και $ΑΔ$, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = 2\vec{α}$, $\overrightarrow{ΑΔ} = 2\vec{β}$ και $\overrightarrow{ΔΓ} = 2\vec{γ}$:

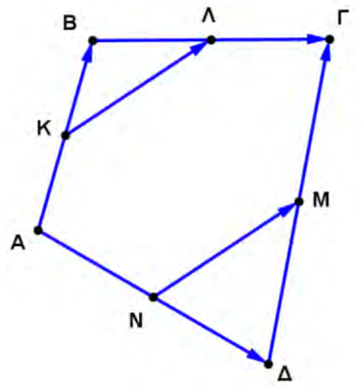


(α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΒΓ} = -2\vec{α} + 2\vec{β} + 2\vec{γ}$.

(β) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΚΛ}$ και $\overrightarrow{ΝΜ}$ συναρτήσει των $\vec{α}, \vec{β}$ και $\vec{γ}$.

(γ) Τι παρατηρείτε για τα $\overrightarrow{ΚΛ}$ και $\overrightarrow{ΝΜ}$;

Λύση



(α) Έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = -2\vec{α} + 2\vec{β} + 2\vec{γ}$$

(β) Έχουμε ότι:

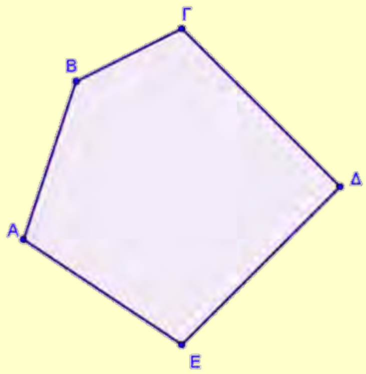
$$\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΚΒ} + \overrightarrow{ΒΛ} = \frac{\overrightarrow{ΑΒ}}{2} + \frac{\overrightarrow{ΒΓ}}{2} = \frac{2\vec{α}}{2} + \frac{-2\vec{α} + 2\vec{β} + 2\vec{γ}}{2}$$
$$= \vec{α} - \vec{α} + \vec{β} + \vec{γ} = \vec{β} + \vec{γ}$$

$$\overrightarrow{ΝΜ} = \overrightarrow{ΝΔ} + \overrightarrow{ΔΜ} = \frac{\overrightarrow{ΑΔ}}{2} + \frac{\overrightarrow{ΔΓ}}{2} = \frac{2\vec{β}}{2} + \frac{2\vec{γ}}{2} = \vec{β} + \vec{γ}$$

(γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΚΛ}$ και $\overrightarrow{ΝΜ}$ είναι ίσα.

Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το πολύγωνο $ΑΒΓΔΕ$.



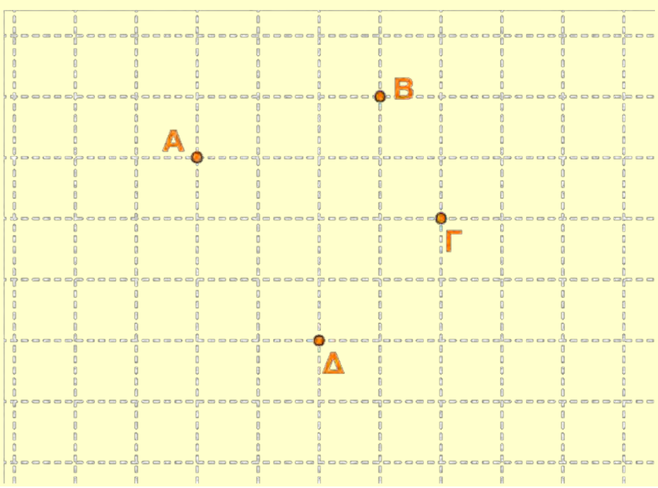
Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BΓ}=\overrightarrow{ΓA}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BΔ}=\overrightarrow{AΔ}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BΓ}+\overrightarrow{ΓΔ}=\overrightarrow{AΔ}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AΔ}=\overrightarrow{EΔ}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EΔ}+\overrightarrow{ΔΓ}+\overrightarrow{ΓB}=\overrightarrow{AB}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Στο πιο κάτω πλέγμα να σχεδιάσετε ένα διάνυσμα που είναι ίσο με:

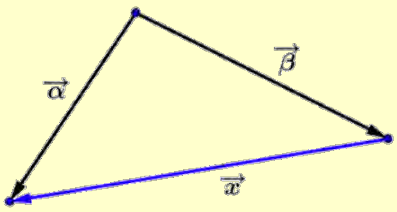
(α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BΓ}$ (β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ΓA}$ (γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BΓ}+\overrightarrow{ΓΔ}$

(δ) $\overrightarrow{ΓΔ}+\overrightarrow{ΔA}$ (ε) $\overrightarrow{AΔ}-\overrightarrow{ΔΓ}$ (στ) $\overrightarrow{AΔ}+\overrightarrow{ΔΓ}+\overrightarrow{ΓB}$

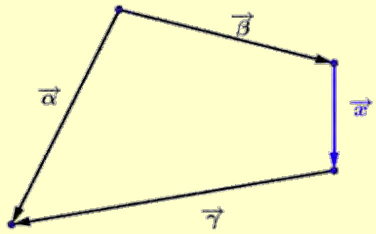


3. Για καθένα από τα πιο κάτω σχήματα, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως άθροισμα ή διαφορά των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

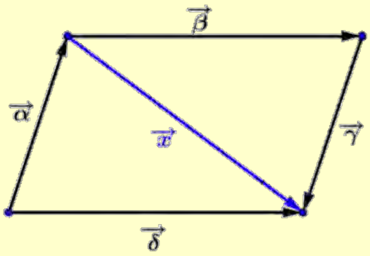
(α)



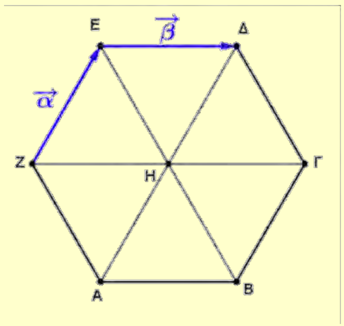
(β)



(γ)



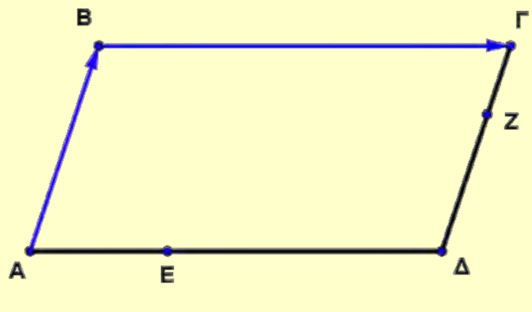
4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ με όλες τις πλευρές ίσες και τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Αν $ΖΓ \parallel ΕΔ$, $ΑΔ \parallel ΖΕ$, $ΕΒ \parallel ΔΓ$ και $\overrightarrow{ΕΔ} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ΖΕ} = \vec{\alpha}$, να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα ως άθροισμα ή διαφορά των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.



