

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

# Μαθηματικά



**Α' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ**

**Τεύχος Β'**

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Α' Λυκείου Κοινού Κορμού

*Β' τεύχος*

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

## Μαθηματικά

### Α΄ Λυκείου Κοινού Κορμού, Β΄ Τεύχος

Συγγραφή Α΄ έκδοσης:	Αθανασίου Ανδρέας Αντωνιάδης Μάριος Γιασουμής Νικόλας Έλληνα Αγγέλα Λοϊζιάς Σωτήρης Ματθαίου Κυριάκος	Μαυροκορδάτου Μερόπη Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα Παπαγιάννης Κωνσταντίνος Τιμοθέου Σάββας Φιλίππου Ανδρέας
Συγγραφή Β΄ έκδοσης:	Λοϊζιάς Σωτήρης	Τιμοθέου Σάββας
Επιμέλεια:	Πίκας Μάριος	Σαλονικίδης Ιωάννης
Συντονισμός:	Χρίστου Κωνσταντίνος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου Βίδρας Αλέκος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου	
Εποπτεία:	Παπαγιάννη Όλγα, Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης Χατζηχρίστου Χρυσούλα, Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης Ιωάννου Ιωάννης, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Μεγάλεμος Ιωάννης, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης	
Σχεδιασμός εξωφύλλου:	Σιαμμάς Χρύσης, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων	
Επιμέλεια έκδοσης:	Άστρα-Ιωάννου Μαρίνα, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων	
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων	

Α΄ Έκδοση 2016

Β΄ Έκδοση 2020

Εκτύπωση: Arrow Buildings Ltd

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-241-3



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

## Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Α΄ Λυκείου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϋδεάζονται ως προς το τι «θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει ...», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης



<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b>	<b>Σελίδα</b>
<b>5. Συνάρτηση <math>f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0</math>, Εξισώσεις – Ανισώσεις</b>	<b>7</b>
5.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$	9
5.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ και η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$	24
5.3 Πρόσημο τιμών τριωνύμου – Ανισώσεις δευτέρου βαθμού	38
<b>6. Θεώρημα Θαλή - Ομοιότητα</b>	<b>59</b>
6.1 Θεώρημα Θαλή	61
6.2 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα	70
6.3 Όμοια τρίγωνα	77
<b>7. Στατιστική</b>	<b>99</b>
7.1 Μέτρα θέσης και διασποράς	101
<b>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ</b>	<b>115</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>127</b>



# ΕΝΟΤΗΤΑ 05

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$**

**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 5.1 Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$ 
  - 5.1.1 Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2, a \neq 0$
  - 5.1.2 Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$
- 5.2 Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$  και η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ 
  - 5.2.1 Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$
  - 5.2.2 Η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$
  - 5.2.3 Άθροισμα – Γινόμενο λύσεων της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$
- 5.3 Πρόσημο τιμών τριωνύμου – Ανισώσεις δευτέρου βαθμού



### Έχουμε μάθει ...

- ✓ Να ορίζουμε τη συνάρτηση και να την αναπαριστούμε με πολλαπλούς τρόπους, όπως με βελοειδές διάγραμμα, με τύπο, με πίνακα τιμών, με γραφική παράσταση και με γράφημα.
- ✓ Να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση.
- ✓ Κάθε εξίσωση της μορφής  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , ονομάζεται εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού.
- ✓ Αν  $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$ , τότε οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  είναι:

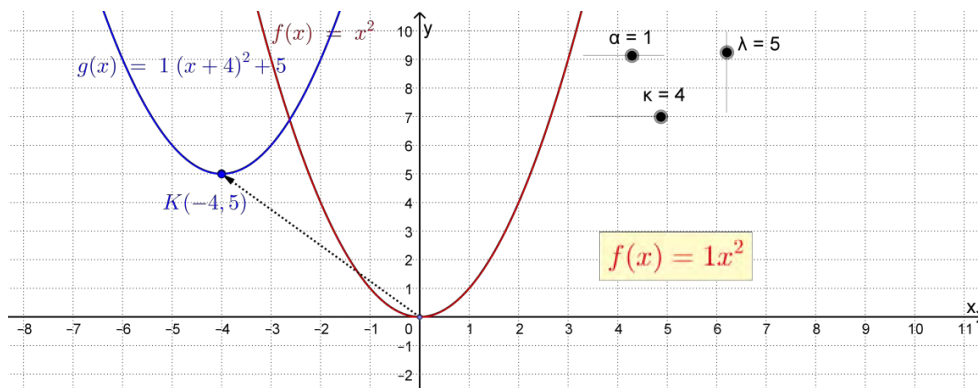
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

## 5.1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$ , $a \neq 0$

### 5.1.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ , $a \neq 0$

#### Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε το αρχείο «Alyk\_En06\_Paravoli.ggb».



- Να επιλέξετε τους δρομείς « $\kappa$ » και « $\lambda$ » και να δώσετε τις τιμές  $\kappa = 0$  και  $\lambda = 0$ .
- Να δώσετε θετικές τιμές στον δρομέα « $a$ ».  
Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x)$  σε σχέση με τη μορφή της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2$ , σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε αρνητικές τιμές στον δρομέα « $a$ ».  
Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x)$  ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της  $f(x) = -x^2$ , σε κάθε περίπτωση;

#### Ορισμός

Η συνάρτηση  $f$  με τύπο

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad a \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

λέγεται **παραβολή**.

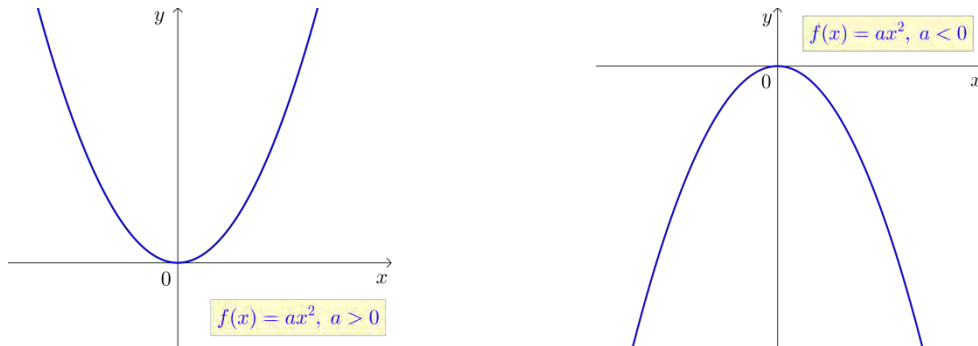
Η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  μπορεί να γραφεί και στην μορφή  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη συνάρτηση  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , κατανοώντας τον ρόλο των πραγματικών αριθμών  $a, \kappa$  και  $\lambda$ . Μέσα από την μελέτη αυτή, θα δούμε επίσης πως μπορούμε να επιλύουμε ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

#### Παρατήρηση

Για  $\kappa = 0$ ,  $\lambda = 0$ , η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  μετατρέπεται σε  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , που είναι ειδική περίπτωση παραβολής.

### Σχόλια

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ , έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων, ο οποίος ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.

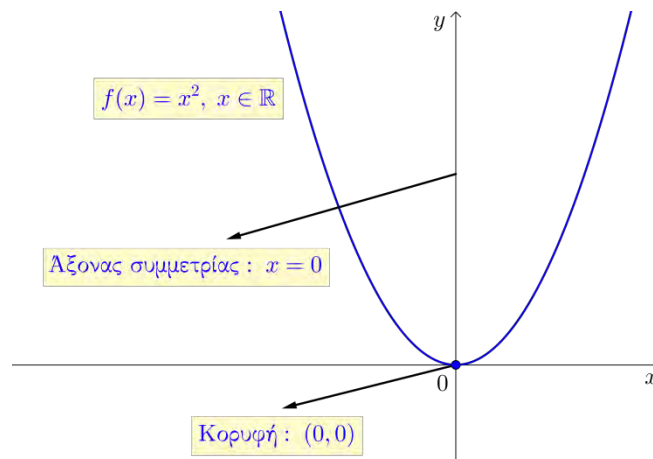


- Αν  $a > 0$ , τότε:
  - το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το  $[0, +\infty)$  και
  - η ελάχιστη τιμή της είναι η  $y = 0$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(0, 0)$ , το οποίο λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

### Παρατήρηση

Η καμπύλη «πλησιάζει» τον άξονα των  $y$ , καθώς οι τιμές του  $a$  αυξάνονται.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η συνάρτηση  $y = f(x)$  με τύπο  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = 0$ .

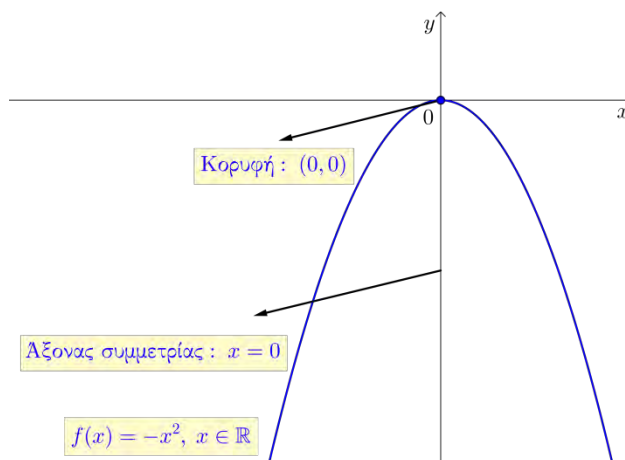


- Αν  $a < 0$ , τότε:
  - το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το  $(-\infty, 0]$  και
  - η μέγιστη τιμή της είναι η  $y = 0$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(0, 0)$ , το οποίο λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

### Παρατήρηση

Η καμπύλη «πλησιάζει» τον άξονα των  $y$ , καθώς οι τιμές του  $|a|$  αυξάνονται.

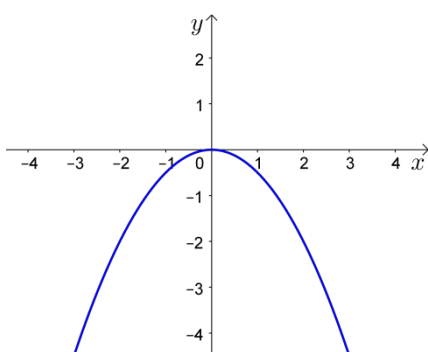
Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η συνάρτηση  $y = f(x)$  με τύπο  $f(x) = -x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , παρουσιάζει μέγιστη τιμή, την  $y_{\max} = 0$ .



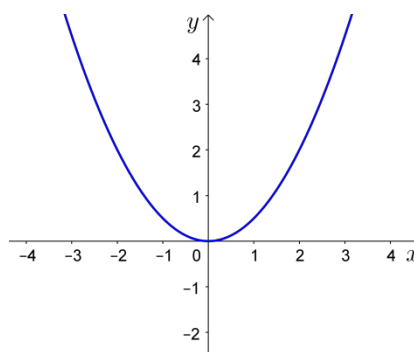
### Παράδειγμα 1

Στα πιο κάτω διαγράμματα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραβολών με εξίσωση  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ .

(α)



(β)



Να βρείτε, σε κάθε περίπτωση, το πρόσημο του  $a$ , το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής.

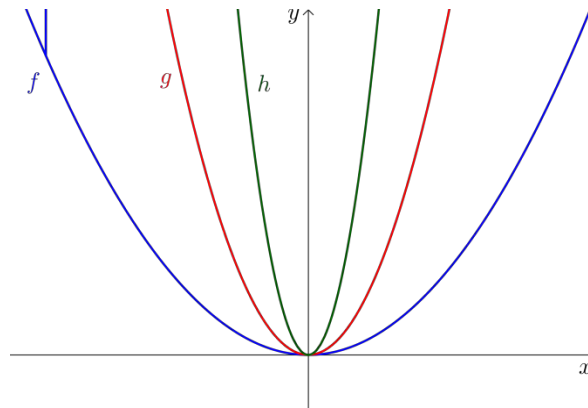
### Λύση

- (α) Το πρόσημο του  $a$  είναι αρνητικό, γιατί η καμπύλη έχει μέγιστη τιμή. Το πεδίο ορισμού είναι το  $\mathbb{R}$  και το σύνολο τιμών είναι το  $(-\infty, 0]$ , αφού η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστη τιμή, την  $y_{\max} = 0$ . Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων και κορυφή την αρχή των αξόνων  $(0, 0)$ .
- (β) Το πρόσημο του  $a$  είναι θετικό, γιατί η καμπύλη έχει ελάχιστη τιμή. Το πεδίο ορισμού είναι το  $\mathbb{R}$  και το σύνολο τιμών είναι το  $[0, +\infty)$ , αφού η καμπύλη παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = 0$ . Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων και κορυφή την αρχή των αξόνων  $(0, 0)$ .

---

### Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραβολών με εξισώσεις  $f(x) = a_1x^2$ ,  $a_1 \neq 0$ ,  $g(x) = a_2x^2$ ,  $a_2 \neq 0$  και  $h(x) = a_3x^2$ ,  $a_3 \neq 0$ .



Να επιλέξετε την ορθή απάντηση, δικαιολογώντας πλήρως την επιλογή σας.

- (α)  $a_1 > a_2 > a_3$     (β)  $a_1 < a_2 < a_3$     (γ)  $a_2 > a_1 > a_3$     (δ)  $a_3 > a_1 > a_2$

### Λύση

Παρατηρούμε ότι όλες οι καμπύλες είναι της μορφής  $y = ax^2$ , όπου  $a > 0$ . Η ορθή απάντηση είναι το (β), αφού η καμπύλη  $y = ax^2$ ,  $a > 0$  «πλησιάζει» τον άξονα των τεταγμένων όσο οι τιμές του  $a$  αυξάνονται.

---

### Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η παραβολή με εξίσωση  $y = (\lambda - 3)x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να:

- (α) διέρχεται από το σημείο  $(-1, 2)$   
(β) παρουσιάζει ελάχιστη τιμή  
(γ) παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

### Λύση

- (α) Οι συντεταγμένες του σημείου  $(-1, 2)$  επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.

Επομένως, έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} y = (\lambda - 3)x^2 \\ (-1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = (\lambda - 3)(-1)^2 \Rightarrow 2 = \lambda - 3 \Rightarrow \lambda = 2 + 3 \Rightarrow \lambda = 5$$

- (β) Η παραβολή  $y = ax^2$  παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, όταν  $a > 0$ . Επομένως, έχουμε:

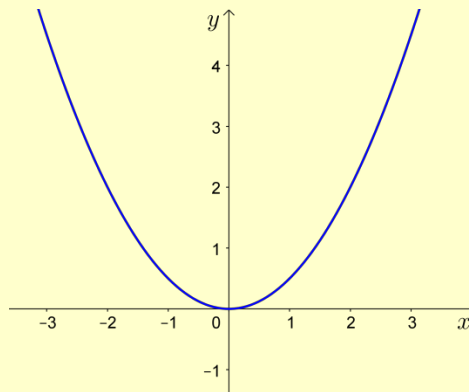
$$\lambda - 3 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 3$$

- (γ) Η παραβολή  $y = ax^2$  παρουσιάζει μέγιστη τιμή, όταν  $a < 0$ . Επομένως, έχουμε:

$$\lambda - 3 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 3$$

## Δραστηριότητες

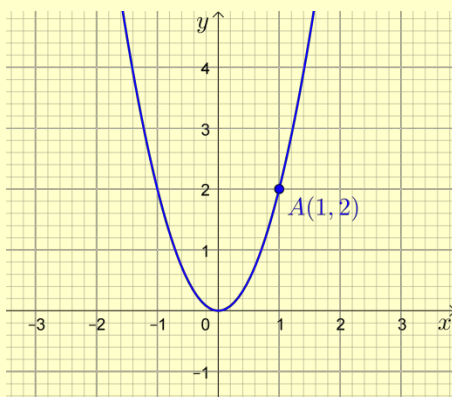
1. Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση παραβολής με εξίσωση  $y = f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ .



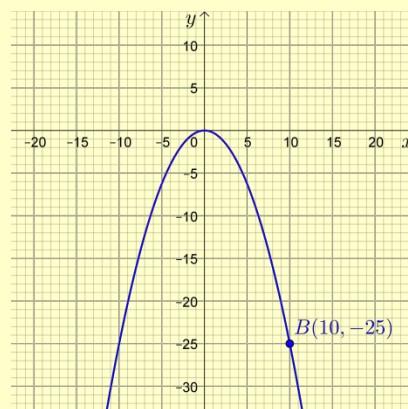
Να βρείτε:

- (α) το πρόσημο του  $a$
  - (β) το πεδίο ορισμού
  - (γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
  - (δ) τις συντεταγμένες της κορυφής
  - (ε) το σύνολο τιμών της παραβολής.
2. Να σχεδιάσετε πρόχειρα στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις παραβολές με εξισώσεις  $f(x) = -4x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -2x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $h(x) = -x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Στα πιο κάτω διαγράμματα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραβολών με εξίσωση  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$ .

i.



ii.



Να βρείτε σε κάθε περίπτωση:

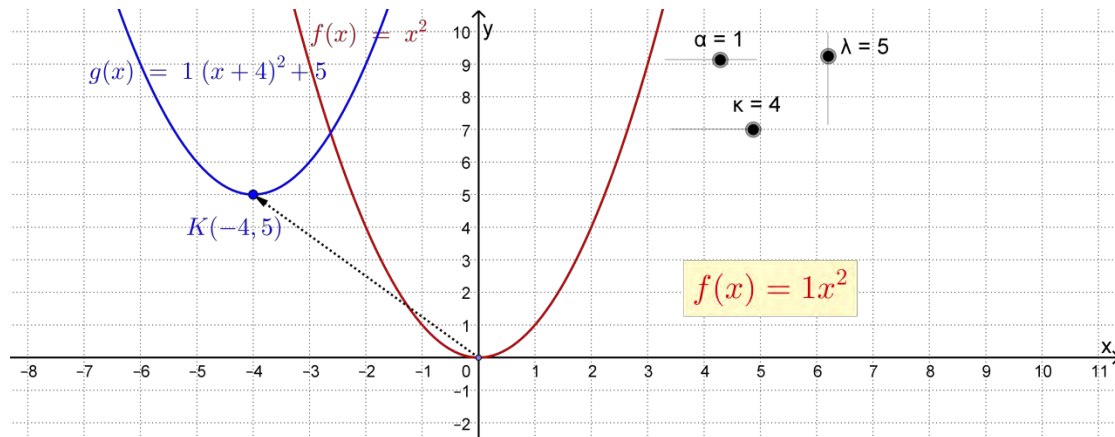
- (α) την τιμή του  $a$  και
- (β) τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης με τετμημένη  $-5$ .

4. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραβολές παρουσιάζουν μέγιστη τιμή και ποιες ελάχιστη τιμή:
- (α)  $f(x) = 3x^2$                       (β)  $f(x) = -5x^2$                       (γ)  $f(x) = -x^2$
5. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για την οποία η παραβολή με εξίσωση  $y = (3\lambda - 12)x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  να διέρχεται από το σημείο  $(2, 12)$ .
6. Να υπολογίσετε τις τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = (-8\kappa + 16)x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  να είναι παραβολή και να παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

### 5.1.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$ , $a \neq 0$

#### Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «ALyk\_En06\_Paravoli.ggb».



- Να δώσετε τις τιμές  $a = 1$ ,  $\kappa = 0$  και να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα « $\lambda$ ».  
Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  σε σχέση με τη γραφική παράσταση της  $f$ , σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε τις τιμές  $a = -1$ ,  $\kappa = 0$  και να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα « $\lambda$ ».  
Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  σε σχέση με τη γραφική παράσταση της  $f$ , σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε τις τιμές  $a = 1$ ,  $\lambda = 0$  και να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα « $\kappa$ ».  
Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  σε σχέση με τη γραφική παράσταση της  $f$ , σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε τις τιμές  $a = -1$ ,  $\lambda = 0$  και να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα « $\kappa$ ».  
Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  σε σχέση με τη γραφική παράσταση της  $f$ , σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε την τιμή  $a = 1$ . Να μεταβάλλετε τις τιμές των δρομέων « $\kappa$ » και « $\lambda$ ».  
Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  σε σχέση με τη γραφική παράσταση της  $f$ , σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε την τιμή  $a = -1$ . Να μεταβάλλετε τις τιμές των δρομέων « $\kappa$ » και « $\lambda$ ».  
Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  σε σχέση με τη γραφική παράσταση της  $f$ , σε κάθε περίπτωση;

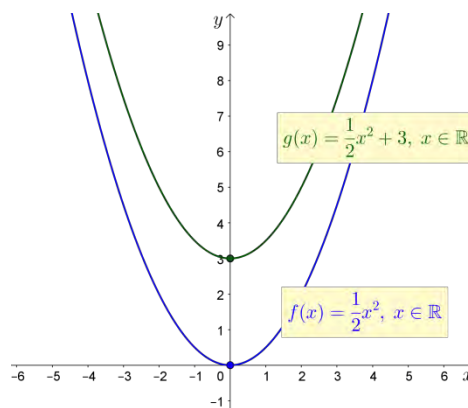


Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = ax^2 + \lambda$ , με  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ .

### Παρατηρήσεις

- Αν  $\lambda > 0$ , η κατακόρυφη μετατόπιση είναι  $\lambda$  μονάδες προς τα πάνω.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδων προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

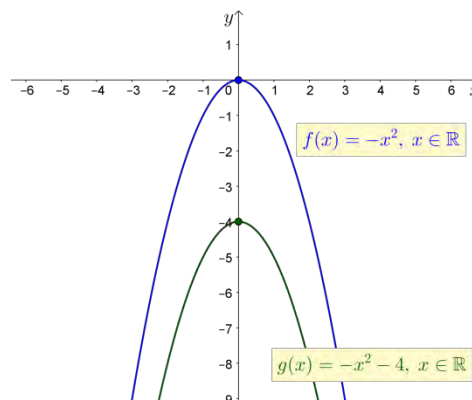


Η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(0, \lambda)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 0$ .

Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(0, 3)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 0$ .

- Αν  $\lambda < 0$ , η κατακόρυφη μετατόπιση είναι  $|\lambda|$  μονάδες προς τα κάτω.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = -x^2 - 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση 4 μονάδων προς τα κάτω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = -x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .



Η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(0, \lambda)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 0$ .

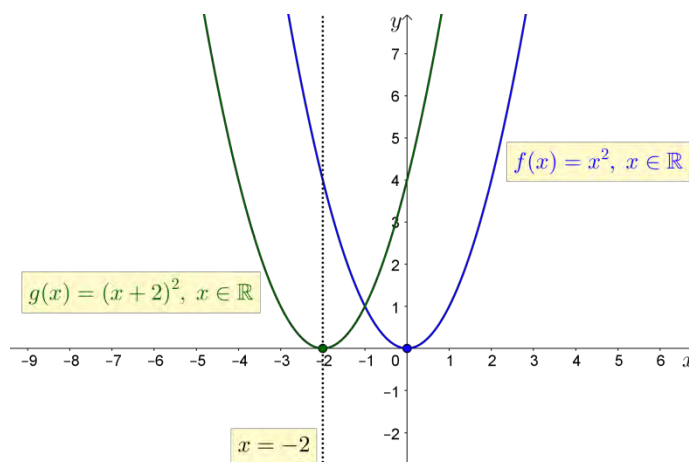
Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(0, -4)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 0$ .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = a(x + \kappa)^2$ , με  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ .

### Παρατηρήσεις

- **Αν  $\kappa > 0$ , η κατακόρυφη μετατόπιση είναι  $\kappa$  μονάδες προς τα αριστερά.**

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = (x + 2)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα αριστερά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

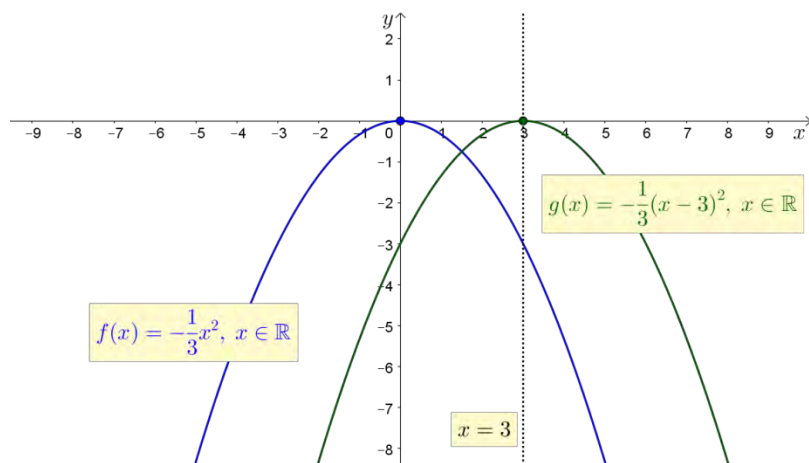


Η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(-\kappa, 0)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -\kappa$ .

Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(-2, 0)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -2$ .

- **Αν  $\kappa < 0$ , η κατακόρυφη μετατόπιση είναι  $|\kappa|$  μονάδες προς τα δεξιά.**

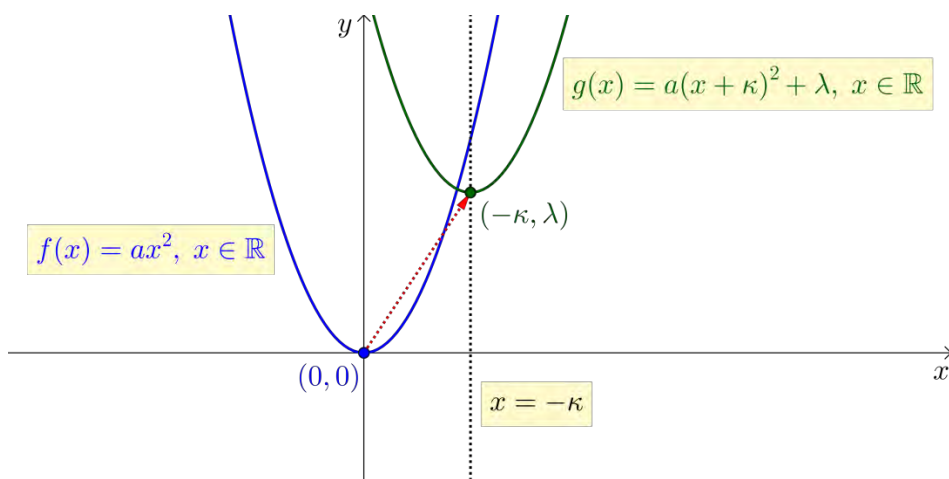
Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση 3 μονάδων προς τα δεξιά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .



Η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(-κ, 0) = (3, 0)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -κ \Rightarrow x = 3$ .

Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(3, 0)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 3$ .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = a(x + κ)^2 + λ$ , με  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $κ, λ \in \mathbb{R}$  προκύπτει από μετατόπιση  $|κ|$  μονάδων οριζόντια και  $|λ|$  μονάδων κατακόρυφα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ . Η  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(-κ, λ)$ , άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -κ$  και ελάχιστη τιμή  $λ$ , όταν  $a > 0$  ή μέγιστη τιμή  $λ$ , όταν  $a < 0$ .



Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = 2(x - 4)^2 - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , προκύπτει από μετατόπιση 4 μονάδων προς τα δεξιά και 3 μονάδων προς τα κάτω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = 2x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(4, -3)$ , άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 4$  και ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = -3$  (αφού  $a > 0$ ).

### Παράδειγμα 1

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(α)  $f(x) = x^2$

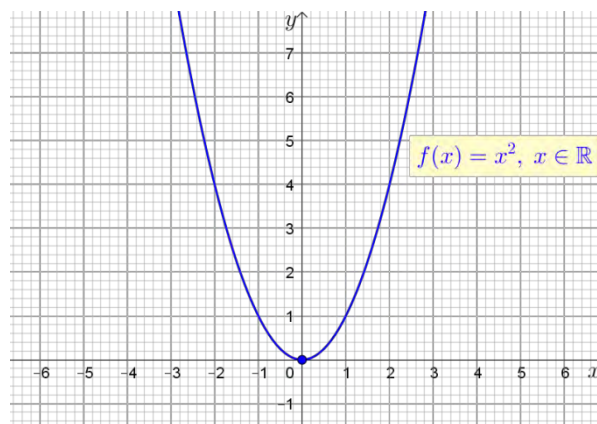
(β)  $g(x) = x^2 + 4$

(γ)  $h(x) = -x^2 - 2$

#### Λύση

(α) Η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , σύνολο τιμών το  $[0, +\infty)$  και ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = 0$ .

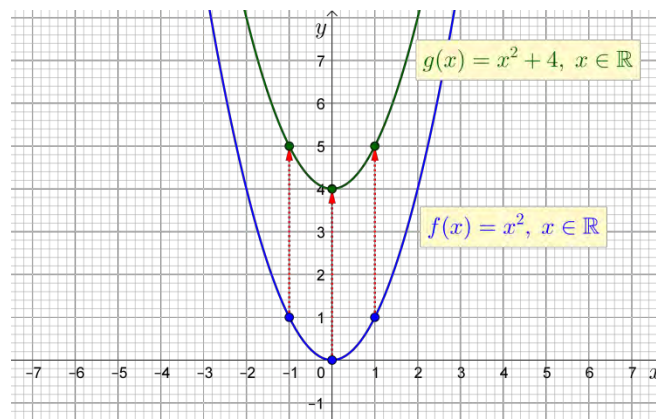
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(0, 0)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 0$ .



(β) Η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = x^2 + 4$  προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση 4 μονάδων προς τα πάνω της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2$ , αφού  $\lambda = 4 > 0$ .

Η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = x^2 + 4$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , σύνολο τιμών το  $[4, +\infty)$  και ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = 4$ .

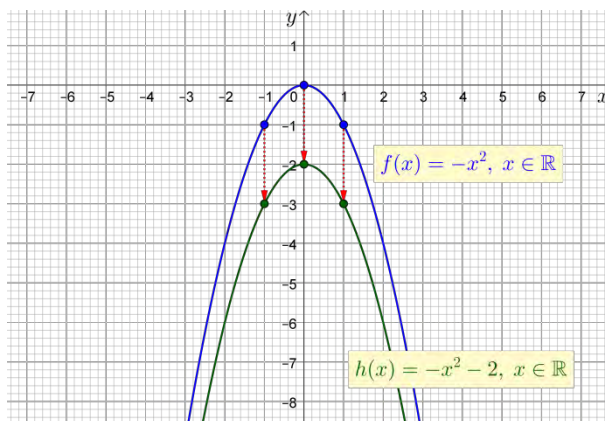
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(0, 4)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 0$ .



(γ) Η συνάρτηση  $h$  με τύπο  $h(x) = -x^2 - 2$  προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα κάτω της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = -x^2$ , αφού  $\lambda = -2 < 0$ .

Η συνάρτηση  $h$  με τύπο  $h(x) = -x^2 - 2$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , σύνολο τιμών το  $(-\infty, -2]$  και μέγιστη τιμή, την  $y_{\max} = -2$ .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(0, -2)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 0$ .



### Παράδειγμα 2

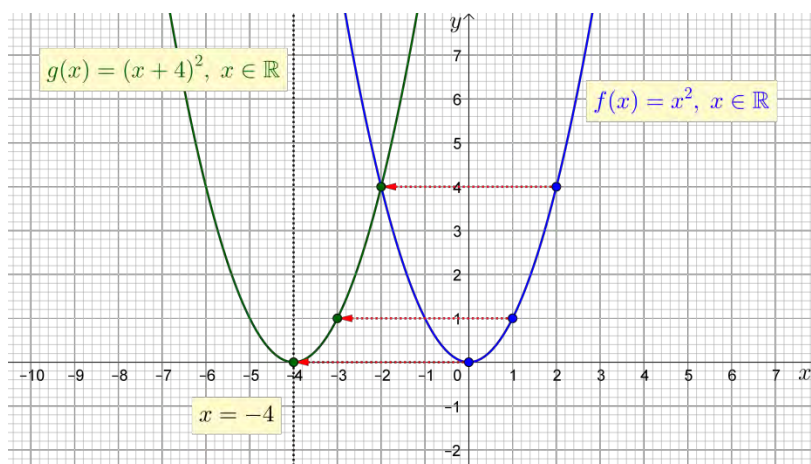
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = (x + 4)^2$ .

#### Λύση

Η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = (x + 4)^2$  προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση 4 μονάδων προς τα αριστερά της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2$ , αφού  $\kappa = 4 > 0$ .

Η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = (x + 4)^2$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , σύνολο τιμών το  $[0, +\infty)$  και ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = 0$ .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(-4, 0)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -4$ .



### Παράδειγμα 3

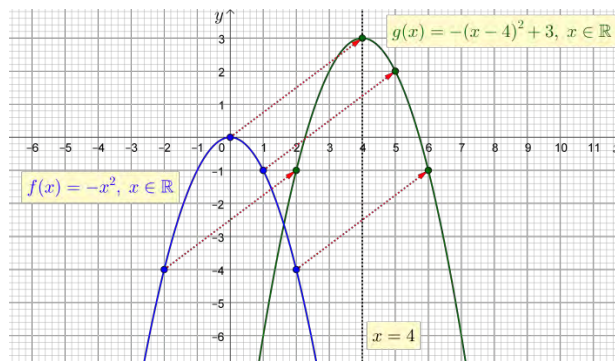
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = -(x - 4)^2 + 3$ .

#### Λύση

Η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = -(x - 4)^2 + 3$  προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση 4 μονάδων προς τα δεξιά και 3 μονάδων προς τα πάνω της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = -x^2$ , αφού  $\kappa = -4 < 0$  και  $\lambda = 3 > 0$ .

Η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = -(x - 4)^2 + 3$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , σύνολο τιμών το  $(-\infty, 3]$  και μέγιστη τιμή, την  $y_{\max} = 3$ .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(4, 3)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 4$ .



### Παράδειγμα 4

Να αναφέρετε πόσες μονάδες οριζόντια ή κατακόρυφα πρέπει να μετατοπιστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2$ , ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

(α)  $f_1(x) = x^2 + 2$                       (β)  $f_2(x) = (x - 5)^2$                       (γ)  $f_3(x) = x^2 + 2x + 3$

#### Λύση

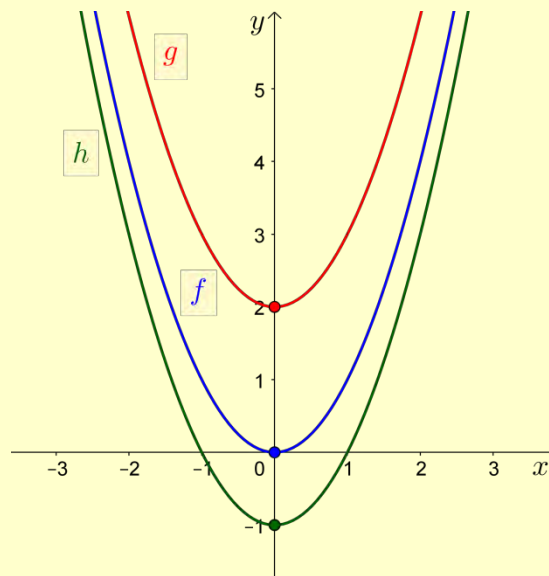
(α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f_1$  με τύπο  $f_1(x) = x^2 + 2$  προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2$ , αφού  $\lambda = 2 > 0$ .

(β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f_2$  με τύπο  $f_2(x) = (x - 5)^2$  προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση 5 μονάδων προς τα δεξιά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2$ , αφού  $\kappa = -5 < 0$ .

(γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f_3$  με τύπο  $f_3(x) = x^2 + 2x + 3$  ή  $f_3(x) = (x + 1)^2 + 2$  προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδας προς τα αριστερά και κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2$ , αφού  $\kappa = 1 > 0$ ,  $\lambda = 2 > 0$ .

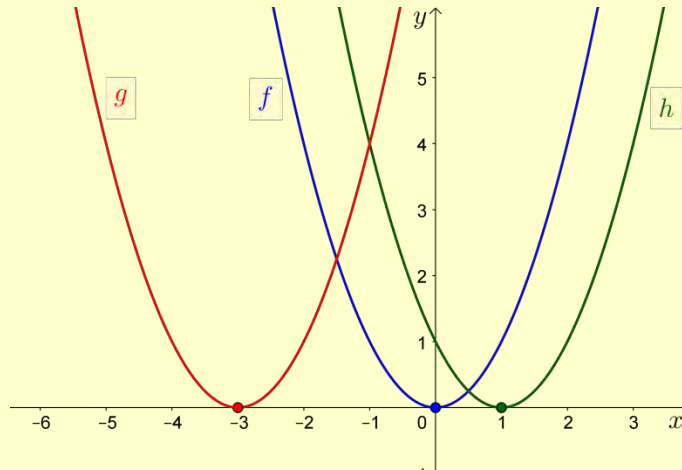
## Δραστηριότητες

- Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση  $y = x^2$  σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:  
(α) 2 μονάδες προς τα κάτω                      (β) 10 μονάδες προς τα πάνω  
(γ) 3 μονάδες προς τα κάτω                      (δ) 0,5 μονάδα προς τα πάνω
- Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής των πιο κάτω παραβολών. Στη συνέχεια, να τις παραστήσετε γραφικά.  
(α)  $f(x) = x^2 + 3$                       (β)  $g(x) = x^2 - 4$                       (γ)  $h(x) = -x^2 + 1$
- Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  και  $h$ . Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων  $g$  και  $h$ , αν η συνάρτηση  $f$  έχει τύπο  $f(x) = x^2$  και οι συναρτήσεις  $g$  και  $h$  είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις της  $f$ .



- Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση  $y = -2x^2$  σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:  
(α) 1 μονάδα προς τα αριστερά                      (β) 2 μονάδες προς τα δεξιά  
(γ) 4 μονάδες προς τα αριστερά                      (δ) 0,5 μονάδα προς τα δεξιά
- Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής των πιο κάτω παραβολών. Στη συνέχεια, να τις παραστήσετε γραφικά.  
(α)  $f(x) = (x - 4)^2$                       (β)  $f(x) = (x + 2)^2$                       (γ)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$

6. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  και  $h$ . Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων  $g$  και  $h$ , αν η συνάρτηση  $f$  έχει τύπο  $f(x) = x^2$  και οι συναρτήσεις  $g$  και  $h$  είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις της  $f$ .



7. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση  $y = x^2$  σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
- (α) 1 μονάδα προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω
  - (β) 2 μονάδες προς τα δεξιά και 4 μονάδες προς τα πάνω
  - (γ) 3 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα κάτω
  - (δ) 5 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω.



---

## 5.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ , $a \neq 0$ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ , $a \neq 0$

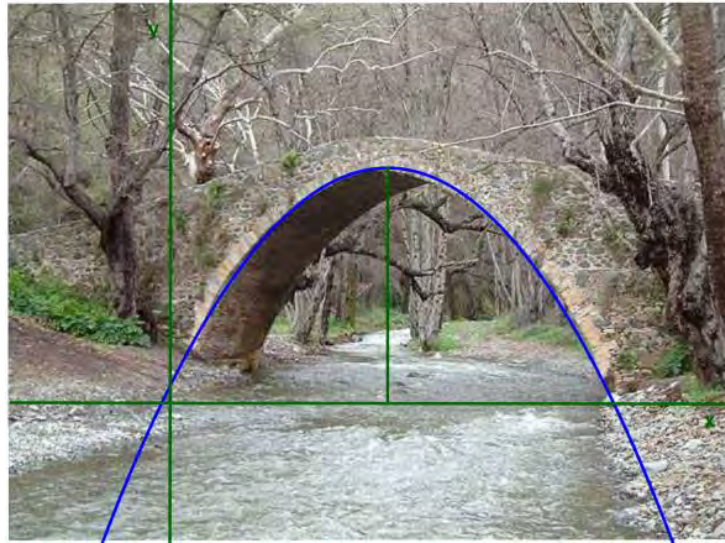
---

### 5.2.1. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ , $a \neq 0$

---

#### Διερεύνηση

Στην πιο κάτω εικόνα παρουσιάζεται το γεφύρι του Τζελεφού στο Τρόδος.



Ο τύπος της παραβολής που εφαρμόζεται στο γεφύρι είναι  $y = -0.2x^2 + 2x + 0.4$ .  
Να υπολογίσετε το ύψος του γεφυριού.

---

Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$ , με  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ . Έχουμε:

$$f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda = a(x^2 + 2\kappa x + \kappa^2) + \lambda = ax^2 + 2a\kappa x + a\kappa^2 + \lambda$$

Η πιο πάνω συνάρτηση γράφεται στη μορφή  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$ , αν θεωρήσουμε ότι:

$$\beta = 2a\kappa, \gamma = a\kappa^2 + \lambda \quad (1)$$

Όπως έχουμε δει, η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$  με  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ , έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -\kappa$  και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(-\kappa, \lambda)$ . Έτσι, σε συνδυασμό με την (1), έχουμε

$$\begin{cases} x = -\kappa \\ \beta = 2a\kappa \Rightarrow \kappa = \frac{\beta}{2a} \Rightarrow x = -\frac{\beta}{2a} \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} (-\kappa, \lambda) \\ \gamma = a\kappa^2 + \lambda \Rightarrow \lambda = \gamma - a\kappa^2 = \gamma - a\frac{\beta^2}{4a^2} \Rightarrow \\ \left(-\frac{\beta}{2a}, \gamma - \frac{\beta^2}{4a}\right) = \left(-\frac{\beta}{2a}, \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a}\right) = \left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \end{cases}$$

Η παραβολή  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση

$$x = -\frac{\beta}{2a}$$

και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες:

$$K\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

### Σχόλια

- Αν  $a > 0$ , τότε η παραβολή  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$  έχει ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = f\left(-\frac{\beta}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$  και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι το  $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ .  
Για παράδειγμα, η παραβολή  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$ , ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = f(-2) = -1$  και το σύνολο τιμών της είναι το  $[-1, +\infty)$ .
- Αν  $a < 0$ , τότε η παραβολή  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$  έχει μέγιστη τιμή, την  $y_{\max} = f\left(-\frac{\beta}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$  και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι το  $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ .  
Για παράδειγμα, η παραβολή  $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -\frac{6}{-2 \cdot 1} = 3$ , μέγιστη τιμή, την  $y_{\max} = f(3) = -1$  και το σύνολο τιμών της είναι το  $(-\infty, -1]$ .
- Η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$  τέμνει τον άξονα των  $y'y$  στο σημείο  $(0, f(0)) = (0, \gamma)$ .  
Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = -x^2 + x + 5$  τέμνει τον άξονα των  $y'y$  στο σημείο  $(0, 5)$ .

---

### Παράδειγμα 1

Δίνεται η παραβολή  $f(x) = 2x^2 + 4x, x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας, τις συντεταγμένες της κορυφής της και το σύνολο τιμών της.

### Λύση

Για την παραβολή  $f(x) = 2x^2 + 4x, x \in \mathbb{R}$ , έχουμε ότι  $a = 2, \beta = 4$  και  $\gamma = 0$ .

Η εξίσωση του άξονα συμμετρίας είναι:

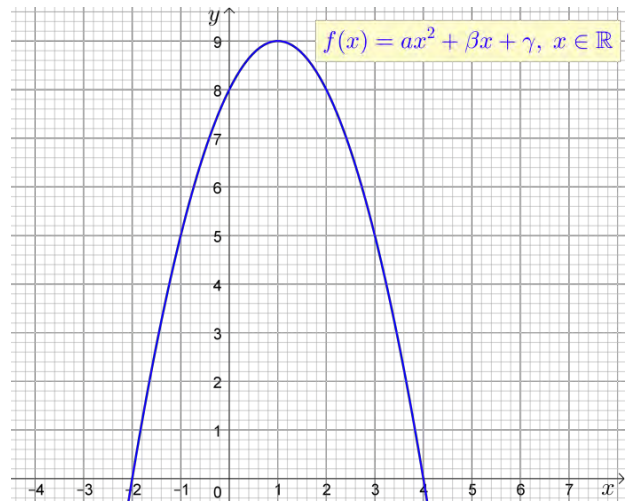
$$x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1$$

Οι συντεταγμένες της κορυφής είναι  $(-1, f(-1)) = (-1, -2)$ .

Αφού  $a = 2 > 0$ , τότε η παραβολή έχει ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = -2$  και το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $[-2, +\infty)$ .

## Παράδειγμα 2

Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ . Με βάση το διάγραμμα, να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



- (α) Να βρείτε το πρόσημο του  $a$ .
- (β) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\gamma$ .
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής.
- (δ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.
- (ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .
- (στ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ .

### Λύση

- (α) Έχουμε ότι  $a < 0$ , αφού η παραβολή έχει μέγιστη τιμή.
- (β) Έχουμε ότι  $\gamma = 8$ , αφού η γραφική παράσταση της παραβολής τέμνει τον άξονα των  $y'y$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(0, 8)$ .
- (γ) Ο άξονας συμμετρίας της έχει εξίσωση  $x = 1$ .
- (δ) Οι συντεταγμένες της κορυφής της είναι  $(1, 9)$ .
- (ε) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι το διάστημα  $(-\infty, 9]$ , αφού η παραβολή έχει μέγιστη τιμή, την  $y_{\min} = f(1) = 9$ .
- (στ) Η γραφική παράσταση της παραβολής τέμνει τον άξονα των  $x'x$  στα σημεία με συντεταγμένες  $(-2, 0)$  και  $(4, 0)$ . Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  είναι οι  $x_1 = -2$  και  $x_2 = 4$ .

### 5.2.2. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ , $a \neq 0$

Στο Γυμνάσιο έχουμε μάθει ότι κάθε εξίσωση της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , ονομάζεται **εξίσωση δευτέρου βαθμού**. Σε κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , η παράσταση  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$  ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης.

### Σχόλιο

Η διακρίνουσα καθορίζει το είδος των λύσεων της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ .

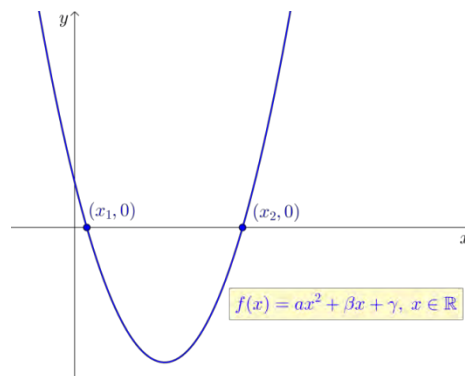
Έστω  $x_1, x_2$  οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ . Τότε:

- Αν  $\Delta > 0$ , τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες, τις  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- Αν  $\Delta = 0$ , τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και ίσες, τις  $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2a}$ .
- Αν  $\Delta < 0$ , τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

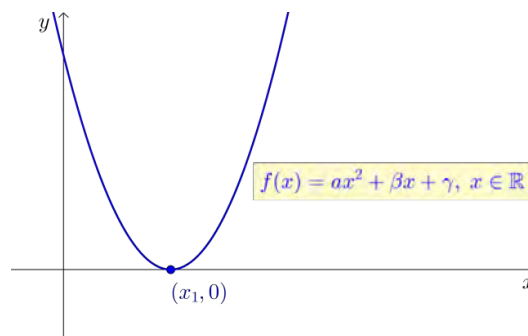
Για να επιλύσουμε γραφικά την εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , αρκεί να παρατηρήσουμε τη γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ . Θέλουμε να επιλύσουμε γραφικά την εξίσωση  $f(x) = 0$ . Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  είναι οι τετμημένες των σημείων τομής, αν υπάρχουν, της γραφικής παράστασης της παραβολής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  με τον άξονα των  $x$ .

Έστω  $x_1, x_2$  οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ . Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

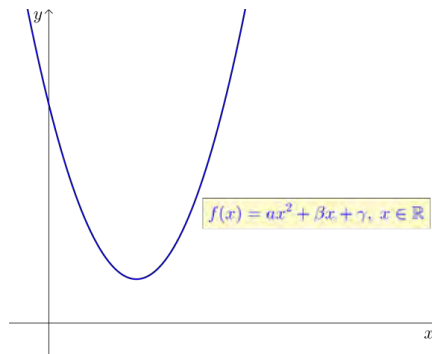
- Αν  $\Delta > 0$ , τότε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  τέμνει τον άξονα των  $x$  σε δύο διαφορετικά σημεία με συντεταγμένες  $(x_1, 0)$  και  $(x_2, 0)$ .



- Αν  $\Delta = 0$ , τότε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 = x_2$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  εφάπτεται στον άξονα των  $x$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(x_1, 0)$ .



- Αν  $\Delta < 0$ , τότε  $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  δεν τέμνει τον άξονα των  $x$ .



### Παράδειγμα 3

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (\kappa + 4)x + \kappa + 7 = 0$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε την τιμή του  $\kappa$ , ώστε η πιο πάνω εξίσωση να:

- (α) έχει λύση το  $-3$
- (β) έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις.

### Λύση

(α) Το  $-3$  επαληθεύει την εξίσωση  $x^2 - (\kappa + 4)x + \kappa + 7 = 0$ . Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} (-3)^2 - (\kappa + 4)(-3) + \kappa + 7 = 0 &\Leftrightarrow 9 + 3\kappa + 12 + \kappa + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\kappa + 28 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -7 \end{aligned}$$

(β) Η εξίσωση  $x^2 - (\kappa + 4)x + \kappa + 7 = 0$  έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις, όταν  $\Delta = 0$ . Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta = [-(\kappa + 4)]^2 - 4(\kappa + 7) = 0 &\Leftrightarrow \kappa^2 + 4\kappa - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\kappa + 6)(\kappa - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa_1 = -6, \kappa_2 = 2 \end{aligned}$$

### Παράδειγμα 4

Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 3 - 2x - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και να την υπολογίσετε.

### Λύση

1<sup>ος</sup> τρόπος

Αφού  $a = -1 < 0$ , η συνάρτηση  $f$  έχει μέγιστη τιμή. Για κάθε συνάρτηση της μορφής

$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $x \in \mathbb{R}$  η μέγιστη τιμή λαμβάνεται, όταν  $x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1$ .

Επομένως, η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι  $y_{\max} = f(-1) = 3 - 2(-1) - (-1)^2 = 4$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος

Αφού  $a = -1 < 0$ , η συνάρτηση  $f$  έχει μέγιστη τιμή. Για κάθε συνάρτηση της μορφής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $x \in \mathbb{R}$  η μέγιστη τιμή είναι:

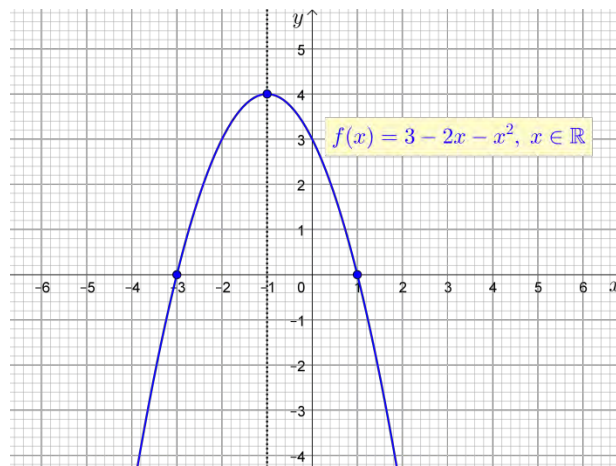
$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\beta^2 - 4a\gamma}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4(-1)3}{4(-1)} = 4$$

3<sup>ος</sup> τρόπος

Το τριώνυμο  $3 - 2x - x^2$  μπορεί να γραφτεί σε παραγοντοποιημένη μορφή ως:

$$f(x) = 3 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 3) = -(x + 3)(x - 1)$$

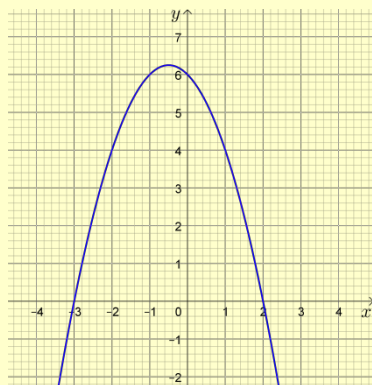
Οι τομές της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα των  $x$  είναι τα σημεία με συντεταγμένες  $(-3, 0)$  και  $(1, 0)$ , τα οποία είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία  $x = -1$ . Επομένως, η  $f$  έχει μέγιστη τιμή ( $a = -1 < 0$ ), όταν  $x = -1$ , με αντίστοιχη μέγιστη τιμή, την  $y_{\max} = f(-1) = 4$ .



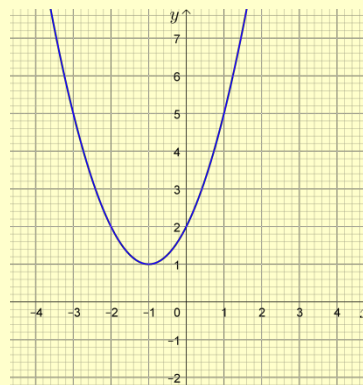
## Δραστηριότητες

1. Στα πιο κάτω διαγράμματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών της μορφής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$ . Να βρείτε, για κάθε περίπτωση, το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta$  και τις λύσεις  $x_1$ ,  $x_2$  της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ .

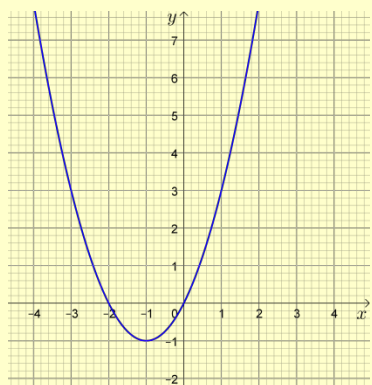
(α)



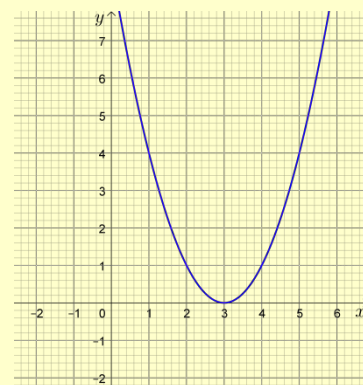
(β)



(γ)



(δ)



2. Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$ . Με βάση το σχήμα, να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(α) Να βρείτε το πρόσημο του  $a$ .

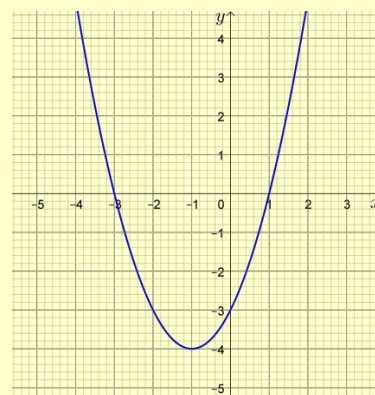
(β) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\gamma$ .

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

(δ) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

(ε) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της  $f$ .

(στ) Να βρείτε τις λύσεις  $x_1$ ,  $x_2$  της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ .



3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων:  
(α)  $f(x) = x^2 - 2x + 6, x \in \mathbb{R}$       (β)  $g(x) = 4x - x^2, x \in \mathbb{R}$
4. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda + 4, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ .  
Να υπολογίσετε, για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να:  
(α) έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 2$   
(β) τέμνει τον άξονα των  $y'y$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(0, 2)$ .
5. Να υπολογίσετε τις τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η εξίσωση  $x^2 + (\kappa + 1)x + 1 = 0$ :  
(α) έχει λύση το  $-2$   
(β) έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις.
6. Για ποιες τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = x^2 + (\beta - 3)x + 2a - 1$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -1$  και ελάχιστη τιμή το 8;



### 5.2.3. Άθροισμα – Γινόμενο λύσεων της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ , $a \neq 0$

#### Διερεύνηση

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεων τους. Τι παρατηρείτε;

Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , τότε γνωρίζουμε ότι οι λύσεις της είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Αν συμβολίσουμε με  $S$  το άθροισμα των  $x_1, x_2$ , τότε έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2\beta}{2a} = -\frac{\beta}{a}$$

Αντίστοιχα, αν συμβολίσουμε με  $P$  το άθροισμα των  $x_1, x_2$ , τότε έχουμε:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{\Delta - \beta^2}{4a^2} = -\frac{\beta^2 - 4a\gamma - \beta^2}{4a^2} = \frac{4a\gamma}{4a^2} = \frac{\gamma}{a}$$

#### Τύποι του Vieta

Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , τότε συμβολίζουμε με  $S$  το άθροισμα και με  $P$  το γινόμενο των λύσεών της. Ισχύουν:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

Για παράδειγμα, αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ , τότε:

$$S = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}, \quad P = \frac{2}{2} = 1$$

#### Παράδειγμα 1

Δίνεται εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με λύσεις τις  $x_1 = 5$  και  $x_2 = 4$ . Να υπολογίσετε το άθροισμα  $S$  και το γινόμενο  $P$  των δύο λύσεων.

#### Λύση

Έχουμε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = 5 + 4 = 9$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot 4 = 20$$



Θεωρούμε ένα τριώνυμο  $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  και έστω  $x_1, x_2$  οι δύο πραγματικές ρίζες του. Τότε:

$$P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a \left( x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} \right) = a(x^2 - Sx + P) \quad (2)$$

Αφού  $S = x_1 + x_2$  και  $P = x_1 \cdot x_2$ , τότε από την (2) έχουμε:

$$P(x) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) \quad (3)$$

Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$ , αρκεί να βρούμε δύο παράγοντες με άθροισμα  $-(x_1 + x_2)$  και γινόμενο  $x_1 \cdot x_2$ . Εύκολα παρατηρούμε ότι αυτοί οι παράγοντες είναι οι  $-x_1$  και  $-x_2$ . Έτσι, από την (3), έχουμε:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

### Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Κάθε τριώνυμο  $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  με δύο πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στη μορφή:

$$P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ειδικά, αν  $\Delta = 0$ , τότε έχουμε ότι  $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2a}$  και το τριώνυμο παίρνει τη μορφή:

$$P(x) = a(x - x_1)^2 = a \left( x + \frac{\beta}{2a} \right)^2$$

Για παράδειγμα, αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες του τριωνύμου  $2x^2 - x - 1$ , τότε:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$2x^2 - x - 1 = 2(x - 1) \left( x + \frac{1}{2} \right) = 2(x - 1) \left( \frac{2x + 1}{2} \right) = (x - 1)(2x + 1)$$

### Κατασκευή εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού

Μπορούμε να κατασκευάσουμε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού, όταν γνωρίζουμε τις λύσεις της  $x_1, x_2$  ή το άθροισμα  $S$  και το γινόμενο  $P$  των λύσεων της. Μια τέτοια εξίσωση είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

### Παράδειγμα 4

Να γράψετε μία εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με λύσεις τις  $x_1 = 3$  και  $x_2 = -5$ .