(α) $\overrightarrow{ΒΑ}$ (β) $\overrightarrow{ΖΓ}$ (γ) $\overrightarrow{ΗΔ}$ (δ) $\overrightarrow{ΕΗ}$

(ε) $\overrightarrow{ΔΓ}$ (στ) $\overrightarrow{ΒΕ}$ (ζ) $\overrightarrow{ΖΔ}$ (η) $\overrightarrow{ΓΑ}$

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = 6\vec{\kappa}$, $\overrightarrow{ΒΓ} = 6\vec{\lambda}$, $\overrightarrow{ΕΔ} = 2\overrightarrow{ΑΕ}$ και $\overrightarrow{ΖΔ} = 2\overrightarrow{ΓΖ}$, να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα συναρτήσει των $\vec{\kappa}$ και $\vec{\lambda}$:



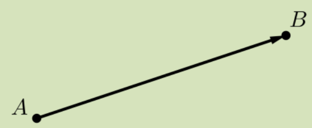
(α) $\overrightarrow{ΑΓ}$ (β) $\overrightarrow{ΑΔ}$ (γ) $\overrightarrow{ΔΓ}$

(δ) $\overrightarrow{ΕΔ}$ (ε) $\overrightarrow{ΔΖ}$ (στ) $\overrightarrow{ΕΖ}$

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΕΖ}$ είναι παράλληλα.

Περίληψη

1. **Μονόμετρο μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται μόνο από το μέτρο του.
2. **Διανυσματικό μέγεθος** ή **διάνυσμα** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται από το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά του.
3. Αν A και B είναι δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το A και πέρας το B λέγεται **εφαρμοστό διάνυσμα** με σημείο εφαρμογής το A και συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.



4. Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει **διεύθυνση** την ευθεία (ε) που ορίζεται από τα άκρα A, B (φορέας του διανύσματος), **φορά** που καθορίζεται από την αρχή και το τέλος του διανύσματος και **μέτρο** που είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB. Το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$ και είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός ή μηδέν.
5. **Μηδενικό** διάνυσμα λέγεται το διάνυσμα, του οποίου η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν. Το συμβολίζουμε με $\vec{\mathbf{0}}$ και έχει μέτρο μηδέν. Δηλαδή, $|\vec{0}| = 0$.
6. **Μοναδιαίο** λέγεται το διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα.
7. **Παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ονομάζονται τα μη-μηδενικά διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση.
8. Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:
   - Τα **ομόρροπα**, τα οποία έχουν την **ίδια φορά**.
   - Τα **αντίρροπα**, τα οποία έχουν **αντίθετη φορά**.
9. **Ίσα** είναι τα διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.
10. **Αντίθετα** είναι δύο διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά.
11. Κάθε εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ του επιπέδου έχει άπειρα διανύσματα ίσα με αυτό. Το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου που είναι ίσα με το $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **ελεύθερο διάνυσμα** και μπορεί να συμβολιστεί με $\vec{a}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (ή οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα ίσο με αυτό) θεωρείται **αντιπρόσωπος** του ελεύθερου διανύσματος.
12. Δύο διανύσματα λέγονται **διαδοχικά**, όταν το τέλος του ενός διανύσματος είναι η αρχή του άλλου.
13. **Άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων** είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του δεύτερου διανύσματος. Μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερα από δύο διανύσματα.

14. Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τη **μέθοδο του παραλληλογράμμου.**
15. **Διαφορά δύο διανυσμάτων**

    Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$.
16. **Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα**

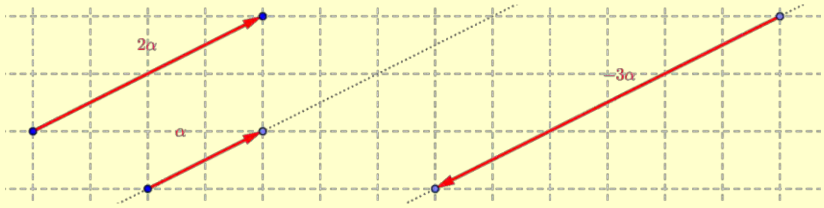
    Αν λ είναι ένας πραγματικός μη μηδενικός αριθμός ($\lambda \neq 0$) και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα, τότε ονομάζουμε **γινόμενο του $\boldsymbol{\lambda}$ επί το $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$** και το συμβολίζουμε $\boldsymbol{\lambda \cdot \vec{\alpha}}$ το διάνυσμα, το οποίο:
    - είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$, ($\vec{\alpha} \neq \vec{0}$) και
    - έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.

    Παρατηρήσεις

    - Αν $\vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\alpha},\ \lambda \neq 0$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.
    - Το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
    - Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε το $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.
17. **Ιδιότητες των πράξεων διανυσμάτων**
    - ✓ Ιδιότητες πρόσθεσης
      - $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (Μεταθετική)
      - $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική)
      - $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ (Ουδέτερο στοιχείο)
      - $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$ (Αντίθετο στοιχείο)
    - ✓ Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα
      - $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$
      - $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$
      - $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$

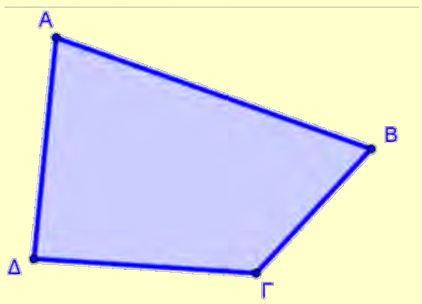
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να γράψετε ομοιότητες και διαφορές για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, 2\vec{\alpha}$ και $-3\vec{\alpha}$.



2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τυχαίο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

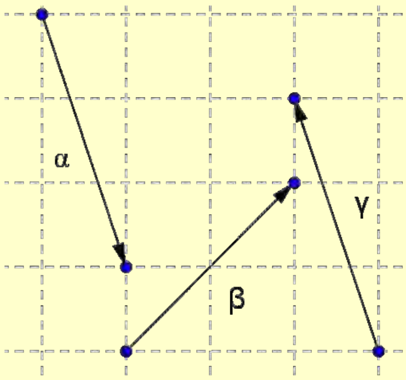


3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \vec{\gamma}$. Να σχεδιάσετε τα πιο κάτω διανύσματα σε τετραγωνισμένο χαρτί, επεξηγώντας τη μέθοδο που ακολουθήσατε.

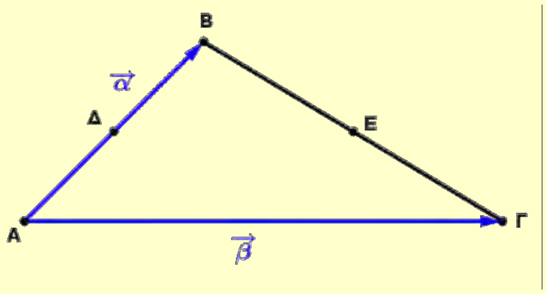
(α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (β) $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ (γ) $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$

(δ) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ (ε) $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (στ) $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

(ζ) $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$



4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $Δ$ και $Ε$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΒΓ$, αντίστοιχα.



Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AΓ} = \vec{\beta}$:

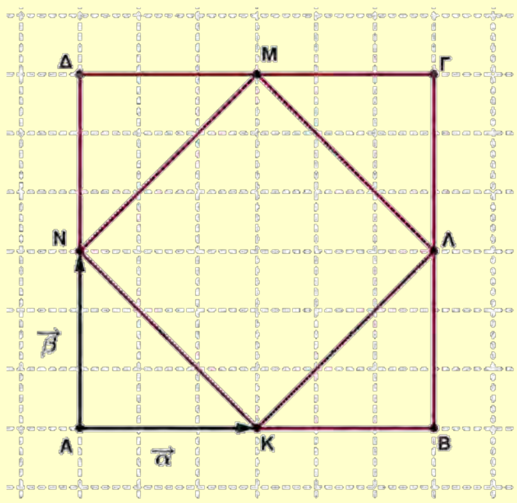
(α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓB}$, $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{ΔE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $ΑΔΕΓ$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ$ και ένα σημείο $Ο$, το οποίο δεν ανήκει στο $ΑΒ$. Αν το σημείο $Μ$ είναι το μέσο του $ΑΒ$, να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο τετράγωνα τα $ΑΒΓΔ$ και $ΚΛΜΝ$, όπου $Κ, Λ, Μ, Ν$ είναι τα μέσα των $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ$, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AK} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AN} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AΔ}, \overrightarrow{ΓM}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MΛ}$ σε συνάρτηση με τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



Λύση Προβλήματος

ΔΥΝΑΜΗ ΤΟΥ ΑΝΕΜΟΥ

Στην πόλη Ζετάουν σκέφτονται να εγκαταστήσουν ανεμογεννήτριες για την παραγωγή ηλεκτρισμού. Το συμβούλιο της Ζετάουν συνέλεξε πληροφορίες σχετικά με το ακόλουθο μοντέλο ανεμογεννήτριας:

Μοντέλο:	$E-82$
Ύψος του πύργου:	138 μέτρα
Αριθμός ελίκων:	3
Μήκος έλικα:	40 μέτρα
Μέγιστη ταχύτητα περιστροφής:	20 στροφές ανά λεπτό
Κόστος κατασκευής:	3 200 000 ζετς
Έσοδα:	0,10 ζετς ανά kWh που παράγεται
Κόστος συντήρησης:	0,01 ζετς ανά kWh που παράγεται
Αποδοτικότητα:	97% του χρόνου σε λειτουργία

Σημείωση: Η κιλοβατώρα (kWh) είναι μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ενέργειας.

Ερώτηση 1

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω δηλώσεις για τις ανεμογεννήτριες $E-82$ προκύπτουν από τις πληροφορίες που παρέχονται. Να βάλετε σε κύκλο "Ναι" ή "Όχι" για κάθε δήλωση.

Δήλωση	Η δήλωση προκύπτει από τις πληροφορίες που παρέχονται;
Το κόστος κατασκευής τριών ανεμογεννητριών θα είναι συνολικά μεγαλύτερο από 8 000 000 ζετς.	Ναι / Όχι
Το κόστος συντήρησης της ανεμογεννήτριας αντιστοιχεί περίπου στο 5% των εσόδων που αποφέρει η ανεμογεννήτρια.	Ναι / Όχι
Το κόστος συντήρησης της ανεμογεννήτριας εξαρτάται από τον αριθμό των kWh που παράγονται.	Ναι / Όχι
Ακριβώς 97 μέρες τον χρόνο, η ανεμογεννήτρια είναι εκτός λειτουργίας.	Ναι / Όχι

Ερώτηση 2

Η Ζετάουν θέλει να υπολογίσει το κόστος και το κέρδος που θα δημιουργηθεί από την εγκατάσταση ανεμογεννητριών. Ο δήμαρχος της πόλης προτείνει τον ακόλουθο τύπο για τον υπολογισμό του οικονομικού οφέλους, K σε ζετς, για μια περίοδο y χρόνων, αν εγκατασταθεί το μοντέλο ανεμογεννήτριας $E-82$.

$$K = \underbrace{400\,000\,y}_{\boxed{\text{Κέρδος από την ετήσια παραγωγή ηλεκτρισμού}}} - \underbrace{3\,200\,000}_{\boxed{\text{Κόστος εγκατάστασης της ανεμογεννήτριας}}}$$

Με βάση τον τύπο που προτείνει ο δήμαρχος, ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος λειτουργίας της ανεμογεννήτριας, ώστε να καλυφθεί το κόστος εγκατάστασής της;

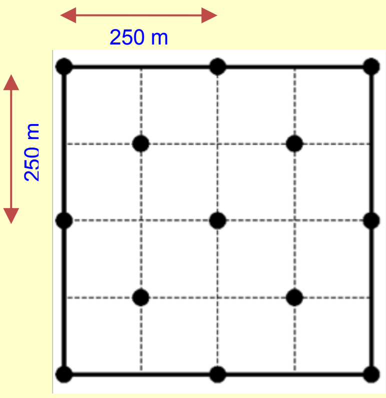
Α.	6 *χρόνια*	Β.	8 *χρόνια*
Γ.	10 *χρόνια*	Δ.	12 *χρόνια*

Ερώτηση 3

Η Ζετάουν αποφάσισε να αναγείρει μερικές ανεμογεννήτριες $E-82$ σε ένα τετράγωνο οικόπεδο (μήκος=πλάτος= $500\ m$).

Σύμφωνα με τους κανονισμούς κατασκευής, η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στους πύργους δύο ανεμογεννητριών αυτού του μοντέλου πρέπει να είναι πέντε φορές το μήκος του περιστρεφόμενου έλικα.

Η πρόταση του δημάρχου της πόλης για τον τρόπο τοποθέτησης των ανεμογεννητριών παρουσιάζεται στο διάγραμμα.



● = *πύργος ανεμογεννήτριας*
Σημείωση: Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.

Να εξηγήσετε για ποιον λόγο η εισήγηση του δημάρχου δεν πληροί τις προδιαγραφές. Να υποστηρίξετε τα επιχειρήματά σας με υπολογισμούς.

Ερώτηση 4

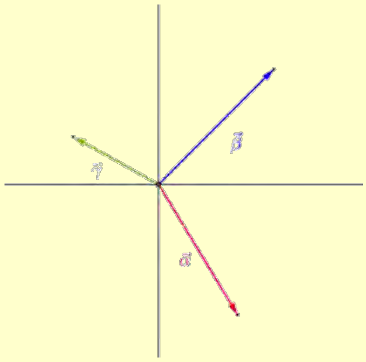
Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία κινούνται τα άκρα των περιστρεφόμενων ελίκων των ανεμογεννητριών; Να περιγράψετε την πορεία εργασίας σας και να δώσετε την απάντησή σας σε χιλιόμετρα ανά ώρα (km/h). Να αξιοποιήσετε τις πληροφορίες για το μοντέλο $E-82$.