### Λύση

Μια τέτοια εξίσωση έχει τη μορφή  $x^2 - Sx + P = 0$ . Έτσι, υπολογίζουμε το άθροισμα  $S$  και το γινόμενο  $P$  των δύο λύσεων  $x_1, x_2$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 = 3 - 5 = -2 \\ P &= x_1 \cdot x_2 = 3(-5) = -15 \end{aligned}$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι η  $x^2 + 2x - 15 = 0$ .

---

### Παράδειγμα 5

Να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{5\gamma^2 - \gamma - 4}{25\gamma^2 - 16}$$

#### Λύση

Αρχικά, πρέπει να ισχύει ότι:

$$25\gamma^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow \gamma^2 \neq \frac{16}{25} \Leftrightarrow \gamma \neq \pm \frac{4}{5}$$

Το τριώνυμο  $5\gamma^2 - \gamma - 4$  έχει ρίζες:

$$\gamma_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10} \Rightarrow \gamma_1 = 1, \gamma_2 = -\frac{4}{5}$$

Επομένως:

$$5\gamma^2 - \gamma - 4 = 5\left(\gamma + \frac{4}{5}\right)(\gamma - 1) = (5\gamma + 4)(\gamma - 1)$$

Η παράσταση  $25\gamma^2 - 16$ , ως διαφορά δύο τετραγώνων, παραγοντοποιείται ως εξής:

$$25\gamma^2 - 16 = (5\gamma)^2 - 4^2 = (5\gamma - 4)(5\gamma + 4)$$

Έτσι:

$$\frac{5\gamma^2 - \gamma - 4}{25\gamma^2 - 16} = \frac{(5\gamma + 4)(\gamma - 1)}{(5\gamma - 4)(5\gamma + 4)} = \frac{\gamma - 1}{5\gamma - 4}, \quad \gamma \neq \pm \frac{4}{5}$$

---

### Παράδειγμα 6

Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς με άθροισμα 5 και άθροισμα τετραγώνων 13.

#### Λύση

Έστω  $x, y$  δύο πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 5 και άθροισμα τετραγώνων 13.

Τότε, από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς  $y$  και παίρνουμε  $y = 5 - x$ . Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση του πιο πάνω συστήματος και έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + (5 - x)^2 &= 13x^2 + (5 - x)^2 = 13 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 5x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x - 2)(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2, \quad x = 3 \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες τιμές για τα  $y$  είναι οι  $y = 3, y = 2$ .

Οι λύσεις του συστήματος είναι οι  $(2, 3), (3, 2)$ . Επομένως, οι δύο ζητούμενοι πραγματικοί αριθμοί είναι οι 2 και 3.

## Δραστηριότητες

1. Αν η εξίσωση  $x^2 - 7x + 3 = 0$  έχει λύσεις τις  $x_1, x_2$ , τότε να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:  
(α)  $x_1 + x_2$                       (β)  $x_1 x_2$                       (γ)  $3x_1 + 2x_1 x_2 + 3x_2$   
(δ)  $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$                       (ε)  $(4x_1 + 2)(4x_2 + 2)$                       (στ)  $x_1^2 + x_2^2$
2. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (\lambda - 2)x + 2\lambda - 8 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση να έχει:  
(α) λύση τον αριθμό  $-2$   
(β) λύσεις αντίθετες  
(γ) λύσεις αντίστροφες  
(δ) λύσεις με άθροισμα  $10$ .
3. Δίνεται η εξίσωση  $4x^2 + 3\mu x + 3\mu - 5 = 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Για ποια τιμή του  $\mu \in \mathbb{R}$ :  
(α) η εξίσωση έχει λύσεις αντίστροφες  
(β) ισχύει  $x_1 + x_2 = x_1 x_2$   
(γ) ισχύει  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{16}$ .
4. Να γράψετε μία εξίσωση  $2^{\text{ου}}$  βαθμού με λύσεις τις:  
(α)  $2$  και  $-3$   
(β)  $\frac{1}{3}$  και  $-\frac{2}{5}$   
(γ)  $-4$  και  $+4$   
(δ)  $7 + \sqrt{3}$  και  $7 - \sqrt{3}$ .
5. Να μετατρέψετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων τα πιο κάτω τριώνυμα:  
(α)  $a^2 - 15a - 16$                       (β)  $2\gamma^2 - \gamma - 21$                       (γ)  $(y^2 - 2\kappa y + \kappa^2) - \lambda^2$
6. Να απλοποιήσετε τα πιο κάτω κλάσματα:  
(α)  $\frac{a^2 + 8a - 9}{a^2 + 9a}$                       (β)  $\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$                       (γ)  $\frac{3x^2 + 14x - 24}{6x^2 - 26x + 24}$
7. Να εξετάσετε κατά πόσο η ευθεία  $y = 2x + 15$  τέμνει και σε ποια σημεία τις πιο κάτω παραβολές:  
(α)  $f(x) = x^2$                       (β)  $f(x) = x^2 + 3x + 20$

8. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

$$(\alpha) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

$$(\beta) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3xy = 5 \end{cases}$$

9. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς που, σε κάθε περίπτωση, να έχουν:

(α) άθροισμα 8 και γινόμενο 12

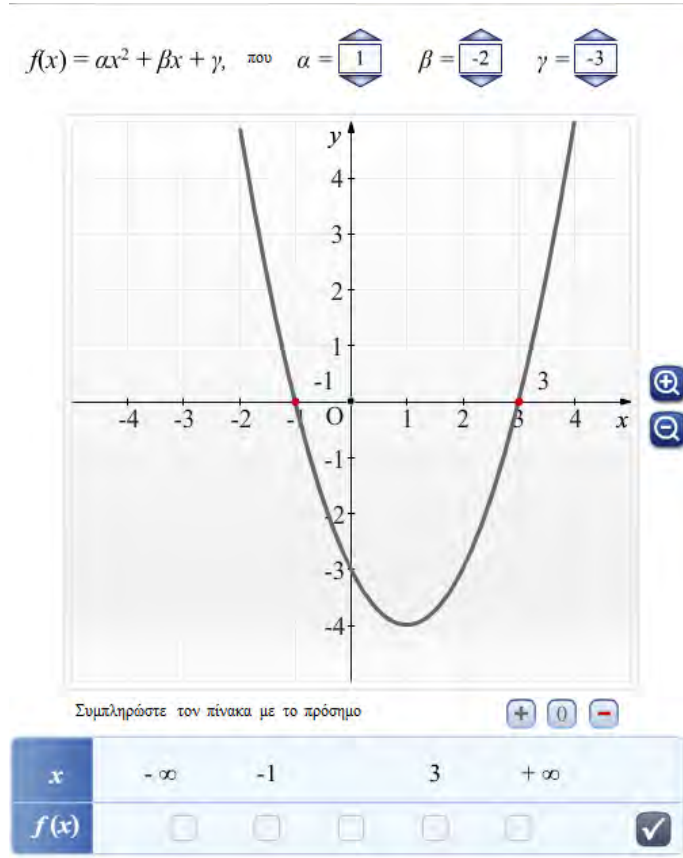
(β) διαφορά 4 και γινόμενο 21

(γ) άθροισμα 2 και άθροισμα τετραγώνων 26.

## 5.3 ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΙΜΩΝ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

### Διερεύνηση

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ\_ΜΑΘ\_Α\_ΨΕΠ07\_Πρόσημο τριωνύμου\_1.3».



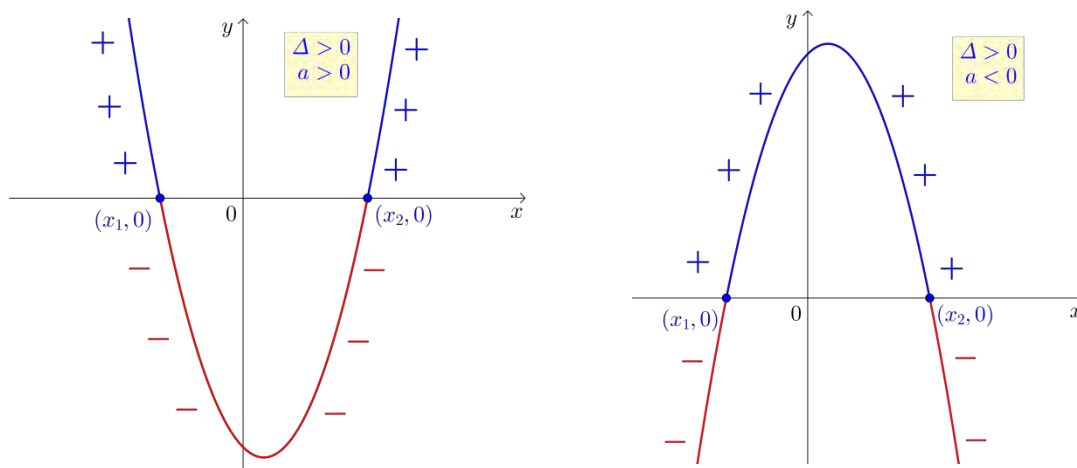
- Να δώσετε κατάλληλες τιμές στα  $a, b$  και  $\gamma$ , για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ , ώστε το τριώνυμο  $f(x)$ :
  - (α) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
  - (β) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες
  - (γ) να μην έχει πραγματικές ρίζες.
- Να μελετήσετε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  σε κάθε περίπτωση και να καταγράψετε τα συμπεράσματά σας.

Αναφορικά με τη μελέτη του προσήμου του τριωνύμου  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$ , διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$ :

Η γραφική παράσταση της  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  τέμνει τον άξονα των  $x$  σε δύο σημεία με συντεταγμένες  $(x_1, 0)$  και  $(x_2, 0)$ , όπου  $x_1, x_2$  οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ .

- Η τιμή της  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  είναι ετερόσημη του  $a$ , όταν το  $x$  βρίσκεται μεταξύ των ριζών της  $f$  ( $x_1 < x < x_2$ ).
- Η τιμή της  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  είναι ομόσημη του  $a$ , όταν το  $x$  βρίσκεται εκτός των ριζών της  $f$  ( $x < x_1$  ή  $x > x_2$ ).



Τα πιο πάνω συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα προσήμων:

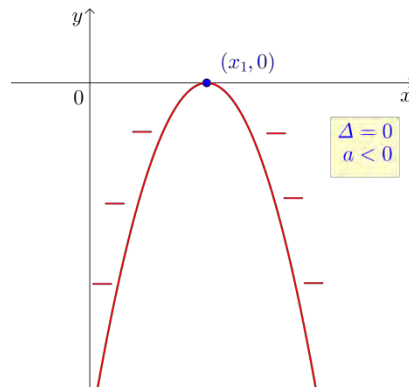
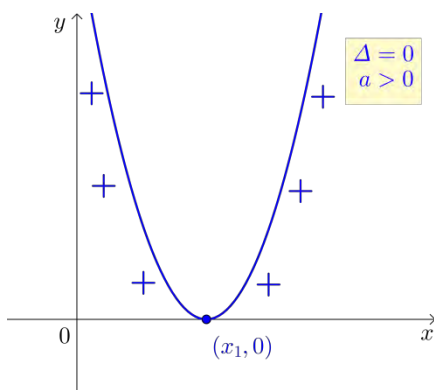
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
Πρόσημο $ax^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του $a$	⊖	Ετερόσημο του $a$	⊖	Ομόσημο του $a$

- $\Delta = 0$ :

Η γραφική παράσταση της  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  εφάπτεται του άξονα των  $x$  στο σημείο  $(x_1, 0)$ , όπου  $x_1 = -\frac{\beta}{2a}$  η διπλή λύση της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ .

Η τιμή της  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  είναι ομόσημη του  $a$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , εκτός από τη διπλή λύση της εξίσωσης.





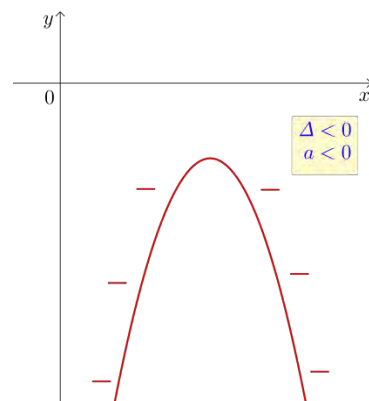
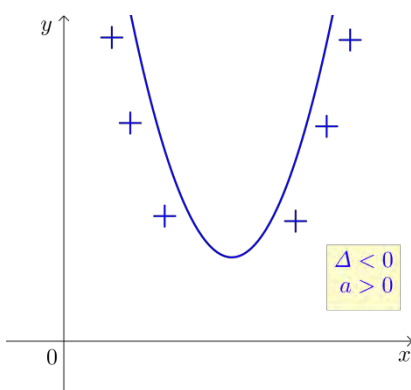
Τα πιο πάνω συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα προσήμων:

$x$	$-\infty$	$x_1$	$+\infty$
Πρόσημο $ax^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του $a$		Ομόσημο του $a$

•  $\Delta < 0$ :

Η γραφική παράσταση της  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  δεν τέμνει τον άξονα των  $x$  σε κανένα σημείο του, αφού η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Η τιμή της  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  είναι ομόσημη του  $a$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .



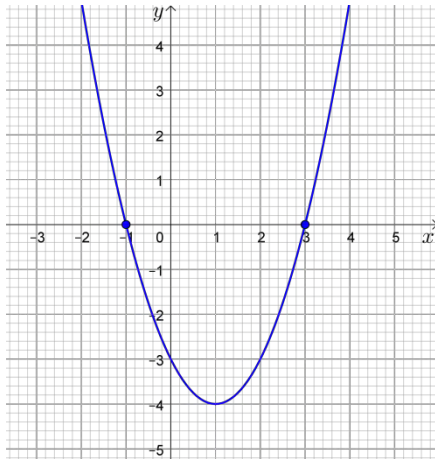
Τα πιο πάνω συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα προσήμων:

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο $ax^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του $a$	

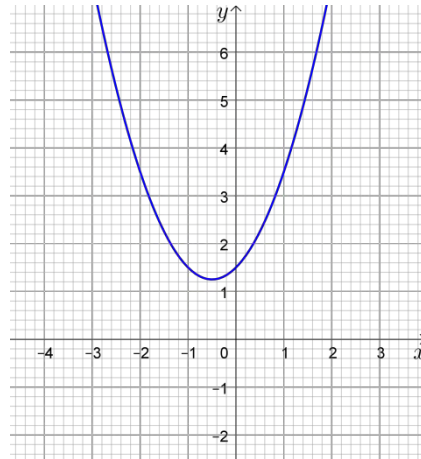
### Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  σε κάθε περίπτωση στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα προσήμου.

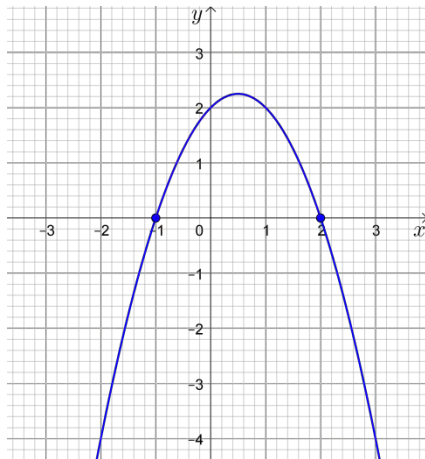
(α)



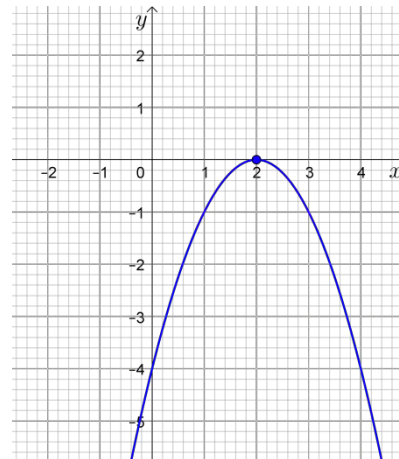
(β)



(γ)



(δ)



### Λύση

(α) Το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  έχει  $a > 0$  και δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ , αφού η  $f$  έχει ελάχιστη τιμή και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα των  $x'x$  στα σημεία με συντεταγμένες  $(-1, 0)$  και  $(3, 0)$ .

Ο πίνακας προσήμου της  $f$  είναι ο ακόλουθος:

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Επομένως,  $f(x) > 0$ , όταν  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  και  $f(x) < 0$ , όταν  $x \in (-1, 3)$ .

- (β) Το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  έχει  $a > 0$  και δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού η  $f$  έχει ελάχιστη τιμή και η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα των  $x'x$ .

Ο πίνακας προσήμου της  $f$  είναι ο ακόλουθος:

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

Επομένως,  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- (γ) Το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  έχει  $a < 0$  και δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ , αφού η  $f$  έχει μέγιστη τιμή και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα των  $x'x$  στα σημεία με συντεταγμένες  $(-1, 0)$  και  $(2, 0)$ .

Ο πίνακας προσήμου της  $f$  είναι ο ακόλουθος:

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Επομένως,  $f(x) < 0$ , όταν  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$  και  $f(x) > 0$ , όταν  $x \in (-1, 2)$ .

- (δ) Το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  έχει  $a < 0$  και δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, τις  $x_1 = x_2 = 2$ , αφού η  $f$  έχει μέγιστη τιμή και η γραφική της παράσταση εφάπτεται στον άξονα των  $x'x$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(2, 0)$ .

Ο πίνακας προσήμου της  $f$  είναι ο ακόλουθος:

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Επομένως,  $f(x) < 0$ , όταν  $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ .

### Παράδειγμα 2

Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων:

(α)  $x^2 + 2x + 10$

(β)  $(x - 2)(x + 3)$

(γ)  $-4x^2 + 12x - 9$

### Λύση

(α) 1<sup>ος</sup> τρόπος

Έχουμε ότι  $a = 1 > 0$  και  $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$ .

Δηλαδή, το τριώνυμο  $x^2 + 2x + 10$  δεν έχει πραγματικές ρίζες.  
Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου  $x^2 + 2x + 10$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + 2x + 10$	+	

Επομένως, έχουμε ότι  $x^2 + 2x + 10 > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος

Για όλες τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει:

$$x^2 + 2x + 10 = x^2 + 2x + 1 + 9 = (x + 1)^2 + 9 \geq 9 > 0$$

*Η πιο πάνω μέθοδος ονομάζεται συμπλήρωση τετραγώνου.*

(β) Έχουμε ότι  $a = 1 > 0$  και  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$  οι πραγματικές ρίζες του τριωνύμου  $(x - 2)(x + 3)$ .

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου  $(x - 2)(x + 3)$ .

$x$	$-\infty$	$-3$	$2$	$+\infty$	
$(x - 2)(x + 3)$	+	0	-	0	+

Επομένως, έχουμε ότι:

- $(x - 2)(x + 3) > 0$ , όταν  $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
- $(x - 2)(x + 3) < 0$ , όταν  $x \in (-3, 2)$
- $(x - 2)(x + 3) = 0$ , όταν  $x = -3$ ,  $x = 2$

(γ) 1<sup>ος</sup> τρόπος

Έχουμε ότι  $a = -4 < 0$  και  $\Delta = 144 - 144 = 0$ .

Δηλαδή, το τριώνυμο  $-4x^2 + 12x - 9$  έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες τις

$$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2a} = \frac{3}{2}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου  $-4x^2 + 12x - 9$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-4x^2 + 12x - 9$	-	0	-

Επομένως, έχουμε ότι:

- $-4x^2 + 12x - 9 < 0$ , όταν  $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
- $-4x^2 + 12x - 9 = 0$ , όταν  $x = \frac{3}{2}$

2<sup>ος</sup> τρόπος

Για όλες τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει

$$-4x^2 + 12x - 9 = -(4x^2 - 12x + 9) = -(2x - 3)^2 \leq 0,$$

με την ισότητα να λαμβάνεται μόνον όταν  $x = \frac{3}{2}$ .

### Ανισώσεις δευτέρου βαθμού

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση δευτέρου βαθμού της μορφής  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) \leq 0$ ,  $f(x) > 0$  ή  $f(x) < 0$ , όπου  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ :

- μελετούμε το πρόσημο του τριωνύμου  $f(x)$
- επιλέγουμε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) \leq 0$ ,  $f(x) > 0$  ή  $f(x) < 0$ , αντίστοιχα.

### Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α)  $x^2 + 2x - 15 < 0$

(β)  $(-x + 1)(x - 4) \leq 0$

(γ)  $x^2 - 12x + 36 > 0$

### Λύση

(α) Έχουμε ότι  $a = 1 > 0$  και  $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$ .

Δηλαδή, το τριώνυμο  $x^2 + 2x - 15$  έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις  $x_1 = -5$  και  $x_2 = 3$ .

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου  $x^2 + 2x - 15$ .

$x$	$-\infty$	$-5$	$3$	$+\infty$	
$x^2 - 2x + 15$	+	0	-	0	+

Επομένως, έχουμε ότι  $x^2 + 2x - 15 < 0$ , όταν  $x \in (-5, 3)$ .

(β) Έχουμε ότι  $a = -1 < 0$ .

Το τριώνυμο  $(-x + 1)(x - 4)$  έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 4$ .

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου  $(-x + 1)(x - 4)$ .

$x$	$-\infty$	$1$	$4$	$+\infty$	
$(-x + 1)(x - 4)$	-	0	+	0	-

Επομένως, έχουμε ότι  $(-x + 1)(x - 4) < 0$ , όταν  $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ .

(γ) Έχουμε ότι  $a = 1 > 0$  και  $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$ .

Δηλαδή, το τριώνυμο  $x^2 - 12x + 36$  έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, τις  $x_1 = x_2 = 6$ .

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου  $x^2 - 12x + 36$ .

$x$	$-\infty$	$6$	$+\infty$
$x^2 - 12x + 36$	+	0	+

Επομένως, έχουμε ότι  $x^2 - 12x + 36 > 0$ , όταν  $x \in (-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$ .

### Παράδειγμα 4

Για ποιες τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa \neq 2$ , η εξίσωση  $(\kappa - 2)x^2 - 2\kappa x + 2\kappa - 3 = 0$  έχει λύσεις πραγματικές και άνισες;

#### Λύση

Αφού  $\kappa \neq 2$ , τότε η πιο πάνω εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού. Για να έχει η εξίσωση αυτή δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, πρέπει να ισχύει  $\Delta > 0$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow 4\kappa^2 - 4(\kappa - 2)(2\kappa - 3) > 0 \Leftrightarrow -4\kappa^2 + 28\kappa - 24 > 0 \\ &\Leftrightarrow -4(\kappa^2 - 7\kappa + 6) > 0 \Leftrightarrow -4(\kappa - 1)(\kappa - 6) > 0 \end{aligned}$$

Έχουμε ότι  $a = 1 < 0$ .

Το τριώνυμο  $-4(\kappa - 1)(\kappa - 6)$  έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις  $\kappa_1 = 1$  και  $\kappa_2 = 6$ .

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου  $-4(\kappa - 1)(\kappa - 6)$ .

$\kappa$	$-\infty$	$1$	$2$	$6$	$+\infty$
$-4(\kappa - 1)(\kappa - 6)$	-	0	+	0	-

Επομένως, έχουμε ότι  $-4(\kappa - 1)(\kappa - 6) > 0$ , όταν  $\kappa \in (1, 2) \cup (2, 6)$ .

Έτσι, η εξίσωση  $(\kappa - 2)x^2 - 2\kappa x + 2\kappa - 3 = 0$  έχει λύσεις πραγματικές και άνισες όταν  $\kappa \in (1, 2) \cup (2, 6)$ .

## Δραστηριότητες

1. Να βρείτε ο πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων:

(α)  $x^2 - 5x - 6$

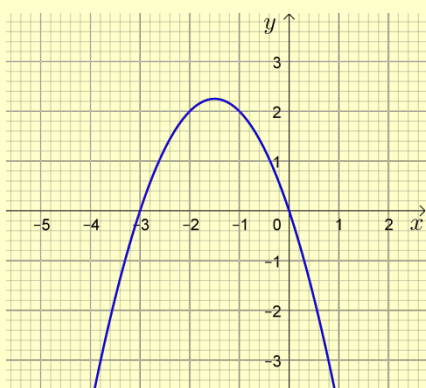
(β)  $(x - 2)(x - 7)$

(γ)  $25 - x^2$

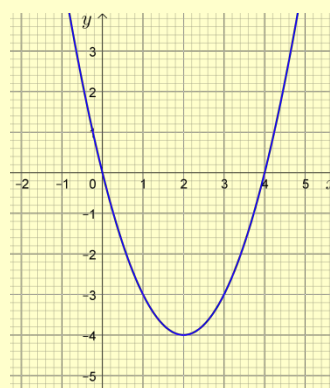
(δ)  $x^2 - x - 2$

2. Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  σε κάθε περίπτωση στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα προσήμου.

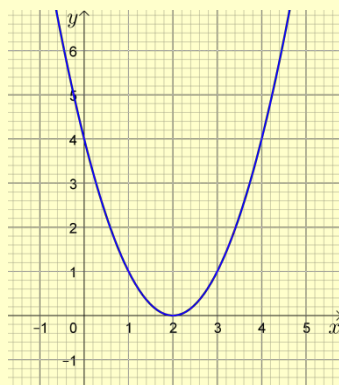
(α)



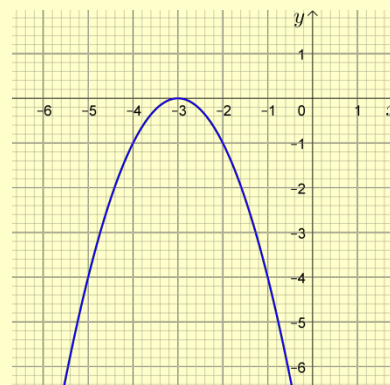
(β)



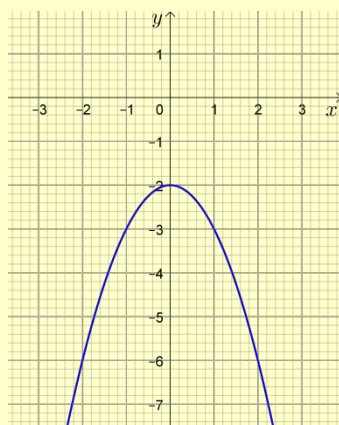
(γ)



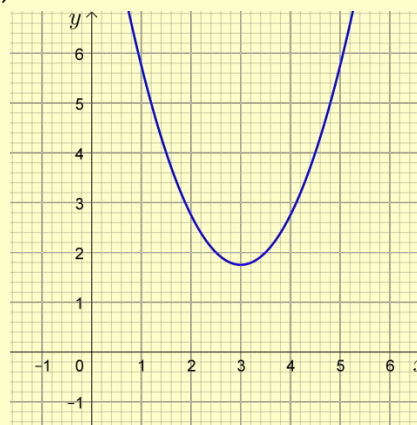
(δ)



(ε)



(στ)



3. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων:

(α)  $5x^2$

(β)  $-3x^2$

(γ)  $x^2 + 4$

(δ)  $-x^2 - 1$

(ε)  $(x + 4)^2$

(στ)  $(x - 1)^2$

(ζ)  $(x + 1)(x - 3)$

(η)  $x^2 - 3x + 2$

(θ)  $-x^2 + 2x - 3$

(ι)  $x^2 + x + 1$

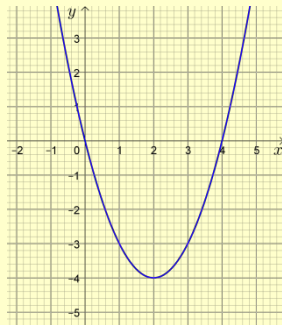
(ια)  $-x^2 + x - 1$

4. Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = -2x^2 + \beta x + \gamma$ , όπου  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , με ρίζες τους αριθμούς  $-8$  και  $2$ . Να βρείτε το πρόσημο των:

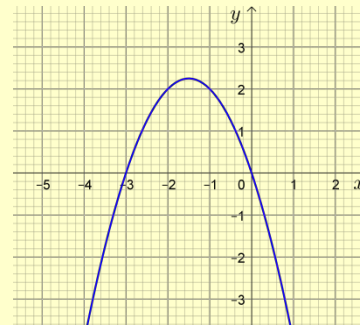
$$f(-20), f(-7,3), f(-8), f(0), f\left(\frac{1}{2013}\right), f(8)$$

5. Στα πιο κάτω διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις παραβολών της μορφής  $y = f(x)$ . Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \geq 0$  σε κάθε περίπτωση.