PISA 2012

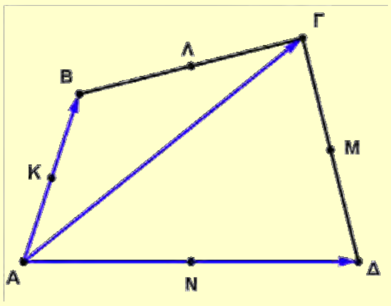
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνονται δύο ίσα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$.

2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$ και στη συνέχεια το διάνυσμα $\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$. Τι παρατηρείτε;



3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία K, Λ, M και N είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\gamma}$:



   (α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}, \overrightarrow{\Delta M}$ και $\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

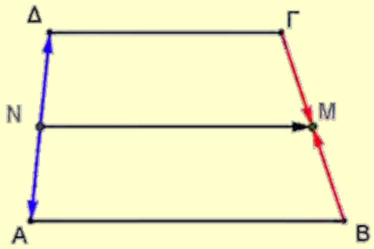
   (β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Lambda}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και στη συνέχεια το διάνυσμα $\overrightarrow{M\Lambda}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

   (γ) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{NK}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Lambda}$ και $\overrightarrow{NK}$. Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $K\Lambda MN$.

   (δ) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta B} = 2\,\overrightarrow{NK}$.

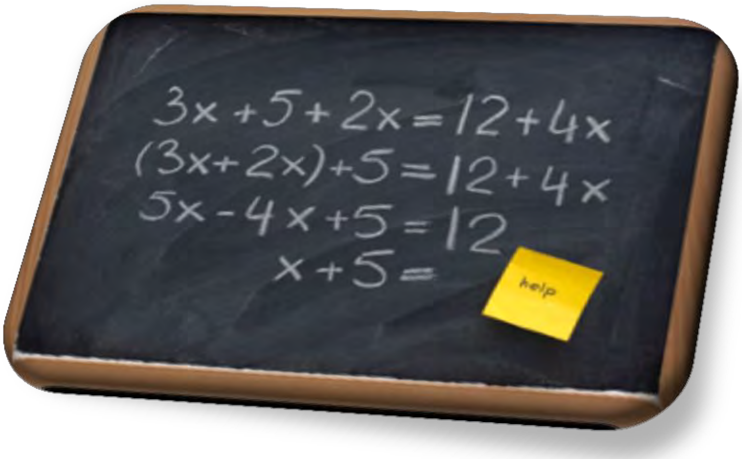
4. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και N το μέσο της $A\Delta$. Να δείξετε ότι:

$$NM = \frac{AB + B\Gamma}{2}$$



Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Α΄ τεύχους



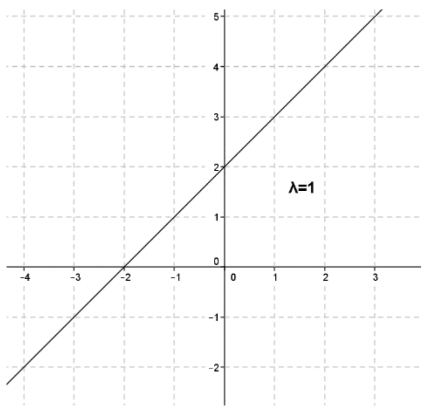
Επανάληψη: Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο

Σελίδα 8

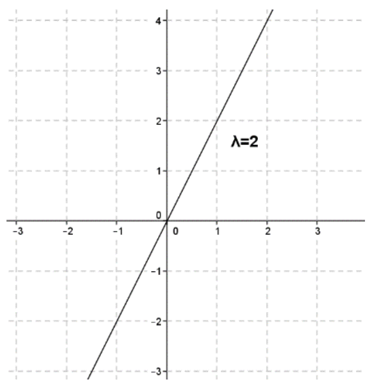
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**	
1.	$AB = 5,\ A\Gamma = 5,\ B\Gamma = 5\sqrt{2}$	
2.	$\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{8}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{29}, \sqrt{29}$	
3.	30 καθίσματα	
4.	$10\pi\ \mathrm{m}, 25\pi\ \mathrm{m}^2$	
5.	(α) $x = -2$ (β) $x = 7$	(γ) Αδύνατη (δ) Αόριστη
6.	(α) $\lambda = 3$	(β) $\lambda = -9$
7.	(α) $a = -3$	(β) $a = 6$
8.	$A: x \geq \frac{2}{3}$ $B: x \leq 4$	
9.	(α) $x \geq 1,\ x < 5$ (β) $1 \leq x < 5$ (γ) $x = 1$	(δ) π.χ. $1,\ \frac{7}{3},\ 3,\ 4,\ 98$ (ε) $x = 4$

10.

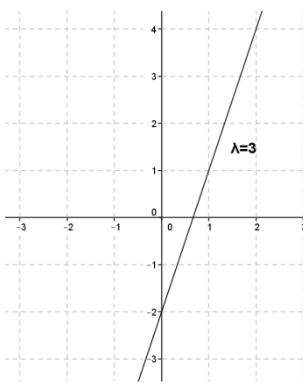
(α)



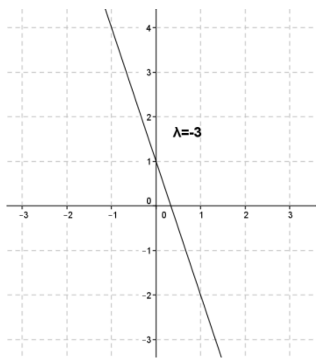
(β)



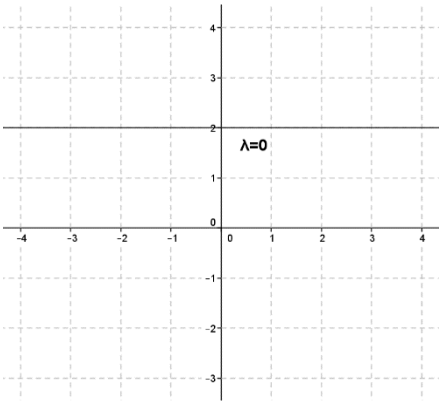
(γ)

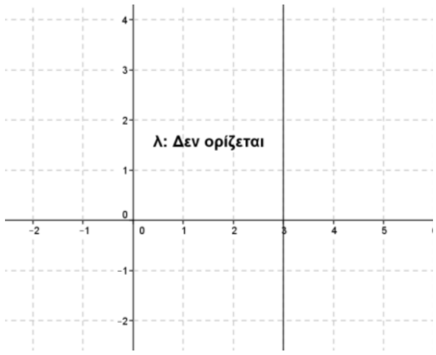


(δ)



(ε) (στ)





11.	(α) $a = -3$	(β) π.χ. $(-2, 6)$, $(0,0)$
12.	$\beta = 2$	
13.	(α) $y = \frac{3x}{2} + 1$	(β) $y = 4$
14.	(α) $x = 0, y = 3$	(β) $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{2}$
15.	$(-1, -2)$	
16.	(α) $x^2 + 4x + 4$ (β) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ (γ) $\frac{x^2}{4} - 2x + 4$	(δ) $x^2 - 9$ (ε) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ (στ) $4x^2 - 1$
19.	(α) $2x(x+1)(x-1)$ (β) $(y-5-x)(y-5+x)$ (γ) $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(x+1)(x^2-x+1)$ (δ) $-5y(2x+y)$	
20.	(α) $x = 0$ ή $x = 5$ (β) $x = -3$ ή $x = 2$	(γ) $a = -3$ ή $a = 1$ (δ) $x = 1$ ή $x = \frac{2}{3}$
21.	(α) $\frac{x}{x+1}$	(β) $\frac{a-4}{a}$
22.	(α) $x = 1$, απορρίπτεται (β) $x = -3$ απορρίπτεται, $x = -2$ (γ) $x = -3$ απορρίπτεται, $x = 3$	
23.	$8, 9$	
26.	(α) $\text{συν}A = \frac{4}{5}$	(β) $\text{ημ}\Gamma = \frac{4}{5}$
27.	$\text{συν}\theta = \frac{4}{5}$, $\text{εφ}\theta = \frac{3}{4}$	
28.	$12{,}30$ m	
29.	(α) $x = 12{,}99$ cm, $y = 10{,}24$ cm (β) $x = 79{,}67$ cm, $y = 46$ cm	

Ενότητα 01: Πραγματικοί Αριθμοί

Σελίδα 21 Η έννοια της νιοστής ρίζας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) 4 (β) 3	(γ) 2 (δ) $\frac{1}{10}$
2.	(α) $x^3 = 4$ (β) $y^7 = 2$	(γ) $z^3 = 14$
3.	(α) $\sqrt[5]{10}$ (β) $1{,}585$	
4.	(α) $\sqrt[4]{50} > \sqrt[5]{50}$ (β) $\sqrt[3]{10} > \sqrt[4]{15}$	
5.	(α) 3^6 (β) 6^{20}	(γ) $\frac{2}{x^4}$ (δ) $\frac{\beta^3}{10}$
6.	(α) $x = 10$ (β) $x = -2$	(δ) $x = 2$
7.	(α) $x = \pm 10$ (β) Δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις. (γ) $x = \pm 2$	
8.	(α) $x = \sqrt[5]{5} \approx 1{,}38$ (β) $x = \pm\sqrt[4]{110} \approx 3{,}24$	(γ) $x = \pm 2$
9.	(α) $x = 1, x = -5$	(β) $x = 5$ (γ) $x = 4$
10.	(α) $x = 11$	(β) $x = 72$ (γ) $x = 81$
11.	$x = \frac{5}{2}$	
12.	$\tau = 5$	

Σελίδα 26 Ιδιότητες νιοστής ρίζας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) 5	(β) 6	(γ) 10 (δ) 3
2.	(α) $3x$ (β) xy^3	(γ) $2y$ (δ) y	
3.	(α) 2 (β) 3	(γ) 4 (δ) a	(ε) x^2 (στ) $10\sqrt{2}$
4.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ		(ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ (ζ) ΛΑΘΟΣ (η) ΣΩΣΤΟ

5.	(α) $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ (β) $2\alpha \cdot \sqrt{2\alpha}$ (γ) $x \cdot \sqrt[4]{x}$	(δ) $2\alpha \cdot \sqrt[3]{2\alpha}$ (ε) $\alpha\beta\gamma^2 \cdot \sqrt{\beta\gamma}$ (στ) $\frac{2}{x^2} \cdot \sqrt[3]{2}$
6.	(α) 2 (β) $\frac{16}{3}$	(γ) 5 (δ) $2 \cdot \sqrt{2}$
7.	$7^4 = 2401$	
8.	(α) 2 (β) $4 \cdot \sqrt{2}$ (γ) -1 (δ) 6	
9.	(α) $9 \cdot \sqrt[3]{5}$ (β) 3645	
12.	Μήκος υποτείνουσας: 6	

Σελίδα 31 Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**		
1.	(α) $5^{\frac{2}{3}}$ (β) $3^{\frac{1}{2}}$	(γ) $1000^{\frac{1}{5}}$	
2.	(α) 4 (β) 2 (γ) 3	(δ) 8 (ε) $\frac{1}{3}$ (στ) 1	(ζ) $\frac{729}{512}$ (η) $\frac{4}{9}$ (θ) 32
3.	$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 8 = 4^{\frac{3}{2}}$		
4.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ	(δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΛΑΘΟΣ (στ) ΛΑΘΟΣ (ζ) ΛΑΘΟΣ	
5.	(α) $\frac{3}{4}$ (β) $2\kappa^2$ (γ) 1 (δ) $\frac{1}{16x^4}$		
6.	(α) 25 (β) 8	(γ) 1 (δ) 7	
7.	(α) $\frac{1}{16}$ (β) 9		
8.	(α) 16 sec		

Σελίδα 36 Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**		
1.	(α) 12	(β) $2\sqrt{3}$	(γ) 33
2.	(α) $\sqrt{7}$	(β) $\frac{\sqrt{15}}{5}$	(γ) $\frac{\sqrt{6}}{15}$

	(δ) $5\sqrt{2}$		
3.	(α) $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$	(β) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(γ) $2(5-\sqrt{6})$ (δ) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$
4.	$A = 7\sqrt{2}, (k = 7)$		
5.	(α) $\frac{3}{2}$	(β) $2\sqrt{2}$	

Σελίδα 39 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**		
1.	(α) 5	(β) 2	(γ) 5
	(δ) $\frac{1}{2}$		
4.	(α) 4	(β) 2	(γ) y
	(δ) $x^2 \cdot \sqrt{x}$	(ε) $5\sqrt{6}$	(στ) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$
5.	(α) 2	(β) $\frac{9}{5}$	(γ) 2
	(δ) $5\sqrt{5}$		
6.	$A = 12\sqrt{2}$		
7.	(α) $\sqrt{7}$	(β) $2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$	(γ) $3-\sqrt{3}$
	(δ) $2-\sqrt{3}$	(ε) $6(\sqrt{7}-\sqrt{5})$	(στ) $\frac{5\cdot\sqrt[3]{2}}{2}$
	(ζ) $\sqrt{a}-1$		
8.	150		
9.	(α) $2\sqrt{2}$	(β) $4\sqrt{6}$	(γ) 10
11.	(α) $x = 81$	(β) $x = 2$	(γ) $x = 0$ (δ) Δεν έχει πραγματικές λύσεις
12.	(α) $x = \pm 3$	(β) $x = -2$	(γ) $x = 0,\ x = -2,\ x = 2$
13.	(α) 2	(β) 3	(γ) 4
	(δ) $\frac{1}{8}$	(ε) 1	(στ) 0
	(ζ) $\frac{4}{9}$	(η) $\frac{25}{16}$	
14.	(α) 1	(β) $3k^2$	(γ) 3
	(δ) $10x^2$		
15.	(α) $x = 4$	(β) $x = 49$	(γ) $x = 0$
	(δ) $x = 0$		
17.	$k = 7$		