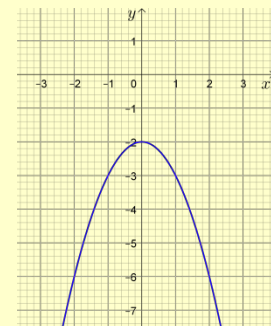
(α)



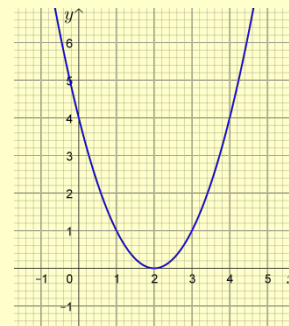
(β)



(γ)



(δ)



6. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α)  $x^2 - 36 > 0$

(β)  $6x - 3x^2 \geq 0$

(γ)  $(x - 2)(x - 3) \leq 0$

(δ)  $x^2 + 3x + 6 < 0$

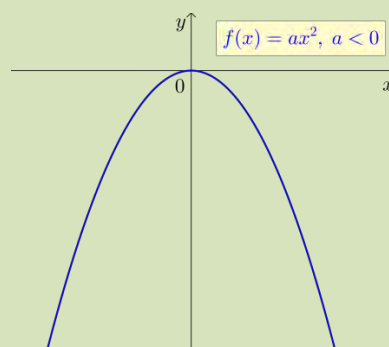
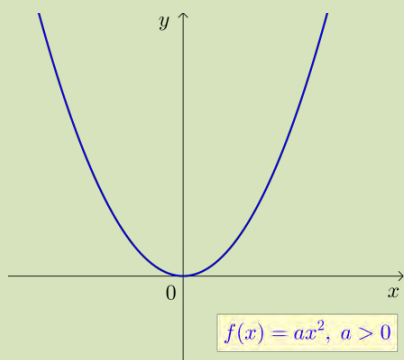
7. Να λύσετε την ανίσωση  $(x + 4)^2 > 4(2x + 5)$ .

8. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $(\lambda - 5)x^2 - (\lambda - 5)x + 2 = 0$  δεν έχει πραγματικές λύσεις;



## Περίληψη

1. Η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0, x \in \mathbb{R}$  λέγεται **παραβολή**.
2. Η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2, a \neq 0, x \in \mathbb{R}$  είναι ειδική περίπτωση **παραβολής**.
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2, a \neq 0$ , έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων, ο οποίος ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.



- Αν  $a > 0$ , τότε:
  - το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το  $[0, +\infty)$  και
  - η ελάχιστη τιμή της είναι η  $y = 0$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(0, 0)$ , το οποίο λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

### Παρατήρηση

Η καμπύλη «πλησιάζει» τον άξονα των  $y$ , καθώς οι τιμές του  $a$  αυξάνονται.

- Αν  $a < 0$ , τότε:
  - το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το  $(-\infty, 0]$  και
  - η μέγιστη τιμή της είναι η  $y = 0$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(0, 0)$ , το οποίο λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

### Παρατήρηση

Η καμπύλη «πλησιάζει» τον άξονα των  $y$ , καθώς οι τιμές του  $|a|$  αυξάνονται.

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = ax^2 + \lambda, a \neq 0, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$  προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2, a \neq 0$ .

- Αν  $\lambda > 0$ , η κατακόρυφη μετατόπιση είναι  $\lambda$  μονάδες προς τα πάνω.
- Αν  $\lambda < 0$ , η κατακόρυφη μετατόπιση είναι  $|\lambda|$  μονάδες προς τα κάτω.

Η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(0, \lambda)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = 0$ .

5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = a(x + \kappa)^2$ , με  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ .

- Αν  $\kappa > 0$ , η κατακόρυφη μετατόπιση είναι  $\kappa$  μονάδες προς τα αριστερά.
- Αν  $\kappa < 0$ , η κατακόρυφη μετατόπιση είναι  $|\kappa|$  μονάδες προς τα δεξιά.

Η γραφική παράσταση της  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(-\kappa, 0)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -\kappa$ .

6. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$ , με  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  προκύπτει από μετατόπιση  $|\kappa|$  μονάδων οριζόντια και  $|\lambda|$  μονάδων κατακόρυφα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ .

Η  $g$  έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $(-\kappa, \lambda)$ , άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -\kappa$  και ελάχιστη τιμή  $\lambda$ , όταν  $a > 0$  ή μέγιστη τιμή  $\lambda$ , όταν  $a < 0$ .

7. Σε κάθε εξίσωση της μορφής  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , η παράσταση  $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$  ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης. Η διακρίνουσα καθορίζει το είδος των λύσεων της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ .

8. Έστω  $x_1, x_2$  οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ . Τότε:

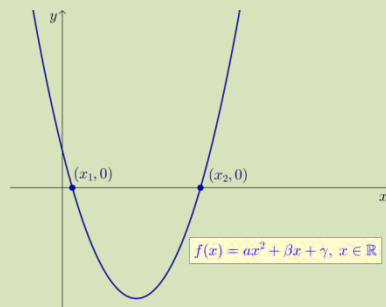
- Αν  $\Delta > 0$ , τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες, τις  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- Αν  $\Delta = 0$ , τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και ίσες, τις  $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2a}$ .
- Αν  $\Delta < 0$ , τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

9. Η παραβολή  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση  $x = -\frac{\beta}{2a}$  και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $K\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .

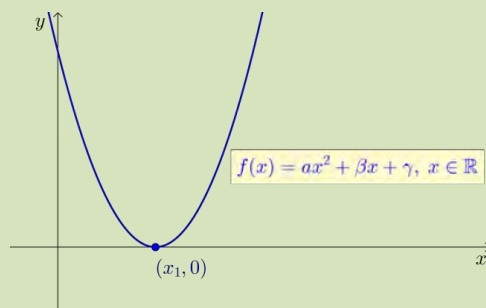
- Αν  $a > 0$ , τότε η παραβολή  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  έχει ελάχιστη τιμή, την  $y_{\min} = f\left(-\frac{\beta}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$  και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι το  $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ .
- Αν  $a < 0$ , τότε η παραβολή  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  έχει μέγιστη τιμή, την  $y_{\max} = f\left(-\frac{\beta}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$  και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι το  $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ .
- Η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  τέμνει τον άξονα των  $y'y$  στο σημείο  $(0, f(0)) = (0, \gamma)$ .

10. Γραφικά, οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  είναι οι τετμημένες των σημείων τομής, αν υπάρχουν, της γραφικής παράστασης της παραβολής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  με τον άξονα των  $x$ . Έστω  $x_1, x_2$  οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ . Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

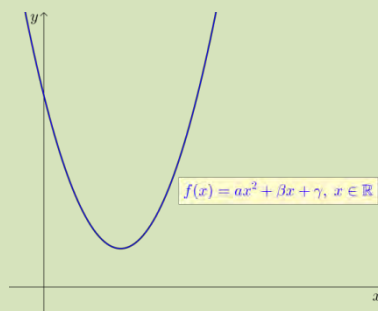
- Αν  $\Delta > 0$ , τότε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  τέμνει τον άξονα των  $x$  σε δύο διαφορετικά σημεία με συντεταγμένες  $(x_1, 0)$  και  $(x_2, 0)$ .



- Αν  $\Delta = 0$ , τότε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 = x_2$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  εφάπτεται στον άξονα των  $x$  στο σημείο με συντεταγμένες  $(x_1, 0)$ .



- Αν  $\Delta < 0$ , τότε  $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  δεν τέμνει τον άξονα των  $x$ .



### 11. Τύποι του Vietta

Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , τότε συμβολίζουμε με  $S$  το άθροισμα και με  $P$  το γινόμενο των λύσεών της. Ισχύει:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

12. Κάθε τριώνυμο  $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  με δύο πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στη μορφή:

$$P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ειδικά, αν  $\Delta = 0$ , τότε έχουμε ότι  $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2a}$  και το τριώνυμο παίρνει τη μορφή:

$$P(x) = a(x - x_1)^2 = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$$

13. Μπορούμε να κατασκευάσουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού, όταν γνωρίζουμε τις λύσεις της  $x_1, x_2$  ή το άθροισμα  $S$  και το γινόμενο  $P$  των λύσεών της. Μια τέτοια εξίσωση είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

14. Για το πρόσημο του τριωνύμου  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$ , διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$ :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
Πρόσημο $ax^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του $a$	0	Ετερόσημο του $a$	0	Ομόσημο του $a$

- $\Delta = 0$ :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$+\infty$
Πρόσημο $ax^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του $a$	0	Ομόσημο του $a$

- $\Delta < 0$ :

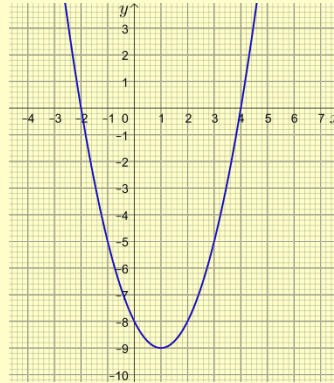
$x$	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο $ax^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του $a$	

## Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας για τις παραβολές  $f(x) = 3x^2$  και  $g(x) = -2x^2$ . Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.
2. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η συνάρτηση  $y = (\lambda - 3)x^2$  παριστάνει παραβολή που έχει ελάχιστη τιμή;
3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y = (\kappa + 2)x^2$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa \neq -2$ .
  - (α) Για ποια τιμή του  $\kappa$  η παραβολή διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες  $(2, -4)$ ;
  - (β) Για ποια τιμή του  $\beta \in \mathbb{R}$  η παραβολή  $y = -x^2$  διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες  $(-3, \beta + 1)$ ;
4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y = 2x^2$ .
  - (α) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.
  - (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου της παραβολής  $A(3, 18)$  ως προς τον άξονα συμμετρίας της.
5. Να αναφέρετε μία διαφορά και δύο ομοιότητες που παρουσιάζουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = 3x^2$ .
6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας για τις παραβολές  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  και  $g(x) = -x^2 + 4x$ . Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.
7. Αν η παραβολή με εξίσωση  $y = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στα σημεία με συντεταγμένες  $A(-1, 0)$  και  $B(9, 0)$ , να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.
8. Η παραβολή με εξίσωση  $y = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στα σημεία με τετμημένες 3 και 9, ενώ τέμνει τον άξονα των  $y$  στο σημείο με τεταγμένη 27. Να βρείτε:
  - (α) την εξίσωση της παραβολής
  - (β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
  - (γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της.
9. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = 15 + 2x - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

10. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 2)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

11. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ .



Να βρείτε:

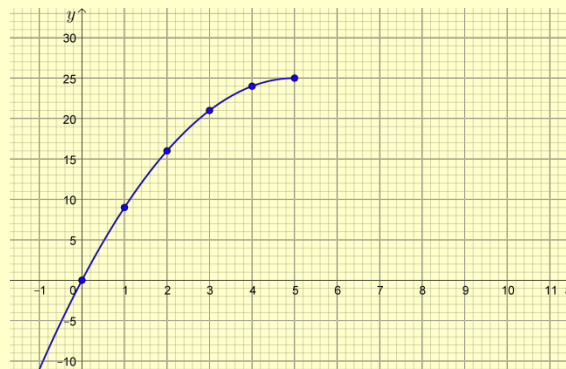
- (α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της
- (β) το πρόσημο του  $a$
- (γ) την τιμή του  $\gamma$
- (δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
- (ε) τις συντεταγμένες της κορυφής της,
- (στ) τις λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- (ζ) τις λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = -10$ .

12. Ο πιο κάτω πίνακας τιμών αντιστοιχεί σε παραβολή της μορφής  $y = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  με εξίσωση άξονα συμμετρίας την  $x = 3$  και πεδίο ορισμού το  $[0, 5]$ .

$x$	0	1	2	3	4	5
$y$	8	3	0	-1	0	3

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής και να βρείτε τον τύπο της.

13. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής  $y = ax^2 + bx + \gamma$ , αν το σημείο με συντεταγμένες  $(5, 25)$  είναι η κορυφή της παραβολής.



14. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Η εξίσωση $x^2 + x - 11 = 0$ έχει το άθροισμα των λύσεων της ίσο με 1.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Το γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης $3x^2 + 6x - 1 = 0$ είναι $-2$ .	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Μία εξίσωση με λύσεις $x_1 = 2, x_2 = 4$ είναι η $x^2 + 6x + 8 = 0$ .	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + 4x - 20 = 0$ είναι οι $x_1$ και $x_2$ , τότε η παράσταση $x_1 + x_2 - x_1x_2$ ισούται με 16.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η εξίσωση $5x^2 + 11x + 5 = 0$ έχει λύσεις αντίστροφες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η εξίσωση $x^2 + \lambda x - \mu^2 = 0, \mu \in \mathbb{R}$ έχει δύο λύσεις αντίθετες, όταν $\mu = 0$ .	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

15. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς που να έχουν άθροισμα 8 και γινόμενο 15.

16. Να σχηματίσετε εξίσωση  $2^{\text{ου}}$  βαθμού με ακέραιους συντελεστές που να έχουν λύσεις τα πιο κάτω ζεύγη:

(α) 2 και 3

(β)  $-4$  και 1

(γ)  $-\frac{2}{5}$  και  $+\frac{2}{5}$

17. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α)  $x^2 + 2x - 24 \leq 0$

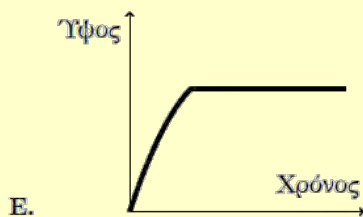
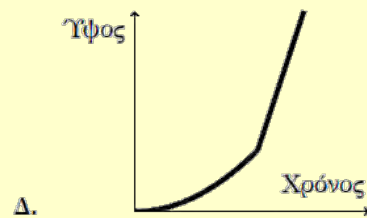
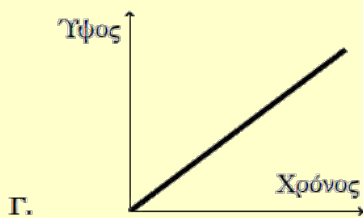
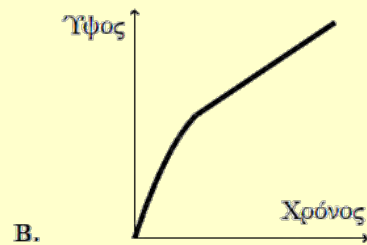
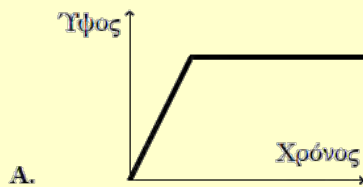
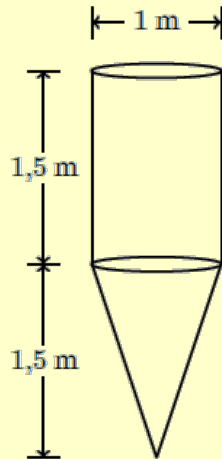
(β)  $-x^2 + x + 20 < 0$

18. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το τριώνυμο  $x^2 + (2\lambda - 3)x - 3\lambda - 7$  δεν έχει πραγματικές ρίζες;

## Λύση Προβλήματος

### ΝΤΕΠΟΖΙΤΟ ΝΕΡΟΥ

Ένα ντεπόζιτο νερού έχει τη μορφή και τις διαστάσεις που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Αρχικά, το ντεπόζιτο είναι άδειο. Μετά το γεμίζουμε νερό με ρυθμό ένα λίτρο ανά δευτερόλεπτο. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το ύψος του νερού μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου;



PISA 2003



## Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

- Να περιγράψετε πώς η γραφική παράσταση της  $f(x) = -x^2$ , με κατάλληλες μετατοπίσεις, θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:  
(α)  $f_1(x) = -x^2 + 4$       (β)  $f_2(x) = 2 + 2x - x^2$       (γ)  $f_3(x) = 6x - x^2$
- Αν αφεθεί ελεύθερα ένα σώμα από ύψος  $h$  (σε m), τότε ο χρόνος  $t$  (σε sec) που χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος συνδέεται με τη σχέση  $h = 5t^2$ .  
Να υπολογίσετε:  
(α) το ύψος που αφήθηκε μία μπάλα που χρειάστηκε 2 sec για να φτάσει στο έδαφος και  
(β) τον χρόνο που χρειάζεται για να πέσει στο έδαφος μία μπάλα που αφήνεται από ύψος 80 m.  
Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h = 5t^2$ , αναφέροντας το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο  $f(x) = 2x^2 + \beta x + \gamma$  τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία με συντεταγμένες  $A(-1, 0)$  και  $B(2, 0)$ .  
(α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .  
(β) Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\beta$  και  $\gamma$ .  
(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα των τεταγμένων.
- Δίνεται η εξίσωση  $2x^2 - 3x + 1 = 0$ .  
(α) Να βρείτε το είδος των λύσεών της.  
(β) Σε πόσα σημεία η παραβολή  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  τέμνει τον άξονα των τετμημένων;
- Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω παραβολών:  
(α)  $f(x) = x^2 + 2x$       (β)  $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$       (γ)  $h(x) = 5 + 4x - x^2$
- Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $f(x) = x^2$ . Να γράψετε τον τύπο των συναρτήσεων  $g, h, \kappa$ , με  $g(x) = f(x) + 2$ ,  $h(x) = f(x + 2)$  και  $\kappa(x) = f(x - 2) + 2$ . Στη συνέχεια, να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $g, h, \kappa$ .
- Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης  $x^2 - 6x - 3 = 0$ , να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:  
(α)  $-3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2$       (β)  $\frac{12}{x_1^2} + \frac{12}{x_2^2}$       (γ)  $x_1^4 + x_2^4$

8. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ , στις πιο κάτω περιπτώσεις:

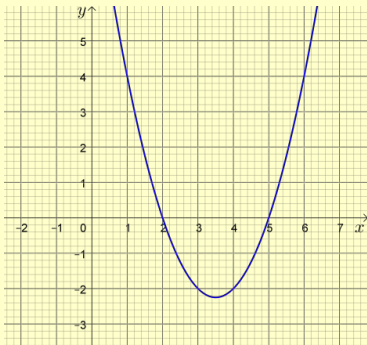
(α) να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,

(β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\frac{\gamma}{a}$ ,

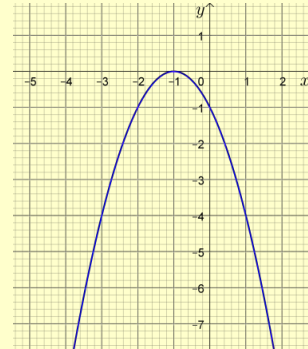
(γ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\frac{\beta}{a}$  και

(δ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\frac{3\gamma+3\beta}{2a}$ .

i.



ii.



9. Η εξίσωση  $3x^2 + 6x - 1 = 0$  έχει λύσεις τους αριθμούς  $x_1, x_2$ . Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς  $x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_1$ .

10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο  $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$ .

11. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους περιττούς αριθμούς, των οποίων το γινόμενο να είναι 63.

12. Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους;

13. Να υπολογίσετε τις πιθανές τιμές του μήκους ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, ώστε η περίμετρός του να είναι 20 m και το εμβαδόν του να είναι τουλάχιστον  $16 \text{ m}^2$ .

14. Η εξίσωση  $(\kappa - 1)x^2 + 4x + (6 - \kappa) = 0$  έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.

(α) Να δείξετε ότι το  $\kappa \in \mathbb{R}$  επαληθεύει την ανίσωση  $\kappa^2 - 7\kappa + 10 > 0$ .

(β) Να βρείτε τις πιθανές τιμές του  $\kappa$ , ώστε η εξίσωση να έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.

15. Δίνονται οι αριθμοί  $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}, B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$ .

(α) Να δείξετε ότι  $A + B = \frac{1}{2}$  και  $AB = \frac{1}{20}$ .

(β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς  $A$  και  $B$ .



# ΕΝΟΤΗΤΑ 06

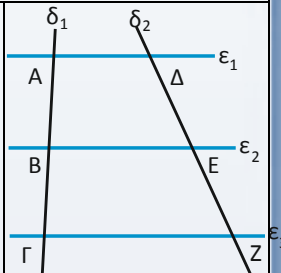
## ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ – ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

### ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 6.1 Θεώρημα Θαλή
- 6.2 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα
- 6.3 Όμοια τρίγωνα

## Έχουμε μάθει ...

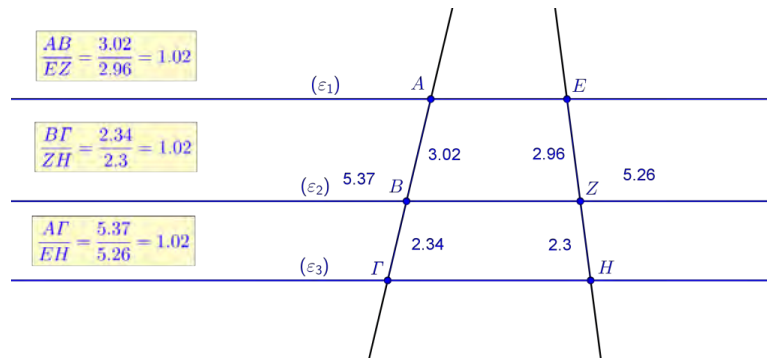
<p><b>Λόγος</b></p>	<p>Λόγος δύο μεγεθών <math>A</math> προς <math>B</math> ονομάζεται το πηλίκο που προκύπτει, όταν το μέτρο του πρώτου μεγέθους <math>A</math> διαιρεθεί με το μέτρο του δεύτερου μεγέθους <math>B</math>. Γράφεται:</p> $\lambda = \frac{A}{B}$
<p><b>Αναλογία</b></p>	<p>Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων και γράφεται <math>\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}</math>. Τα <math>\alpha</math> και <math>\delta</math> ονομάζονται άκροι όροι, ενώ τα <math>\beta</math> και <math>\gamma</math> ονομάζονται μέσοι όροι.</p>
<p><b>Ιδιότητες Αναλογιών</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma</math></li> <li>2. <math>\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}</math></li> <li>3. <math>\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}</math></li> <li>4. <math>\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}</math></li> <li>5. <math>\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \dots = \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\dots}{\beta+\delta+\zeta+\dots}</math></li> </ol>
<p><b>Θεώρημα</b></p>	<p>Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε θα ορίζουν και ίσα τμήματα πάνω στην άλλη.</p> <p><i>Αν <math>\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3</math> και <math>AB = B\Gamma</math>, τότε <math>\Delta E = EZ</math>.</i></p>



## 6.1 ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

### Διερεύνηση 1

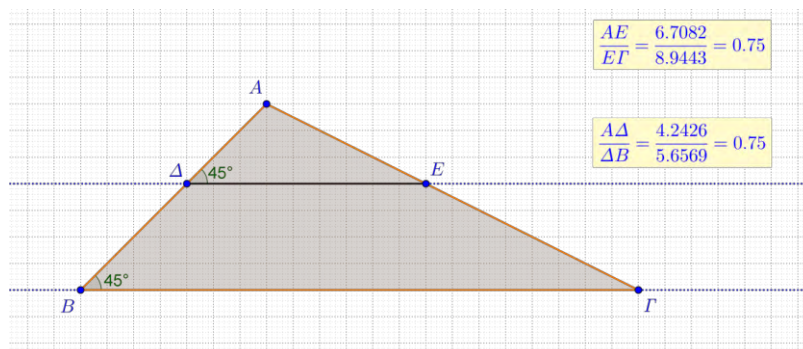
Να ανοίξετε το αρχείο «Alyk\_En07\_TheorimaThali.ggb».



- Ποια σχέση συνδέει τους λόγους  $\frac{AB}{EZ}$ ,  $\frac{B\Gamma}{ZH}$  και  $\frac{A\Gamma}{EH}$ ;
- Να μετατοπίσετε παράλληλα κάποια ή κάποιες από τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$ ,  $(\varepsilon_3)$  και να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα συνεχίζει να ισχύει.
- Να μετακινήσετε κάποιο ή κάποια από τα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$  και να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα συνεχίζει να ισχύει.

### Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το αρχείο «Alyk\_En07\_ThalisTrigono.ggb».



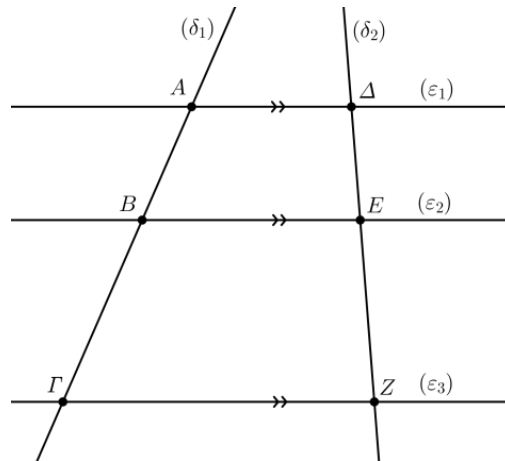
- Να μετακινήσετε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  σε διάφορες θέσεις.  
Τι παρατηρείτε όταν  $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ ;
- Να εξετάσετε κατά πόσο η παρατήρησή σας ισχύει και σε άλλα τρίγωνα.

### Θεώρημα Θαλή

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη μία ευθεία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται πάνω στην άλλη ευθεία.

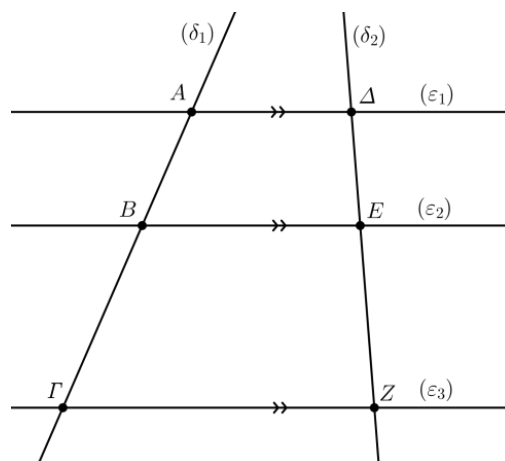
Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, αν  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ , τότε:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



Ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή.

Θεωρούμε δύο ευθείες  $(\delta_1)$  και  $(\delta_2)$ , οι οποίες τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  στα σημεία  $A, B$  και  $\Delta, E$ , αντίστοιχα. Αν  $\Gamma$  και  $Z$  είναι σημεία των ευθειών  $(\delta_1)$  και  $(\delta_2)$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ , τότε η ευθεία  $\Gamma Z$  είναι παράλληλη προς τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .



Δηλαδή, αν  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$  και  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ , τότε  $\Gamma Z \parallel (\varepsilon_1)$  και  $\Gamma Z \parallel (\varepsilon_2)$ .

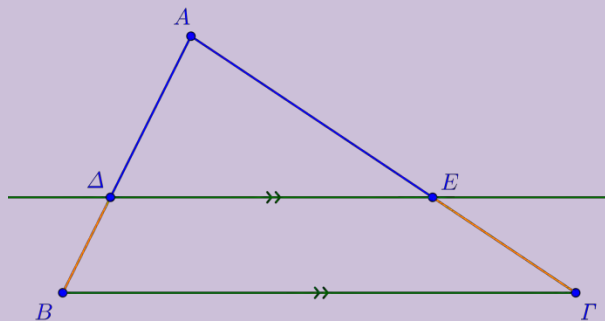
### Πόρισμα 1

Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη.

### Πόρισμα 2

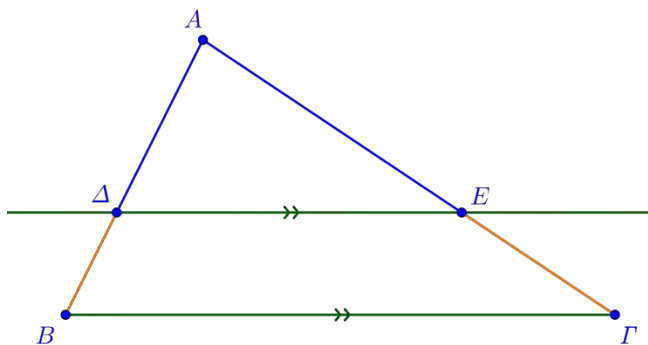
Αν μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $AG$  ή τις προεκτάσεις των  $AB$  και  $AG$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$ , αντίστοιχα, τότε οι λόγοι των αντίστοιχων τμημάτων είναι ίσοι. Δηλαδή:

$$\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}, \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG}$$



Ισχύει και το αντίστροφο του πορίσματος.

Θεωρούμε δύο σημεία  $\Delta$  και  $E$  πάνω στις πλευρές  $AB$  και  $AG$  (ή στις προεκτάσεις τους) ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ . Τότε, η ευθεία  $\Delta E$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

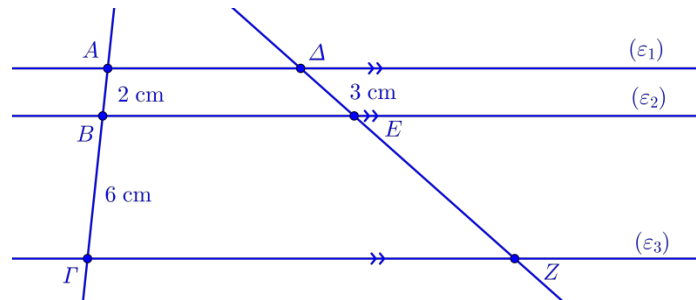


Δηλαδή, αν  $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ , τότε  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .



### Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ ,  $AB = 2 \text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 6 \text{ cm}$  και  $\Delta E = 3 \text{ cm}$ .



Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $EZ$ .

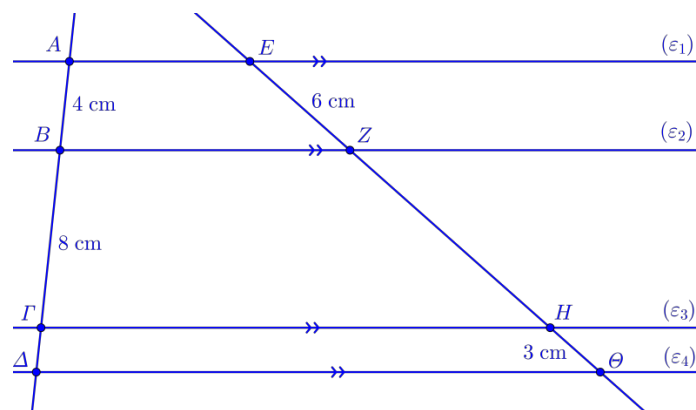
### Λύση

Αφού  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ , τότε από το Θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{3}{EZ} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{EZ} \Rightarrow EZ = 9 \text{ cm}$$

### Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$ ,  $AB = 4 \text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 8 \text{ cm}$ ,  $EZ = 6 \text{ cm}$  και  $H\Theta = 3 \text{ cm}$ .



Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων  $ZH$  και  $\Gamma\Delta$ .

### Λύση

Αφού  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$ , τότε από το Θεώρημα Θαλή έχουμε

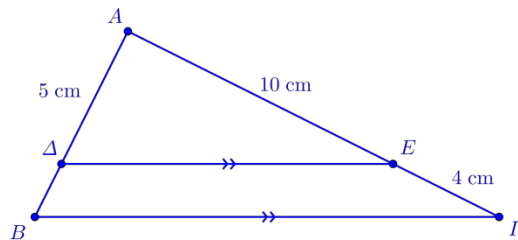
$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{6}{ZH} \Rightarrow ZH = 12 \text{ cm}$$

και

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{ZH}{H\Theta} \Rightarrow \frac{8}{\Gamma\Delta} = \frac{12}{3} \Rightarrow \Gamma\Delta = 2 \text{ cm.}$$

### Παράδειγμα 3

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι  $DE \parallel B\Gamma$ ,  $AD = 5$  cm,  $AE = 10$  cm και  $E\Gamma = 4$  cm.



Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $\Delta B$ .

#### Λύση

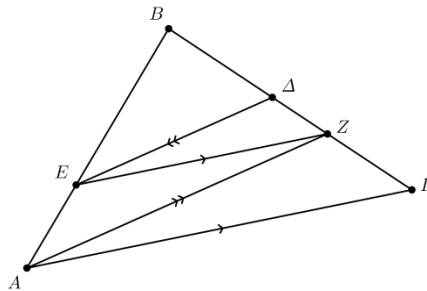
Αφού  $DE \parallel B\Gamma$ , τότε από το πόρισμα του Θεωρήματος Θαλή έχουμε:

$$\frac{AD}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \Rightarrow \frac{5}{\Delta B} = \frac{10}{4} \Rightarrow \Delta B = 2 \text{ cm}$$

### Παράδειγμα 4

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι  $EZ \parallel A\Gamma$  και  $\Delta E \parallel AZ$ . Να δείξετε ότι:

$$\frac{B\Delta}{BZ} = \frac{BZ}{B\Gamma}$$



#### Λύση

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει ότι  $EZ \parallel A\Gamma$ . Άρα:

$$\frac{BZ}{B\Gamma} = \frac{BE}{BA} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο  $ABZ$  ισχύει ότι  $\Delta E \parallel AZ$ . Άρα:

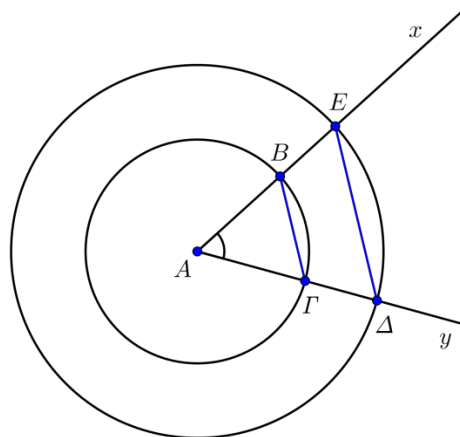
$$\frac{B\Delta}{BZ} = \frac{BE}{BA} \quad (2)$$

Από τις (1), (2), παίρνουμε ότι:

$$\frac{B\Delta}{BZ} = \frac{BZ}{B\Gamma}$$

### Παράδειγμα 5

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γωνία  $xAy$ . Με κέντρο το  $A$  κατασκευάζουμε 2 ομόκεντρος κύκλους με ακτίνες  $\rho$  και  $R$ , αντίστοιχα, όπου  $\rho < R$ . Ο κύκλος με ακτίνα  $\rho$  τέμνει τις πλευρές  $Ax$  και  $Ay$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ , αντίστοιχα, ενώ ο κύκλος με ακτίνα  $R$  τέμνει τις πλευρές  $Ax$  και  $Ay$  στα σημεία  $E$  και  $\Delta$ , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το  $B\Gamma\Delta E$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



### Λύση

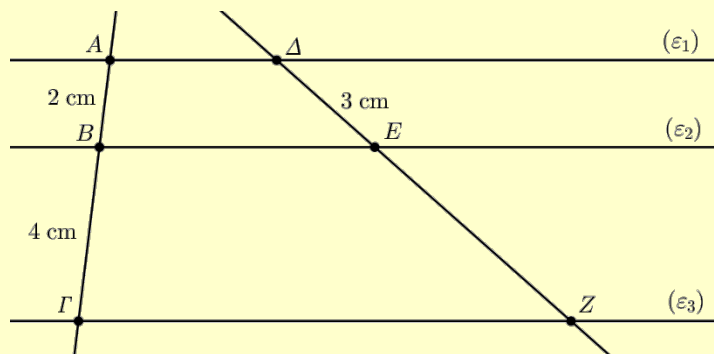
Ο ένας κύκλος έχει ακτίνα  $AB = A\Gamma = \rho$ , ενώ ο άλλος κύκλος έχει ακτίνα  $AE = A\Delta = R$ . Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{AE} = \frac{\rho}{R} \\ \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{\rho}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$$

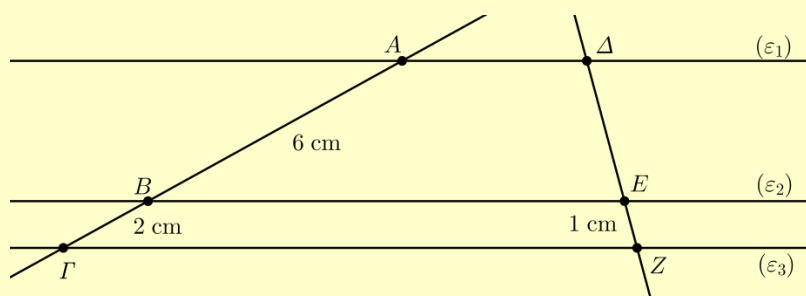
Επομένως, ισχύει ότι  $B\Gamma \parallel E\Delta$  και το  $B\Gamma\Delta E$  είναι τραπέζιο. Επιπλέον, ισχύει ότι  $BE = \Gamma\Delta = R - \rho$ . Έτσι, το τραπέζιο  $B\Gamma\Delta E$  είναι ισοσκελές.

## Δραστηριότητες

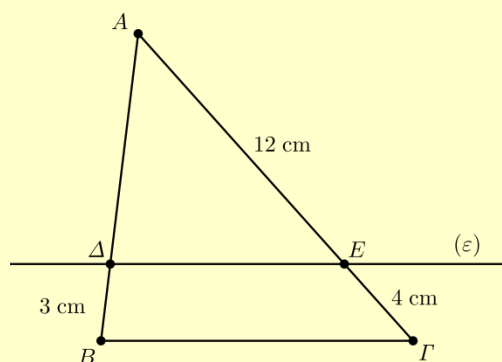
1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ ,  $AB = 2 \text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 4 \text{ cm}$  και  $\Delta E = 3 \text{ cm}$ . Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $EZ$ .



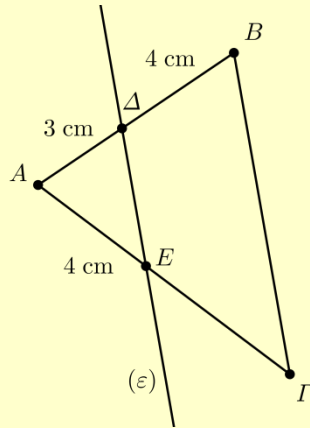
2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ ,  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 2 \text{ cm}$  και  $EZ = 1 \text{ cm}$ . Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $\Delta E$ .



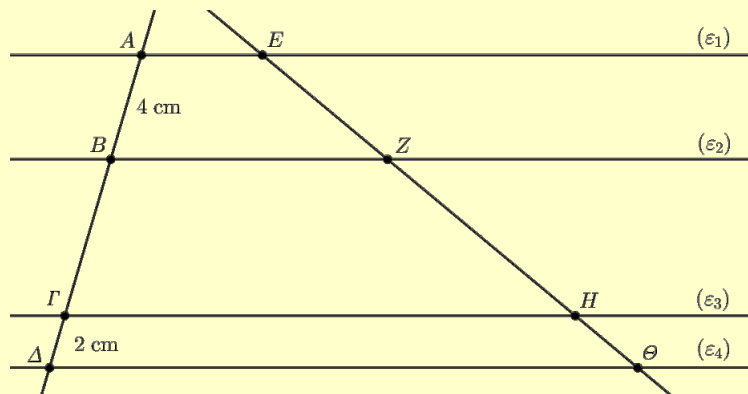
3. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Αν  $\Delta B = 3 \text{ cm}$ ,  $A E = 12 \text{ cm}$  και  $E\Gamma = 4 \text{ cm}$ , τότε να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $A\Delta$ .



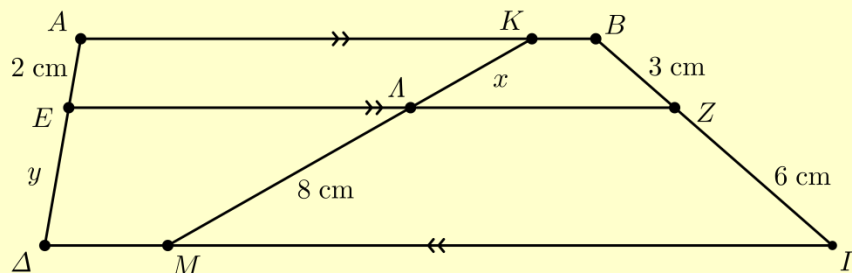
4. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Αν  $A\Delta = 3\text{ cm}$ ,  $AE = 4\text{ cm}$  και  $\Delta B = 4\text{ cm}$ , τότε να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $E\Gamma$ .



5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$ ,  $AB = 4\text{ cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 2\text{ cm}$ ,  $A\Delta = 12\text{ cm}$  και  $E\theta = 18\text{ cm}$ . Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων  $EZ$ ,  $H\theta$  και  $EH$ .

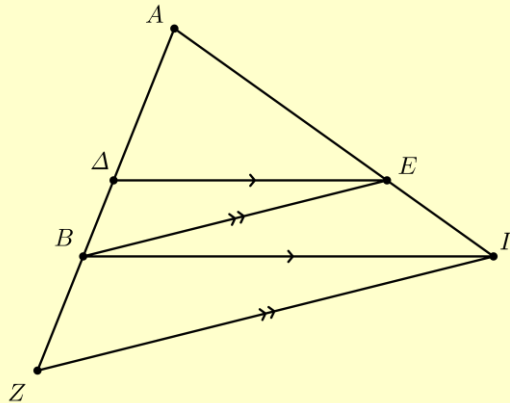


6. Να υπολογίσετε τα μήκη  $x$  και  $y$  στο πιο κάτω σχήμα.



7. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Η ευθεία  $\Delta E$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$ . Από το σημείο  $\Gamma$  φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την  $BE$ , η οποία τέμνει την προέκταση της  $AB$  στο σημείο  $Z$ . Να δείξετε ότι:

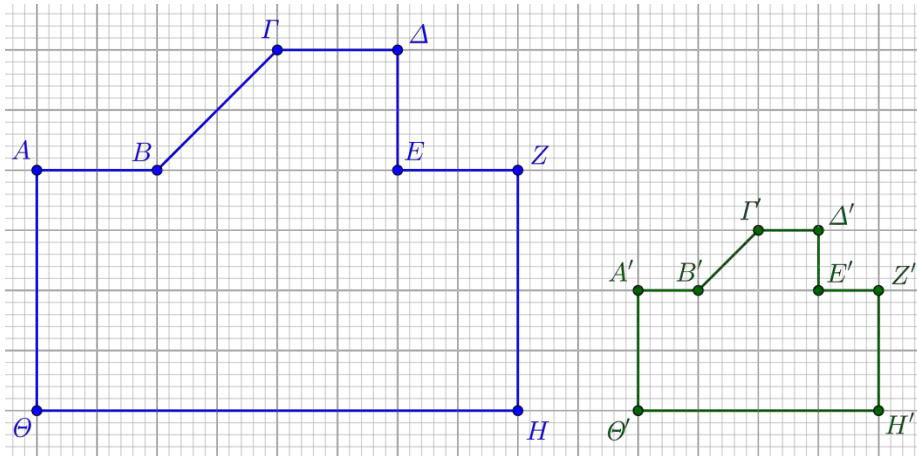
$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{AZ}$$



## 6.2 ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

### Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται δύο πολύγωνα.



- Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Μπλε Πολύγωνο	Πράσινο Πολύγωνο	Μπλε Πολύγωνο Πράσινο Πολύγωνο
$A\Theta =$	$A'\Theta' =$	$\frac{A\Theta}{A'\Theta'} =$
$AB =$	$A'B' =$	$\frac{AB}{A'B'} =$
$\Theta H =$	$\Theta'H' =$	$\frac{\Theta H}{\Theta'H'} =$
$B\Gamma =$	$B'\Gamma' =$	$\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} =$
$\Theta\hat{A}B =$	$\Theta'\hat{A}'B' =$	
$A\hat{B}\Gamma =$	$A'\hat{B}'\Gamma' =$	
$B\hat{\Gamma}\Delta =$	$B'\hat{\Gamma}'\Delta' =$	
$E\hat{Z}H =$	$E'\hat{Z}'H' =$	

- Να κάνετε μια εικασία για τη σχέση που συνδέει το μέτρο των αντίστοιχων γωνιών σε πολύγωνα όπως τα πιο πάνω.
- Να κάνετε μια εικασία για τη σχέση που συνδέει τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών σε πολύγωνα όπως τα πιο πάνω.

### Ορισμός

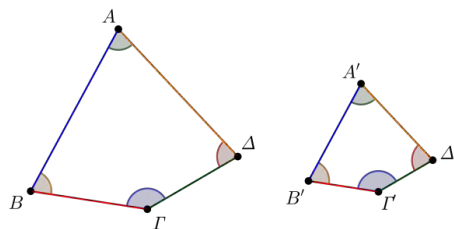
Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Συμβολίζουμε τη σχέση ομοιότητας δύο πολυγώνων με το σύμβολο  $\approx$ .

### Σημείωση

- **Ομόλογες πλευρές** δύο πολυγώνων λέγονται οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.
- Οι κορυφές των ίσων γωνιών δύο όμοιων πολυγώνων λέγονται **ομόλογες κορυφές**.

Για παράδειγμα, τα πιο κάτω πολύγωνα  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'B'\Gamma'\Delta'$  είναι όμοια.



Δηλαδή,  $AB\Gamma\Delta \approx A'B'\Gamma'\Delta'$  και ισχύει ότι:

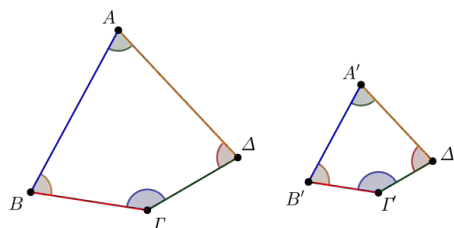
- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'}$
- $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ ,  $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$

### Ορισμός

**Λόγος ομοιότητας** δύο όμοιων πολυγώνων είναι ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών τους και συμβολίζεται με  $\lambda$ .

Για παράδειγμα, για τα πιο κάτω όμοια πολύγωνα  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'B'\Gamma'\Delta'$  έχουμε:

- Οι κορυφές  $A$  και  $A'$  είναι ομόλογες.
- Οι πλευρές  $AB$  και  $A'B'$  είναι ομόλογες.
- Ο λόγος ομοιότητας  $\lambda$  ισούται με  $\frac{AB}{A'B'}$ .



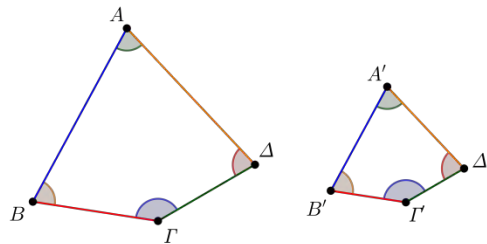


### Πρόταση

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:

- (α) Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.
- (β) Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Για παράδειγμα, για τα πιο κάτω όμοια πολύγωνα  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'B'\Gamma'\Delta'$  έχουμε:

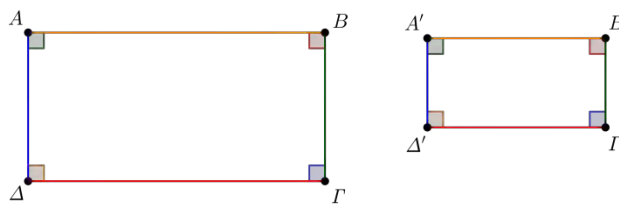


$$(\alpha) \frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta}}{\Pi_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \lambda$$

$$(\beta) \frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \lambda^2$$

### Απόδειξη (Η περίπτωση των ορθογώνιων παραλληλογράμμων)

Θεωρούμε δύο όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'B'\Gamma'\Delta'$ .



(α) Έχουμε:

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + A\Delta}{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + A'\Delta'} = \frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta}}{\Pi_{A'B'\Gamma'\Delta'}}$$

(β) Έχουμε:

$$\lambda^2 = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}}$$

### Σημείωση

Μπορούμε να επεκτείνουμε την απόδειξη σε δύο οποιαδήποτε όμοια πολύγωνα.

## Σχόλια

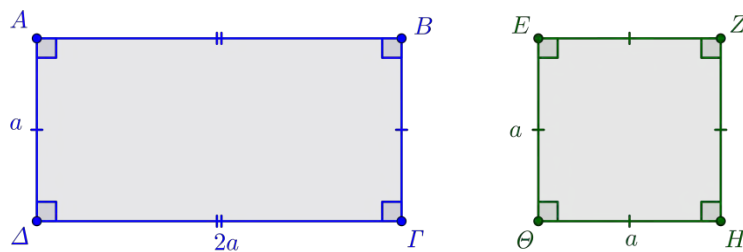
- Όλα τα κανονικά πολύγωνα που έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- Στην επίλυση ασκήσεων συμβολίζουμε τα όμοια πολύγωνα με το σύμβολο  $\approx$  και οι ομόλογες κορυφές τους τοποθετούνται σε αντίστοιχες θέσεις.

Για παράδειγμα, αν γράψουμε  $AB\Gamma\Delta \approx K\Lambda MN$ , τότε αυτό θα σημαίνει ότι  $\hat{A} = \hat{K}$ ,  $\hat{B} = \hat{\Lambda}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{M}$  και  $\hat{\Delta} = \hat{N}$ .

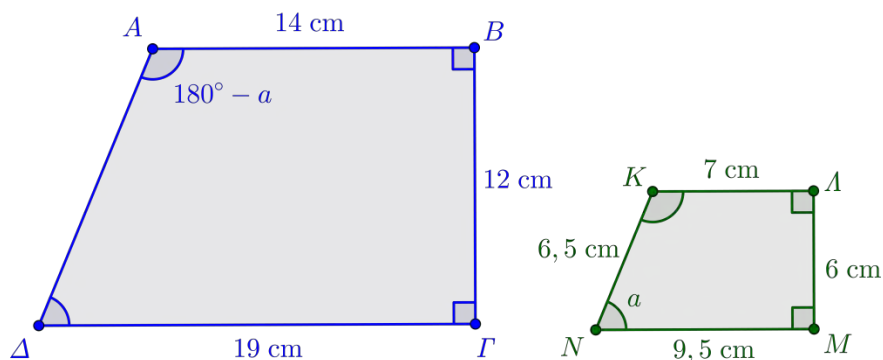
## Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε κατά πόσο τα πολύγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια. Στην περίπτωση που είναι όμοια, να υπολογίσετε τον λόγο ομοιότητάς τους.

(α)



(β)



## Λύση

- (α) Τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία (όλες ορθές). Οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών είναι:

$$\lambda_1 = \frac{A\Delta}{E\Theta} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{a}{a} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H} = \frac{2a}{a} = 2$$

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών τους δεν είναι ίσοι. Επομένως, τα πολύγωνα  $AB\Gamma\Delta$  και  $EZH\Theta$  δεν είναι όμοια.

(β) Αρχικά εξετάζουμε κατά πόσο τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

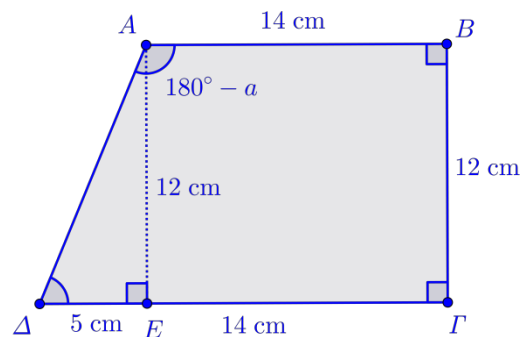
Έχουμε ότι  $AB \parallel \Delta\Gamma$ , αφού οι  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  είναι κάθετες στην  $B\Gamma$ . Έτσι,  $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$  (ως εντός εναλλάξ γωνίες) και  $\hat{\Delta} = a$ .

Ομοίως, έχουμε ότι  $K\Lambda \parallel NM$ , αφού οι  $K\Lambda$  και  $NM$  είναι κάθετες στην  $M\Lambda$ . Έτσι,  $\hat{K} + \hat{N} = 180^\circ$  (ως εντός εναλλάξ γωνίες) και  $\hat{K} = 180^\circ - a$ .

Τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, αφού:

$$\hat{A} = \hat{K} = 180^\circ - a, \quad \hat{\Delta} = \hat{N} = a, \quad \hat{B} = \hat{\Lambda} = 90^\circ, \quad \hat{\Gamma} = \hat{M} = 90^\circ$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε κατά πόσο τα δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.



Το τρίγωνο  $ADE$  είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε:

$$(AD)^2 = (DE)^2 + (AE)^2 \Rightarrow (AD)^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow (AD) = 13 \text{ cm}$$

Επομένως, έχουμε ότι:

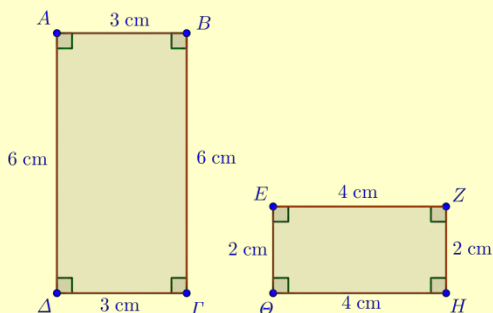
$$\lambda_1 = \frac{K\Lambda}{AB} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\Lambda M}{B\Gamma} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{MN}{\Gamma\Delta} = \frac{9,5}{19} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{KN}{AD} = \frac{6,5}{13} = \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών τους είναι ίσοι. Επομένως, οι πλευρές είναι ανάλογες και τα πολύγωνα  $AB\Gamma\Delta$  και  $K\Lambda M N$  είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

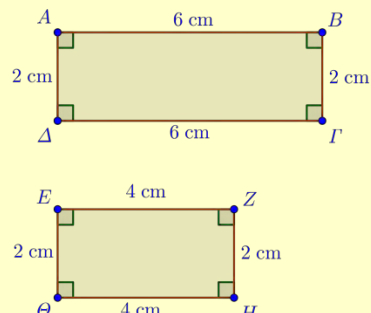
## Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πολύγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

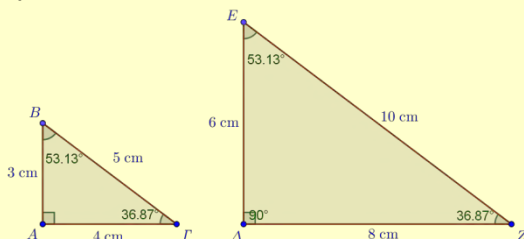
(α)



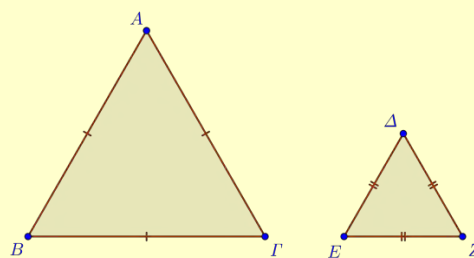
(β)



(γ)



(δ)



2. Δίνεται ένα ορθογώνιο με διαστάσεις  $a$  και  $b$  και ένα άλλο με διαστάσεις  $2a$  και  $2b$ . Να δείξετε ότι τα δύο ορθογώνια είναι όμοια και στη συνέχεια να υπολογίσετε:

- (α) τον λόγο των πλευρών τους
- (β) τον λόγο των περιμέτρων τους
- (γ) τον λόγο των εμβαδών τους.

3. Να χαρακτηρίσετε ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Ένα τετράγωνο και ένας ρόμβος είναι πάντοτε όμοια τετράπλευρα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο είναι πάντοτε όμοια τετράπλευρα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Δύο κανονικά εξάγωνα με πλευρές 5 cm και 7 cm είναι όμοια εξάγωνα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Ένα κανονικό πεντάγωνο με πλευρά $a$ και ένα κανονικό εξάγωνο με πλευρά $a$ είναι όμοια πολύγωνα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Ο λόγος ομοιότητας δύο πολυγώνων είναι  $\frac{2}{5}$  και το εμβαδόν του μικρότερου πολυγώνου είναι  $16 \text{ cm}^2$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγαλύτερου πολυγώνου.
5. Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 6 cm, 9 cm και 12 cm. Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου όμοιου προς αυτό το τρίγωνο, το οποίο έχει περίμετρο 36 cm.

## 6.3 ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

### Εξερεύνηση

Στην πιο κάτω εικόνα, ένας παρατηρητής βρίσκεται στην κορυφή του φάρου, ο οποίος βρίσκεται σε ύψος 30 m από την επιφάνεια της θάλασσας και παρατηρεί μια ψαρόβαρκα στη θάλασσα. Έχει στη διάθεσή του έναν χάρακα μήκους 1 m. Να εξηγήσετε πώς μπορεί ο παρατηρητής να υπολογίσει την απόσταση της ψαρόβαρκας από τον φάρο.



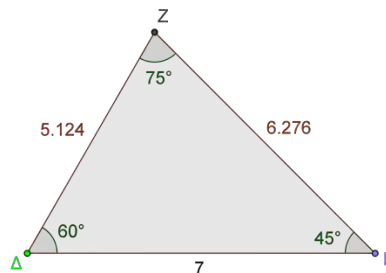
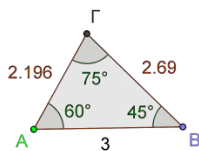
### Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε το αρχείο «[Alyk\\_En07\\_Kritirio1.ggb](#)».

A=60  
B=45  
Γ=75°  
AB=3

Δ=60  
E=45  
Z=75°  
ΔE=7

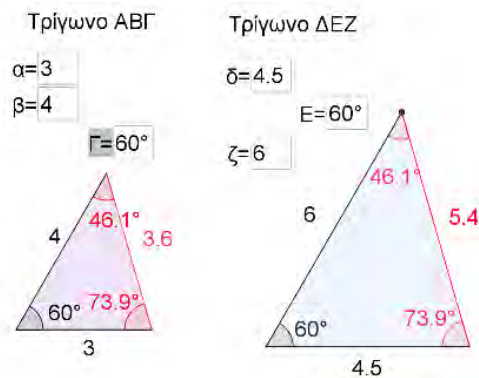
Επαναφορά



- Να επιλέξετε το μέτρο για δύο γωνίες του τριγώνου  $ABΓ$ .
- Να δώσετε το μέτρο για δύο γωνίες του τριγώνου  $ΔEZ$ , έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα να έχουν δύο γωνίες τους αντίστοιχα ίσες.
- Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα  $ABΓ$  και  $ΔEZ$  είναι όμοια.

## Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το αρχείο «Alyk\_En07\_Kritirio2.ggb».



- Να επιλέξετε το μήκος για δύο από τις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$  και το μέτρο της περιεχόμενης τους γωνίας.
- Να επαναλάβετε τη διαδικασία για το τρίγωνο  $\Delta EZ$ , ώστε οι δύο πλευρές των τριγώνων να είναι ανάλογες και οι περιεχόμενες γωνίες τους ίσες.
- Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα είναι όμοια.

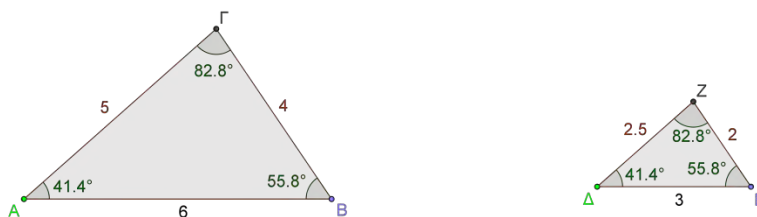
## Διερεύνηση 3

Να ανοίξετε το αρχείο «Alyk\_En07\_Kritirio3.ggb».