Σελίδα 42 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού	
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	(α) $x = -1$ (β) $x = 12$ (γ) $x = 2$ (δ) $x = 1$
2.	$A = 1 - \sqrt{2},\ B = \frac{\sqrt{2}}{2}$
4.	(α) $x = 0, x = 19$ (β) $x = 0$ ή $x = 243$ (γ) $x = 0$ ή $x = 16$
7.	$x = -11, y = 3, z = 2$

Ενότητα 02: Τριγωνομετρία

Σελίδα 49 Γωνία σε Κανονική Θέση

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	(α) $495°, -585°$ (β) $-380°, 340°$ (γ) $-120°, 600°$
3.	(α) $\hat{\varphi} = 360° + \hat{\omega}$ (β) Αρχική πλευρά: OA, Τελική πλευρά: $O\Lambda$ (γ) Αρχική πλευρά: OA, Τελική πλευρά: $O\Lambda$
4.	$120^\circ,\ 480^\circ$

Σελίδα 53 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\varphi\theta = 1$, $\sigma\varphi\theta = 1$
2.	(α) $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\varphi\theta = -1$, $\sigma\varphi\theta = -1$ (β) $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon\varphi\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi\theta = -\sqrt{3}$ (γ) $\eta\mu\theta = 0$, $\sigma\upsilon\nu\theta = -1$, $\varepsilon\varphi\theta = 0$, $\sigma\varphi\theta$:δεν ορίζεται
3.	$A(-1,1)$ και $B(-2,2)$ $\eta\mu 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\varphi\theta = -1$, $\sigma\varphi\theta = -1$
4.	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Σελίδα 61 Τριγωνομετρικός κύκλος

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ	(δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΛΑΘΟΣ	(στ) ΣΩΣΤΟ (ζ) ΛΑΘΟΣ
2.	$-\frac{3}{2}$		
3.	$\eta\mu 30^\circ > 0$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ > 0$, $\varepsilon\varphi 30^\circ > 0$, $\sigma\varphi 30^\circ > 0$ $\eta\mu 236^\circ < 0$, $\sigma\upsilon\nu 326^\circ < 0$, $\varepsilon\varphi 236^\circ > 0$, $\sigma\varphi 236^\circ > 0$ $\eta\mu(-52^\circ) < 0$, $\sigma\upsilon\nu(-52^\circ) > 0$, $\varepsilon\varphi(-52^\circ) < 0$, $\sigma\varphi(-52^\circ) < 0$ $\eta\mu 370^\circ > 0$, $\sigma\upsilon\nu 370^\circ > 0$, $\varepsilon\varphi 370^\circ > 0$, $\sigma\varphi 370^\circ > 0$ $\eta\mu(-150^\circ) < 0$, $\sigma\upsilon\nu(-150^\circ) < 0$, $\varepsilon\varphi(-52^\circ) > 0$, $\sigma\varphi(-150^\circ) > 0$		
4.	$\eta\mu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$, $\sigma\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$		
6.	(α) 2^o τεταρτημόριο (β) 2^o τεταρτημόριο (γ) 3^o τεταρτημόριο		

Σελίδα 66 Μετατροπή τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας σε τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $ημ110° = ημ70°$ (β) $συν100° = -συν80°$ (γ) $ημ85° = συν5°$
3.	α. → 1, β. → 5, γ. → 6
4.	(α) $ημ5°$ (β) $-συν70°$ (γ) $-εφ57°$ (δ) $-σφ85°$
5.	(α) $x = 60°$ ή $x = 120°$ (β) $x = 160°$ (γ) $x = 150°$
6.	(α) $x = 50°$ ή $x = 130°$ (β) $x = 45°$ ή $x = 135°$ (γ) Αδύνατη στο $\mathbb{R}$
9.	$\hat{B} = 60°, \hat{\Gamma} = 90°$ ή $\hat{B} = 120°, \hat{\Gamma} = 30°$

Πίνακας δραστηριότητας 3:

α.	β.	γ.
1	5	6

Σελίδα 71 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) 1 (β) $συν30^{\circ}$	(γ) 1	(δ) 20°
3.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ	(ε) ΣΩΣΤΟ
5.	Δ		
6.	$ημφ = \frac{5}{13}$ $εφφ = \frac{5}{12}$ $σφφ = \frac{12}{5}$	$συνφ = -\frac{15}{17}$ $εφφ = \frac{8}{15}$ $σφφ = \frac{15}{8}$	
7.	$A = -\frac{25}{24}$		

Σελίδα 76 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	Γ		
6.	$A = -\frac{22}{7}$		
7.	Γ		
PISA2012	Ερώτηση 1: Δ	Ερώτηση 2: B	Ερώτηση 3: 8,5 χρόνια

Σελίδα 79 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Δεν υπάρχουν (β) Δεν υπάρχουν (γ) Δεν υπάρχουν (δ) Υπάρχουν
6.	$\alpha = \text{ημ}\theta,\ \ \beta = \text{εφ}\theta,\ \ \gamma = \dfrac{1}{\text{συν}\theta},\ \ \delta = \text{συν}\theta$
7.	$A = 10$

Ενότητα 03: Κύκλος

Σελίδα 89 Σχετική θέση δύο κύκλων

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (β) Οι κύκλοι είναι ξένοι εξωτερικά. (γ) Οι κύκλοι είναι ξένοι εσωτερικά, με τον $(K,\ 3\ \mathrm{cm})$ να είναι εσωτερικός στον $(\Lambda, 5\ \mathrm{cm})$. (δ) Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, με τον $(M, 5\ \mathrm{cm})$ να είναι εσωτερικός στον $(N, 8\ \mathrm{cm})$. (ε) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. (στ) Οι κύκλοι είναι ξένοι εξωτερικά. (ζ) Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, με τον $(M, 4\ \mathrm{cm})$ να είναι εσωτερικός στον $(N, 7\ \mathrm{cm})$. (η) Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
2.	(α) $(K\Lambda) = 9\ \mathrm{cm}$ (β) $(K\Lambda) = 1\ \mathrm{cm}$
3.	$8\ \mathrm{km} < (M\Lambda) < 28\ \mathrm{km}$
4.	(α) Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (β) Οι κύκλοι είναι ξένοι εξωτερικά. (γ) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. (δ) Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, με τον $(K, 3\ \mathrm{cm})$ να είναι εσωτερικός στον $(\Lambda, 4\ \mathrm{cm})$. (ε) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.
5.	(α) Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (β) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. (γ) Οι κύκλοι είναι ξένοι εξωτερικά. (δ) Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, με τον $(H, H\Lambda)$ να είναι εσωτερικός στον $(E, E\Lambda)$.

Σελίδα 101 Εγγεγραμμένες – Επίκεντρες γωνίες

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) $x = 40°$ (β) $x = 43°$ (γ) $x = 90°$	(δ) $x = 34°$ (ε) $x = 40°,\ y = 60°$ (ζ) $x = 150°$	(η) $x = 100°, y = 120°$
2.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ	
3.	$A\widehat{K}\Gamma = 120°$, Μέτρο μικρότερου τόξου $A\Gamma$: $120°$		
4.	$A\widehat{K}\Gamma = 140°,\ A\widehat{B}\Gamma = 70°$		
5.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ	(δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΛΑΘΟΣ (στ) ΣΩΣΤΟ	

6.	$A\hat{B}\Gamma = 75°$, Μέτρο μεγαλύτερου τόξου $A\Gamma$: $210°$
7.	$\widehat{K} = 120°$, $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{\Gamma} = 30°$
8.	$R = 2\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

Σελίδα 108 Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	(α) $x = 40°$ (β) $x = 50°$ (γ) $x = 85°$ (δ) $x = 35°$
2.	$A\hat{B}\Gamma = 70°$, $\Delta\hat{A}\Gamma = 70°$
3.	$A\hat{B}\Gamma = 60°$, $\Delta\hat{A}\Gamma = 60°$
4.	(α) $x = 54°$, $y = 56°$ (β) $x = 117°$ (γ) $x = 51°, y = 102°$
5.	$A\widehat{K}B = 140°$
6.	Το τόξο $B\Gamma$ που αντιστοιχεί στην $B\widehat{K}\Gamma$ είναι $122°$.

Σελίδα 115 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	(α) $x = 172°$ (γ) $x = 66°, y = 72°$ (ε) $x = 30°$ (β) $x = 180°$ (δ) $x = 300°$ (στ) $x = 147°$
2.	$\hat{A} = 55°$, $\widehat{B} = 105°$, $\widehat{\Gamma} = 125°$, $\widehat{\Delta} = 75°$
3.	$\widehat{A} = 80°$, $\widehat{B} = 60°$, $\widehat{\Gamma} = 40°$
5.	$B\widehat{\Gamma}\Delta = 60°$, $B\widehat{M}\Delta = 45°$
6.	$\widehat{\varphi} = 95°$

Σελίδα 119 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
6.	$30°$

Ενότητα 04: Διανύσματα

Σελίδα 130 Η έννοια του διανύσματος

Δραστηριότητα **Απαντήσεις**

17.
(α) Μονόμετρο (γ) Μονόμετρο (ε) Διανυσματικό
(β) Διανυσματικό (δ) Μονόμετρο (στ) Μονόμετρο

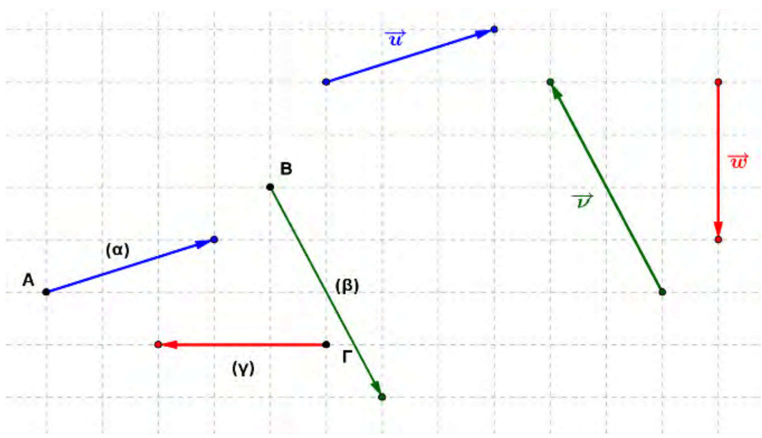
18.
(α) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ
(β) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ

19.
(α) $|\overrightarrow{\Delta E}| = 1,\ |\overrightarrow{\Delta Z}| = 2,\ |\overrightarrow{\Delta \Theta}| = 4,\ |\overrightarrow{BA}| = 1,\ |\overrightarrow{B\Gamma}| = 1,$
$|\overrightarrow{B\Delta}| = 2, |\overrightarrow{BZ}| = 4, |\overrightarrow{K\Theta}| = 2, |\overrightarrow{NI}| = 4$
(β) $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Delta E} = -\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{\Delta Z}, \overrightarrow{B\Delta} = -\overrightarrow{K\Theta}, \overrightarrow{\Delta Z} = -\overrightarrow{K\Theta}$
$\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{\Delta \Theta}, \overrightarrow{BZ} = -\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{\Delta \Theta} = -\overrightarrow{NI}$
(γ) Π.χ. $\overrightarrow{NH}$ ή $\overrightarrow{\Lambda E}$

20.
(α) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{\Lambda M}, \quad \overrightarrow{A\Lambda} = \overrightarrow{\Lambda B} = \overrightarrow{KM}, \quad \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Lambda K}$
$\overleftarrow{AK}, \quad \overleftarrow{\Gamma K}, \quad \overleftarrow{\Lambda M}, \quad \overleftarrow{KA}, \quad \overleftarrow{\Gamma M}, \quad \overleftarrow{\Lambda K}, \quad \overleftarrow{\Lambda B}, \quad \overleftarrow{MK}$

21.
(α) $\vec{\kappa}, \vec{\theta}$
(β) $\vec{\eta}, \vec{\lambda}$

22.

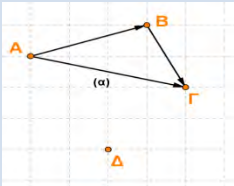


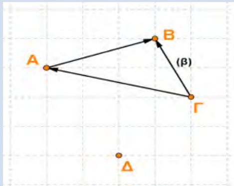
23.
(α) Π.χ. $\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}$
(β) Π. χ. $\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{E\Delta}$
(γ) Π. χ. $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{ZE}$
(δ) Π. χ. $\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{B\Gamma}$
(ε) Π. χ. $\overrightarrow{Z\Gamma}, \overrightarrow{BE}$

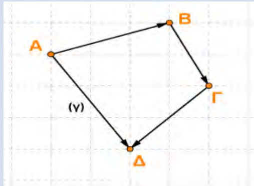
Σελίδα 140 Πράξεις με διανύσματα

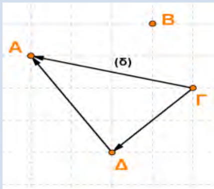
Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ	(ε) ΣΩΣΤΟ

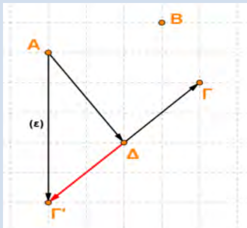
2.

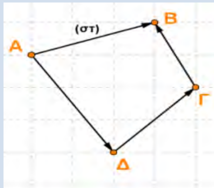












3.

(α) $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

(β) $\vec{x} = -\vec{\beta} + \vec{\alpha} - \vec{\gamma}$

(γ) $\vec{x} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ή $\vec{x} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ ή $\vec{x} = -\vec{\alpha} + \vec{\delta}$

4.