$\alpha=4$   
 $\beta=5$   
 $\gamma=6$

$\delta=2$   
 $\epsilon=2.5$   
 $z=3$

Επαναφορά

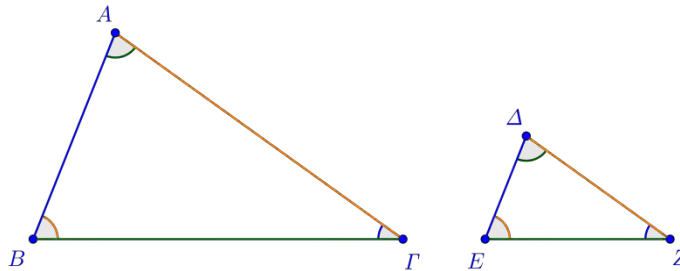


- Να επιλέξετε το μήκος για τις τρεις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να επαναλάβετε τη διαδικασία για τις πλευρές του τριγώνου  $\Delta EZ$ , ώστε οι τρεις πλευρές των δύο τριγώνων να είναι ανάλογες.
- Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα είναι όμοια.

### Ορισμός

Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Για παράδειγμα, αν τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda$ , τότε ισχύει ότι  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \lambda$  και  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ .



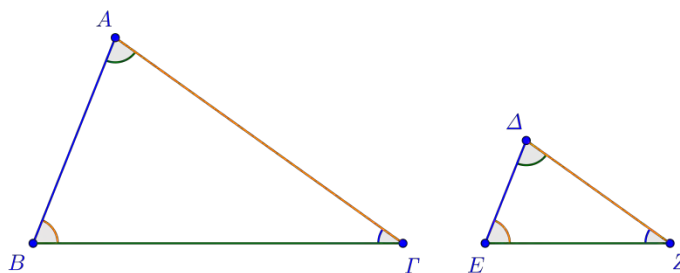
### Σχόλιο

Σε όμοια τρίγωνα με λόγο ομοιότητας  $\lambda$ :

- απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές και
- απέναντι από ομόλογες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

Για παράδειγμα, αν τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda$  και:

- $\hat{A} = \hat{\Delta}$ , τότε ισχύει ότι  $\lambda = \frac{B\Gamma}{EZ}$ .
- $\lambda = \frac{AB}{\Delta E}$ , τότε ισχύει  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ .



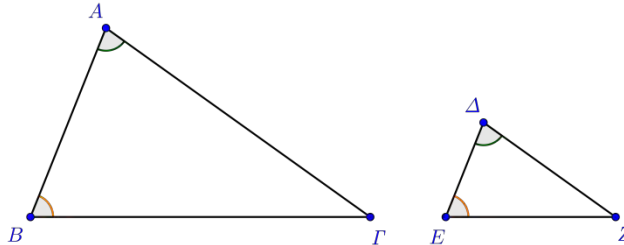
Για να εξετάσουμε κατά πόσο δύο τρίγωνα είναι όμοια, δεν χρειάζεται κάθε φορά να καταφεύγουμε στον ορισμό. Δηλαδή, δεν είναι απαραίτητο να ελέγχουμε κάθε φορά αν τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις πλευρές τους ανάλογες. Πιο κάτω, θα παρουσιάσουμε τις ελάχιστες προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί ένα ζεύγος τριγώνων, ώστε αυτά τα τρίγωνα να είναι όμοια. Οι προϋποθέσεις αυτές καλούνται **κριτήρια ομοιότητας τριγώνων**.



### 1° κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

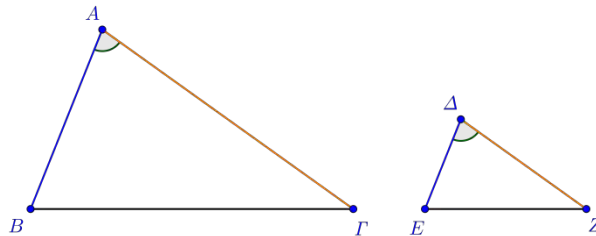
Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\hat{A} = \hat{\Delta}$  και  $\hat{B} = \hat{E}$ , τότε  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .



### 2° κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

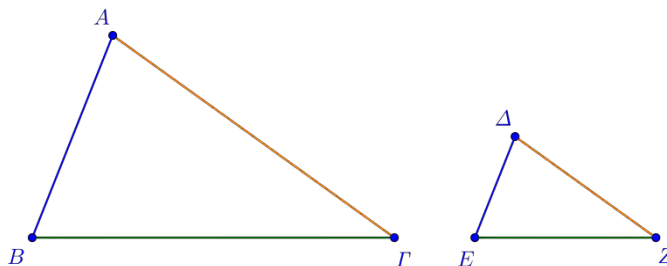
Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$  και  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ , τότε  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .



### 3° κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

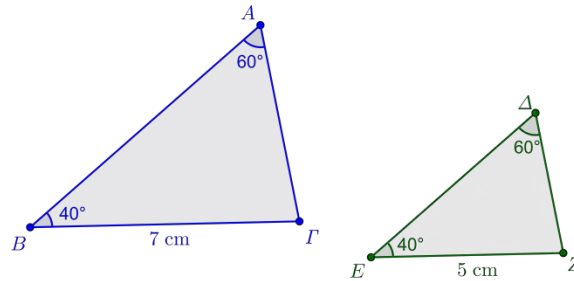
Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ , τότε  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .



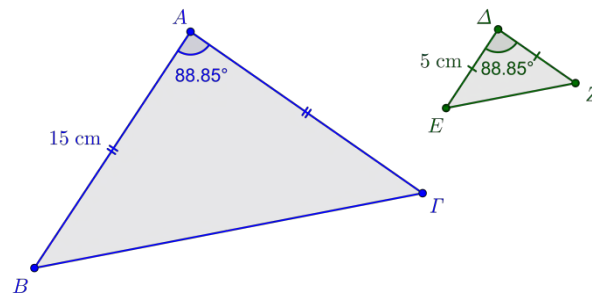
### Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια. Στην περίπτωση που είναι όμοια, να υπολογίσετε τον λόγο ομοιότητάς τους.

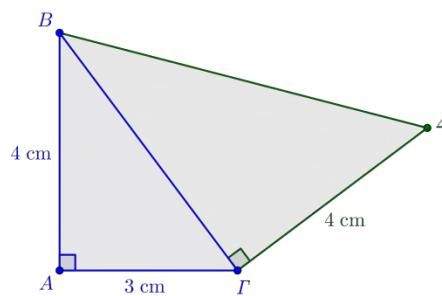
(α)



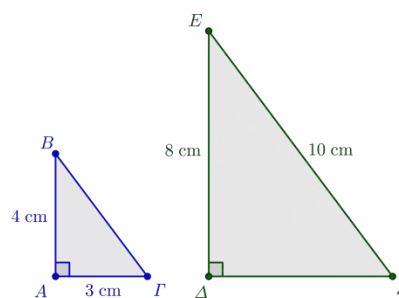
(β)



(γ)



(δ)



### Λύση

(α) Για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 60^\circ$  και  $\hat{B} = \hat{E} = 40^\circ$ . Έτσι, έχουμε ότι  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ , αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία (**1<sup>ο</sup> κριτήριο ομοιότητας τριγώνων**).

Γνωρίζουμε ότι σε δύο όμοια τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας  $\lambda$  των όμοιων τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσος με  $\lambda = \frac{7}{5}$ .

(β) Για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 60^\circ$  και  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{15}{5} = 3$ . Έτσι, έχουμε ότι  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ , με λόγο ομοιότητας  $\lambda = 3$ , αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες ( $2^\circ$  κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

(γ) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και παίρνουμε:

$$(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow (B\Gamma) = 5 \text{ cm}$$

Για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Gamma\Delta$  ισχύει ότι  $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ , αλλά παρατηρούμε ότι  $\frac{AB}{A\Gamma} \neq \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ , αφού  $\frac{4}{3} \neq \frac{5}{4}$ . Έτσι, έχουμε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Gamma\Delta$  δεν είναι όμοια, αφού δεν έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες.

(δ) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$ , αντίστοιχα. Έχουμε

$$(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow (B\Gamma) = 5 \text{ cm}$$

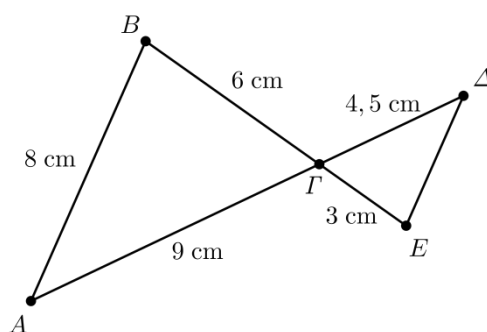
και:

$$(EZ)^2 = (\Delta E)^2 + (\Delta Z)^2 \Rightarrow (\Delta Z)^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow (\Delta Z) = 6 \text{ cm}$$

Για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ} = 2$ . Έτσι, έχουμε ότι  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ , με λόγο ομοιότητας  $\lambda = 2$ , αφού τα δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες ( $3^\circ$  κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

## Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω σχήμα, το σημείο  $\Gamma$  είναι το σημείο τομής των  $BE$  και  $AD$ . Αν  $AB = 8 \text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 6 \text{ cm}$ ,  $A\Gamma = 9 \text{ cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 4,5 \text{ cm}$  και  $\Gamma E = 3 \text{ cm}$ , τότε να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $\Delta E$ .



## Λύση

Στα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\Delta E$  ισχύει ότι  $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ , ως κατακορυφήν γωνίες.

Ακολουθώντας, βρίσκουμε τον λόγο των αντίστοιχων πλευρών των δύο τριγώνων που έχουν τις ίσες γωνίες ως περιεχόμενες.

Λόγος μικρότερων σε μήκος πλευρών:

$$\frac{EG}{BG} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Λόγος μεγαλύτερων σε μήκος πλευρών:

$$\frac{GD}{AG} = \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}$$

Ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών είναι ίσος με  $\frac{1}{2}$ . Δηλαδή, τα τρίγωνα  $ABG$  και  $GDE$  έχουν δύο πλευρές ανάλογες.

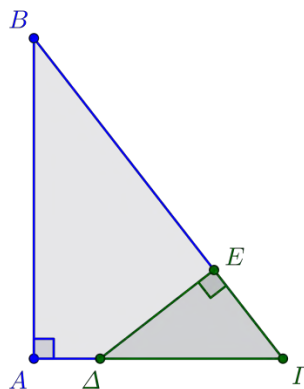
Επομένως, από το 2<sup>ο</sup> κριτήριο ομοιότητας τριγώνων, συμπεραίνουμε ότι  $ABG \approx GDE$ , με λόγο ομοιότητας  $\lambda$ , και:

$$\lambda = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DE}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = 4 \text{ cm}$$

---

### Παράδειγμα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$ . Από τυχαίο σημείο  $\Delta$  της  $AG$  φέρουμε  $DE \perp BG$ , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Να αποδείξετε ότι:

- (α)  $ABG \approx GDE$
- (β)  $(AG)(ED) = (AB)(EG)$

### Λύση

(α) Τα τρίγωνα  $ABG$  και  $GDE$  είναι ορθογώνια, αφού  $\hat{A} = \widehat{DEG} = 90^\circ$  ( $\hat{A} = 90^\circ$  ως δεδομένο και  $\widehat{DEG} = 90^\circ$ , αφού  $DE \perp BG$ ). Επιπλέον, η γωνία  $\hat{G}$  είναι κοινή στα δύο τρίγωνα.

Επομένως,  $ABG \approx GDE$ , αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία (**1<sup>ο</sup> κριτήριο ομοιότητας τριγώνων**).

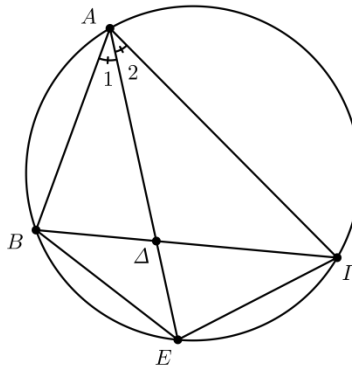
(β) Στο ερώτημα (α) αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Delta\Gamma$  είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας  $\lambda$  των δύο τριγώνων είναι ίσος με:

$$\lambda = \frac{AB}{E\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma} \Rightarrow (A\Gamma)(E\Delta) = (AB)(E\Gamma)$$

Όταν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές.

#### Παράδειγμα 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  και τον κύκλο στο σημείο  $E$ , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Να αποδείξετε ότι  $(AB)(A\Gamma) = (A\Delta)(AE)$ .

#### Λύση

Οι πλευρές της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε περιέχονται στα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$ . Επομένως, θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια και η ζητούμενη ισότητα θα προκύψει από τον λόγο ομοιότητάς τους.

Στα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  έχουμε ότι:

- $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$  ( $AE$  διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ )
- $\widehat{A\epsilon\Gamma} = \widehat{A\beta\Gamma}$  (Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

Επομένως,  $AB\Delta \approx A\Gamma E$ , αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία ( $1^\circ$  κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

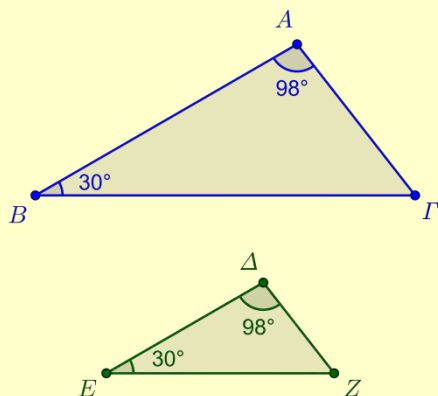
Ο λόγος ομοιότητας  $\lambda$  των δύο τριγώνων είναι ίσος με:

$$\lambda = \frac{AB}{A\epsilon} = \frac{B\Delta}{E\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow (AB)(A\Gamma) = (A\Delta)(AE)$$

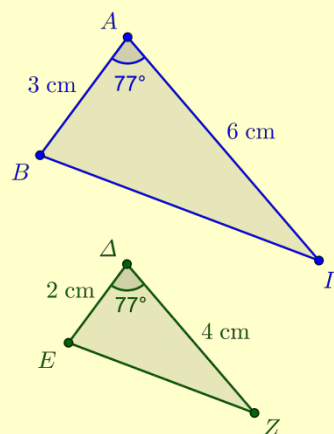
## Δραστηριότητες

1. Να αιτιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια.

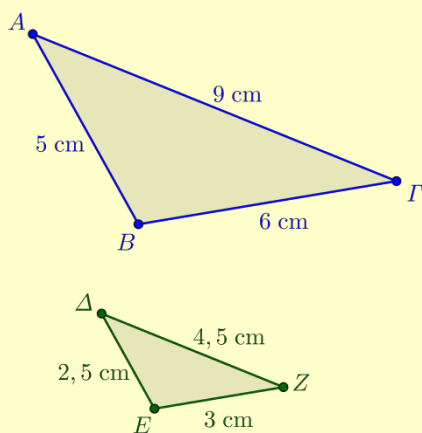
(α)



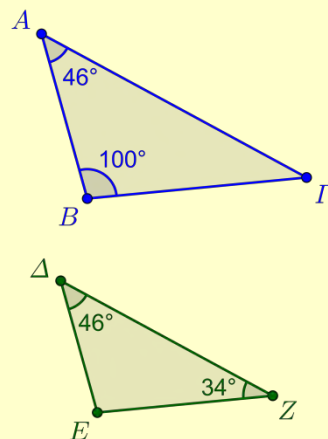
(β)



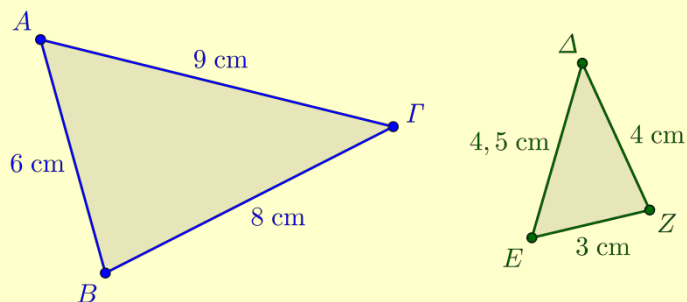
(γ)



(δ)

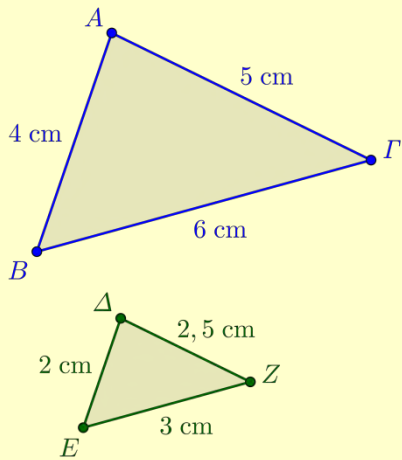


2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα στο πιο κάτω σχήμα είναι όμοια. Σε περίπτωση που αυτό ισχύει, να σημειώσετε τις ίσες γωνίες τους.

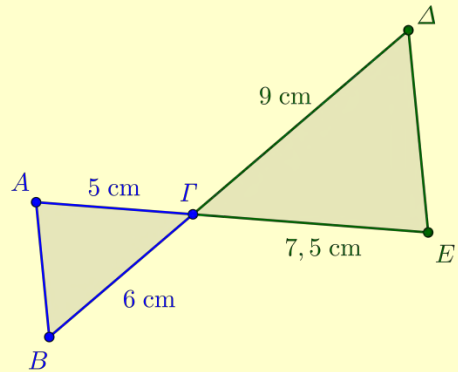


3. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

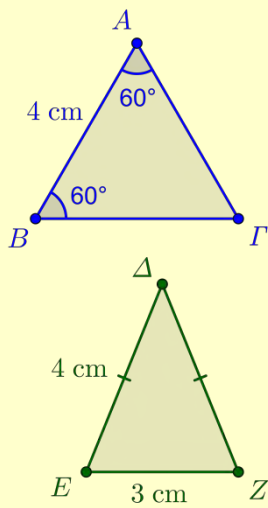
(α)



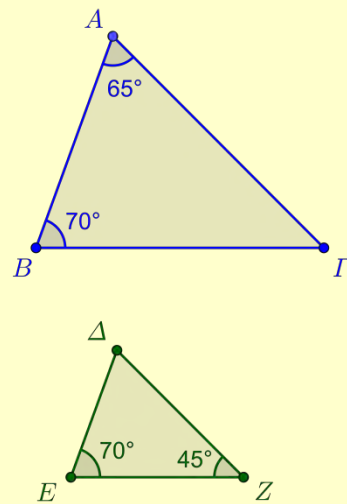
(β)



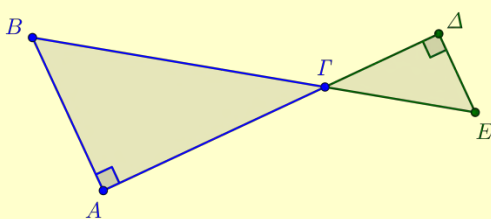
(γ)



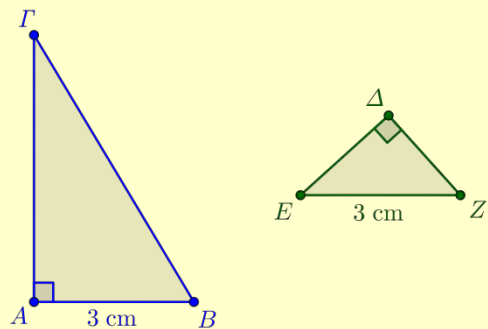
(δ)



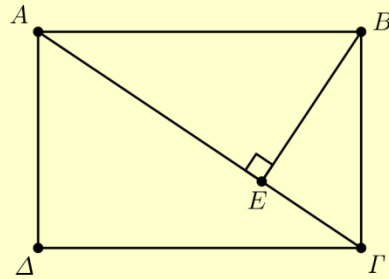
(ε)



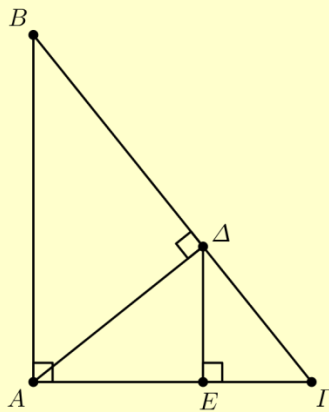
(στ)



4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $B\Gamma = 6$  cm και  $A\Gamma = 9$  cm. Από το σημείο  $B$  φέρουμε κάθετη στην  $A\Gamma$ , η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $\Gamma E$ .



5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ),  $A\Delta$  ύψος και  $\Delta E \perp A\Gamma$  ( $E$  σημείο στην  $A\Gamma$ ).



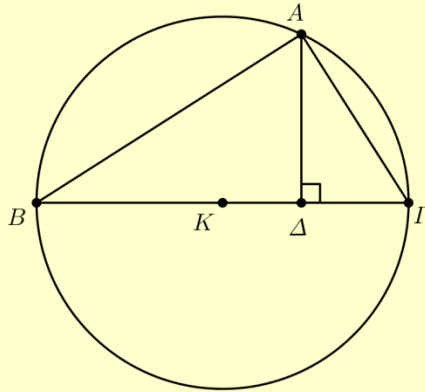
Να δείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta E$  είναι όμοια  
 (β)  $(A\Delta)^2 = (AB)(\Delta E)$ .
6. Ο Χαράλαμπος έχει ύψος 1,70 m. Αν η σκιά του είναι 2 m και η σκιά ενός ανεμόμυλου την ίδια χρονική στιγμή είναι 7 m, τότε να υπολογίσετε το ύψος του ανεμόμυλου.  
*(Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες.)*
7. Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τα ύψη του  $A\Delta$  και  $BE$ . Αν  $H$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε να δείξετε ότι:  
 (α)  $(HA)(H\Delta) = (HB)(HE)$   
 (β)  $(\Gamma A)(\Gamma E) = (\Gamma B)(\Gamma \Delta)$



8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, R)$  και σημείο  $A$  αυτού. Από το σημείο  $A$  φέρουμε κάθετη  $AD$  σε διάμετρο  $BΓ$  του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

$$(AG)^2 = (BG)(\Delta\Gamma)$$



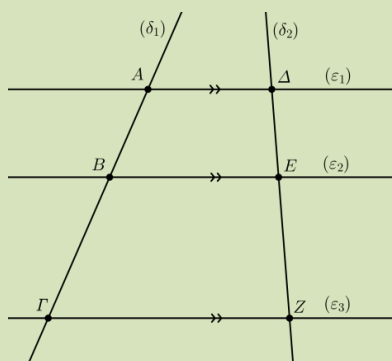
## Περίληψη

### 1. Θεώρημα Θαλή

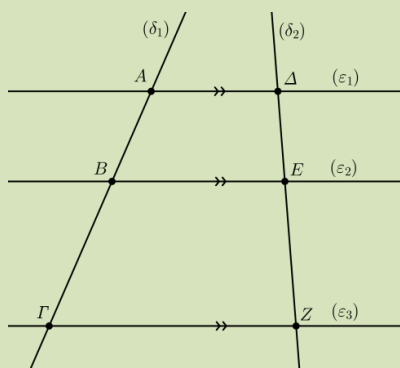
Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη μία ευθεία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται πάνω στην άλλη ευθεία.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, αν  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ , τότε:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



- Ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή. Θεωρούμε δύο ευθείες  $(\delta_1)$  και  $(\delta_2)$ , οι οποίες τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  στα σημεία  $A, B$  και  $\Delta, E$ , αντίστοιχα. Αν  $\Gamma$  και  $Z$  είναι σημεία των ευθειών  $(\delta_1)$  και  $(\delta_2)$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ , τότε η ευθεία  $\Gamma Z$  είναι παράλληλη προς τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .



Δηλαδή, αν  $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$  και  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ , τότε  $\Gamma Z \parallel (\varepsilon_1)$  και  $\Gamma Z \parallel (\varepsilon_2)$ .

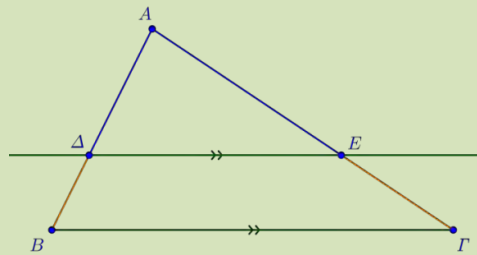
### 2. Πρόγραμμα 1

Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη.

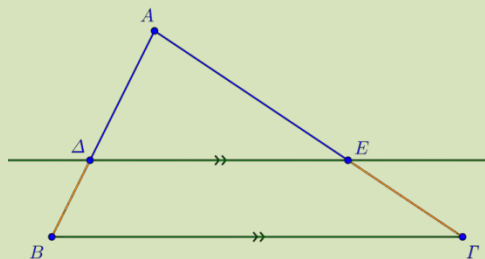
### 3. Πόρισμα 2

Αν μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $AG$  ή τις προεκτάσεις των  $AB$  και  $AG$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$ , αντίστοιχα, τότε οι λόγοι των αντίστοιχων τμημάτων είναι ίσοι. Δηλαδή:

$$\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}, \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG}$$

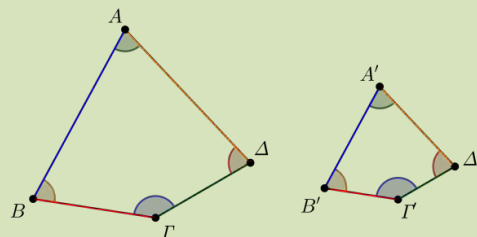


- Ισχύει και το αντίστροφο του πορίσματος.  
Θεωρούμε δύο σημεία  $\Delta$  και  $E$  πάνω στις πλευρές  $AB$  και  $AG$  (ή στις προεκτάσεις τους) ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ . Τότε, η ευθεία  $\Delta E$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



Δηλαδή, αν  $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ , τότε  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .

4. Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Συμβολίζουμε τη σχέση ομοιότητας δύο πολυγώνων με το σύμβολο  $\approx$ .

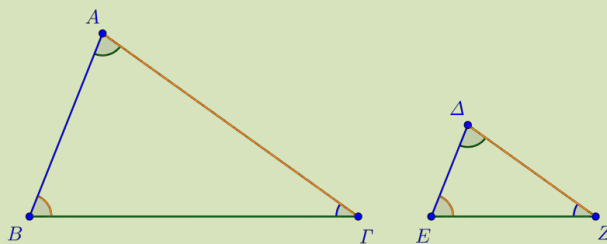


5. Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:
- Οι κορυφές των ίσων γωνιών τους λέγονται **ομόλογες κορυφές**.
  - Οι πλευρές που ορίζονται από ομόλογες κορυφές λέγονται **ομόλογες πλευρές**.
  - Ο **λόγος ομοιότητας** δύο πολυγώνων συνήθως συμβολίζεται με  $\lambda$  και είναι ίσος με τον λόγο δύο ομόλογων πλευρών τους.
6. Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:
- Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.
  - Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

### Σχόλια

- Όλα τα κανονικά πολύγωνα που έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
  - Στην επίλυση ασκήσεων σημειώνουμε τα όμοια πολύγωνα με τέτοιο τρόπο, ώστε οι κορυφές των ίσων γωνιών στα δύο πολύγωνα να είναι αντίστοιχα ίσες.
7. Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Για παράδειγμα, αν τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda$ , τότε ισχύει ότι  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \lambda$  και  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ .



### Σχόλιο

Σε όμοια τρίγωνα με λόγο ομοιότητας  $\lambda$ :

- απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές και
- απέναντι από ομόλογες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

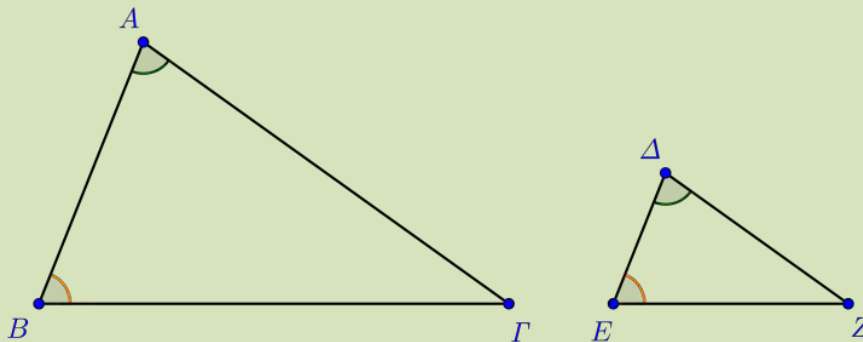
Για παράδειγμα, αν τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda$  και:

- $\hat{A} = \hat{\Delta}$ , τότε ισχύει ότι  $\lambda = \frac{B\Gamma}{EZ}$ .
- $\lambda = \frac{AB}{\Delta E}$ , τότε ισχύει  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ .

8. Για να εξετάσουμε κατά πόσο δύο τρίγωνα είναι όμοια, δεν χρειάζεται κάθε φορά να καταφεύγουμε στον ορισμό. Δηλαδή, δεν είναι απαραίτητο να ελέγχουμε κάθε φορά αν τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις πλευρές τους ανάλογες. Πιο κάτω, θα παρουσιάσουμε τις ελάχιστες προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί ένα ζεύγος τριγώνων, ώστε αυτά τα τρίγωνα να είναι όμοια. Οι προϋποθέσεις αυτές καλούνται **κριτήρια ομοιότητας τριγώνων**.

- **1<sup>ο</sup> κριτήριο ομοιότητας τριγώνων**

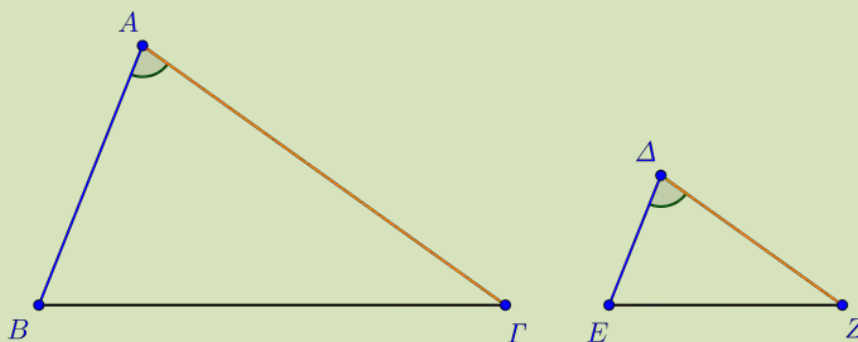
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\hat{A} = \hat{\Delta}$  και  $\hat{B} = \hat{E}$ , τότε  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .



- **2<sup>ο</sup> κριτήριο ομοιότητας τριγώνων**

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

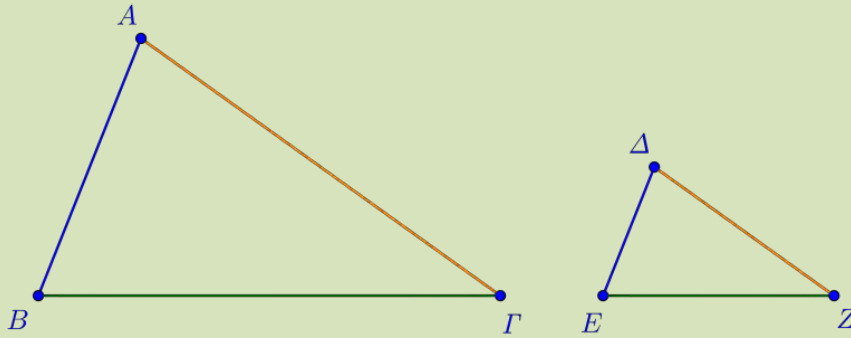
Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$  και  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ , τότε  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .



- **3<sup>ο</sup> κριτήριο ομοιότητας τριγώνων**

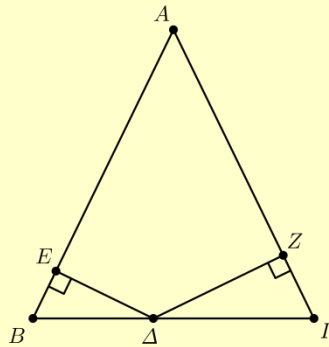
Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ισχύει ότι  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ , τότε  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .

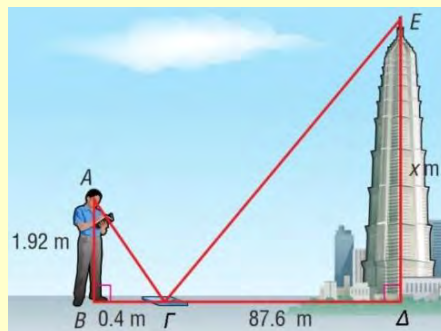


## Δραστηριότητες Ενότητας

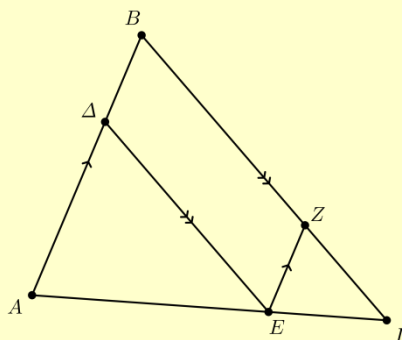
1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Από τυχαίο σημείο  $\Delta$  της  $B\Gamma$  φέρουμε τη  $\Delta E$  κάθετη στην  $AB$  και τη  $\Delta Z$  κάθετη στην  $A\Gamma$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $B\Delta E$  και  $\Gamma\Delta Z$  είναι όμοια.



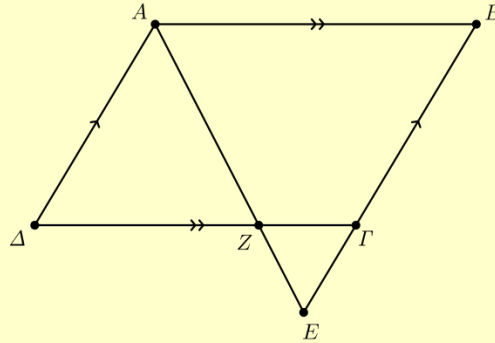
2. Ο Λίνος παρατηρεί μέσα από έναν καθρέφτη την κορυφή ενός κτηρίου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου.



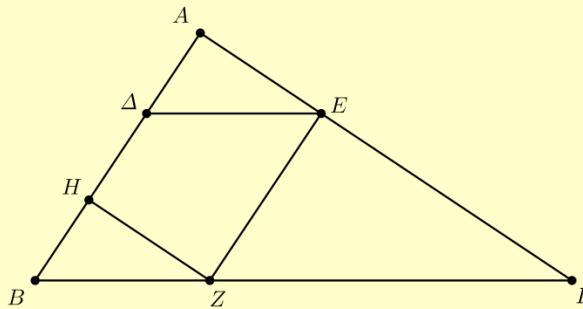
3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημεία  $\Delta, E$  και  $Z$  πάνω στις πλευρές του  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$ , αντίστοιχα, ώστε  $\Delta E \parallel B\Gamma$  και  $EZ \parallel AB$ . Αν  $AB = 15$  m,  $A\Delta = 10$  m και  $B\Gamma = 20$  m, να υπολογίσετε το μήκος του  $BZ$ .



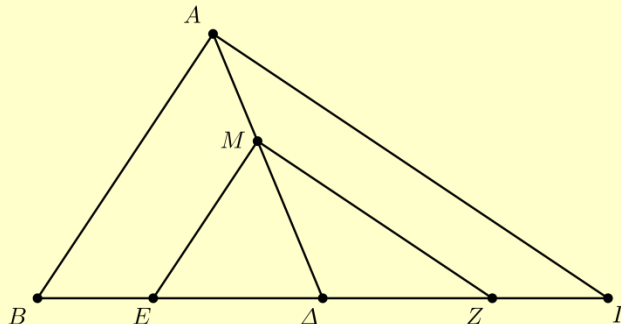
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Από την κορυφή  $A$  φέρουμε ευθεία που τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $Z$  και την προέκταση της  $B\Gamma$  στο  $E$ . Να δείξετε ότι:
- (α)  $(ZA)(Z\Gamma) = (Z\Delta)(ZE)$   
 (β)  $(AE)(A\Delta) = (BE)(AZ)$



5. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  φέρουμε  $\Delta E \parallel B\Gamma$ , όπου  $E$  σημείο της  $A\Gamma$ . Από το σημείο  $E$  φέρουμε  $EZ \parallel AB$ , όπου  $Z$  σημείο της  $B\Gamma$ . Από το σημείο  $Z$  φέρουμε τη  $ZH \parallel \Gamma A$ , όπου  $H$  σημείο της  $AB$ . Να αποδείξετε ότι  $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}$ .



6. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από σημείο  $M$  της διαμέσου  $A\Delta$  φέρουμε παράλληλες προς τις  $AB$  και  $A\Gamma$ , που τέμνουν τη  $B\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$ , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- (α)  $\frac{\Delta E}{\Delta B} = \frac{\Delta Z}{\Delta \Gamma}$   
 (β) η  $M\Delta$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $MEZ$ .





## Λύση Προβλήματος

### ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΚΗΛΙΔΑ

Ένα πετρελαιοφόρο προσέκρουσε σε έναν βράχο στη θάλασσα, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μια τρύπα στις δεξαμενές αποθήκευσης πετρελαίου. Το πετρελαιοφόρο βρισκόταν γύρω στα 65 km μακριά από την ξηρά. Μετά από μερικές μέρες, το πετρέλαιο εξαπλώθηκε, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

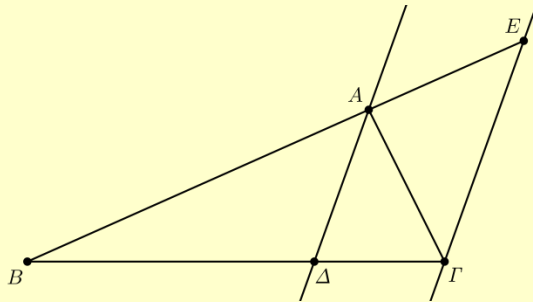


Να εκτιμήσεις, χρησιμοποιώντας την κλίμακα του χάρτη, το εμβαδόν της πετρελαιοκηλίδας σε τετραγωνικά χιλιόμετρα ( $\text{km}^2$ ).

PISA 2012

## Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

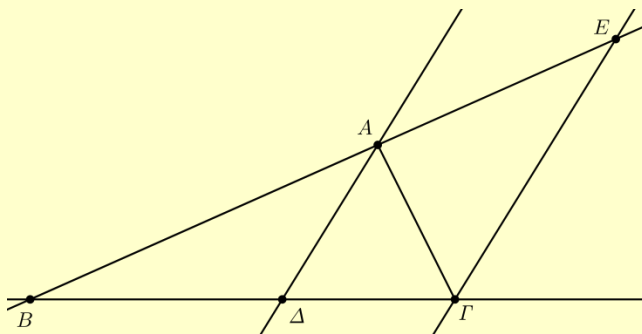
1. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε μέρη ανάλογα προς τις προσκείμενες σε αυτά πλευρές.  
(Υπόδειξη: Να φέρετε ευθεία παράλληλη από τη μια κορυφή του τριγώνου προς τη διχοτόμο και να δείξετε ότι  $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{AB}$  .)



### Σημείωση

Το πιο πάνω ονομάζεται «Θεώρημα Εσωτερικής Διχοτόμου» και ισχύει και το αντίστροφό του.

2. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας του τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, του οποίου οι αποστάσεις από τα άκρα της πλευράς αυτής είναι ανάλογες προς τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου.  
(Υπόδειξη: Να φέρετε ευθεία παράλληλη από την κορυφή του τριγώνου προς την εξωτερική διχοτόμο, ώστε να τέμνει το τρίγωνο.)



### Σημείωση

Το πιο πάνω ονομάζεται «Θεώρημα Εξωτερικής Διχοτόμου» και ισχύει και το αντίστροφό του.

3. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου όμοιου με το  $AB\Gamma$ . Ακολουθώντας, να υπολογίσετε τον λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων.

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρουμε το ύψος  $A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις, οι οποίες είναι γνωστές ως **μετρικές σχέσεις** σε ορθογώνιο τρίγωνο.

(α)  $(A\Delta)^2 = (\Delta\Gamma)(\Delta B)$

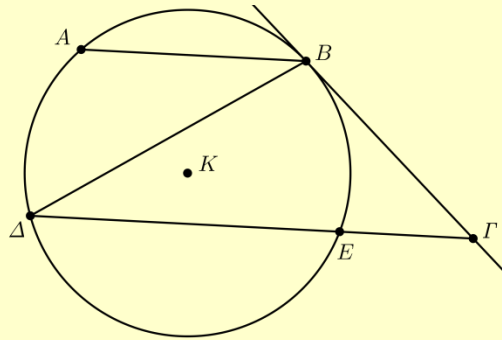
(β)  $(AB)^2 = (B\Delta)(B\Gamma)$

(γ)  $(A\Gamma)^2 = (\Gamma\Delta)(\Gamma B)$

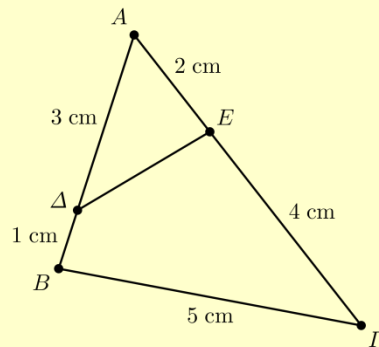
(δ)  $(A\Delta)(B\Gamma) = (A\Gamma)(AB)$

(ε)  $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2$

5. Δύο χορδές  $AB$  και  $\Delta E$  ενός κύκλου ( $K, R$ ) είναι παράλληλες. Στο σημείο  $B$  φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει την προέκταση της  $\Delta E$  στο σημείο  $\Gamma$ , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι  $(B\Delta)^2 = (BA)(\Delta\Gamma)$ .



6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι  $A\Delta = 3$  cm,  $B\Delta = 1$  cm,  $A E = 2$  cm,  $\Gamma E = 4$  cm και  $B\Gamma = 5$  cm. Να υπολογίσετε το μήκος του  $\Delta E$ .



7. Οι διαγώνιοι  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  ενός τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) τέμνονται στο σημείο  $E$ . Αν  $AB = 4$  cm,  $B\Delta = 8$  cm και  $\Gamma\Delta = 12$  cm, τότε να υπολογίσετε το μήκος της  $BE$ .

8. Αν οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Delta}$  τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθές και οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, τότε να αποδείξετε ότι  $(A\Delta)^2 = (\Delta\Gamma)(AB)$ .

# ΕΝΟΤΗΤΑ 07

## ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

### ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

#### 7.1 Μέτρα θέσης και διασποράς

## Έχουμε μάθει ...

- Να ορίζουμε τη μεταβλητή και να τη διακρίνουμε σε ποιοτική ή ποσοτική.
- Να παρουσιάζουμε και να παριστούμε, με κατάλληλα διαγράμματα, στατιστικά δεδομένα.
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε τα τρία βασικά μέτρα θέσης:
  - ✓ Μέση τιμή
  - ✓ Διάμεσος
  - ✓ Επικρατούσα τιμή.

## 7.1 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

### Διερεύνηση 1

Οι βαθμοί του Ανδρέα σε 4 διαγωνίσματα στα Μαθηματικά ήταν 15, 18, 18, 17. Για τα ίδια διαγωνίσματα, ο Βασίλης είχε πάρει 2 μονάδες περισσότερες σε κάθε διαγώνισμα από τον Ανδρέα, ο Γιάννης είχε πάρει 4 μονάδες λιγότερες από τον Ανδρέα σε κάθε διαγώνισμα, ενώ ο Δημήτρης είχε πάρει σε κάθε διαγώνισμα μία μονάδα περισσότερη από το μισό των βαθμών του Ανδρέα.

- (α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του κάθε παιδιού.  
(β) Να επεξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε και να αναφέρετε πώς συνδέονται οι μέσοι όροι της βαθμολογίας των παιδιών.

### Διερεύνηση 2

Ένας καθηγητής θέλει να συγκρίνει τα δύο τμήματά του Α' και Β', στα οποία διδάσκει Μαθηματικά. Όταν υπολόγισε τα δύο βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή και διάμεσο), δεν ήταν σε θέση να διακρίνει ποιο τμήμα ήταν καλύτερο. Στη συνέχεια, όμως, μπόρεσε παρατηρώντας τους βαθμούς των δύο τμημάτων να πάρει κάποια απόφαση ως προς τα τμήματά του.

<b>Τμήμα Α'</b>	13	13	14	15	15	15	15	16	16	18
<b>Τμήμα Β'</b>	10	13	14	14	15	15	15	16	18	20

- (α) Μπορεί, κατά τη γνώμη σας, η μέση τιμή από μόνη της να δώσει σαφή εικόνα για την κατανομή των βαθμών;  
(β) Ποια παρατήρηση πιθανόν να έκανε ο καθηγητής, για να μπορέσει να πάρει απόφαση ως προς την εικόνα των τμημάτων του;

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι  $n$  παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  με μέση τιμή  $\bar{x}$ . Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή  $\bar{y}$  των  $n$  παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_n$  μιας μεταβλητής  $Y$ , για τις οποίες ισχύει  $y_i = ax_i + \beta$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , και  $a, \beta \in \mathbb{R}$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{ax_1 + \beta + ax_2 + \beta + \dots + ax_n + \beta}{n} \\ &= \frac{a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n\beta}{n} = a\bar{x} + \beta\end{aligned}$$

- Αν  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι  $n$  παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  με μέση τιμή  $\bar{x}$ , τότε η μέση τιμή  $\bar{y}$  των παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_n$  μιας μεταβλητής  $Y$ , για τις οποίες ισχύει  $y_i = ax_i + \beta$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , και  $a, \beta \in \mathbb{R}$  είναι  $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$ .
- Αν οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  μιας μεταβλητής  $X$  έχουν διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , όπου  $w_1 + w_2 + \dots + w_n = n$ , τότε ο **σταθμισμένος μέσος** (weighted average) ορίζεται ως η ποσότητα που δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

### Σχόλιο

Ο απλός μέσος όρος είναι ειδική περίπτωση του σταθμισμένου μέσου με ίσα βάρη  $w_1 = w_2 = w_3 \dots = w_n = 1$ .

### Ορισμοί

**Μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας** είναι τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα κεντρικά μέτρα θέσης.

- Το πιο απλό μέτρο διασποράς είναι το **εύρος των παρατηρήσεων** (Range). Ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης ( $x_{\min}$ ) από τη μέγιστη παρατήρηση ( $x_{\max}$ ). Συμβολίζεται με  $R$  και υπολογίζεται πολύ απλά ως:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- Η **διακύμανση ή διασπορά**  $n$  παρατηρήσεων  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με  $s^2$  και ισχύει:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

- Η **τυπική απόκλιση** (standard deviation) είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς και συμβολίζεται με  $s$ . Η τυπική απόκλιση δίνεται από τον τύπο:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{s^2}$$

- Ο **συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας** ( $CV$ ) ορίζεται ως το πηλίκο της τυπικής απόκλισης ( $s$ ) προς την απόλυτη τιμή της μέσης τιμής ( $\bar{x}$ ) των παρατηρήσεων. Δηλαδή, ισχύει:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

### Σχόλια

- Η τυπική απόκλιση πλεονεκτεί έναντι της διασποράς, γιατί εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης, με την οποία εκφράζονται και οι παρατηρήσεις.
- Ο συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων παρατηρήσεων (με ίδιες ή διαφορετικές μονάδες μέτρησης) που ενδεχομένως να έχουν σημαντικά διαφορετικές τιμές.
- Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι **ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης** και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό. Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι **μικρότερος από 10%**, λέγεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν **ομοιογένεια**. Ένα δείγμα  $A$  έχει **μεγαλύτερη ομοιογένεια** από ένα δείγμα  $B$ , αν  $CV_A < CV_B$ .

### Παράδειγμα 1

Αν ο μέσος όρος του μηνιαίου μισθού των υπαλλήλων ενός εργοστασίου πέρυσι ήταν €850 και φέτος σε κάθε υπάλληλο δοθεί αύξηση €50, τότε να υπολογίσετε τον νέο μέσο όρο των μισθών των υπαλλήλων του εργοστασίου.

### Λύση

Ο νέος μέσος όρος των μισθών θα είναι €850 + €50 = €900.

### Παράδειγμα 2

Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι παρατηρήσεις των μεταβλητών  $X, Y$  και  $Z$ .

$X$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Y$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$Z$	507	607	707	807	907	1007	1107	1207	1307

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $X$ .
- Να εκφράσετε τις παρατηρήσεις των μεταβλητών  $Y$  και  $Z$  συναρτήσει των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $X$ .
- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $Y$  και των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $Z$ .



### Λύση

(α) Η μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $X$  είναι:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

(β) Έχουμε:

$$Y = 10X, \quad Z = 100X + 407$$

(γ) Η μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $Y$  και των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $Z$  είναι, αντίστοιχα:

$$\bar{y} = 10\bar{x} = 10 \cdot 5 = 50, \quad \bar{z} = 100\bar{x} + 407 = 100 \cdot 5 + 407 = 907$$

---

### Παράδειγμα 3

Ο βαθμός στο τέλος ενός τετραμήνου σε ένα εξεταζόμενο μάθημα συνυπολογίζεται από τους βαθμούς της προφορικής αξιολόγησης με βαρύτητα 60%, μιας γραπτής άσκησης με βαρύτητα 10% και του δοκιμίου εξέτασης τετραμήνου με βαρύτητα 30%. Αν ένας μαθητής είχε στα Μαθηματικά βαθμό 18 στην προφορική αξιολόγηση, βαθμό 14 στη γραπτή άσκηση και βαθμό 16 στο δοκίμιο εξέτασης τετραμήνου, τότε να υπολογίσετε τον τελικό βαθμό τετραμήνου του μαθητή στα Μαθηματικά.

### Λύση

Ο τελικός βαθμός τετραμήνου του μαθητή στα Μαθηματικά είναι:

$$\bar{x} = \frac{0,6 \cdot 18 + 0,1 \cdot 14 + 0,3 \cdot 16}{0,6 + 0,1 + 0,3} = 17$$

---

### Παράδειγμα 4

Να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των δεδομένων του πίνακα.

Αριθμός παιδιών ( $x_i$ )	Αριθμός οικογενειών ( $f_i$ )
0	5
1	10
2	7
3	4
4	3
5	2
6	1

## Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τη μέση τιμή  $\bar{x}$  των παρατηρήσεων:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{32} = \frac{64}{32} = 2$$

Η διακύμανση  $s^2$ , ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των μεταβλητών από τον μέσο όρο, υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(-2)^2 \cdot 5 + (-1)^2 \cdot 10 + 0^2 \cdot 7 + 1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 1}{32} \\ &= \frac{20 + 10 + 0 + 4 + 12 + 18 + 16}{32} = \frac{80}{32} = 2,5 \end{aligned}$$

Επομένως, η τυπική απόκλιση είναι  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,5} \approx 1,58$ .

Τα πιο πάνω αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν και με τη βοήθεια του πιο κάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών ( $x_i$ )	Αριθμός οικογενειών ( $f_i$ )	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
0	5	$(0 - 2)^2 \cdot 5 = 20$
1	10	$(1 - 2)^2 \cdot 10 = 10$
2	7	$(2 - 2)^2 \cdot 7 = 0$
3	4	$(3 - 2)^2 \cdot 4 = 4$
4	3	$(4 - 2)^2 \cdot 3 = 12$
5	2	$(5 - 2)^2 \cdot 2 = 18$
6	1	$(6 - 2)^2 \cdot 1 = 16$
Σύνολο	32	80

Επομένως:

$$s^2 = \frac{80}{32} = 2,5, \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,5} \approx 1,58$$

---

### Παράδειγμα 5

Ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας  $A$  είναι  $\bar{x}_A = €2200$  και η αντίστοιχη τυπική απόκλιση είναι  $s_A = €270$ , ενώ ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας  $B$  είναι  $\bar{x}_B = €1100$  και η αντίστοιχη τυπική απόκλιση είναι  $s_B = €220$ . Σε ποια από τις δύο εταιρείες υπάρχει ομοιογένεια μισθών;

### Λύση

Υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας των μισθών για κάθε εταιρεία. Είναι:

$$CV_A = \frac{s_A}{|\bar{x}_A|} = \frac{270}{2200} = 12,2\%$$
$$CV_B = \frac{s_B}{|\bar{x}_B|} = \frac{220}{1100} = 20\%$$

Παρατηρούμε ότι αν και η τυπική απόκλιση μισθών στην εταιρεία  $A$  είναι μεγαλύτερη από την τυπική απόκλιση μισθών στην εταιρεία  $B$ , ο συντελεστής μεταβλητότητας στην εταιρεία  $A$  είναι μικρότερος. Αυτό μάς δείχνει ότι στην εταιρεία  $A$  υπάρχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών από ότι στην εταιρεία  $B$ .

## Δραστηριότητες

- Να διακρίνετε ποια από τα ακόλουθα είναι μέτρα θέσης ή μέτρα διασποράς:  
(α) Διάμεσος (β) Εύρος  
(γ) Διακύμανση (δ) Μέση τιμή  
(ε) Επικρατούσα τιμή (στ) Τυπική απόκλιση  
(ζ) Σταθμισμένος μέσος
- Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν:  
8, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 11, 10, 10, 15, 13, 14, 17  
Να υπολογίσετε:  
(α) τα τρία βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσο, επικρατούσα τιμή)  
(β) το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.
- Αν η τιμή 12 έχει βαρύτητα 0,2, η τιμή 14 έχει βαρύτητα 0,3 και η τιμή 17 έχει βαρύτητα 0,5, τότε να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πιο πάνω τιμών.
- Ένας φοιτητής πήρε σε 5 διαφορετικά μαθήματα για το πρώτο εξάμηνο τους βαθμούς 7, 8, 9, 10 και 6. Ποια θα είναι η τελική του βαθμολογία, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος, που είναι αντίστοιχα 2, 3, 1, 4 και 5;
- Τα μήκη 5 διαφορετικών τιμών  $x$  σε mm είναι:  
210, 220, 230, 240, 250  
(α) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηκών  $x$ .  
(β) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηκών  $y, z, \omega$ , αν:  
$$y = \frac{x}{10}, \quad z = x - 200, \quad \omega = \frac{x - 200}{10}$$
- Στις τρεις πιο κάτω λίστες δεδομένων, ο μέσος όρος είναι ο αριθμός 50. Χωρίς να κάνετε τις σχετικές πράξεις, να αναφέρετε σε ποια από τις τρεις λίστες υπάρχει η μικρότερη και σε ποια η μεγαλύτερη διασπορά των παρατηρήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Λίστα 1	0	20	40	50	60	80	100
Λίστα 2	0	48	49	50	51	52	100
Λίστα 3	0	1	2	50	98	99	100

7. Η μέση τιμή ηλικίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 32 χρόνια. Ποια θα είναι η μέση τιμή ηλικίας των ίδιων υπαλλήλων ύστερα από τρία χρόνια;
8. Αν σε ένα δείγμα ο μέσος όρος είναι  $\bar{x} = 15$  και ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι  $CV = 20\%$ , τότε να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση του δείγματος.
9. Από ένα δείγμα 30 μαθητών της Β' Γυμνασίου, ο μέσος όρος της μάζας τους ήταν  $\bar{x}_1 = 48$  kg με τυπική απόκλιση  $s_1 = 7$  kg, ενώ από ένα δεύτερο δείγμα 40 μαθητών Γ' Λυκείου, ο μέσος όρος της μάζας τους ήταν  $\bar{x}_2 = 76$  kg με τυπική απόκλιση  $s_2 = 7$  kg. Να εξετάσετε κατά πόσο τα δύο δείγματα έχουν τον ίδιο ή διαφορετικό συντελεστή μεταβλητότητας.
10. Σε ένα διαγώνισμα, η μέση τιμή της βαθμολογίας για το τμήμα Α' ήταν 16,5 και η τυπική απόκλιση 3,2.
  - (α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας.
  - (β) Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των βαθμών του τμήματος Α' με τους αντίστοιχους βαθμούς του τμήματος Β' που είχε τον ίδιο μέσο όρο, αλλά η τυπική απόκλισή του ήταν 1,5.

## Περίληψη

1. Αν  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι  $n$  παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  με μέση τιμή  $\bar{x}$ , τότε η μέση τιμή  $\bar{y}$  των παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_n$  μιας μεταβλητής  $Y$ , για τις οποίες ισχύει  $y_i = ax_i + \beta, i = 1, 2, \dots, n$ , και  $a, \beta \in \mathbb{R}$  είναι  $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$ .
2. Αν οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  μιας μεταβλητής  $X$  έχουν διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , όπου  $w_1 + w_2 + \dots + w_n = n$ , τότε ο **σταθμισμένος μέσος** (weighted average) ορίζεται ως η ποσότητα που δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

### Σχόλιο

Ο απλός μέσος όρος είναι ειδική περίπτωση του σταθμισμένου μέσου με ίσα βάρη  $w_1 = w_2 = w_3 \dots = w_n = 1$ .

### 3. Ορισμοί

**Μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας** είναι τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα κεντρικά μέτρα θέσης.

- Το πιο απλό μέτρο διασποράς είναι το **εύρος των παρατηρήσεων** (Range). Ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης ( $x_{\min}$ ) από τη μέγιστη παρατήρηση ( $x_{\max}$ ). Συμβολίζεται με  $R$  και υπολογίζεται πολύ απλά ως:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- Η **διακύμανση ή διασπορά**  $n$  παρατηρήσεων  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με  $s^2$  και ισχύει:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

- Η **τυπική απόκλιση** (standard deviation) είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς και συμβολίζεται με  $s$ . Η τυπική απόκλιση δίνεται από τον τύπο:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{s^2}$$

- Ο **συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας** ( $CV$ ) ορίζεται ως το πηλίκο της τυπικής απόκλισης ( $s$ ) προς την απόλυτη τιμή της μέσης τιμής ( $\bar{x}$ ) των παρατηρήσεων. Δηλαδή, ισχύει:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

#### **Σχόλια**

- Η τυπική απόκλιση πλεονεκτεί έναντι της διασποράς, γιατί εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης, με την οποία εκφράζονται και οι παρατηρήσεις.
- Ο συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας μας βοηθάει στη σύγκριση ομάδων παρατηρήσεων (με ίδιες ή διαφορετικές μονάδες μέτρησης) που ενδεχομένως να έχουν σημαντικά διαφορετικές τιμές.
- Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι **ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης** και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό. Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι **μικρότερος από 10%**, λέγεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν **ομοιογένεια**.
- Ένα δείγμα  $A$  έχει **μεγαλύτερη ομοιογένεια** από ένα δείγμα  $B$ , αν  $CV_A < CV_B$ .

## Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Ο μέσος όρος και η διάμεσος των τιμών 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 συμπίπτουν.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Η τυπική απόκλιση σε ένα δείγμα με $n$ παρατηρήσεις αλλάζει, όταν σε κάθε τιμή προσθέσουμε 2 μονάδες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $\bar{x} = 4$ και $CV = 50\%$ , τότε η τυπική απόκλιση είναι 2.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Η διάμεσος 11 διαφορετικών παρατηρήσεων αλλάζει, αν αφαιρέσουμε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη παρατήρηση.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν η κάθε παρατήρηση μιας μεταβλητής $X$ πολλαπλασιασθεί επί 5, τότε και η νέα μέση τιμή θα πολλαπλασιασθεί επί 5.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Αν η κάθε παρατήρηση μιας μεταβλητής $X$ πολλαπλασιασθεί επί 5, τότε και η νέα διασπορά θα πολλαπλασιασθεί επί 5.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

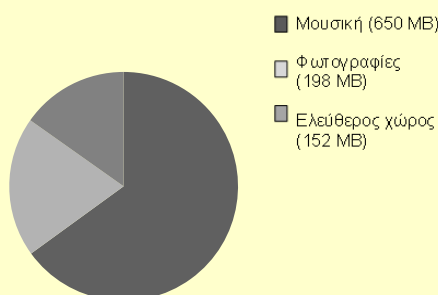
2. Αν η μέση τιμή σε ένα δείγμα των παρατηρήσεων 5, 8, 9,  $a$  και 16 είναι 10, τότε να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση στο δείγμα αυτό.
3. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση σε εξέταση ενός μαθήματος σε Παγκύπριες εξετάσεις είναι 10,5 και 3,8, αντίστοιχα. Έχει αποφασιστεί να δοθούν σε όλους τους μαθητές 2 επιπλέον μονάδες, γιατί είχε δοθεί μία άσκηση με λανθασμένα δεδομένα που δεν μπορούσε να λυθεί και είχαν βαθμολογηθεί όλοι με μηδέν. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η νέα μέση τιμή θα είναι 12,5 και η τυπική απόκλιση στο μάθημα θα παραμείνει η ίδια. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι ορθός ο ισχυρισμός του μαθητή.
4. Για τον τελικό βαθμό στο μάθημα της Στατιστικής, ένας φοιτητής βαθμολογείται με 10% για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 40% για την ενδιάμεση εξέταση και με 50% για την τελική εξέταση. Ποιος θα είναι ο τελικός βαθμός ενός φοιτητή που βαθμολογήθηκε με 87 από τα 100 για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 72 από τα 100 στην ενδιάμεση εξέταση και με 47 από τα 100 στην τελική εξέταση;



## Λύση Προβλήματος

### ΡΑΒΔΟΣ ΜΝΗΜΗΣ

Η ράβδος μνήμης (USB Stick) είναι μια μικρή, φορητή, ηλεκτρονική συσκευή αποθήκευσης δεδομένων. Ο Ιωάννης έχει μια ράβδο μνήμης στην οποία αποθηκεύει αρχεία μουσικής και φωτογραφίες. Η ράβδος μνήμης έχει χωρητικότητα 1 GB (1000 MB). Στο πιο κάτω γράφημα παρουσιάζεται η κατανομή της χωρητικότητας της ράβδου μνήμης του Ιωάννη.



**Ερώτηση 1:** Ο Ιωάννης θέλει να μεταφέρει στη ράβδο μνήμης ένα άλμπουμ με φωτογραφίες χωρητικότητας 350 MB, αλλά δεν υπάρχει αρκετός ελεύθερος χώρος στη ράβδο μνήμης. Παρόλο που δεν θέλει να διαγράψει κανένα από τα άλμπουμ με τις φωτογραφίες που ήδη υπάρχουν, εντούτοις είναι πρόθυμος να διαγράψει μέχρι και δύο άλμπουμ μουσικής. Το μέγεθος των άλμπουμ μουσικής στη ράβδο μνήμης του Ιωάννη είναι:

Άλμπουμ	Μέγεθος
Άλμπουμ 1	100 MB
Άλμπουμ 2	75 MB
Άλμπουμ 3	80 MB
Άλμπουμ 4	55 MB
Άλμπουμ 5	60 MB
Άλμπουμ 6	80 MB
Άλμπουμ 7	75 MB
Άλμπουμ 8	125 MB

Διαγράφοντας το πολύ δύο άλμπουμ μουσικής, είναι δυνατόν ο Ιωάννης να έχει αρκετό ελεύθερο χώρο στη ράβδο μνήμης του, ώστε να μπορεί να προσθέσει το άλμπουμ με τις φωτογραφίες; Να βάλεις σε κύκλο "Ναι" ή "Όχι" και να υποστηρίξεις την απάντησή σου, δείχνοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς.

**Απάντηση:** Ναι / Όχι

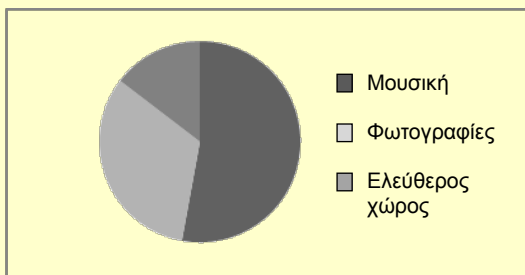
**Ερώτηση 2:** Κατά τη διάρκεια των επόμενων εβδομάδων, ο Ιωάννης διαγράφει κάποιες φωτογραφίες και κάποια από τα αρχεία μουσικής, αλλά ταυτόχρονα προσθέτει καινούρια αρχεία φωτογραφιών και μουσικής. Η νέα κατάσταση χωρητικότητας της ράβδου μνήμης παρουσιάζεται στον πιο κάτω πίνακα:

Μουσική	550 MB
Φωτογραφίες	338 MB
Ελεύθερος χώρος	112 MB

Ο αδερφός του Ιωάννη του έδωσε μια καινούρια ράβδο μνήμης χωρητικότητας 2GB (2000 MB), η οποία είναι εντελώς άδεια. Έτσι, ο Ιωάννης μετέφερε το περιεχόμενο της παλιάς ράβδου μνήμης στην καινούρια.

Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα αναπαριστά την κατανομή της χωρητικότητας της καινούριας ράβδου μνήμης; Να βάλεις σε κύκλο Α, Β, Γ ή Δ.

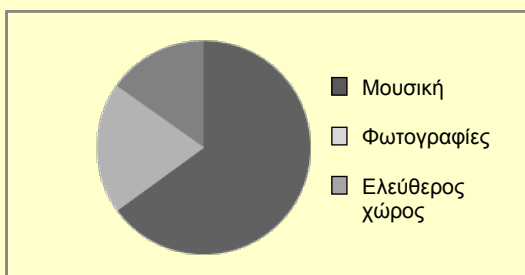
**A**



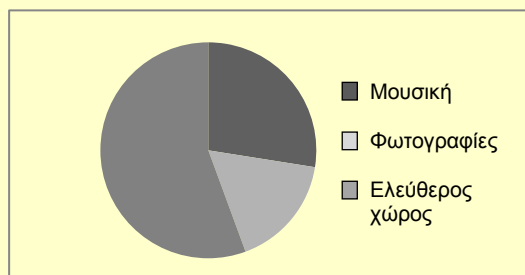
**B**



**Γ**



**Δ**



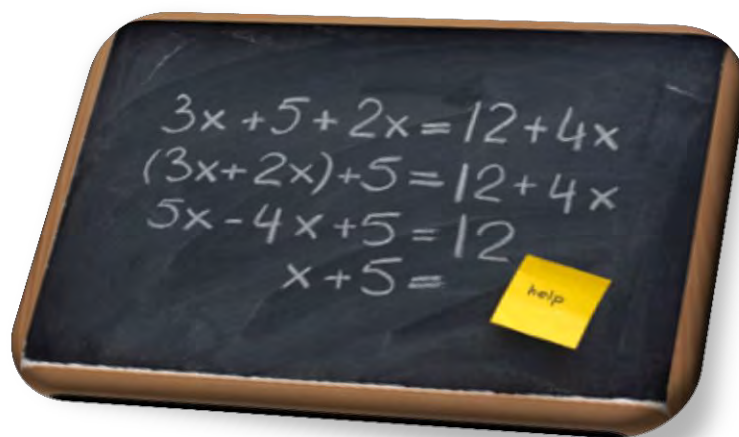
PISA 2012

## Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Η μέση επίδοση 17 αγοριών και 13 κοριτσιών στο μάθημα των Μαθηματικών μιας τάξης είναι 16,8. Η μέση επίδοση των κοριτσιών είναι 15,6. Να υπολογίσετε τη μέση επίδοση των αγοριών.
2. Σε ένα Λύκειο υπάρχουν 500 μαθητές. Η  $A'$  τάξη του Λυκείου έχει 200 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 15,7 χρόνια, ενώ η  $B'$  τάξη έχει 180 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 16,9 χρόνια. Οι υπόλοιποι μαθητές της  $\Gamma'$  Λυκείου έχουν μέσο όρο ηλικίας 17,7 χρόνια. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο ηλικίας όλων των μαθητών του σχολείου.
3. Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με  $n$  παρατηρήσεις είναι ίση με μηδέν. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τις παρατηρήσεις αυτές;
4. Η μέση τιμή 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 7,5. Να υπολογίσετε την τυπική τους απόκλιση.
5. Αν σε μία τάξη ο μέσος όρος της βαθμολογίας  $v_1$  αγοριών είναι  $\bar{x}$  και ο μέσος όρος της βαθμολογίας  $v_2$  κοριτσιών είναι  $\bar{y}$ , τότε:  
(α) να αποδείξετε ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας όλων των παιδιών της τάξης είναι:  
$$\frac{v_1\bar{x} + v_2\bar{y}}{v_1 + v_2}$$
  
(β) να υπολογίσετε τον μέσο όρο της βαθμολογίας μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στο μάθημα των Μαθηματικών, αν τα 11 κορίτσια είχαν μέσο όρο 16,7 και τα 9 αγόρια είχαν μέσο όρο 13,7.
6. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα 80 km/h από την πόλη  $A$  στην πόλη  $B$  και επιστρέφει από την πόλη  $B$  στην πόλη  $A$  με σταθερή ταχύτητα 120 km/h. Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου για όλη τη διαδρομή.

# Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Β' τεύχους





## Ενότητα 05: Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma -$

### Εξισώσεις – Ανισώσεις

Σελίδα 13 Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2, a \neq 0$

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

- |    |                                 |                                     |                    |
|----|---------------------------------|-------------------------------------|--------------------|
| 1. | (α) $a > 0$<br>(β) $\mathbb{R}$ | (γ) $x = 0$<br>(δ) $(0, 0)$         | (ε) $[0, +\infty)$ |
| 3. | (α) $a = 2, a = -\frac{1}{4}$   | (β) $(-5, 50), (-5, -\frac{25}{4})$ |                    |
| 4. | (α) Ελάχιστη                    | (β) Μέγιστη                         | (γ) Μέγιστη        |
| 5. | $\lambda = 5$                   |                                     |                    |
| 6. | $\kappa > 2$                    |                                     |                    |

Σελίδα 22 Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 1. | (α) $y = x^2 - 2$<br>(β) $y = x^2 + 10$   | (γ) $y = x^2 - 3$<br>(δ) $y = x^2 + \frac{1}{2}$     |
| 2. | (α) Άξονας συμμετρίας: $x = 0$ , Κορυφή: $K(0,3)$<br>(β) Άξονας συμμετρίας: $x = 0$ , Κορυφή: $K(0, -4)$<br>(γ) Άξονας συμμετρίας: $x = 0$ , Κορυφή: $K(0,1)$ |  |
| 3. | $g(x) = x^2 + 2, h(x) = x^2 - 1$  |  |
| 4. | (α) $y = (x + 1)^2$<br>(β) $y = (x - 2)^2$  | (γ) $y = (x + 4)^2$<br>(δ) $y = (x - \frac{1}{2})^2$ |
| 5. | (α) Άξονας συμμετρίας: $x = 4$ , Κορυφή: $(4,0)$<br>(β) Άξονας συμμετρίας: $x = -2$ , Κορυφή: $(-2,0)$<br>(γ) Άξονας συμμετρίας: $x = 1$ , Κορυφή: $(1,0)$    |  |
| 6. | $g(x) = (x + 3)^2, h(x) = (x - 1)^2$  |  |
| 7. | (α) $y = (x + 1)^2 + 2$<br>(β) $y = (x - 2)^2 + 4$  | (γ) $y = (x + 3)^2 - 1$<br>(δ) $y = (x - 5)^2 - 3$   |

Σελίδα 30 Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma^2, a \neq 0$  και η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma^2 = 0, a \neq 0$

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

- |    |  |  |  |
|----|--|--|--|
| 1. | (α) $\Delta > 0, x_1 = -3, x_2 = 2$<br>(β) $\Delta < 0$ δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες | (γ) $\Delta > 0, x_1 = -2, x_2 = 0$<br>(δ) $\Delta = 0, x_1 = x_2 = 3$ |  |
| 2. | (α) $a > 0$<br>(β) $\gamma = -3$   | (γ) $[-4, +\infty)$<br>(δ) $x = -1$                                    | (ε) Ελάχιστη τιμή $-4$ .<br>(στ) $x_1 = -3, x_2 = 1$ |
| 3. | (α) $\gamma_{ελαχ} = 5$  | (β) $\gamma_{μέγ} = 4$   |  |
| 4. | (α) $\lambda = -4$   | (β) $\lambda = -2$   |  |
| 5. | (α) $\kappa = \frac{3}{2}$   | (β) $\kappa = 1$ ή $\kappa = -3$                                       |  |
| 6. | $a = 5, \beta = 5$   |  |  |

**Σελίδα 36 Άθροισμα – Γινόμενο λύσεων της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$**

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) 7 (β) 3	(γ) 27 (δ) $\frac{7}{3}$	(ε) 108 (στ) 43
2.	(α) $\lambda = 2$ (β) $\lambda = 2$	(γ) $\lambda = \frac{9}{2}$ (δ) $\lambda = 12$	
3.	(α) $\mu = 3$ (β) $\mu = \frac{5}{6}$	(γ) $\mu = \frac{5}{3}, \mu = 1$	
4.	(α) $x^2 + x - 6 = 0$ (β) $15x^2 + x - 2 = 0$	(γ) $x^2 - 16 = 0$ (δ) $x^2 - 14x + 46 = 0$	
5.	(α) $(a - 16)(a + 1)$ (β) $(2\gamma - 7)(\gamma + 3)$	(γ) $(y - \kappa + \lambda)(y - \kappa - \lambda)$	
6.	(α) $\frac{a-1}{a}$	(β) $\frac{2x+1}{x+2}$	(γ) $\frac{x+6}{2(x-3)}$
7.	(α) Η ευθεία τέμνει την παραβολή στα σημεία: $(-3, 9)$ και $(5, 25)$ . (β) Η ευθεία δεν τέμνει την παραβολή.		
8.	(α) $(2, -1), (\frac{22}{19}, \frac{29}{19})$ (β) $(\frac{5}{3}, 1), (-\frac{1}{3}, -5)$		
9.	(α) 2, 6 (β) 7, 3 ή -7, -3	(γ) $1 + 2\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3}$	

**Σελίδα 46 Πρόσημο τιμών τριωνύμου – Ανισώσεις δευτέρου βαθμού**

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $x^2 - 5x - 6 > 0$ για $x < -1$ ή $x > 6$ $x^2 - 5x - 6 < 0$ για $-1 < x < 6$ (β) $(x - 2)(x - 7) > 0$ για $x < 2$ ή $x > 7$ $(x - 2)(x - 7) < 0$ για $2 < x < 7$ (γ) $25 - x^2 > 0$ για $-5 < x < 5$ $25 - x^2 < 0$ για $x < -5$ ή $x > 5$ (δ) $x^2 - x - 2 > 0$ για $x < -1$ ή $x > 2$ $x^2 - x - 2 < 0$ για $-1 < x < 2$
2.	(α) $f(x) > 0$ για $-3 < x < 0$ $f(x) < 0$ για $x < -3$ ή $x > 0$ (β) $f(x) > 0$ για $x < 0$ ή $x > 4$ $f(x) < 0$ για $0 < x < 4$ (γ) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (δ) $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (ε) $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (στ) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

- 3.
- (α)  $5x^2 = 0$  για  $x = 0$   
 $5x^2 > 0$  για  $x \neq 0$
- (β)  $-3x^2 = 0$  για  $x = 0$   
 $-3x^2 < 0$  για  $x \neq 0$
- (γ)  $x^2 + 4 > 0$  για  $\forall x \in \mathbb{R}$
- (δ)  $-x^2 - 1 < 0$  για  $\forall x \in \mathbb{R}$
- (ε)  $(x + 4)^2 = 0$  για  $x = -4$   
 $(x + 4)^2 > 0$  για  $x \neq -4$
- (στ)  $(x - 1)^2 = 0$  για  $x = 1$   
 $(x - 1)^2 > 0$  για  $x \neq 1$
- (ζ)  $(x + 1)(x - 3) > 0$  για  
 $x < -1, x > 3$
- $(x + 1)(x - 3) < 0$  για  
 $-1 < x < 3$
- (η)  $x^2 - 3x + 2 > 0$  για  $x < 1,$   
 $x > 2, x^2 - 3x + 2 < 0$  για  
 $1 < x < 2$
- (θ)  $-x^2 + 2x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- (ι)  $-x^2 + x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

4.  $f(-20) < 0, f(-7,3) > 0, f(-8) = 0, f(0) > 0,$   
 $f\left(\frac{1}{2013}\right) > 0, f(8) < 0$

5. (α)  $x \leq 0$  ή  $x \geq 4$  (γ) Αδύνατη  
(β)  $-2 \leq x \leq 0$  (δ)  $x \in \mathbb{R}$

6. (α)  $x < -6$  ή  $x > 6$  (γ)  $2 \leq x \leq 3$   
(β)  $0 \leq x \leq 2$  (δ) Αδύνατη ανίσωση στο  $\mathbb{R}$

7.  $x < -2$  ή  $x > 2$

8.  $5 \leq \lambda < 13$

## Σελίδα 52 Δραστηριότητες Ενότητας

### Δραστηριότητα

### Απαντήσεις

1. Για τη συνάρτηση  $f$ : Π.Ο.:  $\mathbb{R}$ , Σ.Τ.:  $[0, +\infty)$ , Κορυφή:  $(0,0)$ ,  
Άξονας συμμετρίας:  $x = 0$   
Για τη συνάρτηση  $g$ : Π.Ο.:  $\mathbb{R}$ , Σ.Τ.:  $(-\infty, 0]$ , Κορυφή:  $(0,0)$ ,  
Άξονας συμμετρίας:  $x = 0$

2. Για  $\lambda > 3$

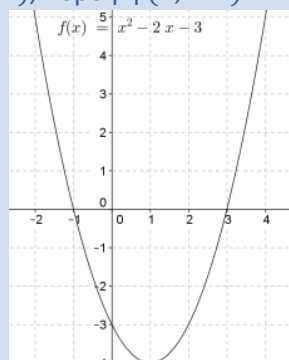
3. (α) Για  $\kappa = -3$   
(β)  $\beta = -10$

4. (α)  $x = 0$   
(β)  $(-3,18)$

5. Διαφορά: Η  $f$  είναι πιο «κλειστή» ως προς τον άξονα συμμετρίας  
Ομοιότητες: Έχουν την ίδια κορυφή  $(0,0)$  και τον ίδιο άξονα συμμετρίας  
 $x = 0$

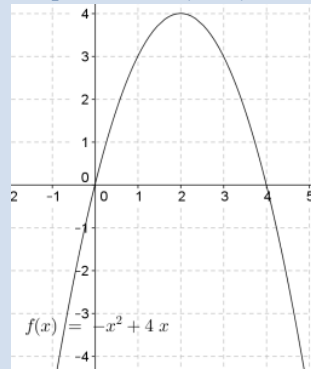
Η  $f$  έχει Π.Ο:  $\mathbb{R}$ , Σ.Τ:  $[-4, \infty)$ , Κορυφή  $(1, -4)$

6.





Η  $g$  έχει Π.Ο:  $\mathbb{R}$ , Σ.Τ:  $(-\infty, 4]$ , Κορυφή  $(2, 4)$



7. Άξονας Συμμετρίας:  $x = 4$

(α)  $y = x^2 - 12x + 27$

8. (β)  $x = 6$

(γ)  $(6, -9)$

9.  $f_{\mu\epsilon\gamma} = 16$

10.  $f_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{14}{3}$

(α) Π.Ο.:  $\mathbb{R}$ , Σ.Τ:  $[-9, +\infty)$

(β)  $\alpha > 0$

(γ)  $\gamma = -8$

11. (δ) Άξονας συμμετρίας  $x = 1$

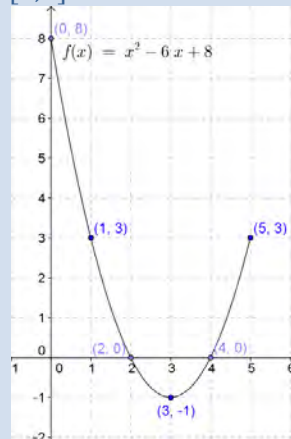
(ε) Κορυφή:  $(1, -9)$

(στ)  $x_1 = -2, x_2 = 4$

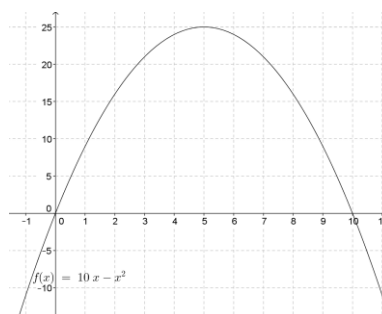
(ζ) Δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις

$f(x) = x^2 - 6x + 8, x \in [0, 5]$

12.



13.



14.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ	(ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ
15.	3,5		
16.	(α) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (β) $x^2 + 3x - 4 = 0$	(γ) $25x^2 - 4 = 0$	
17.	(α) $x \in (-\infty, -6] \cup [4, +\infty)$	(β) $x \in (-\infty, -4) \cup (5, +\infty)$	
18.	Για καμιά τιμή του λ		

## Σελίδα 56 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

### Δραστηριότητα

### Απαντήσεις

1.	(α) Μετατόπιση 4 μονάδων προς τα πάνω. (β) Μετατόπιση 1 μονάδας προς τα δεξιά και 3 μονάδων προς τα πάνω. (γ) Μετατόπιση 3 μονάδων προς τα δεξιά και 9 μονάδων προς τα πάνω.
2.	(α) 20 m (β) 4 sec (γ) Π.Ο: $[0, \infty)$ , Σ.Τ: $[0, \infty)$
3.	(α) $x_1 = -1, x_2 = 2$ (β) $\beta = -2, \gamma = -4$ (γ) $(0, -4)$
4.	(α) Δύο λύσεις πραγματικές και άνισες (β) Σε δύο σημεία
5.	(α) Σ.Τ: $[-1, +\infty)$ (β) Σ.Τ: $[-\frac{9}{8}, +\infty)$ (γ) Σ.Τ: $(-\infty, 9]$
6.	$g(x) = x^2 + 2, K(0,2), x = 0$ $h(x) = (x + 2)^2, K(-2,0), x = -2$ $\kappa(x) = (x - 2)^2 + 2, K(2,2), x = 2$
7.	(α) 54 (β) 56 (γ) 1746
8.	(α) (i) $x_1 = 2, x_2 = 5$ (ii) $x_1 = x_2 = -1$ (β) (i) 10 (ii) 1 (γ) (i) -7 (ii) 2 (δ) (i) $\frac{9}{2}$ (ii) $\frac{9}{2}$
9.	$3x^2 + 18x + 23 = 0$
10.	(β) $20x^2 - 10x + 1 = 0$
11.	7,9 ή -9, -7
12.	(β) $\kappa \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$ ή $\kappa \in (5, +\infty)$

13. Π.Ο:  $[-6, 2]$

14.  $0 < x < 1$

15.  $2 \leq \text{Μήκος} \leq 8$

16. (α)  $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$   
(β)  $y = \frac{3}{2}$

## Ενότητα 06: Θεώρημα Θαλή – Ομοιότητα

### Σελίδα 67 Θεώρημα Θαλή

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

1.  $x = 6 \text{ cm}$
2.  $x = 3 \text{ cm}$
3.  $x = 9 \text{ cm}$
4.  $x = \frac{16}{3} = 5,33 \dots \text{ cm}$
5.  $EZ = 6 \text{ cm}, H\theta = 3 \text{ cm}, EH = 15 \text{ cm}$
6.  $x = 4, y = 4$

### Σελίδα 75 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

1. Όμοια πολύγωνα (α), (γ), (δ)
2. (α)  $\frac{1}{2}$  (β)  $\frac{1}{2}$  (γ)  $\frac{1}{4}$
3. (α) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ  
(β) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ
4.  $100 \text{ cm}^2$
5.  $8 \text{ cm}, 12 \text{ cm}, 16 \text{ cm}$

### Σελίδα 85 Όμοια τρίγωνα

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

1. (α) Ίσες γωνίες  
(β) Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες  
(γ) Πλευρές ανάλογες  
(δ) Ίσες γωνίες
2.  $\hat{A} = \hat{Z}, \hat{B} = \hat{\Delta}, \hat{\Gamma} = \hat{E}$   
(α) Όμοια – Πλευρές ανάλογες  
(β) Όμοια – Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες  
(γ) Δεν είναι όμοια
3. (δ) Όμοια – Ίσες γωνίες  
(ε) Όμοια – Ίσες γωνίες  
(στ) Δεν είναι όμοια
4.  $\Gamma E = 4 \text{ cm}$
6.  $5,95 \text{ m}$

### Σελίδα 94 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
---------------	------------

2.	420,48 m
----	----------

3.	$BZ = \frac{40}{3} \text{ cm}$
----	--------------------------------

### Σελίδα 97 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
---------------	------------

6.	$\Delta E = 2,5 \text{ cm}$
----	-----------------------------

7.	$BE = 2 \text{ cm}$
----	---------------------

## Ενότητα 07: Στατιστική

### Σελίδα 107 Μέτρα θέσης και διασποράς

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

1. Μέτρα θέσης: Διάμεσος, Μέση Τιμή, Επικρατούσα τιμή, Σταθμισμένος Μέσος  
Μέτρα Διασποράς: Εύρος, Διακύμανση, Τυπική Απόκλιση  
(α) Μέση Τιμή=14  
Διάμεσος= 13,5
2. Επικρατούσα Τιμή= 13  
(β) Εύρος= 12  
Τυπική απόκλιση= 3,72  
Συντελεστής μεταβολής:  $C.V = 26,67\%$
3. Μέση Τιμή= 15,1
4. Τελική βαθμολογία: 7,8
5. (α) Μέση Τιμή:  $\bar{x} = 230$   
(β)  $\bar{y} = 23$ ,  $\bar{z} = 30$ ,  $\bar{w} = 3$
6. Μικρότερη Διασπορά: Λίστα 2  
Μεγαλύτερη Διασπορά: Λίστα 3
7. 35 χρόνια
8. Τυπική απόκλιση: 3
9.  $C.V_1 > C.V_2$   
(α)  $C.V = 19,39\%$
10. (β)  $C.V_B = 9,09\%$   
Μεγαλύτερη ομοιογένεια βαθμών στο τμήμα Β.

### Σελίδα 111 Δραστηριότητες Ενότητας

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

1. (α) ΣΩΣΤΟ  
(β) ΛΑΘΟΣ  
(γ) ΣΩΣΤΟ  
(δ) ΛΑΘΟΣ  
(ε) ΣΩΣΤΟ  
(στ) ΛΑΘΟΣ
2. 3,74
3. Ο ισχυρισμός είναι ΟΡΘΟΣ
4. 61

### Σελίδα 114 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

#### Δραστηριότητα

#### Απαντήσεις

1. Μέση επίδοση αγοριών: 17,72
2. 16,61
3. Όλες οι τιμές πρέπει να συμπίπτουν με τη μέση τιμή, δηλαδή ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x}$ ).
4. 1,71

5. (β) 15,35
6. 96 km/h

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta: \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες



# Υπολογιστική Αριθμομηχανή



Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)



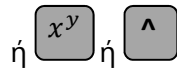
Υποδιαστολή



Εκθέτης δύναμης με βάση το 10



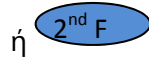
Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος



Δύναμη



Ποντίκι (Mouse)



Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί



Επανεκκίνηση υπολογιστικής



Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή



Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)



Εισαγωγή Προσήμου –



Κλάσμα



Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό



Σβήσιμο μνήμης






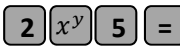


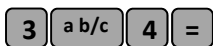



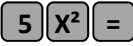

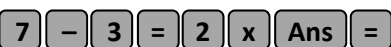






Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη



Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη



Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3 + 4$		3+4 7
$2,34 - 1,1$		2.34 - 1.1 1.24
$3 \cdot 2$		3X2 6
$2^5$		$2^5$ ή $2^5$ 32
$5 \cdot 10^3$		5E3 ή 5X103 5000
$\frac{3}{4}$	 ή 	$\frac{3}{4}$ 3┆4
$2\frac{3}{4}$	 ή 	$2\frac{3}{4}$ 2┆3┆4
$\sqrt{4}$		$\sqrt{4}$ 2
$5^2$		$5^2$ 25
$2 \cdot (7 - 3)$		2X(7 - 3) 8
$2 \cdot (7 - 3)$		2XAns 8
$2 - (-3)$		2 - (-3) 5
$ -3 $		$ -3 $ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	 ή 	$\frac{1}{4}$
$9 - 6 : 2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 	$9 - 6 : 2 M +$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9 - 6 : 2) - 6 : (9 - 6 : 2)$		$3 X M - 6 : M$ 17

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°-89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
26°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290