(α) $\overrightarrow{BA} = -\vec{\beta}$

(β) $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\vec{\beta}$

(γ) $\overrightarrow{H\Delta} = \vec{\alpha}$

(δ) $\overrightarrow{EH} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(ε) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(στ) $\overrightarrow{BE} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

(ζ) $\overrightarrow{Z\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(η) $\overrightarrow{\Gamma A} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

5.

(α) $\overrightarrow{A\Gamma} = 6(\vec{\kappa} + \vec{\lambda})$

(β) $\overrightarrow{A\Delta} = 6\vec{\lambda}$

(γ) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 6\vec{\kappa}$

(δ) $\overrightarrow{E\Delta} = 4\vec{\lambda}$

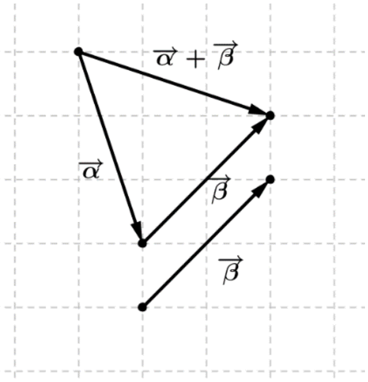
(ε) $\overrightarrow{\Delta Z} = 4\vec{\kappa}$

(στ) $\overrightarrow{EZ} = 4(\vec{\kappa} + \vec{\lambda})$

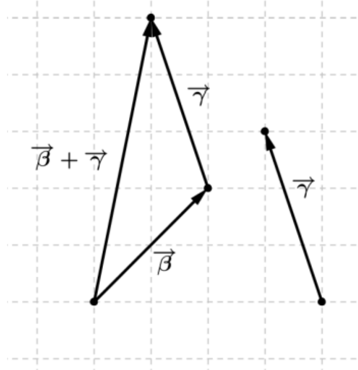
Σελίδα 144 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $2\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπα και το μέτρο του $2\vec{\alpha}$ είναι διπλάσιο του $\vec{\alpha}$. Το διάνυσμα $-3\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο των $\vec{\alpha}$ και $2\vec{\alpha}$ και το μέτρο του είναι τριπλάσιο του $\vec{\alpha}$.

(α)

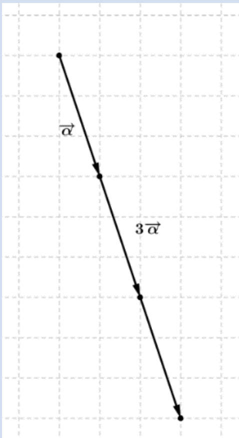

$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
$\vec{\alpha}$
$\vec{\beta}$
$\vec{\beta}$

(β)

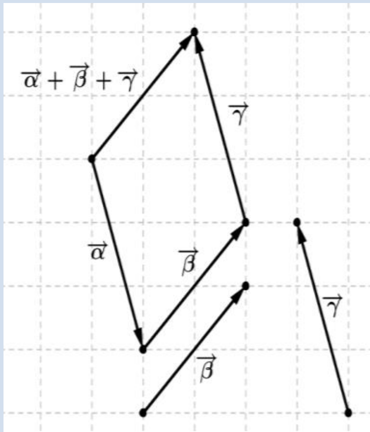

$\vec{\gamma}$
$\vec{\beta} + \vec{\gamma}$
$\vec{\gamma}$
$\vec{\beta}$

3.

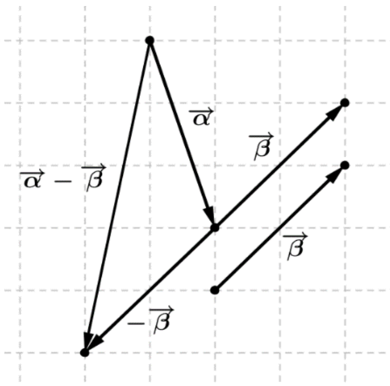
(γ)


$\vec{\alpha}$
$3\vec{\alpha}$

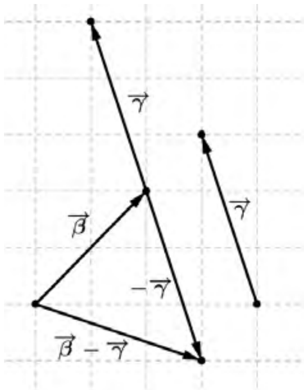
(δ)


$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
$\vec{\gamma}$
$\vec{\alpha}$
$\vec{\beta}$
$\vec{\gamma}$
$\vec{\beta}$

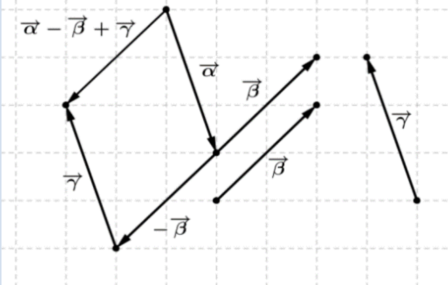
(ε)


$\vec{\alpha}$
$\vec{\beta}$
$\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
$\vec{\beta}$
$-\vec{\beta}$

(στ)


$\vec{\gamma}$
$\vec{\beta}$
$\vec{\gamma}$
$-\vec{\gamma}$
$\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

(ζ)


$\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
$\vec{\alpha}$
$\vec{\beta}$
$\vec{\gamma}$
$\vec{\gamma}$
$\vec{\beta}$
$-\vec{\beta}$

4.	(α) $\overrightarrow{\Gamma B} = -\vec{\beta} + \vec{\alpha}, \overrightarrow{AE} = \frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}, \overrightarrow{\Delta E} = \frac{\vec{\beta}}{2}$ Το $A\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο. $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta} \\ \overrightarrow{\Delta E} = \frac{\vec{\beta}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Delta E}$
6.	(β) $\overrightarrow{A\Delta} = 2\vec{\beta}, \overrightarrow{\Gamma M} = -\vec{\alpha}, \overrightarrow{NM} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}, \overrightarrow{M\Lambda} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Σελίδα 148 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
3.	(α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}, \overrightarrow{\Delta M} = \frac{\vec{\beta}-\vec{\gamma}}{2}, \overrightarrow{AM} = \frac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2}$ (β) $\overrightarrow{A\Lambda} = \frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}, \overrightarrow{M\Lambda} = \frac{\vec{\alpha}-\vec{\gamma}}{2}$ (γ) $\overrightarrow{NK} = \frac{\vec{\alpha}-\vec{\gamma}}{2}$, $\overrightarrow{M\Lambda} = \overrightarrow{NK}$ και $\overrightarrow{M\Lambda} \parallel \overrightarrow{NK}$, το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β\text{: } α,β\in Z \text{ και } β\neq 0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

Πλήκτρο		Λειτουργία
=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2nd F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 · 3 4 – 1 · 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 4 = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT 2 3 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	9 – 6 : 2 $M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2)-6:(9-6:2)$	3 X M – 6 ÷ M =	3 X M – 6 : M 17

Τριγωνομετρικοι Αριθμοι Γωνιων 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290